

Voronoizellen diskreter Punktmengen

Dissertation
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften

der Fakultät für Mathematik
der Technischen Universität Dortmund
vorgelegt im April 2008

von
Ina Kirsten Voigt

Arbeit eingereicht am: 24. April 2008

Termin der mündlichen Prüfung: 25. August 2008

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Scharlau (Betreuer, Erstgutachter)

Prof. Dr. F. Lutz (Zweitgutachter)

Prof. Dr. J. Eckhoff

Prof. Dr. S. Turek

Dr. M. Grajewski

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Konvexe Mengen	11
1.1 Konvexe Mengen und Kegel	13
1.2 Seiten und Extrempunkte	20
1.3 Zusammenhang und nächste Punkte	27
1.4 Polytope und Dualität	29
2 Die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge	33
2.1 Darstellungssätze	35
2.2 Randstruktur	46
2.3 Spezialfall \mathbb{R}^2	66
3 Voronoizellen diskreter Punktmengen	78
3.1 Voronoizellen von Gittern und (r, R) -Systemen	82
3.2 Der Abschluss der konvexen Hülle	86
3.3 Voronoizellen in \mathbb{R}^2	98
3.4 Richtungskegel	108
4 Ausblick	124
Literatur	127
Symbolverzeichnis	129
Index	132

Einleitung

Ziel der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, eine Charakterisierung derjenigen diskreten Punkt-mengen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^n zu finden, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind. In der Literatur werden, bedingt durch Anwendungen, in der Regel nur Voronoizellen von endlichen Punkt-mengen oder Gittern bzw. (r, R) -Systemen betrachtet. Man weiß, dass in diesen Fällen alle Voronoizellen Polyeder sind. In dem Fall, dass die betrachtete Punkt-menge ein Gitter oder allgemeiner ein (r, R) -System ist, sind sogar alle Voronoizellen Polytope. Betrachtet man jedoch die Voronoizellen einer beliebigen diskreten Punkt-menge, wobei die Diskretheit dadurch charakterisiert sei, dass die Menge keinen Häufungspunkt besitze, so findet man Beispiele, in denen es Voronoizellen gibt, die keine Polyeder sind. Dieses ist sogar dann noch möglich, wenn die Punkt-menge einen festen, positiven Minimalabstand besitzt, also uniform diskret ist. Immerhin ist bereits bekannt, dass alle Voronoizellen einer diskreten Punkt-menge verallgemeinerte Polyeder sind, sich also in jeder beschränkten Umgebung als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lassen. Wann aber alle Voronoizellen Polyeder sind, ist in der Vergangenheit noch nicht untersucht worden. Daher bleibt zu untersuchen, wodurch sich die diskreten Punkt-mengen, in deren Voronoidiagramm nur Polyeder vorkommen, von denen, die auch nicht-polyedrische Voronoizellen besitzen, unterscheiden. Diese Frage wird in dieser Arbeit beantwortet werden.

In der Regel besitzt eine diskrete Punkt-menge sowohl polyedrische als auch nicht-polyedrische Voronoizellen. Man wird sehen, dass die *kritischen Punkte*, das heißt die Punkte der diskreten Punkt-menge, deren Voronoizelle kein Polyeder ist, stets auf dem Rand der von der Punkt-menge erzeugten konvexen Hülle liegen. Denn es lässt sich zeigen, dass die Voronoizelle eines Punktes p einer diskreten Punkt-menge genau dann ein Polytop ist, wenn p ein *innerer Punkt* der Punkt-menge ist, das heißt wenn p im Inneren der von der Punkt-menge erzeugten konvexen Hülle liegt. Dieses Ergebnis deckt sich auch mit den bereits bekannten Fällen, in denen die diskrete Punkt-menge ein Gitter oder allgemeiner ein (r, R) -System ist. Denn in diesen Fällen besteht die Punkt-menge nur aus inneren Punkten, und es sind alle Voro-

noizellen Polytope. Ist also die Voronoizelle eines Punktes kein Polyeder, so muss dieser Punkt zwangsläufig ein *Randpunkt* der Punktmenge sein, das heißt im Rand ihrer konvexen Hülle enthalten sein. Damit kommt die Betrachtung konvexer Hüllen diskreter Punktmenge ins Spiel. In dem Fall, dass die Punktmenge \mathcal{P} endlich ist, weiß man, dass die konvexe Hülle von \mathcal{P} ein Polytop, also insbesondere abgeschlossen und beschränkt ist; alle Voronoizellen sind in diesem Fall Polyeder. Ist aber die diskrete Punktmenge unbeschränkt und damit unendlich, so kann es sein, dass die konvexe Hülle der Punktmenge weder abgeschlossen noch polyedrisch ist; in diesem Fall können nicht-polyedrische Voronoizellen auftreten. Diese Beobachtung lässt auf einen Zusammenhang zwischen dem Auftreten nicht-polyedrischer Voronoizellen und der Gestalt der konvexen Hülle der Punktmenge schließen. Dadurch bedingt ergibt sich eine Unterteilung der Arbeit in zwei aufeinander aufbauende Hauptteile: Zum einen wird die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge näher untersucht und ihr Randverhalten beschrieben werden. Zum anderen wird man die Voronoizellen der diskreten Punktmenge genau betrachten und einen Zusammenhang mit dem lokalen Randverhalten der konvexen Hülle der Punktmenge herstellen.

Vorab wird im ersten Kapitel dieser Arbeit ein kurzer Überblick über die Theorie konvexer Mengen gegeben. Dabei kann diese Theorie natürlich nicht in ihrer ganzen Vielfalt wiedergegeben werden. In Bezug auf die oben genannten Ziele dieser Arbeit liegen die Schwerpunkte des ersten Kapitels vielmehr auf der Beschreibung und Darstellung konvexer Mengen, insbesondere konvexer Hüllen und Kegel, der Beschreibung des Randes einer konvexen Menge, sowie einer kurzen Darstellung der Eigenschaften von Polytopen und polaren Mengen und Kegeln. Da alle Definitionen und Aussagen des ersten Kapitels bekannt sind, wird unter Angabe von Standardliteratur auf Beweise verzichtet. Stattdessen wird die Bedeutung verschiedener Begriffe und Sätze erklärt und auf Zusammenhänge zwischen den Aussagen eingegangen.

Unter Verwendung der im ersten Kapitel bereitgestellten Grundlagen wird in Kapitel 2 der erste Schwerpunkt dieser Arbeit, die Beschreibung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge, behandelt. Die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse stellen eine Fortführung der Theorie konvexer Mengen im Hinblick auf nicht notwendig abgeschlossene, unbeschränkte konvexe Mengen dar. Im ersten Abschnitt des zweiten Kapitels werden neben einer Beschreibung der Diskretheit einer Menge verschiedene Darstellungssätze über Punkte und Teilmengen konvexer Mengen bewiesen. Damit sind die im ersten Abschnitt angegebenen Sätze als eher klassisch zu sehen; in diesem Teil wird die Grundlage für die Untersuchung der Randstruktur der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge, die sich im zweiten Abschnitt des zweiten Kapitels anschließt, geschaffen. Die Beschreibung der Randstruktur gliedert sich wiederum in die Untersuchung der Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle der Punktmenge sowie in eine Beschreibung

der Randbereiche, die in der konvexen Hülle enthalten sind, und vor allem derer, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, auf. Es wird gezeigt, dass die Menge der Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} in der Punktmenge \mathcal{P} enthalten ist, und die maximalen Randbereiche, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, unbeschränkt sind und mit wenigstens einer Hyperebene eine unbeschränkte Schnittmenge besitzen. Zusätzlich wird gezeigt, dass ein regulärer Punkt des Abschlusses der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge nie exponiert sein kann. Letztendlich lässt sich damit zeigen, dass es zu jedem Randpunkt der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge stets eine im Rand enthaltene lineare Strecke positiver Länge gibt, die diesen Randpunkt enthält. Insgesamt erhält man somit eine Vorstellung davon, wie der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge geometrisch aussieht. Durch die Angabe verschiedener Beispiele werden die Aussagen des zweiten Abschnittes des zweiten Kapitels zusätzlich motiviert und gestützt. Es fällt auf, dass die Dimension 2 einen Spezialfall darstellt: Dort lässt sich zusätzlich zeigen, dass der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge stets stückweise linear ist und im Falle der uniformen Diskretheit der Punktmenge eine Erweiterung der Punktmenge existiert, deren konvexe Hülle abgeschlossen und gleich dem Abschluss der konvexen Hülle der Ausgangspunktmenge ist. Diese Ergebnisse werden im dritten Abschnitt des zweiten Kapitels bewiesen. Dort wird zusätzlich ein Beispiel angegeben, das zeigt, dass die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge in einer höheren Dimension im Allgemeinen kein verallgemeinertes Polyeder ist, sich also auch nicht lokal als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen lässt. Die im zweiten Kapitel durchgeführte Untersuchung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge soll anschließend als Grundlage für die Beschreibung der Gestalt der Voronoizellen einer beliebigen, in der Regel unendlichen, diskreten Punktmenge im dritten Kapitel dienen. Trotzdem sind die in diesem Kapitel entwickelten Ergebnisse als durchaus eigenständige Theorie zu sehen, da die dabei durchgeführten Untersuchungen weit über das hinaus gehen, was für die Beschreibung der Voronoizellen benötigt wird.

In Kapitel 3 schließt sich nun der zweite Hauptteil dieser Arbeit, die Beschreibung der Voronoizellen einer diskreten Punktmenge, an. Dabei wird im ersten Abschnitt dieses Kapitels zunächst ein kurzer Überblick über die bereits bekannten Ergebnisse über die Struktur der Voronoizellen von Gittern und (r, R) -Systemen gegeben: Man weiß, dass in beiden Fällen alle Voronoizellen Polytope sind und kann im Fall des Gitters die voronoirelevanten Vektoren genau charakterisieren. Ab dem zweiten Abschnitt des dritten Kapitels wird die Theorie der Voronoizellen auf allgemeine diskrete Punktfolgen ausgedehnt. Motiviert durch ein Beispiel einer diskreten Punktmenge, die eine nicht-polyedrische Voronoizelle besitzt (siehe Beispiel 3.2.1), wird im zweiten Abschnitt ein Zusammenhang zwischen dem Randverhalten der konvexen Hülle der betrachteten diskreten Punktmenge und

dem Auftreten nicht-polyedrischer Voronoizellen hergestellt. Es wird bewiesen, dass die Punkte, deren Voronoizellen Polytope sind, genau die inneren Punkte der diskreten Punktmenge sind, das heißt die Voronoizelle eines Punktes ist genau dann ein Polytop, wenn der Punkt im Inneren der konvexen Hülle der Punktmenge liegt. Damit hat man eine erste Verallgemeinerung der bereits bekannten Theorie gefunden. Eine diskrete Punktmenge, deren sämtliche Voronoizellen Polytope sein sollen, muss nicht notwendig ein (r, R) -System sein, es genügt, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge den gesamten Raum erzeugt; ein Beispiel einer solchen Menge ist auf Seite 88 angegeben. Aber selbst diese Bedingung kann weiter abgeschwächt werden. Um zu gewährleisten, dass alle Voronoizellen Polytope sind, genügt es, dass alle Punkte der diskreten Punktmenge innere Punkte sind, also im Inneren der von der Punktmenge erzeugten konvexen Hülle liegen. Als ersten Hauptsatz dieser Arbeit erhält man somit, dass genau dann alle Voronoizellen Polytope sind, wenn die diskrete Punktmenge nur aus inneren Punkten besteht. Damit ist klar, dass die Punkte, deren Voronoizellen keine Polyeder sind, auf dem Rand der konvexen Hülle der Punktmenge liegen müssen, und man könnte vermuten, dass genau dann alle Voronoizellen Polyeder wären, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge abgeschlossen wäre. Dass aus der Polyedrizität aller Voronoizellen die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle folgen würde, wird jedoch mit einem Gegenbeispiel widerlegt (siehe Seite 95). Die Umkehrung der Aussage, dass aus der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge folgt, dass alle Voronoizellen Polyeder sind, wird im dritten Abschnitt des dritten Kapitels für den Spezialfall der Dimension 2 bewiesen. Es wird gezeigt, dass sich in Dimension 2 die polyedrischen Voronoizellen in vier verschiedene Typen einteilen lassen. Da die Gestalt der Voronoizelle eines Punktes im Allgemeinen nicht von der gesamten diskreten Punktmenge, sondern nur von einer Teilmenge, nämlich den zu diesem Punkt voronoirelevanten Punkten, abhängt, wird deutlich, dass die Eigenschaft der Voronoizelle, ein Polyeder zu sein, eine lokale Eigenschaft der Punktmenge ist. Eine globale Eigenschaft der Punktmenge, wie die Abgeschlossenheit ihrer konvexen Hülle, kann daher nicht zu der gesuchten Charakterisierung derjenigen diskreten Punktmenge, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind, führen. Daher wird im vierten Abschnitt des dritten Kapitels der Zusammenhang zwischen der Gestalt der Voronoizelle eines Randpunktes der diskreten Punktmenge und dem lokalen Randverhalten ihrer konvexen Hülle untersucht. Eine lokale Betrachtung des Randes der konvexen Hülle der Punktmenge führt auf den Begriff des *Richtungskegels* und die Definition *richtungsrelevanter* Halbräume und Hyperebenen (siehe Seite 108 ff). Dazu wird ein notwendiges Kriterium für die Richtungsrelevanz einer Stützhyperebene der konvexen Hülle der Punktmenge gezeigt. Obwohl es in der Regel keinen Zusammenhang zwischen den zu einem Punkt voronoirelevanten Punkten und den für diesen Punkt richtungsrelevanten Hyperebenen gibt, erhält man mittels des Richtungskegels

die gesuchte Charakterisierung. Es wird bewiesen, dass die Voronoizelle eines Randpunktes einer diskreten Punktmenge genau dann ein Polyeder ist, wenn der Richtungskegel des Punktes endlich erzeugt ist. Als direkte Folgerungen dieses Satzes erhält man, dass isolierte Punkte sowie Extrempunkte der konvexen Hülle, die keine Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle sind, stets kritisch sind. Ebenso ergibt sich das bereits bekannte Ergebnis, dass alle Voronoizellen einer endlichen Punktmenge Polyeder sind, als unmittelbare Folgerung. Durch eine Erweiterung der Definition des Richtungskegels auf innere Punkte der Punktmenge lässt sich damit der zweite Hauptsatz dieser Arbeit beweisen: Es sind genau dann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge Polyeder, wenn die Punktmenge *lokal endlich erzeugt* ist, das heißt wenn die Richtungskegel aller Punkte der Punktmenge endlich erzeugt sind.

Damit beantwortet diese Arbeit die Frage nach einer Charakterisierung derjenigen diskreten Punktmenge, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind. Die in der Vergangenheit betrachteten Fälle von endlichen Punktmenge, Gittern und (r, R) -Systemen integrieren sich in die hier entwickelte Theorie und treten darin als Spezialfälle auf.

Hintergrund der Problemstellung: Quantizer

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit war die Beschäftigung mit Quantizern. Das mag nun ein wenig verwundern, da Quantizer als Anwendung in der Ingenieurmathematik vorkommen, diese Arbeit aber eine rein theoretische Geometriearbeit ist. Um den Zusammenhang zu verdeutlichen, soll an dieser Stelle die Theorie der Quantizer kurz skizziert werden.

Im Sinne der Informationstheorie ist ein *Quantizer* ein Bestandteil eines Datenübertragungssystems. Noch bevor die Daten mit Hilfe eines fehlerkorrigierenden Codes codiert werden, um möglichst fehlerfrei durch einen Kanal geschickt werden zu können, müssen sie in eine weiterverarbeitbare Form gebracht werden, das heißt sie müssen komprimiert werden. Dieses geschieht mit einem Quantizer (siehe Abbildung 1).

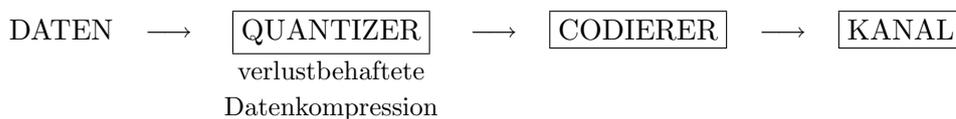


Abbildung 1: Datenübertragungssystem

Ein Quantizer „vereinfacht“ die Daten, so dass sie besser verarbeitet werden können. Dabei wird bewusst in Kauf genommen, dass Information verloren geht. Das Ziel ist es nun, den Quantizer so zu konstruieren, dass trotz Informationsverlustes die quantisierten Daten immer noch die Ausgangsdaten ausreichend gut wiedergeben. Zur Veranschaulichung dieses Problems sei zum Beispiel an die Bildverarbeitung erinnert. Wählt man die Pixelgröße (Bildpunktgröße) sehr klein, so erhält man ein sehr scharfes Bild des betrachteten Objekts, muss aber dafür in Kauf nehmen, dass die dazu erforderliche Datenmenge sehr groß ist. Wählt man stattdessen die Pixelgröße sehr groß, so benötigt man zur Darstellung nur sehr wenige Daten, hat dafür aber einen Verlust an Schärfe.

Ein Quantizer liefert also eine Pflasterung des Raumes, zum Beispiel einer Bildebene. Dabei wird der Raum so in Parzellen unterteilt, dass durch die Vereinigung dieser Zellen der ganze Raum überdeckt wird, sich aber je zwei Zellen höchstens in ihren Rändern schneiden. In diesen Zellen wird dann jeweils ein „ausgezeichneter“ Punkt gewählt, auf den alle anderen Punkte der Zelle bei der Quantisierung abgebildet werden (siehe Abbildung 2). Gibt man sich eine diskrete Menge „ausgezeichneter“ Punkte vor, so wird bei der Quantisierung genau dann der kleinste Fehler gemacht, wenn die zugehörigen Zellen als *Voronoizellen* („Nächste-Nachbar-Bereiche“) gewählt werden.

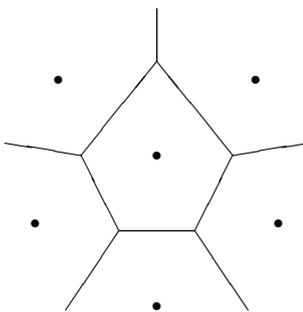


Abbildung 2: Quantizer

Mathematisch spiegelt sich das in der Theorie der Vektorquantizer wider. Betrachtet man den \mathbb{R}^n mit einer Norm $\|\cdot\|$, so erhält man die folgende Definition.

Definition 0.0.1 (vgl. [AgEr96], [ConSlo99]) Ein *n-dimensionaler Vektorquantizer* ist ein Tupel (Q, \mathcal{P}) bestehend aus einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ und einer Abbildung $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{P}$, die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ einen bezüglich der gegebenen Norm nächsten Punkt $p \in \mathcal{P}$ zuordnet. Dabei wird

der \mathbb{R}^n in *Voronozellen* (Nächster-Nachbar-Bereiche) unterteilt:

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{p \in \mathcal{P}} V(p) \quad \text{mit} \quad V(p) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\|^2 \leq \|x - p'\|^2 \forall p' \in \mathcal{P}\}.$$

(Man beachte, dass die Zerlegung nicht disjunkt ist; je zwei benachbarte Voronozellen schneiden sich im Rand.)

Die dadurch definierte Pflasterung des \mathbb{R}^n wird auch als *Voronoidiagramm* bezeichnet. Die Abbildung Q lässt sich damit nun wie folgt definieren:

Ist der zu quantisierende Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ kein Randpunkt einer Voronozelle $V(p)$, $p \in \mathcal{P}$, des Quantizers, das heißt gilt $x \notin \partial V(p)$ für alle $p \in \mathcal{P}$, so liefert

$$Q(x) := \arg \min_{p \in \mathcal{P}} \|x - p\|^2$$

den eindeutig bestimmten nächsten Punkt $p \in \mathcal{P}$ an x . Dabei bezeichnet „arg min“ das Argument, in dem das Minimum angenommen wird.

Für den Fall, dass x auf dem Rand mehrerer Voronozellen liegt und damit auch mehrere nächste Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ besitzt, wird zufällig einer dieser Punkte ausgewählt, und x auf diesen abgebildet. Genau genommen ist Q damit eine Zufallsvariable.

Eine naheliegende Aufgabenstellung in der Theorie der Quantizer, der jedoch in dieser Arbeit nicht weiter nachgegangen werden soll, ist die Konstruktion von „guten“ Quantizern. In der Literatur (vgl. [GeG03]) findet man eine Reihe von Algorithmen, mittels derer die Punkte und Zellen eines Start-Quantizers „optimiert“ werden sollen. Die Güte eines Quantizers wird dabei durch die sogenannte *Quantizer-Konstante* bestimmt. Im Falle einer endlichen Punktmenge erhält man folgende Definition:

Definition 0.0.2 (vgl. [ConSlo99]) Es sei (Q, \mathcal{P}) ein n -dimensionaler Vektorquantizer mit Punktmenge $\mathcal{P} = \{p_1, \dots, p_M\}$. Dann bezeichnet

$$G(Q) := \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \text{Vol}(V(p_i))\right)^{1+2/n}} \cdot \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \int_{V(p_i)} \|x - p_i\|^2 dx$$

die *Quantizer-Konstante* zu Q .

Wird als Punktmenge \mathcal{P} ein *Gitter* L gewählt (siehe Seite 82), so wird der zugehörige Quantizer als *Gitterquantizer* bezeichnet. Die Quantizer-Konstante vereinfacht sich in diesem Fall zu folgender Form:

Definition 0.0.3 (vgl. [ConSlo99]) Zu einem n -dimensionalen Gitterquantizer (Q, L) wird als Maßzahl für die Güte die *Gitterquantizer-Konstante*

$$G(L) := \frac{1}{n} (\det L)^{-\frac{n+2}{2n}} \int_{V(L)} \|x\|^2 dx$$

definiert. Dabei bezeichnet $V(L)$ die Voronozelle des Gitters (um 0).

Man beachte, dass bei einem Gitterquantizer alle Zellen die gleiche Form haben. Für einen beliebigen Quantizer ist dieses in der Regel nicht erfüllt.

In diesem Zusammenhang tritt nun die dieser Arbeit zugrunde liegende Fragestellung auf. Wählt man als diskrete Punktmenge \mathcal{P} eines Quantizers eine endliche Punktmenge, so ist klar, dass alle Voronoizellen Polyeder sind. Ebenso sind in dem Fall, dass \mathcal{P} ein Gitter ist, alle Voronoizellen Polytope. Aber wie sieht das für beliebige diskrete Punktmenge aus? Sind die Voronoizellen auch im allgemeinen Fall immer Polyeder? Wie kann man, falls dieses nicht gilt, die Fälle, in denen alle Voronoizellen Polyeder sind, charakterisieren? Dieser Fragestellung wird in dieser Arbeit nachgegangen.

Weitere Anwendungen

Neben der Informationstheorie finden Voronoizellen auch in vielen anderen Bereichen der Wissenschaft eine Anwendung. So sind sie in Bereichen der Physik, der Kristallographie, aber auch der Astrologie und Meteorologie, in der Statistik, der Biologie, der Raumplanung und noch vielen weiteren Gebieten von Bedeutung (vgl. [OBS92], [StMe83]). Entsprechend vielfältig sind auch die Bezeichnungen und Synonyme, die für Voronoizellen verwendet werden. In der Mathematik sind diese Zellen, bedingt durch die Arbeiten von Dirichlet (1850) und Voronoi (1908) über quadratische Formen, in der Regel als *Voronoizellen*, *Dirichletzellen* oder auch *Dirichlet-Voronoizellen*, kurz *DV-Zellen*, bekannt; die dabei entstehende Pflasterung wird häufig als *Dirichlet Pflasterung* oder auch als *Voronoidiagramm* bezeichnet. In der Meteorologie und Geographie ist dagegen der Begriff *Thiessen Polygon* und in der Physik die Bezeichnung *Wigner-Seitz Zelle* gebräuchlich. Eine kurze Beschreibung der historischen Entwicklung der Theorie der Voronoizellen findet man in [OBS92].

In der Informationstheorie sowie in der Statistik sind die betrachteten Punktmenge aufgrund technischer Restriktionen meistens endlich. Ein Schwerpunkt liegt hier auf der Konstruktion schneller Algorithmen, mit denen „optimale“ Punktmenge gefunden oder Voronoizellen konkret berechnet werden können (vgl. [GeG03]). Aus Sicht der Informatik ist daher insbesondere die Komplexität der Berechnungsprobleme, die im Zusammenhang mit Voronoidiagrammen und Nächste-Nachbar-Problemen auftreten, von Interesse. Für den Spezialfall einer endlichen Punktmenge in der Ebene ist die Komplexität vieler solcher Probleme bekannt (vgl. [Klei97]).

In der Kristallographie werden dagegen meistens unendliche Punktmenge, sogenannte (r, R) -Systeme, die im Raum gleichmäßig verteilt und uniform diskret sind, betrachtet. Einen Spezialfall solcher unendlicher Mengen stellen Gitter dar, die in der klassischen Kristallographie, in der symmetri-

sche, periodische Strukturen im Mittelpunkt stehen, von großer Bedeutung sind (vgl. auch [Baa02], [Engel86], [Sen95]). Ein noch relativ neues Gebiet im Umfeld der Kristallographie ist die Theorie der *Quasikristalle*, in dem *nichtperiodische* Kristalle untersucht werden. Die dabei verwendeten Modelle legen meistens als Ausgangspunktmenge ein (r, R) -System, das bestimmte zusätzliche Eigenschaften besitzt, zugrunde (vgl. [Baa02], [Sen97]). Dieses Modell ist jedoch nicht optimal, da es noch eine offene Fragestellung ist, welche Eigenschaften für eine diskrete Menge hinreichend und notwendig sind, damit diese Menge zu einem nichtperiodischen Kristall gehört (vgl. [Sen97]). Daher könnte sich an dieser Stelle eine Anwendungsmöglichkeit der in dieser Arbeit erzielten Ergebnisse ergeben. Denn in dieser Arbeit wird gezeigt, dass bereits dann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge Polytope sind, wenn alle Punkte der Menge innere Punkte sind, was bereits erfüllt ist, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge gleich dem gesamten Raum ist.

Des Weiteren führen die in dieser Arbeit betrachteten Beispiele diskreter Punktmenge über ihre Voronoidiagramme auch zu interessanten Beispielen von Pflasterungen. Es lassen sich dabei nicht-normale Pflasterungen konstruieren, die trotzdem in gewisser Weise sinnvoll erzeugt sind. So wird ein Beispiel (siehe Seite 95) einer ebenen diskreten Punktmenge, die vollständig in einem Streifen enthalten ist, nur aus inneren Punkten besteht und deren sämtliche Voronoizellen Polytope sind, angegeben werden. Die Untersuchung solcher Voronoidiagramme könnte zu interessanten neuen Ergebnissen führen.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während der letzten Jahre bei meiner Arbeit unterstützt haben. Dazu gehören vor allem die Mitglieder des Lehrstuhls für Algebra und Geometrie der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität Dortmund sowie das Graduiertenkolleg „Mathematische und ingenieurwissenschaftliche Methoden für sichere Datenübertragung und Informationsvermittlung“. Mein besonderer Dank gilt meinem Betreuer Prof. Dr. Rudolf Scharlau, der immer für alle meine Ideen offen war, mich stets unterstützt und mir durch viele Gespräche oftmals weiter geholfen hat. Ich möchte ebenfalls Prof. Dr. Frank Lutz für zahlreiche Anregungen sowie für viele hilfreiche Rückmeldungen zu meiner Arbeit danken.

Kapitel 1

Konvexe Mengen

Die Untersuchung der Gestalt von Voronoizellen setzt grundlegende Kenntnisse über konvexe Mengen voraus. Daher soll in diesem Kapitel ein kurzer Überblick über die bereits bestehende Theorie der konvexen Mengen gegeben werden. Wie auch viele andere Bereiche der Mathematik, ist auch die Theorie der konvexen Mengen sehr facettenreich und weit verzweigt. Daher kann hier sicherlich nur ein Teil der gesamten Theorie wiedergegeben werden. Dabei stehen vor allem im Folgenden noch benötigte Definitionen und Sätze im Vordergrund. Zum besseren Verständnis wird an verschiedenen Stellen auf die Bedeutungen und Zusammenhänge der Begriffe und Aussagen eingegangen. Da alle Sätze dieses Kapitels bekannt und in vielen Lehrbüchern zu finden sind, wird hier auf die Angabe von Beweisen verzichtet und stattdessen auf Standardliteratur verwiesen.

Zunächst werden die im Folgenden verwendeten Notationen festgelegt und grundlegende Begriffe definiert: Zu zwei Punkten $x, y \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\langle x, y \rangle$ das *Skalarprodukt* zwischen x und y . Mit $d(x, y) := \langle x - y, x - y \rangle^{1/2}$ sei der *Abstand* zwischen x, y und mit $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$ die *Norm* von x bezeichnet. Entsprechend lässt sich auch der Abstand zwischen einem Punkt und einer Menge bzw. zwischen zwei Mengen definieren. Ist $x \in \mathbb{R}^n$ und $M \subset \mathbb{R}^n$, so bezeichnet $d(x, M) := \inf\{\|x - m\| \mid m \in M\}$ den *Abstand* von x zu M . Zu $M, N \subset \mathbb{R}^n$ ist der *Abstand* definiert als $d(M, N) := \inf\{\|m - n\| \mid m \in M, n \in N\}$. Als ε -*Umgebung* einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ wird für ein $\varepsilon > 0$ die Menge $U(M, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, M) < \varepsilon\}$ bezeichnet. $B(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) \leq r\}$ sei die *abgeschlossene Kugel* um $x \in \mathbb{R}^n$ mit Radius $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Die *offene Kugel* um x mit Radius $r > 0$ sei $B^\circ(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r\}$. Gibt es zu einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Kugel $B(x, r)$, für die $M \subset B(x, r)$ gilt, so heißt die Menge M *beschränkt*. Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ ein $r \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt mit $B^\circ(x, r) \subset M$. Ist das Komplement $M^c := \mathbb{R}^n \setminus M$ einer Menge M offen, so ist M *abgeschlossen*. Insbesondere sind \mathbb{R}^n und \emptyset offen und

abgeschlossen. Es gilt, dass abzählbare Vereinigungen und endliche Schnitte offener Mengen wieder offen sind. Entsprechend sind abzählbare Schnitte und endliche Vereinigungen abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

Eine äquivalente Beschreibung abgeschlossener Mengen erhält man über die Betrachtung von Folgen: Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn die Grenzwerte aller in der Menge enthaltenen konvergenten Folgen ebenfalls wieder zu der Menge gehören. Eine Folge in einer beschränkten Menge ist ebenfalls beschränkt und besitzt daher nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass eine konvergente Teilfolge.

Satz 1.0.1 (Bolzano-Weierstrass) (vgl. [Koen93]) *Im euklidischen Raum \mathbb{R}^n gilt, dass jede beschränkte Folge eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Ist eine Menge M abgeschlossen und beschränkt, so heißt M *kompakt*. Zu einer Menge M definiert man das *Innere* M° von M als die Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen, $M^\circ := \bigcup_{A \subset M, A \text{ offen}} A$. Der *Abschluss* \overline{M} von M ist definiert als der Schnitt über alle abgeschlossenen, M enthaltenden Mengen, das heißt es gilt $\overline{M} := \bigcap_{A \supset M, A \text{ abgeschlossen}} A$. Als *Rand* ∂M von M wird die Menge $\partial M := \overline{M} \cap \overline{M}^c$ definiert. Es gilt, dass der Rand einer Menge stets abgeschlossen ist.

Auf der Menge aller Teilmengen des \mathbb{R}^n lässt sich mittels der Teilmengenrelation eine Halbordnung definieren. Dabei bezeichnet eine *Halbordnung* eine reflexive und transitive Relation. Die Betrachtung aufsteigender Ketten von Elementen bzgl. der gegebenen Halbordnung, wozu im Fall der Teilmengenrelation die Betrachtung unendlicher Vereinigungen von Mengen gehört, führt auf die Frage nach der Existenz eines maximalen Elementes. In diesem Zusammenhang sei an das Lemma von Zorn erinnert:

Lemma 1.0.2 (Zorn) (vgl. [Span66]) *Jede nicht leere, halbgeordnete Menge, in der jede (aufsteigende) Kette eine obere Schranke besitzt, enthält mindestens ein maximales Element.*

1.1 Konvexe Mengen und Kegel

Die Konvexität, die in der Geometrie sowie in anderen Gebieten wie zum Beispiel der Optimierung eine große Rolle spielt, gewährleistet, dass ein Objekt, eine Menge oder eine Funktion, gewisse „schöne“ Eigenschaften besitzt. Bezogen auf Mengen bedeutet die Konvexität, dass mit je zwei Punkten aus der Menge auch stets deren Verbindungsstrecke wieder in der Menge liegt.

Definition 1.1.1 (vgl. [Grun03]) Es sei K eine Menge in \mathbb{R}^n . Dann heißt K *konvex*, wenn für alle $a, b \in K$ und alle $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt $\lambda a + (1 - \lambda)b \in K$.

Definition 1.1.2 (vgl. [Schn93]) Eine nicht leere, kompakte, konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *konvexer Körper*.

Es ist sicherlich sinnvoll, zwischen der konvexen Kreisscheibe in der Ebene und einer konvexen Kreisscheibe im Raum zu unterscheiden. Das heißt es ist von Bedeutung, ob für die betrachtete konvexe Menge der ganze Raum benötigt wird oder ob sich die konvexe Menge bereits in einen Raum kleinerer Dimension einbetten lässt. Diese Überlegung führt auf die Definition einer „affinen Menge“ bzw. der „affinen Hülle“. Dadurch wird es möglich, einer konvexen Menge eine „Dimension“ zuzuordnen und sinnvoll von „inneren Punkten“ zu sprechen.

Definition 1.1.3 (vgl. [Rock70]) Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *affin*, wenn für alle $x, y \in M$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ auch $(1 - \lambda)x + \lambda y$ wieder in M liegt.

Definition 1.1.4 (vgl. [Rock70]) Zu einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die *affine Hülle* $\text{aff}(M)$ von M als Schnitt aller M enthaltenden affinen Mengen, also $\text{aff}(M) := \bigcap_{A \supset M, A \text{ affin}} A$.

Betrachtet man als Beispiel wieder die Kreisscheibe, einmal in der Ebene und einmal im Raum, so kann es sinnvoll sein, in beiden Fällen die gleichen Punkte als „innere Punkte“ zu bezeichnen. Da aber die Kreisscheibe im Raum nach Definition eines inneren Punktes keine inneren Punkte enthält, muss hier genauer zwischen verschiedenen Arten von inneren Punkten unterschieden werden. Dazu betrachtet man die konvexe Menge in der von ihr erzeugten affinen Hülle, das heißt in dem von ihr aufgespannten affinen Unterraum, und bezeichnet die darin liegenden inneren Punkte als „relative innere Punkte“ der konvexen Menge.

Definition 1.1.5 (vgl. [Rock70]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann bezeichnet man die Menge $\text{relint } K := \{x \in K \mid \exists r > 0 \text{ mit } B(x, r) \cap \text{aff}(K) \subset K\}$ als *relatives Inneres* von K .

Es gilt, dass die affine Hülle $\text{aff}(M)$ einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ein affiner Raum ist. Die *Dimension* $\dim \text{aff}(M)$ der affinen Hülle wird somit als Dimension des zugehörigen Vektorraumes definiert. Genauso definiert man die Dimension einer konvexen Menge über die Dimension des durch sie aufgespannten affinen Unterraumes.

Definition 1.1.6 (vgl. [Grun03]) Zu einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man die *Dimension* $\dim M$ der Menge M als Dimension der affinen Hülle von M . Es gilt also $\dim M := \dim \text{aff}(M)$.

Wie bei allen Eigenschaften von Mengen, kann man sich auch bei der Konvexität fragen, wie sich diese Eigenschaft unter Durchschnittsbildung verhält, was beim Übergang zum Abschluss oder bei der Anwendung affiner Transformationen auf die Menge geschieht.

Satz 1.1.7 (vgl. [Grun03])

1. $(K_i)_{i \in I}$ sei eine Familie konvexer Mengen in \mathbb{R}^n und I eine Indexmenge. Dann ist auch $\bigcap_{i \in I} K_i$ konvex.
2. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex, so sind auch der Abschluss \overline{K} und das Innere K° von K konvex.
3. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation des \mathbb{R}^n , so ist auch $\sigma(K)$ konvex.

Hat man eine beliebige Menge gegeben, so kann man immer eine zu dieser Menge zugehörige konvexe Menge bilden. Genauer lässt sich stets eine kleinste konvexe Menge finden, die eine gegebene Menge enthält. Diese Idee führt auf das Prinzip der konvexen Hüllenbildung.

Definition 1.1.8 (vgl. [Grun03]) Die *konvexe Hülle* $\text{conv} M$ einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist der Durchschnitt aller M enthaltenden konvexen Mengen in \mathbb{R}^n .

Äquivalent dazu ist die Charakterisierung (vgl. [Grun03])

$$\text{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid a_i \in M, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Die konvexe Hülle der Menge M ist somit die kleinste, von M erzeugte konvexe Menge. Es ist auch leicht einzusehen, dass für die konvexe Hülle einer Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ offenbar $\text{conv}(\text{conv}(M)) = \text{conv}(M)$ gilt. Ähnlich leicht folgt für ineinander liegende Mengen $M \subset N$ die Beziehung $\text{conv}(M) \subset \text{conv}(N)$. Ist $M = \{a_1, \dots, a_k\}$ eine endliche Punktmenge, so lässt sich $\text{conv}(M)$ als $\text{conv}(a_1, \dots, a_k)$ schreiben, das heißt jeder Punkt $x \in \text{conv}(M)$ lässt sich als

Konvexkombination aus a_1, \dots, a_k darstellen. Für eine unendliche Menge N wird man sicherlich nicht immer eine endliche Punktmenge $\{b_1, \dots, b_m\}$ finden, so dass $\text{conv}(N) = \text{conv}(b_1, \dots, b_m)$ gelten würde. Aber es lässt sich zeigen, dass man für jeden Punkt der konvexen Hülle nur endlich viele Punkte der Ausgangspunktmenge braucht, um diesen Punkt als Konvexkombination darzustellen.

Satz 1.1.9 (Caratheodory) (vgl. [Grun03]) Gegeben sei eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$. Dann lässt sich jeder Punkt $x \in \text{conv}(M)$ darstellen als Konvexkombination aus höchstens $n+1$ Punkten aus M . Das heißt zu jedem $x \in \text{conv}(M)$ existieren Punkte $a_0, \dots, a_n \in M$, so dass für x die Darstellung $x = \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i$ mit $\lambda_0, \dots, \lambda_n \geq 0$, $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ gilt.

Um dieses Ergebnis zu veranschaulichen, betrachte man in der Ebene das Quadrat $Q := [-1, 1]^2 = \text{conv}((1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)) \subset \mathbb{R}^2$, in dem sich jeder Punkt $x \in Q$ als Konvexkombination von maximal drei Punkten aus $\{(1, 1), (-1, 1), (1, -1), (-1, -1)\}$ darstellen lässt (siehe Abbildung 1.1). Wählt man nun für x speziell den Punkt $x = (0, 0)$, so fällt jedoch auf, dass dieser Punkt bei allen Konvexkombinationen aus maximal drei Elementen stets auf dem Rand der von diesen Elementen erzeugten konvexen Hülle liegt. Daher entsteht die Frage, ob es auch möglich ist, einen inneren Punkt einer konvexen Hülle wieder als inneren Punkt einer kleineren, nur von endlich vielen Elementen erzeugten konvexen Hülle darzustellen. Eine Antwort auf diese Frage liefert der Satz von Steinitz.

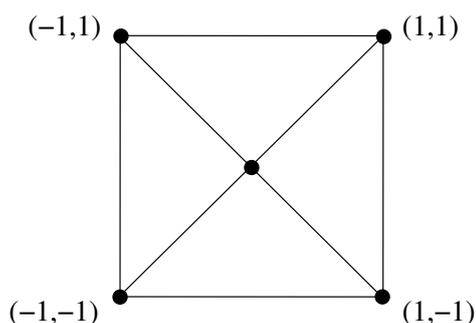


Abbildung 1.1: Punkt als Konvexkombination

Satz 1.1.10 (Steinitz) (vgl. [Schn93]) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Gilt $x \in \text{conv}(M)^\circ$, so existiert eine Teilmenge $M' \subset M$ mit $|M'| \leq 2n$ und $x \in \text{conv}(M')^\circ$.

Ist x ein relativer innerer Punkt der konvexen Hülle endlich vieler Punkte, so gibt es eine Konvexkombination von x , in der alle Punkte, die die konvexe Hülle erzeugen, echt vorkommen, also alle zugehörigen Koeffizienten echt größer als Null sind. Andererseits gilt für einen Punkt, in dessen Konvexdarstellung alle Koeffizienten echt größer als Null sind, dass dieser Punkt im relativen Inneren der von den Punkten, die in der Konvexdarstellung vorkommen, erzeugten konvexen Hülle liegt. Eine exakte Formulierung dieser Aussage enthält der folgende Satz.

Satz 1.1.11 (vgl. [Schn93]) Sind $x, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$, so gilt genau dann $x \in \text{relint conv}(x_1, \dots, x_k)$, wenn es für x eine Konvexdarstellung $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ gibt.

Neben den oben angegebenen Darstellungssätzen sind auch topologischen Eigenschaften der konvexen Hülle einer Menge von Interesse. Das heißt man möchte wissen, ob sich die Offenheit oder die Abgeschlossenheit einer Menge M auf die von ihr erzeugte konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ überträgt.

Satz 1.1.12 (vgl. [Leich80]) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge. Dann gilt:

1. Ist M offen, so ist auch $\text{conv}(M)$ offen.
2. Ist M kompakt, so ist auch $\text{conv}(M)$ kompakt.

An dieser Stelle beachte man jedoch, dass sich die Abgeschlossenheit einer Menge nicht auf die konvexe Hülle der Menge überträgt. Das heißt es gibt abgeschlossene Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$, deren konvexe Hülle $\text{conv}(M)$ nicht abgeschlossen ist. Im zweiten Kapitel dieser Arbeit wird man in den Beispielen 2.2.2 und 2.2.7 solche Mengen sehen. In [Leich80] wird ebenfalls ein solches Beispiel angegeben.

Neben der von einer Menge M erzeugten konvexen Hülle lassen sich auch durch die Menge definierte konvexe Kegel betrachten. Dabei können zugehörige Kegel, die M enthalten, sowie Kegel, die in M enthalten sind, definiert werden.

Definition 1.1.13 (vgl. [NGL88]) Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Kegel*, wenn es einen Punkt $x_0 \in C$ gibt, so dass für alle Punkte $x \in C$ und alle $\lambda \geq 0$ auch $x_0 + \lambda(x - x_0) \in C$ gilt. Ein solcher Punkt x_0 heißt *Spitze* des Kegels. Ist C zusätzlich konvex, so heißt C *konvexer Kegel*.

Wie in Abbildung 1.2 illustriert, muss eine Kegelspitze nicht eindeutig bestimmt sein. Ein abgeschlossener Halbraum ist ebenfalls ein Kegel entsprechend obiger Definition; in diesem Fall sind alle Punkte, die auf der Hyperebene liegen, die den Halbraum begrenzt, Kegelspitzen.

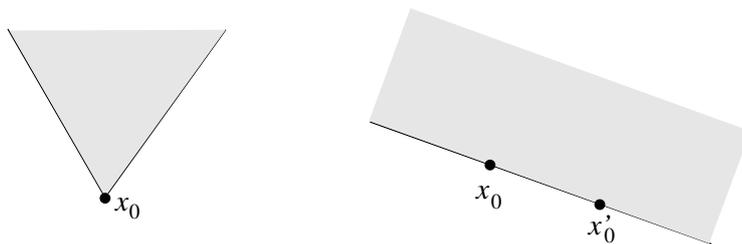


Abbildung 1.2: Konvexe Kegel mit Spitzen

Definition 1.1.14 (vgl. [Barv02], „conic hull“) Zu einer beliebigen Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ definiert man den *konvexen Kegel von M* durch

$$\text{cone}(M) := \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid a_i \in M, \lambda_i \geq 0, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Es lässt sich zeigen, dass die so definierte Menge $\text{cone}(M)$ tatsächlich für beliebige Mengen $M \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel mit Spitze in Null ist. Insbesondere gilt daher stets $0 \in \text{cone}(M)$. Des weiteren fällt auf, dass ein konvexer Kegel, wenn er nicht nur einen Punkt enthält, stets unbeschränkt ist und wenigstens einen „Strahl“ enthält. Man beobachtet allgemein, dass unbeschränkte konvexe Mengen stets eine Gerade oder einen Strahl enthalten.

Definition 1.1.15 (vgl. [NGL88]) Ein *Strahl* (bzw. eine *Halbgerade*) in Richtung $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, mit Ausgangspunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist durch folgende Menge gegeben:

$$S(x_0, v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x_0 + \lambda v, \lambda \geq 0\}.$$

Satz 1.1.16 (vgl. [Grun03]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Dann ist K genau dann unbeschränkt, wenn K einen Strahl enthält.*

Es lässt sich zeigen (vgl. [Grun03]), dass die Abgeschlossenheit der konvexen Menge in dem obigen Satz 1.1.16 nicht notwendig verlangt werden muss. Die gleiche Aussage lässt sich bereits für nicht abgeschlossene konvexe Mengen beweisen. Des weiteren gilt, dass mit einem in einer abgeschlossenen konvexen Menge K enthaltenen Strahl $S(x_0, v)$ auch alle zu $S(x_0, v)$ gleichgerichteten, parallelen Strahlen, die einen Ausgangspunkt in K besitzen, in K enthalten sind.

Satz 1.1.17 (vgl. [Grun03]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $S(0, v)$ ein vom Ursprung ausgehender Strahl. Weiter seien $x, y \in K$ zwei beliebige Punkte. Dann ist $S(0, v) + x = S(x, v) \subset K$ genau dann erfüllt, wenn auch $S(0, v) + y = S(y, v) \subset K$ gilt.*

Für den Beweis dieses Satzes ist die Abgeschlossenheit der konvexen Menge von entscheidender Bedeutung. Dieses sieht man bereits an einfachen Gegenbeispielen. Wählt man als konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ einen abgeschlossenen Halbraum, aus dessen Rand man einen beliebigen Punkt a entfernt, so ist die Aussage aus Satz 1.1.17 für diese Menge nicht mehr in jedem Fall erfüllt. Denn zu jedem Strahl $S(x, v) \subset K$, der zu der K begrenzenden Hyperebene parallel ist, findet man einen parallelen Strahl $S(y, v)$, der in eben dieser Hyperebene enthalten ist und für den $a \in S(y, v)$ gilt. Dann ist aber $S(y, v)$ nicht mehr in K enthalten.

Wie schon angedeutet, lassen sich einer gegebenen Menge M noch weitere, durch diese Menge bestimmte, konvexe Kegel zuordnen. Ist M bereits selbst konvex, so kann man unter anderem die in M enthaltenen konvexen Kegel betrachten. Eine Präzisierung dieser Idee führt auf den Begriff des „charakteristischen Kegels“ (engl. *characteristic cone*), auch „Rezessionskegel“ (engl. *recession cone*, vgl. [Schn93], [Rock70]) einer Menge in einem Punkt der Menge.

Definition 1.1.18 (vgl. [NGL88]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere, konvexe Menge und $x_0 \in K$. Dann heißt

$$C_c(K, x_0) := \{y \in K \mid x_0 + \lambda(y - x_0) \in K, \text{ für alle } \lambda \geq 0\}$$

charakteristischer Kegel von K in x_0 .

Für eine konvexe Menge K und einen Punkt $x_0 \in K$ besagt diese Definition, dass der charakteristische Kegel von K in x_0 alle vom Punkt x_0 ausgehenden, in K enthaltenen Strahlen oder nur den Punkt x_0 enthält. Offensichtlich gilt $C_c(K, x_0) \subset K$. Des weiteren lässt sich zeigen, dass die Bezeichnung „Kegel“ für die oben definierte Menge $C_c(K, x_0)$ korrekt ist. Denn es gilt, dass $C_c(K, x_0)$ für jede nicht leere, konvexe Menge K und jeden Punkt $x_0 \in K$ ein konvexer Kegel mit Spitze in x_0 ist.

Da ein charakteristischer Kegel einer konvexen Menge alle von einem bestimmten Punkt der Menge ausgehenden, in der Menge enthaltenen Strahlen enthält, und für eine abgeschlossene konvexe Menge gilt, dass auch alle Parallelen dieser Strahlen, die einen Ausgangspunkt in der Menge haben, wieder in der Menge enthalten sind, erhält man, dass alle charakteristischen Kegel des Abschlusses einer konvexen Menge „gleich aussehen“. Damit lässt sich zu einer konvexen Menge „der“ zugehörige charakteristische Kegel, dessen Spitze in Null gewählt wird, definieren (siehe Abbildung 1.3). Um in der Definition des charakteristischen Kegels auch nicht abgeschlossene konvexe Mengen zulassen zu können, verwende man als Ansatzpunkt eines charakteristischen Kegels der Menge nur innere Punkte oder gehe zum Abschluss der konvexen Menge über.

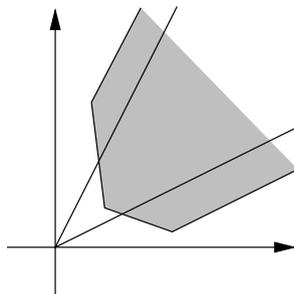


Abbildung 1.3: Konvexe Menge mit charakteristischem Kegel

Definition 1.1.19 (vgl. [NGL88]) Zu einer nicht leeren, konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ definiert man *den charakteristischen Kegel* von K als

$$C_c(K) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid x_0 + y \in C_c(K, x_0)\},$$

wobei $x_0 \in \text{relint } K$ ein beliebiger Punkt sei.

Es gilt, dass $C_c(K)$ ein von der Wahl von x_0 unabhängiger konvexer Kegel mit Spitze in Null ist. Mit Hilfe des charakteristischen Kegels lässt sich die konvexe Menge, zu der er gehört, näher beschreiben. So gilt, dass eine abgeschlossene konvexe Menge genau dann beschränkt ist, wenn ihr charakteristischer Kegel nur aus der Null besteht. Des Weiteren lässt sich eine unbeschränkte, abgeschlossene konvexe Menge M als Minkowskisumme aus ihrem charakteristischen Kegel und einer zweiten, durch M eindeutig bestimmten konvexen Menge darstellen.

Betrachtet man speziell konvexe Mengen, die sich durch endlich viele lineare Ungleichungen beschreiben lassen, so überträgt sich diese Struktur auch auf den charakteristischen Kegel der Menge und es lassen sich sofort dessen beschreibende Ungleichungen angeben.

Satz 1.1.20 (vgl. [Grun03]) Ist $K = \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y_i \rangle \geq \alpha_i\} \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer, so gilt für den charakteristischen Kegel

$$C_c(K) = \bigcap_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y_i \rangle \geq 0\}.$$

1.2 Seiten und Extrempunkte

Zur Beschreibung konvexer Mengen lassen sich zwei Grundprinzipien nutzen: Da der Schnitt einer Familie von konvexen Mengen wieder eine konvexe Menge liefert, ist ein Prinzip die Beschreibung einer gegebenen konvexen Menge als Schnitt von anderen, möglichst simplen konvexen Mengen. Dabei werden als konvexe Ausgangsmengen „Halbräume“ gewählt. Betrachtet man dabei speziell einen Halbraum, der die zu beschreibende konvexe Menge enthält und dessen zugehörige Hyperebene einen nicht leeren Schnitt mit der konvexen Menge hat, so führt dieses auf den Begriff eines „stützenden Halbraumes“ bzw. einer „stützenden Hyperebene“ und von da aus weiter auf den Begriff der „Seite“ einer konvexen Menge.

Ein anderes Prinzip zur Beschreibung einer gegebenen konvexen Menge nutzt die Darstellung der Menge als konvexe Hülle einer eventuell kleineren Menge. Dabei wird untersucht, welche Punkte bzw. Teilmengen der gegebenen konvexen Menge zur Darstellung der Menge als konvexe Hülle notwendig sind. Dieses führt auf die Betrachtung „extremaler“ Punkte und Strahlen.

Für das erste Darstellungsprinzip, die Beschreibung einer konvexen Menge als Schnitt über Halbräume, muss zunächst der Begriff der „Hyperebene“ genau definiert werden. Dabei soll gleichzeitig eine einheitliche Bezeichnungsweise festgelegt werden.

Definition 1.2.1 Zu $v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichne

$$\text{Hyp}(v, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = \alpha\}$$

die durch v und α definierte affine Hyperebene, und

$$H^-(v, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \leq \alpha\}, \quad H^+(v, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \geq \alpha\}$$

die zugehörigen abgeschlossenen Halbräume.

Wenn bei der Angabe einer Hyperebene nur wichtig ist, dass sie den Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ enthält, so wird auch die Bezeichnung Hyp_x benutzt. Die zugehörigen Halbräume heißen dann H_x^+ und H_x^- . Ist die Hyperebene beliebig, so werden die Bezeichnungen Hyp und H^+ , H^- verwendet.

Um weiter zu „stützenden“ Hyperebenen zu gelangen, ist es sinnvoll, zunächst das „Schnittverhalten“ einer Hyperebene mit einer Menge zu betrachten. So sagt man, dass eine Hyperebene Hyp eine Menge M *teilt*, wenn sowohl $M \cap (H^+)^{\circ} \neq \emptyset$ als auch $M \cap (H^-)^{\circ} \neq \emptyset$ gilt, also im Inneren beider durch Hyp bestimmter Halbräume Punkte aus M enthalten sind. Dazu ähnlich ist der Begriff der „Trennung“ zweier Mengen durch eine Hyperebene. Dabei fordert man entsprechend, dass zwei gegebene Mengen in verschiedenen Halbräumen liegen sollen. Zusätzlich kann man hier noch die Qualität der Trennung unterscheiden.

Definition 1.2.2 (vgl. [Leich80]) Es seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}^n$ beliebige Mengen und Hyp eine Hyperebene mit zugehörigen Halbräumen H^+, H^- . Dann werden M_1, M_2 von Hyp *getrennt*, wenn $M_1 \subset H^+$ und $M_2 \subset H^-$ (oder andersherum) gilt. M_1, M_2 werden von Hyp *echt getrennt*, wenn zusätzlich $M_1 \cap \text{Hyp} = \emptyset = M_2 \cap \text{Hyp}$ gilt.

Es ist einsichtig, dass sich zwei beschränkte, konvexe Mengen, die sich nicht schneiden, stets durch eine Hyperebene trennen lassen. Der folgende Satz zeigt nun, dass sich diese Bedingung sogar noch abschwächen lässt und es genügt, wenn eine der beiden konvexen Mengen beschränkt ist.

Satz 1.2.3 (vgl. [Leich80]) Sind $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^n$ nicht leere, konvexe Mengen mit $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ und ist K_1 beschränkt, so existiert eine Hyperebene, die K_1 und K_2 echt trennt.

Definition 1.2.4 (vgl. [Grun03], [Schn93]) Ist K eine konvexe Menge und gilt für eine Hyperebene $\text{Hyp} \subset \mathbb{R}^n$, dass sie K nicht teilt, aber den Abstand Null zu K hat, so bezeichnet man diese als *stützende Hyperebene* an K . Ist H der von einer stützenden Hyperebene Hyp begrenzte Halbraum, der K enthält, so heißt H *stützender Halbraum* an K .

Damit erhält man nun als erste Möglichkeit der Darstellung, dass sich jede (abgeschlossene) konvexe Menge mittels ihrer stützenden Halbräume genau beschreiben lässt. Denn es ist klar, dass man jede abgeschlossene konvexe Menge als Schnitt über alle abgeschlossenen, diese Menge enthaltenden, konvexen Mengen darstellen kann (vgl. [Grun03]). Insbesondere lässt sich daher auch jede abgeschlossene, konvexe Menge als Schnitt über alle, diese Menge enthaltenden Halbräume darstellen. Bei dieser Schnittbildung werden aber in der Regel nicht alle Halbräume benötigt. Es genügt vielmehr, den Schnitt über die stützenden Halbräume der konvexen Menge zu betrachten.

Satz 1.2.5 (vgl. [Schn93]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Dann lässt sich K als Schnitt über alle stützenden Halbräume darstellen.

Möchte man diese Aussage beweisen, so benötigt man, dass in jedem Randpunkt einer konvexen Menge K eine Stützhyperebene existiert.

Satz 1.2.6 (vgl. [Barv02]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $K^\circ \neq \emptyset$. Dann existiert in jedem Randpunkt $x \in \partial K$ eine Stützhyperebene an K .

Diese Eigenschaft, dass in jedem Randpunkt eine Stützhyperebene existiert, ist charakteristisch für konvexe Mengen. So lässt sich zeigen, dass eine abgeschlossene Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, deren Inneres nicht leer ist und für

die gilt, dass in jedem Randpunkt eine stützende Hyperebene an die Menge existiert, konvex ist (vgl. [Schn93]). Allerdings sagt die Tatsache, dass in jedem Randpunkt einer konvexen Menge eine Stützhyperebene existiert, noch nichts darüber aus, ob es in einem Punkt nicht auch mehrere „verschiedene“ Stützhyperebenen geben kann. Dabei seien zwei Hyperebenen als *verschieden* bezeichnet, wenn sie als Punktmenge nicht gleich sind. Es ist anzunehmen, dass eine Menge schlecht handhabbar wird, wenn sie in allen ihren Randpunkten mehrere verschiedene Stützhyperebenen besitzt. Im Falle einer konvexen Menge kann diese Situation jedoch nicht auftreten.

Satz 1.2.7 (vgl. [BMS97]) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Körper, das heißt K sei eine nicht leere, kompakte, konvexe Menge, und*

$$\text{RP}(K) := \{x \in \partial K \mid \text{es existiert genau eine Stützhyperebene an } K \text{ in } x\}$$

die Menge aller Randpunkte von K , in denen es genau eine Stützhyperebene an K gibt. Dann gilt, dass $\text{RP}(K)$ dicht in ∂K liegt. Die Punkte $x \in \text{RP}(K)$ werden auch als regulär bezeichnet.

Fasst man die Beschreibung einer konvexen Menge als Schnitt über die zugehörigen Halbräume analytisch auf und betrachtet die Darstellung über die zugehörigen Ungleichungen, so gelangt man auf diesem Wege zu der Beschreibung der konvexen Menge mittels einer „Stützfunktion“ (engl. *support function*).

Definition 1.2.8 (vgl. [Schn93]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere, abgeschlossene, konvexe Menge. Dann definiert*

$$h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \quad u \mapsto \sup\{\langle x, u \rangle \mid x \in K\}$$

die Stützfunktion von K .

Der Zusammenhang zwischen Stützfunktion und Stützhyperebenen ergibt sich wie folgt: Bezeichnet man die Menge aller Punkte, auf denen h_K einen Wert echt kleiner Unendlich annimmt, mit $\text{dom } h_K := \{u \in \mathbb{R}^n \mid h_K(u) < \infty\}$ (engl. *effective domain*), so erhält man für $u \in \text{dom } h_K \setminus \{0\}$ die stützenden Hyperebenen von K durch $\text{Hyp}_K(u) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle = h_K(u)\}$ und genauso die K enthaltenden Halbräume als $H_K^-(u) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, u \rangle \leq h_K(u)\}$. Anschaulich gibt die Stützfunktion $h_K(u)$ einer Menge K an, „wo“ sich die Stützhyperebene mit Normalenvektor u an K befindet. Für weiterführende Aussagen vergleiche man [Schn93].

Nachdem man bereits gesehen hat, dass sich eine konvexe Menge als Schnitt von stützenden Halbräumen darstellen lässt, kann man diese Beschreibung noch weiter verfeinern, indem man den Rand der konvexen Menge näher untersucht. Das heißt man betrachtet nun die Schnittmengen einer konvexen Menge mit ihren Stützhyperebenen. Dieses führt auf den Begriff der „Seite“ einer konvexen Menge.

Definition 1.2.9 (vgl. [Grun03]) Die *Seiten* einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sind die Teilmengen $F \subset K$, für die gilt, dass eine stützende Hyperebene $\text{Hyp} \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit $F = K \cap \text{Hyp}$. Ist $W \subset K$ eine Seite der Dimension $n - 1$, so heißt W *Wand* oder *Facette* von K .

Als Schnitt zweier konvexer Mengen ist eine Seite einer konvexen Menge ebenfalls konvex. Die Dimension einer Seite ist über die Dimension der von ihr erzeugten affinen Hülle definiert.

Das zweite Darstellungsprinzip, die Darstellung einer konvexen Menge als konvexe Hülle „ausgezeichneter“ Punkte und Teilmengen, beruht auf folgender Beobachtung: Es fällt auf, dass es im Rand von konvexen Mengen Punkte geben kann, die sich nicht als nicht-triviale Konvexkombination aus anderen, in der konvexen Menge liegenden Punkten darstellen lassen. Diese Punkte sind also in gewisser Weise „extreme“ Punkte der konvexen Menge.

Definition 1.2.10 (vgl. [Grun03]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann heißt ein Punkt $x \in K$ *Extrempunkt* von K , wenn die Gleichung $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ für $y, z \in K$ und $0 < \lambda < 1$ impliziert, dass $x = y = z$ gelten muss. Die Menge aller Extrempunkte von K sei mit $\text{Ext}(K)$ bezeichnet.

Die Extrempunkte einer konvexen Menge lassen sich auch analytisch beschreiben. Findet man eine (geeignete) Funktion, bezüglich der ein Punkt x einer konvexen Menge K ein Extrempunkt ist, so ist x auch ein Extrempunkt von K .

Satz 1.2.11 (vgl. [Barv02]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere, konvexe Menge und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Wenn gilt, dass f sein Maximum (bzw. Minimum) auf K in genau einem Punkt $x \in K$ annimmt, das heißt wenn gilt $f(x) > f(y)$ (bzw. $f(x) < f(y)$) für alle $y \in K \setminus \{x\}$, so ist x ein Extrempunkt von K .

Doch existiert auch in jeder konvexen Menge ein Extrempunkt? Man überlegt sich leicht, dass es auch konvexe Mengen gibt, die keine Extrempunkte enthalten. Ein einfaches Beispiel für eine solche Menge erhält man, wenn man als konvexe Menge einen Halbraum wählt. Damit stellt sich die Frage, wann in einer konvexen Menge Extrempunkte existieren. Die nächsten beiden Sätze liefern diesbezüglich ein hinreichendes und ein notwendiges Kriterium.

Satz 1.2.12 (vgl. [Leich80]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere, kompakte konvexe Menge. Dann besitzt K wenigstens einen Extrempunkt.

Satz 1.2.13 (vgl. [Leich80]) $K \subset \mathbb{R}^n$ sei eine abgeschlossene konvexe Menge, und K enthalte mindestens eine Gerade. Dann gilt $\text{Ext}(K) = \emptyset$.

Da auch jede Seite einer konvexen Menge wieder konvex ist, lassen sich auch Extrempunkte von Seiten konvexer Mengen betrachten. Ein wichtiger Aspekt von Extrempunkten ist nun die Tatsache, dass die Menge der Extrempunkte einer Seite einer konvexen Menge gleich der Menge der Extrempunkte der konvexen Menge in der Seite ist.

Satz 1.2.14 (vgl. [Leich80]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und Hyp eine Stützhyperebene an K . Dann gilt $\text{Ext}(K \cap \text{Hyp}) = \text{Ext}(K) \cap \text{Hyp}$.*

Betrachtet man speziell konvexe Hüllen von Mengen, so kann man vermuten, dass Punkte, die zur Bildung der konvexen Hülle unbedingt notwendig sind, Extrempunkte der konvexen Hülle sein müssen. Dass dieses so ist und sogar die Umkehrung gilt, besagt der folgende Satz.

Satz 1.2.15 (vgl. [Barv02]) *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $K := \text{conv}(M)$. Dann ist $x \in K$ genau dann ein Extrempunkt von K , wenn gilt $x \in M$ und $x \notin \text{conv}(M \setminus \{x\})$.*

Insbesondere erhält man damit für konvexe Hüllen $K = \text{conv}(M)$ die Beziehung $\text{Ext}(K) \subset M$. Dieses impliziert direkt, dass stets $\text{conv}(\text{Ext}(K)) \subset \text{conv}(M) = K$ gilt. Also stellt sich die Frage, ob und wann zwischen den Mengen $\text{conv}(\text{Ext}(K))$ und K sogar Gleichheit herrscht.

Satz 1.2.16 (Minkowski) (vgl. [Leich80], [Schn93]) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge. Dann gilt $K = \text{conv}(\text{Ext}(K))$.*

Satz 1.2.16 wird oft auch als *Satz von Krein-Milman* (vgl. [Barv02]) bezeichnet. In der hier zitierten Version geht er jedoch bereits auf Minkowski zurück.

Damit hat man für kompakte konvexe Mengen eine weitere Möglichkeit der Darstellung gefunden: Eine kompakte konvexe Menge ist gleich der konvexen Hülle ihrer Extrempunkte. Andererseits hat man in Satz 1.2.13 gesehen, dass es auch (abgeschlossene) konvexe Mengen gibt, die keinen einzigen Extrempunkt besitzen. Es kann also nicht jede konvexe Menge durch ihre Extrempunkte dargestellt werden. Man kann jedoch zeigen, dass jede abgeschlossene konvexe Menge, die keine Gerade enthält, von ihren Extrempunkten und ihren „extremalen Strahlen“ erzeugt wird. Somit erhält man auch für alle diese konvexen Mengen eine Darstellung der Menge als konvexe Hülle einer Teilmenge.

Definition 1.2.17 (vgl. [Leich80]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Gilt für einen Strahl $S(x_0, v) \subset K$, dass $K \setminus S(x_0, v)$ konvex ist und $x_0 \in K$ ein Extrempunkt von K ist, so wird $S(x_0, v)$ *extremaler Strahl* (engl. *extreme ray*) von K genannt. Die Menge aller extremalen Strahlen von K sei mit $\text{RExt}(K)$ bezeichnet.*

Satz 1.2.18 (Darstellungssatz von Klee) (vgl. [Leich80]) $K \subset \mathbb{R}^n$ sei eine abgeschlossene konvexe Menge, die keine Gerade enthält. Dann gilt $K = \text{conv}(\text{Ext}(K) \cup \text{RExt}(K))$.

Insgesamt setzt sich somit jede beliebige abgeschlossene konvexe Menge K aus drei Teilen zusammen, genauer als „Minkowski-Summe“ von: einem affinen Unterraum (entsprechend der in K enthaltenen Geraden), einem konvexen Kegel (der gleich dem charakteristischen Kegel der Menge ist und den in K enthaltenen Strahlen entspricht) und einer kompakten konvexen Menge (die die konvexe Hülle der Extrempunkte von K ist), vgl. [Rock70].

Im Zusammenhang mit dem Darstellungssatz von Klee erhält man noch die folgende Aussage, die eine genaue Beschreibung abgeschlossener konvexer Mengen mit konvexem Rand liefert.

Lemma 1.2.19 (vgl. [Leich80]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, n -dimensionale konvexe Menge. Ist der Rand ∂K eine nicht leere, konvexe Menge, so ist K gleich einem Halbraum.

Vergleicht man die Definitionen von Extrempunkt und null-dimensionaler Seite, so sieht man, dass es zwischen diesen beiden Begriffen einen Zusammenhang gibt. Es lässt sich zeigen, dass jede null-dimensionale Seite auch immer ein Extrempunkt ist. Diese Tatsache wird in einem nachfolgenden Satz festgehalten. Die null-dimensionalen Seiten haben damit eine ähnlich prägnante Bedeutung für eine konvexe Menge wie die Extrempunkte. Daher bietet es sich an, für diese Punkte eine eigene Bezeichnung einzuführen.

Definition 1.2.20 (vgl. [Grun03]) Ein Punkt $x \in K$ einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *exponierter Punkt* oder *Eckpunkt* von K , wenn die Menge $\{x\}$ eine Seite von K ist. Die Menge aller exponierten Punkte von K sei $\text{Exp}(K)$.

Satz 1.2.21 (vgl. [Grun03]) Für jede konvexe Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ gilt $\text{Exp}(K) \subset \text{Ext}(K)$.

Die Gleichheit der Mengen gilt jedoch im Allgemeinen nicht. So lässt Abbildung 1.4 (vgl. auch [Grun03]) erkennen, dass eine konvexe Menge Extrempunkte besitzen kann, für die gilt, dass alle Stützhyperebenen, die diese Extrempunkte enthalten, stets noch weitere Punkte der Menge enthalten, diese Extrempunkte also nicht exponiert sind. Es lässt sich aber zeigen, dass jeder Extrempunkt einer abgeschlossenen konvexen Menge ein Grenzwert einer Folge von exponierten Punkten der Menge ist.

Satz 1.2.22 (Straszewicz) (vgl. [Leich80], [Rock70]) Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, so gilt $\text{Ext}(K) \subset \overline{\text{Exp}(K)}$.

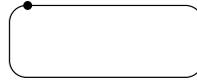


Abbildung 1.4: Extrempunkt, der nicht exponiert ist

Wie schon bei Extrempunkten stellt sich auch bei exponierten Punkten wieder die Frage nach der Existenz. Da nicht jeder Extrempunkt exponiert sein muss, wird für die Existenz exponierter Punkte ein neues Kriterium benötigt. Der nächste Satz gibt ein hinreichendes Kriterium dafür an.

Satz 1.2.23 (vgl. [Leich80]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere, abgeschlossene konvexe Menge, und K enthalte keine Gerade. Dann besitzt K mindestens einen exponierten Punkt und damit auch wenigstens einen Extrempunkt.*

1.3 Zusammenhang und nächste Punkte

Eine weitere Möglichkeit, eine konvexe Menge bzw. ihren Rand zu beschreiben, ergibt sich, wenn man den Rand der konvexen Menge als Ganzes betrachtet, also nicht in einzelne Seiten und Punkte unterteilt. So lässt sich zeigen, dass der Rand einer konvexen Menge eine Mannigfaltigkeit ist. Dabei bezeichnet man eine nicht leere Menge $M \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, als *d-dimensionale Mannigfaltigkeit*, wenn für jedes $x \in M$ eine Umgebung $U(x)$ existiert, so dass $U(x) \cap M$ ein homöomorphes Bild eines Gebietes $G(x)$ eines d -dimensionalen euklidischen Raumes \mathbb{R}^d , $1 \leq d \leq n - 1$, ist.

Satz 1.3.1 (vgl. [NGL88]) *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge der Dimension $\dim K = n \geq 2$, und es gelte $K \neq \mathbb{R}^n$. Dann ist der Rand ∂K der Menge eine $(n - 1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit.*

Damit lässt sich dem Rand ∂K einer konvexen Menge K ein weiterer Dimensionsbegriff zuordnen. Betrachtet man ∂K als Menge, so wird die Dimension dieser Menge nach Definition 1.1.6 durch die Dimension der affinen Hülle $\text{aff}(\partial K)$ bestimmt. Fasst man ∂K aber als Mannigfaltigkeit auf, so ist die Dimension von ∂K um eins kleiner als die Dimension der Gesamtmenge K . Man beachte dabei, dass sich die Dimension des Randes als Mannigfaltigkeit in der Regel von der Dimension der vom Rand erzeugten affinen Hülle unterscheidet.

Es ist auch von Interesse, die Zusammenhangskomponenten des Randes einer konvexen Menge zu kennen. Der Begriff des „Zusammenhangs“ wird hier im Sinne von „wegzusammenhängend“ verwendet.

Definition 1.3.2 (vgl. [NGL88]) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine nicht leere Menge. M heißt *zusammenhängend*, wenn zu je zwei Punkten $x_1, x_2 \in M$, mit $x_1 \neq x_2$, stets ein beschränktes, abgeschlossenes Intervall $[y_1, y_2] \subset \mathbb{R}$ und eine homöomorphe Abbildung $a : [y_1, y_2] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $a(y_1) = x_1$, $a(y_2) = x_2$ existieren, so dass $a([y_1, y_2]) =: A(x_1, x_2) \subset M$ erfüllt ist. Die Menge $A(x_1, x_2)$ wird dabei auch als *Bogen* (bzw. *Weg*) bezeichnet.

Man kann zeigen, dass es zu jedem Randpunkt x einer konvexen Menge K eine zusammenhängende Umgebung im Rand von K gibt, in der x enthalten ist.

Satz 1.3.3 (vgl. [NGL88]) *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge der Dimension $\dim K = n \geq 2$ und ungleich dem ganzen Raum. Dann existiert zu jedem Punkt $x \in \partial K$ ein $\varepsilon > 0$, so dass $\partial K \cap B(x, \varepsilon)$ zusammenhängend ist. (Dabei bezeichne $B(x, \varepsilon)$ die Kugel um x mit Radius ε .)*

Betrachtet man den zu diesem Satz in [NGL88] angegebenen Beweis, so sieht man, dass insbesondere auch für alle $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ die Mengen $\partial K \cap B(x, \varepsilon')$ zusammenhängend sind. Aus Satz 1.3.3 folgt jedoch noch nicht, dass der Rand einer konvexen Menge stets zusammenhängend wäre. Es lässt sich aber eine Bedingung angeben, die sicherstellt, dass der Rand aus genau einer Zusammenhangskomponente besteht. Dazu definiert man zunächst den Begriff einer „Schicht“.

Definition 1.3.4 (vgl. [NGL88]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, eine abgeschlossene konvexe Menge der Dimension n . Dann heißt K *Schicht*, wenn es zwei zueinander parallele Hyperebenen $\text{Hyp}_1, \text{Hyp}_2$ mit $\partial K = \text{Hyp}_1 \cup \text{Hyp}_2$ gibt.

Satz 1.3.5 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine n -dimensionale konvexe Menge, deren Rand nicht leer ist, und es gelte $n \geq 2$. Ist der Abschluss \overline{K} keine Schicht, so ist der Rand ∂K zusammenhängend.

Damit folgt natürlich, dass der Rand einer konvexen Menge, wenn er nicht leer ist, entweder zusammenhängend ist oder aus genau zwei Zusammenhangskomponenten besteht.

An dieser Stelle soll noch kurz auf die Problematik des Findens von zu einem gegebenen Punkt y „nächsten Punkten“ in einer Menge M eingegangen werden. Dabei ist $x \in M$ ein *nächster Punkt* zu $y \in \mathbb{R}^n \setminus M$, wenn $d(x, y) = d(M, y)$ gilt, das heißt der Abstand von x zu y kürzer oder gleich dem Abstand von allen anderen Punkten aus M zu y ist.

Satz 1.3.6 (vgl. [Berk02]) Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge und $y \notin K$. Dann gibt es einen eindeutigen zu y nächsten Punkt in K .

Der zu einem Punkt $y \notin K$ nächste Punkt einer abgeschlossenen konvexen Menge K ist also eindeutig bestimmt. Eine weitere Beschreibung dieses Punktes liefert der folgende Satz:

Satz 1.3.7 (vgl. [Berk02]) Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $y \notin K$. Dann ist $x_0 \in K$ genau dann ein zu y nächster Punkt in K , wenn für alle $x \in K$ gilt $\langle y - x_0, x - x_0 \rangle \leq 0$.

1.4 Polytope und Dualität

Eine besondere Stellung nehmen in der Konvexgeometrie die Mengen ein, die sich als konvexe Hüllen endlich vieler Punkte oder als Schnitte über endlich viele Halbräume darstellen lassen. Aufgrund dieser endlichen Erzeugbarkeit lassen sich viele schöne Eigenschaften dieser Mengen zeigen, die beliebige konvexe Mengen nicht aufweisen. Die Charakterisierung dieser Mengen über die Darstellbarkeit mittels endlich vieler Punkte bzw. endlich vieler Halbräume, lässt bereits an dieser Stelle eine gewisse „Dualität“ des Problems und der so entstandenen Mengen erkennen. Wie genau diese beiden Arten der Beschreibung von konvexen Mengen zusammenhängen, wird in den folgenden Sätzen geklärt werden.

Definition 1.4.1 (vgl. [Grun03]) Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Polyeder*, wenn sich K als Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen darstellen lässt.

Definition 1.4.2 (vgl. [Grun03]) $P \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Polytop*, wenn sich P als konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge darstellen lässt.

Ohne ins Detail der Theorie über konvexe Polytope zu gehen, sollen in dem nachfolgenden Satz einige wichtige Eigenschaften von Polytopen und Polyedern angegeben werden.

Satz 1.4.3 (vgl. [Grun03])

1. $P \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein Polytop, wenn P ein beschränktes Polyeder ist.
2. Der Schnitt von endlich vielen Polytopen (bzw. Polyedern) ist wieder ein Polytop (bzw. Polyeder).
3. Ist P ein Polyeder, so gilt $\text{Ext}(P) = \text{Exp}(P)$.
4. Jede Seite eines Polytops (bzw. Polyeders) ist ein Polytop (bzw. Polyeder).
5. Ist F_1 eine Seite eines Polyeders P und F_2 eine Seite von F_1 , so ist F_2 auch eine Seite von P .

Ein einfaches Beispiel für ein Polytop ist sicherlich das Simplex oder allgemeiner eine Pyramide.

Beispiel 1.4.4 (vgl. [Grun03], [Bron83])

1. Eine Menge T^d heißt *d-Simplex*, wenn sie sich als konvexe Hülle von $d + 1$ affin unabhängigen Punkten darstellen lässt.

2. Eine d -Pyramide Pyr^d ist die konvexe Hülle der Vereinigung eines $(d-1)$ -dimensionalen Polytops P^{d-1} mit einem Punkt $x \notin \text{aff } P^{d-1}$.
3. Es sei P^{d-1} ein $(d-1)$ -dimensionales Polytop und I eine Strecke, für die $P^{d-1} \cap I = \{x\}$ mit $x \in \text{relint } P^{d-1} \cap \text{relint } I$ gilt. Dann heißt die Menge $\text{BiPyr}^d := \text{conv}(P^{d-1} \cup I)$ d -Bipyramide, siehe Abbildung 1.5. Dabei ist eine *Strecke* (bzw. *Intervall*) I die konvexe Hülle von zwei verschiedenen Punkten $x_1 \neq x_2$, also $I = \text{conv}(x_1, x_2) =: [x_1, x_2]$. Ausgehend von dieser Konstruktion lassen sich die Seiten einer Bipyramide bereits genau beschreiben.
 - (a) Eine Menge $F \subset \text{BiPyr}^d$ mit $x_1, x_2 \notin F$ ist genau dann eine Seite von BiPyr^d , wenn sie eine Seite von P^{d-1} mit $F \neq P^{d-1}$ ist.
 - (b) Eine Menge $F \subset \text{BiPyr}^d$ mit $x_1 \in F$ und $x_2 \notin F$ ist genau dann eine Seite von BiPyr^d , wenn es eine Seite F' von P^{d-1} mit $F' \neq P^{d-1}$ gibt, so dass $F = \text{conv}(F' \cup \{x_1\})$ gilt. Für jede solche Seite F von BiPyr^d ist die zugehörige Seite F' von P^{d-1} eindeutig bestimmt, und es gilt $\dim F' = \dim F - 1$. Die Seiten $F \subset \text{BiPyr}^d$ mit $x_2 \in F$ und $x_1 \notin F$ werden analog gebildet.
 - (c) Eine Teilmenge $F \subset \text{BiPyr}^d$, für die $x_1, x_2 \in F$ gilt, ist genau dann eine Seite von BiPyr^d , wenn $F = \text{BiPyr}^d$ ist.

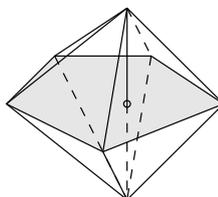


Abbildung 1.5: Bipyramide

Wie bereits oben angedeutet, ist es sinnvoll, für Polytope oder allgemein für konvexe Mengen einen „Dualitätsbegriff“ einzuführen. Dabei werden zwei Polytope P, P^* als *dual* zueinander bezeichnet, wenn es eine bijektive, inklusionsumkehrende Abbildung zwischen der Menge der Seiten von P und der Menge der Seiten von P^* gibt. Eine Möglichkeit, zu einem gegebenen Polytop P ein duales Polytop zu finden, ist die Konstruktion der zu P *polaren* Menge. (vgl. [Grun03])

Definition 1.4.5 (vgl. [Grun03]) Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Teilmenge. Dann heißt $M^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall x \in M\}$ die zu M *polare* Menge.

Man beachte an dieser Stelle, dass die Polare nach Definition für beliebige Mengen des \mathbb{R}^n gebildet werden kann. Dabei gelten folgende Eigenschaften:

Satz 1.4.6 (vgl. [Grun03]) *$M, N \subset \mathbb{R}^n$ seien beliebige Teilmengen. Dann gilt:*

1. $M^{**} = (M^*)^* = \overline{\text{conv}(M \cup \{0\})}$.
2. $M^{***} = ((M^*)^*)^* = M^*$.
3. Für $M \subset N$ gilt $N^* \subset M^*$.
4. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, so gilt $(\lambda M)^* = \frac{1}{\lambda} M^*$.
5. $(M \cup N)^* = M^* \cap N^*$.

Obwohl man die Polare zu jeder beliebigen (konvexen) Menge bilden kann, macht die Deutung der Polaren in den meisten Fällen nur dann Sinn, wenn die Ausgangsmenge kompakt ist und den Ursprung enthält.

Satz 1.4.7 (vgl. [Grun03], [Rock70]) *Für die polare Menge gelten folgende Aussagen.*

1. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge mit $0 \in K^\circ$, so ist auch K^* kompakt und konvex mit $0 \in (K^*)^\circ$.
2. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte konvexe Menge mit $0 \in K^\circ$, so folgt $K^{**} = (K^*)^* = K$.
3. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ gilt, dass M genau dann beschränkt ist, wenn $0 \in (M^*)^\circ$ gilt.
4. Für eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist M^* genau dann beschränkt, wenn $0 \in \text{conv}(M)^\circ$ erfüllt ist.
5. Ist $P \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexes Polytop, das sich als Schnitt der Halbräume $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y_i \rangle \leq 1\}$, $i = 1, \dots, k$ schreiben lässt, so gilt $P^* = \text{conv}(y_1, \dots, y_k)$.

Mit der letzten Eigenschaft aus Satz 1.4.7 hat man somit einen Zusammenhang zwischen der Darstellung mittels endlich vieler Punkte und der Darstellung als Schnitt von endlich vielen Halbräumen hergestellt. Satz 1.4.7 zeigt außerdem, dass sich wesentliche Eigenschaften der Menge nur dann auf ihre Polare übertragen, wenn die Ausgangsmenge die Null in ihrem Inneren enthält.

Bildet man die Polare eines konvexen Kegels mit Spitze in Null, so sieht man, dass die Bedingung „Skalarprodukt kleiner gleich 1“ gleich der Bedingung „Skalarprodukt kleiner gleich 0“ ist (vgl. [Barv02]). Da die Betrachtung

der Polaren eines konvexen Kegels mit Spitze in Null später noch von großer Bedeutung sein wird, soll für diesen Spezialfall der Begriff des „Polarkegels“ noch einmal neu definiert werden und zur besseren Lesbarkeit das Symbol C^* gewählt werden. Wie aber bereits erwähnt, ist die folgende Definition genau genommen eine Folgerung aus Definition 1.4.5.

Definition 1.4.8 (vgl. [Leich80]) Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein konvexer Kegel mit Spitze in Null. Dann heißt

$$C^* := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle \leq 0 \forall x \in C\} = C^*$$

der *Polarkegel* von C .

Anders ausgedrückt ist der Polarkegel C^* eines konvexen Kegels C mit Spitze in Null der Durchschnitt derjenigen abgeschlossenen Halbräume, die orthogonal zu den in C liegenden Halbgeraden sind und die Null enthalten. Damit erhält man direkt folgende geometrische Beschreibung des Polarkegels.

Satz 1.4.9 (vgl. [Leich80]) *Der Polarkegel C^* eines beliebigen konvexen Kegels $C \subset \mathbb{R}^n$ mit Spitze in Null ist gleich dem Normalenkegel von C in Null, das heißt der Polarkegel wird erzeugt von den Normalenvektoren aller Stützhyperebenen an C in Null.*

Analog zu Satz 1.4.7 gilt für konvexe Kegel und ihre zugehörigen Polarkegel die folgende Eigenschaft:

Satz 1.4.10 (vgl. [Schn93]) *Es sei $C \subset \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener konvexer Kegel mit Spitze in Null. Dann ist auch sein Polarkegel C^* ein abgeschlossener konvexer Kegel, und es gilt $C^{**} = (C^*)^* = C$.*

Kapitel 2

Die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge

In diesem Kapitel wird der erste Schwerpunkt dieser Arbeit, die Beschreibung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge, behandelt. Für die konvexe Hülle einer beliebigen diskreten Menge gilt, dass sie in der Regel nicht abgeschlossen ist und nicht durch endlich viele Hyperebenen begrenzt wird. Das wesentliche Ziel dieses Kapitels ist daher die Beschreibung der Randstruktur der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge. Allgemein lässt sich diese Untersuchung in die Theorie nicht notwendig abgeschlossener, unbeschränkter konvexer Mengen einordnen, da die konvexe Hülle einer unendlichen diskreten Punktmenge stets unbeschränkt ist. Diese Theorie wird hier fortgeführt.

Dieses Kapitel ist in drei Abschnitte unterteilt: In dem ersten Abschnitt wird neben der Einführung der Diskretheit die Grundlage für die Untersuchung der Randstruktur geschaffen. Dabei sind die im ersten Abschnitt bewiesenen Sätze eher klassischer Natur und lassen sich als Darstellungssätze klassifizieren. Da sie speziell dem Aufbau der in dieser Arbeit entwickelten Theorie dienen, werden alle Aussagen des ersten Abschnittes vollständig bewiesen.

Im zweiten Abschnitt findet die eigentliche Untersuchung der Randstruktur der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge statt. Diese Untersuchung unterteilt sich wiederum in drei Teile: die Betrachtung der Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle, die Beschreibung der Randbereiche der konvexen Hülle und die Untersuchung des Randes im Hinblick auf Liniensegmente, das heißt auf im Rand enthaltenen Intervalle positiver Länge. Zunächst wird untersucht, ob ein Zusammenhang zwischen der Menge der Extrempunkte einer konvexen Menge und der Menge der Extrempunkte des Abschlusses der Menge besteht. Es wird gezeigt, dass diese beiden Mengen in der Regel nicht gleich sind und auch nicht notwendig ei-

ne Inklusion der Mengen vorliegt. Da für die Extrempunkte der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge bereits aufgrund der im ersten Kapitel beschriebenen Grundlagen klar ist, dass sie in der diskreten Punktmenge enthalten sind, bleibt noch zu untersuchen, wie es sich diesbezüglich mit den Extrempunkten des Abschlusses der konvexen Hülle verhält. Es lässt sich zeigen, dass diese ebenfalls vollständig in der diskreten Punktmenge enthalten sind. Bei der Untersuchung der Randbereiche wird zwischen Randbereichen, die in der konvexen Hülle enthalten sind, und solchen, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, unterschieden. Die in der konvexen Hülle enthaltenen Randbereiche lassen sich mit der klassischen Theorie gut beschreiben. Für die maximalen Randbereiche, die mit der konvexen Hülle keinen Punkt gemeinsam haben, wird gezeigt, dass sie unbeschränkt sind und es stets eine Hyperebene gibt, die mit einem solchen Randbereich einen unbeschränkten Schnitt hat. Genauer gilt sogar, dass der Schnitt eines maximalen Randstücks, das nicht zu der konvexen Hülle gehört, mit jeder Stützhyperebene, die zu einem Punkt dieses Randstücks gehört, unbeschränkt ist. Im Hinblick auf die Untersuchung des Randes auf darin enthaltene Liniensegmente lässt sich später zeigen, dass es zu jedem Randpunkt der konvexen Hülle wenigstens eine lineare Strecke positiver Länge gibt, in der dieser Randpunkt enthalten ist, das heißt in jedem Randpunkt der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge existiert ein Liniensegment. Dieses bedeutet jedoch nicht, dass die konvexe Hülle lokal polyedrisch wäre; das ist im Allgemeinen auch nicht richtig (siehe Beispiel 2.3.9). Mit Hilfe der in diesem Abschnitt bewiesenen Sätze lässt sich nun der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge geometrisch beschreiben.

Da sich bei der Untersuchung der Randstruktur die Dimension 2 als Spezialfall herausstellt, wird im dritten Abschnitt auf die konvexe Hülle ebener diskreter Punktfolgen eingegangen. Es wird gezeigt, dass die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge des \mathbb{R}^2 zusätzliche Eigenschaften besitzt, die in höheren Dimensionen nicht mehr gelten müssen: Die Randbereiche, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, sind in dieser Situation vollständig in einer Hyperebene enthalten, und die konvexe Hülle ist insgesamt lokal polyedrisch. Es wird zusätzlich gezeigt, dass es zu jeder uniform diskreten Menge im \mathbb{R}^2 eine ebenfalls uniform diskrete Erweiterung gibt, durch die die konvexe Hülle abgeschlossen wird. Im dritten Abschnitt werden einige Aussagen, die im zweiten Abschnitt allgemein bewiesen werden, für den zweidimensionalen Fall noch einmal neu gezeigt. Die dabei angegebenen alternativen Beweise gelten nur in Dimension 2 und lassen sich nicht auf eine höhere Dimension übertragen.

2.1 Darstellungssätze

Dieser Abschnitt soll die wesentlichen Grundlagen für die anschließende Untersuchung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge schaffen. Dazu werden neben der Einführung des Begriffs der „Diskretheit“ weitere grundlegende Aussagen über konvexe Mengen gezeigt. Zunächst werden Darstellungssätze über innere Punkte oder Mengen, die im Inneren einer konvexen Menge liegen, und anschließend Aussagen bezüglich der Darstellung von Randpunkten oder im Rand enthaltener Mengen bewiesen.

Diskretheit

Da im Folgenden die konvexe Hülle einer „diskreten“ Punktmenge betrachtet werden soll, muss zunächst der Begriff der „Diskretheit“ genau definiert werden. Dabei orientiere man sich an dem Ausgangspunkt dieser Arbeit, der Frage nach der Gestalt der Voronoizellen, wie sie bei einem Quantizer vorkommen können. Punktfolgen, die in einem Quantizer verwendet werden, haben in der Regel die Eigenschaft, dass deren Punkte nicht beliebig dicht zusammen liegen können. Dieses führt auf den Begriff der „uniformen Diskretheit“ (vgl. [Baa02]).

Definition 2.1.1 Eine Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *uniform diskret*, wenn für den *Minimalabstand* $r = \min \mathcal{P} := \inf\{\|p - q\| \mid p, q \in \mathcal{P}, p \neq q\}$ gilt, dass $r > 0$ erfüllt ist.

Mengen, die uniform diskret sind, haben weiterhin die Eigenschaft, dass sie keine Häufungspunkte enthalten und der Schnitt mit einer beschränkten Menge stets endlich ist. Da für viele Aussagen, die in dieser Arbeit gezeigt werden, diese beiden Eigenschaften einer Punktmenge entscheidend sind, kann der Diskretheitsbegriff entsprechend abgeschwächt werden, so dass man folgende Definition erhält:

Definition 2.1.2 Eine Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ heißt *diskret*, wenn jede beschränkte Umgebung nur endlich viele Punkte aus \mathcal{P} enthält.

Das heißt eine Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann diskret, wenn für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und alle $\varepsilon > 0$ die Bedingung $|B(x, \varepsilon) \cap \mathcal{P}| < \infty$ gilt. Äquivalent zu dieser Definition der Diskretheit ist die Aussage, dass die Menge \mathcal{P} keinen Häufungspunkt besitzt (vgl. [Grub07]). Denn die Menge \mathcal{P} hat genau dann einen Häufungspunkt, wenn ein Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt $|B(x_0, \varepsilon) \cap \mathcal{P}| = \infty$. Damit ist eine uniform diskrete Menge auch stets diskret. Die Umkehrung dieser Aussage ist jedoch nicht richtig.

Beispiel 2.1.3 Es sei $\mathcal{P} := \mathbb{Z} \cup \{z + \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{R}$, siehe Abbildung 2.1. Da die Menge \mathcal{P} keinen Häufungspunkt enthält, ist \mathcal{P} im Sinne der Definition 2.1.2 diskret. Die Menge \mathcal{P} ist jedoch nicht uniform diskret, da der Minimalabstand $\min \mathcal{P} = 0$ ist.

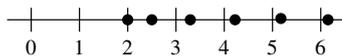


Abbildung 2.1: $\mathbb{Z} \cup \{z + \frac{1}{z} \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$

Sowohl für diskrete als auch für uniform diskrete Punktmenge ist die Endlichkeit äquivalent zur Beschränktheit.

Satz 2.1.4 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine (uniform) diskrete Punktmenge. Dann gilt, dass die Menge \mathcal{P} genau dann endlich ist, wenn sie beschränkt ist.*

Beweis: Es sei \mathcal{P} beschränkt. Dann gibt es $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\delta > 0$ mit $\mathcal{P} \subset B(x_0, \delta)$. Ist \mathcal{P} uniform diskret, so auch diskret und es folgt $|B(x_0, \delta) \cap \mathcal{P}| < \infty$. Also ist \mathcal{P} endlich.

Ist andererseits \mathcal{P} endlich, so gibt es einen maximalen Abstand zwischen den Punkten aus \mathcal{P} , $M := \max\{\|p - q\| \mid p, q \in \mathcal{P}\} < \infty$. Damit folgt $\mathcal{P} \subset B(p_0, M)$ für jeden beliebigen Punkt $p_0 \in \mathcal{P}$. Also ist \mathcal{P} beschränkt. \square

Der obige Satz lässt sich sogar noch verschärfen. Denn es gilt, dass eine endliche Punktmenge stets $\min \mathcal{P} > 0$ erfüllt und damit uniform diskret also insbesondere auch diskret ist. Aus der Endlichkeit der Punktmenge folgt somit nicht nur die Beschränktheit sondern auch bereits die Diskretheit. In Bezug auf die Gestalt der konvexen Hülle der Punktmenge bewirkt die Endlichkeit der Menge, dass die konvexe Hülle nach Definition 1.4.2 ein Polytop ist. Dieses ist insbesondere kompakt.

Satz 2.1.5 *Ist die Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ endlich, so ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ kompakt.*

Beweis: Als endliche Menge ist \mathcal{P} abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Nach Satz 1.1.12 ist damit auch $\text{conv}(\mathcal{P})$ kompakt. \square

Innere Punkte

Für einen Punkt x , der in der konvexen Hülle einer endlichen Punktmenge \mathcal{P} enthalten ist, gilt, dass er sich nicht nur als Konvexkombination der Punkte aus \mathcal{P} sondern auch als Konvexkombination beliebiger, jeweils auf den Strecken zwischen x und den Punkten aus \mathcal{P} liegender Punkte darstellen lässt. Genauer gilt folgende wichtige Eigenschaft konvexer Mengen: Kommt in der Konvexdarstellung eines Punktes x ein Punkt p echt vor, so kann man p in der Konvexdarstellung durch jeden beliebigen Punkt q , der auf der Strecke zwischen x und p liegt, ersetzen.

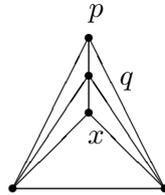


Abbildung 2.2: Austauschung in Konvexdarstellung

Lemma 2.1.6 (Austauschlemma) *Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$ eine Konvexdarstellung von x , das heißt es gelte $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, k$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Gilt für ein p_j , $j \in \{1, \dots, k\}$, dass es in der Konvexdarstellung echt vorkommt, dass also $\lambda_j > 0$ gilt, so lässt sich p_j in der Konvexdarstellung von x durch einen beliebigen Punkt $y \in \text{conv}(x, p_j) \setminus \{x\}$ austauschen, das heißt es gibt passende $\lambda'_1, \dots, \lambda'_k \geq 0$, mit $\lambda'_j > 0$, so dass man $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ durch $\lambda'_1, \dots, \lambda'_k$ und p_j durch y ersetzen kann.*

Beweis: Es gelte nun $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i p_i$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, k-1$ und $\lambda_k > 0$ (ansonsten ändere man die Nummerierung). Weiter sei $y = \mu x + (1-\mu)p_k$ für ein $0 < \mu < 1$. Dann gilt $p_k = \frac{1}{1-\mu}(y - \mu x)$. Setzt man dieses in die Konvexdarstellung von x ein, so erhält man

$$\begin{aligned} x &= \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \lambda_k p_k \\ &= \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \lambda_k \frac{1}{1-\mu} (y - \mu x), \end{aligned}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 + \frac{\lambda_k \mu}{1-\mu}} (\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \frac{\lambda_k}{1-\mu} y) \\ &= \frac{1-\mu}{1-\mu + \lambda_k \mu} (\lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_{k-1} p_{k-1} + \frac{\lambda_k}{1-\mu} y). \end{aligned}$$

Gilt nun, dass in dieser Darstellung alle Koeffizienten größer oder gleich Null sind und in der Summe 1 ergeben, so hat man die gesuchte neue Konvexkombination gefunden. Man sieht leicht, dass $\frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu}\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, k-1$ und $\frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu} \cdot \frac{\lambda_k}{1-\mu} > 0$ gilt. Betrachte also nun die Summe der Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu} \left(\underbrace{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}}_{=1-\lambda_k} + \frac{\lambda_k}{1-\mu} \right) \\ &= \frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu} \left(1 - \lambda_k + \frac{\lambda_k}{1-\mu} \right) \\ &= \frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu} \cdot \frac{1-\mu+\lambda_k\mu}{1-\mu} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit hat man die gesuchte Konvexdarstellung gefunden. Setzt man $\gamma := \frac{1-\mu}{1-\mu+\lambda_k\mu}$, so erhält man als neue Koeffizienten $\lambda'_i := \gamma\lambda_i$, für $i = 1, \dots, k-1$, und $\lambda'_k := \gamma \frac{\lambda_k}{1-\mu}$. \square

Ausgehend von einer Konvexdarstellung eines Punktes x einer konvexen Menge, lässt sich eine Aussage darüber treffen, ob der Punkt x im Inneren oder auf dem Rand der konvexen Menge liegt. Sobald in einer gewählten Konvexdarstellung von x wenigstens ein innerer Punkt p vorkommt, der aus der Konvexdarstellung nicht eliminiert werden kann, ist auch x ein innerer Punkt der konvexen Menge. Anschaulich wird der Punkt x sozusagen von p ins Innere „gezogen“.

Lemma 2.1.7 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge, $x_1, \dots, x_k \in K$ mit $x_k \in K^\circ$, $k \in \mathbb{N}$. Setze $x := \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $\lambda_i \geq 0$ für $i = 1, \dots, k-1$ und $\lambda_k > 0$. Dann gilt $x \in K^\circ$.*

Beweis: Für $k = 1$ ist die Aussage trivial. Sei nun $k = 2$. Gilt $x_2 \in K^\circ$, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x_2, \varepsilon) \subset K$. Dann gilt aber für $x = (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2$, dass $B(x, \lambda\varepsilon) \subset K$ und x somit ein innerer Punkt von K ist. Betrachte nun den allgemeinen Fall für $k \geq 2$. Dann gilt $x = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + \lambda_k x_k = (1-\lambda_k) \frac{1}{1-\lambda_k} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i + \lambda_k x_k$. Da für $i = 1, \dots, k-1$ gilt $x_i \in K$ und $0 \leq \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1}} \leq 1$, ist wegen $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_k} \sum_{i=1}^k \lambda_i - \frac{1}{1-\lambda_k} \lambda_k = \frac{1}{1-\lambda_k} \cdot 1 - \frac{\lambda_k}{1-\lambda_k} = \frac{1-\lambda_k}{1-\lambda_k} = 1$ auch die Konvexkombination $y := \frac{1}{1-\lambda_k} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i x_i$ in K enthalten. Damit erhält man $x = (1-\lambda_k)y + \lambda_k x_k$ als Konvexkombination zweier Elemente aus K , von denen eines im Inneren liegt, und es folgt die Behauptung. \square

Die Aussage, dass ein Punkt, der auf der Strecke zwischen zwei Punkten liegt, von denen wenigstens einer im Inneren der konvexen Menge enthalten ist, bereits selbst ein innerer Punkt der konvexen Menge ist, findet man auch in [Berk02] bewiesen. Die dort angegebene Beweisidee wird in Abbildung 2.3 veranschaulicht. Das obige Lemma 2.1.7 verallgemeinert nun diese Aussage in dem Sinne, dass es für die Eigenschaft innerer Punkt zu sein genügt, wenn in einer beliebigen Konvexkombinationen einer der darstellenden Punkte im Inneren liegt.

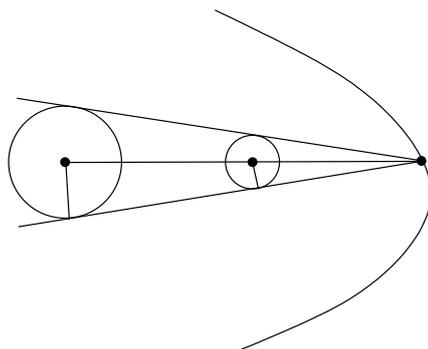


Abbildung 2.3: Strecke mit innerem Punkt

Betrachtet man nun zwei innere Punkte einer konvexen Menge, so erwartet man, dass dann auch die konvexe Hülle dieser beiden Punkte ebenfalls vollständig im Inneren der konvexen Menge enthalten ist.

Lemma 2.1.8 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $K^\circ \neq \emptyset$. Dann gilt für zwei Punkte $m_1, m_2 \in K^\circ$, dass auch die konvexe Hülle der Punkte $\text{conv}(m_1, m_2) \subset K^\circ$ im Innern der konvexen Menge liegt.*

Beweis: Da $m_1, m_2 \in K^\circ$ innere Punkte sind, gibt es $r_1, r_2 > 0$ und Kugeln $B(m_1, r_1), B(m_2, r_2)$ für die gilt $m_i \in B^\circ(m_i, r_i) \subset K$, für $i = 1, 2$. Also folgt $\text{conv}(m_1, m_2) \subset \text{conv}(B^\circ(m_1, r_1) \cup B^\circ(m_2, r_2)) \subset K$. Nach Satz 1.1.12 ist $\text{conv}(B^\circ(m_1, r_1) \cup B^\circ(m_2, r_2))$ eine offene Umgebung von $\text{conv}(m_1, m_2)$, und es folgt $\text{conv}(m_1, m_2) \subset K^\circ$. \square

Es ist klar, dass aus dem gerade bewiesenen Lemma direkt folgt, dass auch konvexe Hüllen von endlich vielen inneren Punkten einer konvexen Menge wieder im Inneren der konvexen Menge liegen. Anders ausgedrückt heißt das, dass ein Polytop, das in einer konvexen Menge enthalten ist und dessen Ecken alle im Inneren der umgebenden konvexen Menge liegen, ebenfalls vollständig im Inneren der umgebenden konvexen Menge liegt. Erinnert man sich an den Satz 1.1.10 von Steinitz, der besagt, dass jeder innere Punkt einer konvexen Hülle einer Menge M bereits als innerer Punkt der konvexen Hülle von endlich vielen Punkten aus M darstellbar ist, so entsteht die

Frage, ob eine analoge Aussage auch für im Inneren liegende Polytope gilt. Das heißt findet man zu einem Polytop, das im Inneren der konvexen Hülle einer Menge M liegt, endlich viele Punkte aus M , so dass das Polytop noch immer im Inneren der konvexen Hülle dieser endlich vielen Punkte liegt?

Satz 2.1.9 (Steinitz für Polytope) *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge und $P \subset \text{conv}(M)^\circ$ ein Polytop. Dann gibt es eine Teilmenge $M' \subset M$ mit $|M'| < \infty$ und $P \subset \text{conv}(M')^\circ$.*

Beweis: Da $P \subset \text{conv}(M)^\circ$ ein Polytop ist, existieren endlich viele Punkte $m_1, \dots, m_k \in \text{conv}(M)^\circ$ mit $P = \text{conv}(m_1, \dots, m_k)$. Wende nun auf jeden dieser Punkte m_i , $i = 1, \dots, k$, den Satz 1.1.10 von Steinitz an. Dann folgt, dass es zu jedem Punkt m_i eine Teilmenge $M'_i \subset M$, $|M'_i| \leq 2n$ gibt, so dass $m_i \in \text{conv}(M'_i)^\circ$ gilt. Insbesondere gilt damit auch $m_i \in \text{conv}(M'_1 \cup \dots \cup M'_k)^\circ$ für alle Punkte m_i , $i = 1, \dots, k$. Setzt man nun $M' := M'_1 \cup \dots \cup M'_k$, so folgt mit Lemma 2.1.8 $P = \text{conv}(m_1, \dots, m_k) \subset \text{conv}(M')^\circ$, und es gilt $M' \subset M$ mit $|M'| \leq 2kn < \infty$. \square

Man überlegt sich leicht, dass in Satz 2.1.9 nicht wie im Satz 1.1.10 von Steinitz verlangt werden kann, dass $|M'| < 2n$ ist. Als Beispiel betrachte man ein reguläres m -Eck in \mathbb{R}^2 mit $m > 4$. M enthalte genau die m Eckpunkte des m -Ecks $\text{conv}(M)$. Wählt man nun als im Inneren von $\text{conv}(M)$ enthaltenes Polytop K ebenfalls ein reguläres m -Eck, so kann K so gewählt werden, dass $K \not\subset \text{conv}(M \setminus \{x\})$ für jeden Punkt $x \in M$ gilt. Das heißt in diesem Fall ist $K \subset \text{conv}(M')^\circ$ mit $M' \subset M$ nur für $M = M'$ möglich, aber es ist $|M| = m > 4$ (siehe Abbildung 2.4 für den Fall $m = 5$).

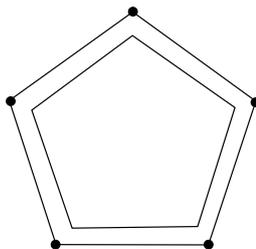


Abbildung 2.4: Ineinander enthaltene Fünfecke

Eine weitere Problemstellung, die in diesem Zusammenhang auftritt und Anwendungen der Optimierung nahe kommt, ist die Suche nach einem dem Rand der umgebenden konvexen Menge nächsten Punkt des in der Menge liegenden Polytops, siehe Abbildung 2.5. Man wird erwarten, dass der kleinste Abstand zwischen dem Polytop und dem umgebenden Rand stets im Rand des Polytops angenommen wird und dass es stets einen Eckpunkt des Polytops gibt, der evtl. zusammen mit weiteren Punkten des Polytops den kleinsten Abstand annimmt. Das dieses so ist, beweist der nächste Satz.

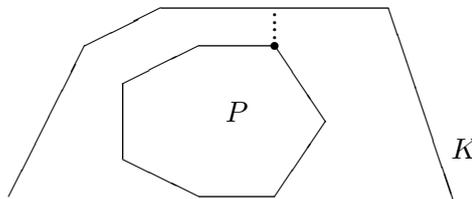


Abbildung 2.5: Minimaler Abstand zum Rand

Satz 2.1.10 *Es sei $K \neq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $P \subset \overline{K}$ ein Polytop. Dann wird der minimale Abstand $d(P, \partial K) := \inf\{\|p - y\| \mid p \in P, y \in \partial K\}$ von P zum Rand von K stets in einer Ecke von P angenommen.*

Beweis: Es sei zunächst die Beweisidee kurz skizziert: Da es in dieser Situation Punkte $x_0 \in \partial K$ und $y_0 \in P$ gibt, die den minimalen Abstand $d(P, \partial K)$ annehmen, lässt sich die Menge K so um $x_0 - y_0$ verschieben, dass die verschobene Menge K_0 noch immer das Polytop P enthält, der Rand ∂K_0 aber Punkte mit P gemeinsam hat. Alle Punkte aus P , die im Schnitt $P \cap \partial K_0$ liegen, haben zu K_0 und auch zu K minimalen Abstand. Da K_0 konvex und P ein Polytop ist, gibt es eine Seite von P , die vollständig im Rand von K_0 enthalten ist. In dieser Seite existiert wenigstens ein Eckpunkt von P , der minimalen Abstand zu K_0 und damit auch zu K hat.

Da P und ∂K abgeschlossen sind und P beschränkt ist, wird bei dem minimalen Abstand zwischen den Mengen das Infimum angenommen, und es gilt $d(P, \partial K) = \min\{\|p - y\| \mid p \in P, y \in \partial K\}$. Also existieren $y_0 \in P$, genauer $y_0 \in \partial P$, und $x_0 \in \partial K$ mit $d(y_0, x_0) = d(P, \partial K) =: \delta$. Betrachte nun die Menge $K_0 := K - (x_0 - y_0) = \{x - (x_0 - y_0) \mid x \in K\}$, das heißt die um $(x_0 - y_0)$ verschobene Menge K . Es gilt $\partial K_0 = \partial K - (x_0 - y_0)$ und $P \subset \overline{K_0}$. Denn gäbe es ein $p \in P$ mit $p \notin \overline{K_0}$, so wäre $p + (x_0 - y_0) \notin \overline{K}$ und damit der Abstand $d(p, \partial K) < \delta$, also ein Widerspruch. Weiter gilt $d(P, \partial K_0) = 0$, da $y_0 \in P$ und $x_0 - (x_0 - y_0) \in \partial K_0$ den minimalen Abstand mit $d(y_0, x_0 - (x_0 - y_0)) = 0$ annehmen. Man überlegt sich weiter, dass $\{y \in P \mid d(y, \partial K_0) = 0\} \subset \{y \in P \mid d(y, \partial K) = \delta\}$ gilt. Dazu sei nun $y_1 \in P$ ein beliebiges Element, das $d(y_1, \partial K_0) = 0$ erfüllt. Das heißt es gibt ein $x_1 = x_2 - (x_0 - y_0) \in \partial K_0$, $x_2 \in \partial K$, mit $d(y_1, x_1) = 0$. Dann ist $d(y_1, \partial K) \leq d(y_1, x_2) = d(y_1, x_1 + (x_0 - y_0)) \leq d(y_1, x_1) + d(y_0, x_0) = 0 + \delta$. Mit $d(P, \partial K) \geq \delta$ folgt somit $d(y_1, \partial K) = \delta$. Damit hat man gezeigt, dass $y_1 \in \{y \in P \mid d(y, \partial K) = \delta\}$ gilt. Nach Konstruktion ist $y_0 \in \partial P \cap \partial K_0$ Randpunkt sowohl von P als auch von K_0 . Da $P \subset \overline{K_0}$ gilt, existiert in y_0 eine Hyperebene Hyp , die sowohl an P als auch an K_0 eine Stützhyperebene ist. Aus $P \subset \overline{K_0}$ folgt auch $\text{Hyp} \cap P \subset \text{Hyp} \cap \partial K_0$. Da P ein Polytop ist, enthält jede Stützhyperebene an P wenigstens eine Ecke von P . Also enthält

auch $\text{Hyp} \cap \partial K_0$ wenigstens eine Ecke von P . Damit wird der minimale Abstand von P zum Rand ∂K_0 stets auch in einer Ecke von P angenommen. Und da oben gezeigt wurde, dass alle Punkte aus P , die minimalen Abstand zum Rand von K_0 haben, auch minimalen Abstand zum Rand von K haben, folgt die Behauptung. \square

Randpunkte

Man wende sich nun dem Rand einer konvexen Menge zu. Aufgrund der Konvexität der Menge lassen sich bestimmte schöne Eigenschaften des Randes zeigen, die der Rand einer beliebigen Menge in der Regel nicht aufweist. Dazu gehört es, dass eine Stützhyperebene der konvexen Menge K in einem Randpunkt $x_0 \in \partial K$ nur dann auch Stützhyperebene an K in einem weiteren Punkt $x \in \partial K$ sein kann, wenn sie auch Stützhyperebene an K in allen anderen zwischen x_0 und x liegenden Punkten ist (siehe Abbildung 2.6). Eine Umformulierung dieser Aussage liefert das folgende Lemma.

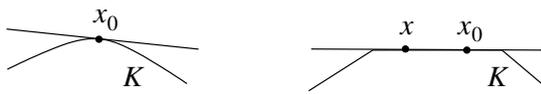


Abbildung 2.6: Stützhyperebene in x_0

Lemma 2.1.11 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge mit $\partial K \neq \emptyset$. Weiter seien $x_0 \in \partial K$ und Hyp_0 eine Stützhyperebene an K in x_0 . Wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, für die gilt, dass alle stützenden Hyperebenen Hyp_x für $x \in \partial K \cap U$, $x \neq x_0$, von Hyp_0 verschieden sind, so ist Hyp_0 verschieden von allen stützenden Hyperebenen Hyp_x für $x \in \partial K$, $x \neq x_0$.*

Beweis: Man zeige die zu der Behauptung äquivalente Aussage, dass wenn es einen Punkt $x_1 \in \partial K$, $x_1 \neq x_0$, gibt, in dem Hyp_0 ebenfalls eine Stützhyperebene ist, dann auch in jeder Umgebung U von x_0 Punkte existieren, in denen es dieselbe Stützhyperebene gibt.

Es sei $x_1 \in \partial K$, $x_1 \neq x_0$ und es existiere eine K stützende Hyperebene Hyp_1 in x_1 , die mit Hyp_0 identisch sei. Da mit K auch \overline{K} konvex ist, gilt für alle $\lambda \in [0, 1]$, dass auch $x := \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 \in \overline{K}$ erfüllt ist. Genauso ist x als affine Kombination aus $x_0, x_1 \in \text{Hyp}_0 = \text{Hyp}_1$ wieder Element der Hyperebene Hyp_0 . Da Hyp_0 eine K stützende Hyperebene ist, liegt K vollständig in einem der beiden durch Hyp_0 begrenzten Halbräume H_0^+ oder H_0^- . Damit folgt weiter, dass $x \in \overline{K} \cap \text{Hyp}_0$ nicht in K° enthalten sein kann, also für alle $\lambda \in [0, 1]$ gilt $x = \lambda x_0 + (1 - \lambda)x_1 \in \partial K$. Für jede Umgebung U von x_0 lässt sich nun ein $\lambda_U \in [0, 1]$ finden, so dass $x_U = \lambda_U x_0 + (1 - \lambda_U)x_1 \in \partial K \cap U$ gilt.

Damit findet man in jeder Umgebung U von x_0 einen Punkt x_U , in dem es eine K stützende Hyperebene gibt, die mit Hyp_0 identisch ist. Damit folgt die Behauptung. \square

Betrachtet man Konvexkombinationen aus Randpunkten konvexer Mengen, so liegt der aus den Randpunkten konvex kombinierte Punkt im Allgemeinen nicht wieder im Rand der konvexen Menge, sondern oftmals im Inneren. Betrachtet man dagegen Konvexdarstellungen von Randpunkten konvexer Mengen, so stellt man fest, dass alle Punkte, die in der Konvexdarstellung mit einem Koeffizient $\lambda > 0$ echt vorkommen, ebenfalls Randpunkte sein müssen.

Lemma 2.1.12 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $x \in \partial K$ ein Randpunkt von K . Für x existiere eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $x_i \in K$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$, mit $k \in \mathbb{N}$. Dann muss für alle $i = 1, \dots, k$ gelten $x_i \in \partial K$.*

Beweis: Angenommen, es wäre wenigstens eines der x_i im Inneren von K . Dann würde mit Lemma 2.1.7 folgen, dass auch x innerer Punkt wäre, also ein Widerspruch. \square

In der obigen Situation lässt sich zusätzlich zeigen, dass sogar die von den Punkten aus der Konvexkombination erzeugte konvexe Hülle $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ vollständig in ∂K und daher auch vollständig in einer Stützhyperebene von K enthalten ist. Es gilt nämlich folgende Aussage:

Lemma 2.1.13 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge und $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Weiter seien paarweise verschiedene Randpunkte $x, x_1, \dots, x_k \in \partial K$ von K , für die $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt, gegeben. Dann folgt $\text{conv}(x_1, \dots, x_k) \subset \partial K$.*

Beweis: Man zeige, dass es eine Hyperebene $\text{Hyp} \subset \mathbb{R}^n$ gibt, in der sämtliche Punkte x, x_1, \dots, x_k enthalten sind. Ist $k \leq n-1$, so existiert stets eine Hyperebene, die alle Punkte x, x_1, \dots, x_k enthält. Also sei nun $k \geq n$. Angenommen es gäbe keine Hyperebene, die die Menge $\{x, x_1, \dots, x_k\}$ enthält. Dann folgt $\dim \text{conv}(x_1, \dots, x_k) = n$, und da $\text{conv}(x_1, \dots, x_k) \subset K$ gilt, ist dann $\text{conv}(x_1, \dots, x_k) \cap K^\circ \neq \emptyset$. Da in der Konvexdarstellung von x alle Koeffizienten der Punkte x_1, \dots, x_k positiv sind, ist x nach Satz 1.1.11 im relativen Inneren von $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ enthalten. Mit $\dim \text{conv}(x_1, \dots, x_k) = n$ folgt dann sogar $x \in \text{conv}(x_1, \dots, x_k)^\circ$. Wegen $\text{conv}(x_1, \dots, x_k) \subset K$ sind aber alle inneren Punkte von $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ bereits in K° enthalten. Also

folgt $x \in K^\circ$ und damit ein Widerspruch zur Voraussetzung. Damit gibt es stets eine Hyperebene $\text{Hyp}_x \subset \mathbb{R}^n$ mit $x, x_1, \dots, x_k \in \text{Hyp}_x$. Es bleibt zu zeigen, dass es auch stets eine Stützhyperebene gibt, die x, x_1, \dots, x_k enthält. Gilt $\dim \text{conv}(x_1, \dots, x_k) = n - 1$, so ist die x, x_1, \dots, x_k enthaltene Hyperebene Hyp_x eindeutig bestimmt. Angenommen Hyp_x wäre keine Stützhyperebene an K . Dann würde $K \cap (H_x^+)^\circ \neq \emptyset \neq K \cap (H_x^-)^\circ$ folgen. Also gäbe es $y_1 \in K \cap (H_x^-)^\circ$ und $y_2 \in K \cap (H_x^+)^\circ$, und aufgrund der Konvexität von K wäre $\text{conv}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2) \subset K$. Da $y_1, y_2 \notin \text{Hyp}_x$ gewählt sind, gilt $\dim \text{conv}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2) = n$. Man überlegt sich weiter, dass die Punkte y_1, y_2 in dieser Situation stets so gewählt werden können, dass die Menge $\text{conv}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2) =: \text{BiPyr}(x, y_1, y_2)$ eine Bipyramide wird. Dann liefert Beispiel 1.4.4, dass x ein innerer Punkt von $\text{BiPyr}(x, y_1, y_2)$ ist. Damit würde $x \in \text{conv}(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2)^\circ$ und daher auch $x \in K^\circ$ folgen. Dieses ist ein Widerspruch. Der Fall, dass $\dim \text{conv}(x_1, \dots, x_k) < n - 1$ gilt, es also mehrere x, x_1, \dots, x_k enthaltene Hyperebenen gibt, verläuft analog. Angenommen es wäre keine dieser Hyperebenen eine Stützhyperebene an K . Dann ließe sich x ähnlich wie oben als innerer Punkt eines in K enthaltenen n -dimensionalen Polytops darstellen und wäre damit ein innerer Punkt von K , was ein Widerspruch ist. Insgesamt folgt die Behauptung. \square

Eine andere Möglichkeit, die Aussage aus Lemma 2.1.13 zu überprüfen, erhält man durch die Anwendung des Austauschlemmas 2.1.6. Nimmt man an, es gäbe in $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ einen inneren Punkt $y \in \text{conv}(x_1, \dots, x_k) \cap K^\circ$, so fände man mit Hilfe von Lemma 2.1.6 eine weitere Konvexdarstellung von x , in der y mit positivem Koeffizienten vorkäme. Nach Lemma 2.1.7 wäre dann aber auch x ein innerer Punkt von K , was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Man beachte, dass die Aussage aus Lemma 2.1.13 nicht mehr gelten muss, wenn man bei den Voraussetzungen die Bedingung, dass der im relativen Inneren von $\text{conv}(x_1, \dots, x_k)$ liegende Punkt $x \in \partial K$ ein Randpunkt von K sei, weglässt. Die konvexe Hülle beliebiger Randpunkte von K kann natürlich innere Punkte von K enthalten. Als ein triviales Beispiel, das diese Tatsache verdeutlicht, sei an die Darstellung eines Polytops P als konvexe Hülle seiner Extrempunkte, $P = \text{conv}(\text{Ext}(P))$, erinnert.

Ist eine n -dimensionale konvexe Menge darstellbar als konvexe Hülle einer Menge M , so weiß man nach dem Satz 1.1.9 von Caratheodory, dass sich jeder Punkt der Menge als Konvexkombination aus maximal $n + 1$ Punkten der Menge M darstellen lässt. Verknüpft man diese Aussage mit dem Ergebnis aus Lemma 2.1.12, so erwartet man, dass es zu jedem Randpunkt x von $\text{conv}(M)$ eine Menge von maximal $n + 1$ Punkten aus M gibt, die im Rand der konvexen Hülle liegen und aus denen sich x konvex kombinieren lässt. Dabei ist insbesondere der Fall, dass die Menge M eine diskrete Punktmenge ist, von Interesse. Um in dieser Situation entsprechende Aussagen

besser formulieren zu können, werden zunächst die Begriffe „Randpunkt“ und „innerer Punkt“ einer diskreten Punktmenge über die bereits bekannten Begriffe des Randpunktes bzw. des inneren Punktes der konvexen Hülle einer Punktmenge definiert.

Definition 2.1.14 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine diskrete Punktmenge. Dann heißt $p \in \mathcal{P}$ *innerer Punkt* von \mathcal{P} , wenn $p \in \text{conv}(\mathcal{P})^\circ \cap \mathcal{P}$ ein innerer Punkt der konvexen Hülle von \mathcal{P} ist. Die Menge aller inneren Punkte von \mathcal{P} sei mit \mathcal{P}° bezeichnet. Entsprechend heißt ein Punkt $p' \in \mathcal{P}$ *Randpunkt* von \mathcal{P} , wenn $p' \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P}$ zum Rand der konvexen Hülle von \mathcal{P} gehört. Die Menge aller Randpunkte von \mathcal{P} sei $\partial \mathcal{P}$.

Damit lässt sich nun die oben bereits angedeutete Aussage über die Konvexdarstellung eines Randpunktes der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge exakt formulieren.

Folgerung 2.1.15 Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, deren konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen sei. Dann existieren zu jedem $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$

Punkte $p_1, \dots, p_k \in \partial \mathcal{P}$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ mit $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ und $k \leq n + 1$, so

dass gilt $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Beweis: Da für jeden Randpunkt $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ insbesondere $x \in \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt, existiert nach dem Satz 1.1.9 von Caratheodory eine Konvexdarstellung von x aus Punkten der Menge \mathcal{P} , also $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ mit

$\lambda_1, \dots, \lambda_k \geq 0$, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, $k \leq n + 1$. Wählt man die Darstellung so, dass $\lambda_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ gilt, so liefert Lemma 2.1.12, dass alle in dieser Darstellung vorkommenden Punkte p_i Randpunkte von $\text{conv}(\mathcal{P})$ sein müssen, also $p_1, \dots, p_k \in \partial \mathcal{P}$ gilt. \square

Man beachte, dass die Diskretheit der Menge \mathcal{P} in dem Beweis nicht benötigt wurde, die Aussage also auch entsprechend für konvexe Hüllen beliebiger Mengen M formulierbar ist. Da jedoch im Folgenden speziell auf den Fall einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} eingegangen werden soll und auch die obige Definition 2.1.14 bereits auf diesen Fall abgestimmt ist, soll hier auf eine allgemeinere Formulierung der Aussage aus Folgerung 2.1.15 verzichtet werden.

Mit Hilfe der in diesem Abschnitt bewiesenen Aussagen kann nun der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge näher untersucht werden.

2.2 Randstruktur

Aufbauend auf den bis jetzt bereitgestellten Grundlagen, kann nun das Randverhalten der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge betrachtet werden. Dazu werden zunächst eine Reihe von Beispielen angegeben, die das Auftreten gewisser Randeigenschaften einer solchen Menge belegen. Anschließend werden die Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle und weiterhin die maximalen Randbereiche, die in der konvexen Menge enthalten sind, und die, die mit der konvexen Menge einen leeren Schnitt haben, untersucht. Abschließend wird auf das Vorhandensein von Liniensegmenten im Rand eingegangen.

Betrachtet man die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge, so erhält man dabei nach Definition 1.4.2 ein Polytop. Da eine endliche Punktmenge insbesondere diskret ist, entsteht die Frage, ob sich diese Aussage verallgemeinern lässt und auch für die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge etwas Vergleichbares gilt. Diese Überlegung führt auf die Betrachtung konvexer Hüllen von unendlichen diskreten Punktfolgen. Es ist klar, dass die konvexe Hülle so einer Punktmenge kein Polytop sein kann. Jedoch könnte man die Hoffnung haben, dass die so entstandene konvexe Menge weiterhin polyedrisch ist. Dass dieses im Allgemeinen jedoch nicht der Fall ist, zeigt ein einfaches Beispiel:

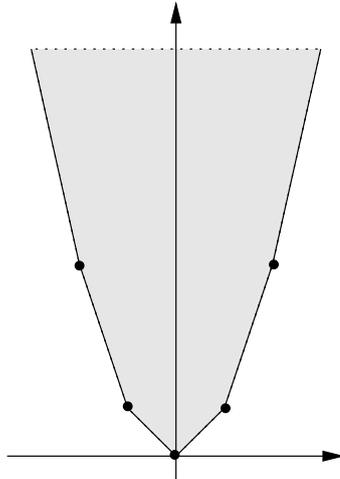


Abbildung 2.7: Nicht-polyedrische konvexe Hülle

Beispiel 2.2.1 Wählt man $\mathcal{P} := \{(z, z^2) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$, so ist die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ zwar abgeschlossen aber nicht als Schnitt über endlich viele Halbräume darstellbar, also kein Polyeder (siehe Abbildung 2.7).

Damit gibt es abgeschlossene konvexe Hüllen, die keine Polyeder sind. Allerdings muss die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge noch nicht einmal abgeschlossen sein. Es kann sogar der Fall auftreten, dass auf dem Rand der konvexen Hülle kein einziger Punkt der Punktmenge liegt.

Beispiel 2.2.2 Es sei $\mathcal{P} := \{(n, 1 - \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(-n, -1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$. Dann gilt für den Abschluss der konvexen Hülle $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle \leq 1, i = 1, 2\}$, mit $v_1 := (0, 1)$, $v_2 := (0, -1)$. Man sieht, dass der Rand $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, v_i \rangle = 1, i = 1, 2\}$ keine Teilmenge von $\text{conv}(\mathcal{P})$ ist und $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{P} = \emptyset$ gilt, siehe Abbildung 2.8.

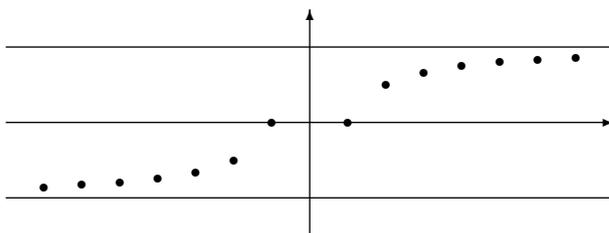


Abbildung 2.8: Menge mit $\partial \mathcal{P} = \emptyset$

In den oben betrachteten Beispielen hat man damit eine diskrete Punktmenge, deren konvexe Hülle zwar kein Polyeder dafür aber abgeschlossen ist, und eine diskrete Punktmenge, deren konvexe Hülle zwar nicht abgeschlossen, deren Abschluss der konvexen Hülle aber polyedrisch ist, gesehen. Eine Kombination der beiden Beispiele zeigt, dass auch beides gleichzeitig auftreten kann. Das heißt es existieren diskrete Punktfolgen mit einer nicht abgeschlossen konvexen Hülle und für die gilt, dass auch der Abschluss der konvexen Hülle kein Polyeder ist.

Beispiel 2.2.3 Für die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} := \{(n, n^2) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(-n, 1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$ gilt, dass die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen und der Abschluss der konvexen Hülle $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ nicht polyedrisch ist, siehe Abbildung 2.9.

Bei der Betrachtung der obigen Beispiele fällt auf, dass die nicht in der konvexen Hülle enthaltenen Randbereiche jeweils unbeschränkt und „linear“ sind. Es wird sich später zeigen lassen, dass dieses für nicht abgeschlossene konvexe Hüllen allgemein gilt. Genauer wird man sehen, dass die Randbereiche der konvexen Hülle, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, in wenigstens „einer Richtung linear“ und unbeschränkt sind. Dann ist natürlich auch die konvexe Hülle selbst unbeschränkt. Diese Tatsache, dass eine nicht abgeschlossene konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge unbeschränkt ist, sieht man jedoch auch ohne weiteres Wissen über das Randverhalten der konvexen Hülle. Für einen Beweis dieser Aussage wird lediglich die Diskretheit der Punktmenge benötigt.

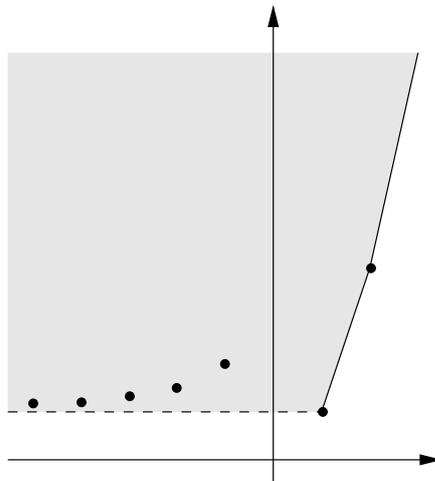


Abbildung 2.9: Konvexe Hülle nicht abgeschlossen, nicht polyedrisch

Satz 2.2.4 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Ist die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen, so ist sie auch nicht beschränkt.*

Beweis: Man zeige, dass aus der Beschränktheit der konvexen Hülle die Abgeschlossenheit folgt. Sei nun also $\text{conv}(\mathcal{P})$ beschränkt. Dann ist damit auch \mathcal{P} beschränkt und nach Satz 2.1.4 endlich. Damit ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ als konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge ein Polytop und somit abgeschlossen. Also folgt die Behauptung. \square

Man weiß also nun, dass die zu einer nicht abgeschlossenen konvexen Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ zugehörige diskrete Punktmenge \mathcal{P} unendlich sein muss.

Man beachte an dieser Stelle, dass aus der Nicht-Abgeschlossenheit einer Menge noch nicht folgt, dass diese Menge offen wäre. So kann es sein, dass Teile des Randes einer Menge zu ihr dazu gehören, es aber auch Randbereiche gibt, die nicht in der Menge enthalten sind, diese Menge also weder offen noch abgeschlossen ist. Ein Beispiel für eine solche Menge erhält man sofort, wenn man in Beispiel 2.2.2 die Punktmenge \mathcal{P} um einen Punkt $q \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ erweitert. So ist für $q := (0, 1)$ die Menge $\text{conv}(\mathcal{P} \cup \{q\})$ weder offen noch abgeschlossen. Im Verlauf dieser Arbeit werden weitere Beispiele solcher Mengen folgen.

Extrempunkte

Bei der Beschäftigung mit der Randstruktur einer konvexen Menge bzw. ihres Abschlusses ist die Beschreibung der Extrempunkte ein wichtiger Teil der Untersuchung. Dabei stellt sich die Frage, ob die Menge der Extrempunkte einer konvexen Menge K gleich der Menge der Extrempunkte ihres Abschlusses \overline{K} ist oder eine Inklusion der Mengen vorliegt. Man sieht leicht, dass die Extrempunkte des Abschlusses \overline{K} , die bereits in K enthalten sind, auch Extrempunkte von K sind, also $\text{Ext}(\overline{K}) \cap K \subset \text{Ext}(K)$ gilt.

Satz 2.2.5 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Ist x ein Extrempunkt von \overline{K} und gilt gleichzeitig $x \in K$, so ist x auch ein Extrempunkt von K .*

Beweis: Ist $x \in K$ ein Extrempunkt von \overline{K} , so lässt sich x nicht als echte Konvexkombination von Punkten aus \overline{K} darstellen. Dann gibt es aber offensichtlich auch keine solche Konvexkombination in K . Also ist x auch Extrempunkt von K . \square

Man beachte hier, dass die Bedingung $x \in K$ im obigen Satz 2.2.5 von eminenter Bedeutung ist. Lässt man diese Voraussetzung weg, so gilt die Aussage des Satzes in der Regel nicht mehr. Um sich dieses zu verdeutlichen, betrachte man das folgende Beispiel, das in ähnlicher Form auch in [Berk02] und [Leich80] zu finden ist.

Beispiel 2.2.6 Man betrachte die offene Kugel $K := B^\circ(x, r) \subset \mathbb{R}^n$ für einen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ und einen Radius $r > 0$. Betrachtet man nun den Abschluss $\overline{K} = B(x, r)$, so sieht man, dass es in jedem Randpunkt $y \in \partial B(x, r)$ genau eine Stützhyperebene an $B(x, r)$ gibt, die auch jeweils nur genau diesen Punkt enthält. Damit sind alle Randpunkte von $B(x, r)$ exponiert, also auch Extrempunkte von $\overline{K} = B(x, r)$. Es gilt $\text{Ext}(\overline{K}) = \text{Ext}(B(x, r)) = \partial B(x, r)$. Für die offene Kugel $K = B^\circ(x, r)$ gilt dagegen $\text{Ext}(K) = \emptyset$. Denn alle Punkte aus K sind innere Punkte, und man findet für alle diese Punkte stets eine (nicht triviale) Darstellung als Konvexkombination aus Punkten aus K .

Dieses Beispiel zeigt also, dass ein Extrempunkt des Abschlusses einer konvexen Menge nicht notwendig in der konvexen Menge enthalten sein muss. Die Menge der Extrempunkte des Abschlusses einer konvexen Menge ist damit nicht notwendig in der Menge der Extrempunkte der konvexen Menge enthalten. Es stellt sich nun die Frage, ob denn die Umkehrung der Aussage aus Satz 2.2.5 gilt: Ist ein Extrempunkt einer konvexen Menge auch immer Extrempunkt des Abschlusses der Menge?

Beispiel 2.2.7 Man betrachte die Menge $\mathcal{P} := (\{0\} \times \mathbb{Z}) \cup \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ und bezeichne den nicht auf der y -Achse liegenden Punkt als $a := (1, 0)$, siehe

Abbildung 2.10. Weiter sei $K := \text{conv}(\mathcal{P})$ die konvexe Hülle dieser diskreten Punktmenge. Dann ist der Punkt a nach Satz 1.2.15 zwar ein Extrempunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$, da $a \in \mathcal{P}$ und $a \notin \text{conv}(\mathcal{P} \setminus \{a\})$ gilt, aber *kein* Extrempunkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$, da $a = \frac{1}{2}((1, 1) + (1, -1))$ und $(1, 1), (1, -1) \in \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ gilt.

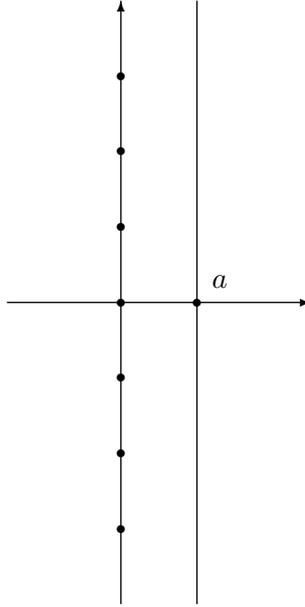


Abbildung 2.10: Menge mit $\{a\} = \text{Ext}(K) \neq \text{Ext}(\overline{K}) = \emptyset$

Damit hat man gesehen, dass ein Extrempunkt einer konvexen Menge nicht notwendig Extrempunkt des Abschlusses der konvexen Menge sein muss. Also ist in der Regel die Menge der Extrempunkte einer konvexen Menge auch nicht in der Menge der Extrempunkte des Abschlusses der Menge enthalten. Insgesamt erhält man damit, dass für konvexe Mengen $K \subset \mathbb{R}^n$ im allgemeinen *nicht* $\text{Ext}(K) = \text{Ext}(\overline{K})$ gilt, und sich noch nicht einmal ohne weiteres eine Inklusion der Mengen der Extrempunkte angeben lässt.

Es bleibt jedoch zu untersuchen, ob für den Spezialfall der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge, für den nach Satz 1.2.15 bereits bekannt ist, dass alle Extrempunkte der konvexen Hülle in der diskreten Punktmenge enthalten sind, eine analoge Aussage auch für die Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle gilt. Dazu betrachte man zunächst die exponierten Punkte des Abschlusses der konvexen Hülle.

Satz 2.2.8 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine diskrete Punktmenge. Ist $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ ein exponierter Punkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$, so folgt $x \in \mathcal{P}$.

Beweis: Man zeige, dass ein Punkt $x \in \overline{\text{conv}(\mathcal{P})} \setminus \mathcal{P}$ nie ein exponierter Punkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$ sein kann.

Für den Fall, dass $x \in \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$ liegt, ist die Behauptung nach Satz 1.2.15 und Satz 1.2.21 klar. Zu betrachten sind also noch die Punkte $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ mit $x \notin \text{conv}(\mathcal{P})$. Hier ist die Beweisidee nun folgende: Ist $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})$, so findet man eine Folge von Punkten in $\text{conv}(\mathcal{P})$, die gegen x konvergiert. Zu jedem Punkt der Folge findet man wiederum ein von Punkten aus \mathcal{P} erzeugtes Polytop, das diesen Punkt enthält. Damit erhält man eine Folge von Polytopen und weiter eine Folge von Punkten aus \mathcal{P} , die gegen jede x enthaltende Stützhyperebene konvergiert (siehe Abbildung 2.11). Die Diskretheit von \mathcal{P} liefert dann, dass es in jeder x enthaltenden Stützhyperebene noch einen weiteren Häufungspunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$ geben muss. Also ist x nicht exponiert und es folgt die Behauptung.

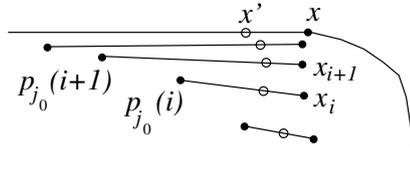


Abbildung 2.11: Gegen Hyp_x konvergierende Folge

Betrachte also nun den Fall, dass $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ und $x \notin \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt. Dann gibt es eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \text{conv}(\mathcal{P})$, die für $i \rightarrow \infty$ gegen x konvergiert. Zu jedem Folgenglied x_i gibt es Punkte $p_1(i), \dots, p_{k(i)}(i) \in \mathcal{P}$, $k(i) \leq n + 1$, so dass $x_i \in \text{conv}(p_1(i), \dots, p_{k(i)}(i))$ gilt. Weiterhin gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $i_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq i_\varepsilon$ gilt $x_i \in B(x, \varepsilon)$. In $B(x, \varepsilon)$ können nun aber nur endlich viele Punkte aus \mathcal{P} enthalten sein, so dass es einen Index $i_0 \geq i_\varepsilon$ gibt, ab dem $(x_i)_{i \geq i_0} \cap \mathcal{P} = \emptyset$ gilt. Weiter sei Hyp_x eine Stützhyperebene an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in x . Mit $x_i \rightarrow x$ gilt dann natürlich auch $d(x_i, \text{Hyp}_x) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Satz 2.1.10 liefert weiter, dass es zu jedem x_i auch stets wenigstens ein $p_{j_0}(i)$, $j_0 \in \{1, \dots, k(i)\}$, mit $d(p_{j_0}(i), \text{Hyp}_x) \leq d(x_i, \text{Hyp}_x)$ gibt. Für $i \geq i_0$ gilt dann stets $p_{j_0}(i) \neq x_i$, und $\text{conv}(x_i, p_{j_0}(i))$ enthält mehr als einen Punkt. Da \mathcal{P} diskret ist und $(x_i)_{i \geq i_0} \subset B(x, \varepsilon)$ gilt, gibt es ein $\delta_0 > 0$ mit $\delta_0 = \inf\{\|x_i - p_{j_0}(i)\| \mid i \geq i_0\}$. Wähle nun einen Punkt $y_i \in \text{conv}(x_i, p_{j_0}(i))$ so, dass für fest gewählte $0 < \delta_1 < \delta_2 \leq \delta_0$ gilt $\delta_1 \leq \|x_i - y_i\| \leq \delta_2$. Dann folgt $d(y_i, \text{Hyp}_x) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$. Da die Folge $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ (ab einem gewissen Index) in einer beschränkten Umgebung enthalten ist, besitzt sie nach dem Satz 1.0.1 von Bolzano-Weierstrass wenigstens einen Häufungspunkt $x' \in \text{Hyp}_x \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$. Wegen $\|x_i - y_i\| \geq \delta_1$ für alle $i \geq i_0$ ist $x' \neq x$. Damit gehört mit x auch die mehr als einen Punkt enthaltende Menge $\text{conv}(x, x')$ zu $\text{Hyp}_x \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$. Also gilt $\text{Hyp}_x \cap \overline{\text{conv}(\mathcal{P})} \supsetneq \{x\}$, und x ist kein exponierter Punkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$. \square

Man beachte, dass für den im Beweis konstruierten Punkt $x' \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ sowohl $x' \in \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ als auch $x' \notin \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gelten kann. Um zu sehen, dass beide Fälle auftreten können, betrachte man das folgende Beispiel.

Beispiel 2.2.9 Es sei $\mathcal{P} := \{(x, 0, 1 - \frac{1}{|x|}) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(x, \frac{1}{|x|}, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^3$. Dann ist $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ die von $\operatorname{Hyp}_0 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 0\}$ und $\operatorname{Hyp}_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \langle (x, y, z), (0, 0, 1) \rangle = 1\}$ begrenzte Schicht. Als Punkt aus $\partial \operatorname{conv}(\mathcal{P}) \setminus \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ wähle man $t := (0, 0, 1)$, siehe Abbildung 2.12. Dann findet man in Hyp_1 Punkte, die nahe an t liegen und zu $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gehören, zum Beispiel $t' := (0, \frac{1}{\varepsilon}, 1) \in \operatorname{conv}((-\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, 1), (\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}, 1)) \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ für $\varepsilon > 0$, als auch Punkte, die nicht zu $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gehören, wie zum Beispiel $t'' := (0, -\frac{1}{\delta}, 1)$ für $\delta > 0$.

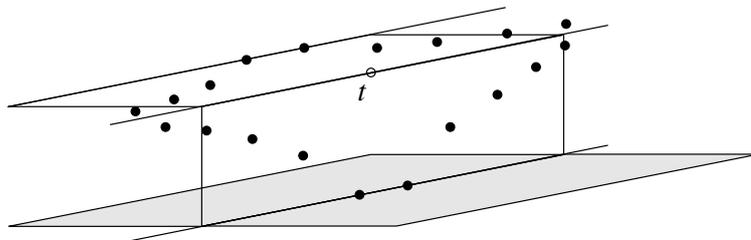


Abbildung 2.12: Punktmenge aus Beispiel 2.2.9

Nach Satz 2.2.8 gilt also, dass die exponierten Punkte des Abschlusses der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} bereits in \mathcal{P} liegen müssen, also die Inklusion $\operatorname{Exp}(\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})}) \subset \mathcal{P}$ gilt. Des weiteren gilt für beliebige konvexe Mengen K , dass die Menge der Extrempunkte von K stets im Abschluss der Menge der exponierten Punkte von K enthalten ist. Wendet man dieses Prinzip nun auf den Fall des Abschlusses der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge an, so folgt direkt, dass auch alle Extrempunkte des Abschlusses in \mathcal{P} enthalten sein müssen.

Satz 2.2.10 Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Ist $x \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ ein Extrempunkt von $\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})}$, so folgt $x \in \mathcal{P}$.

Beweis: Nach dem Satz 1.2.22 von Straszewicz ist in einer abgeschlossenen konvexen Menge jeder Extrempunkt Grenzwert einer Folge von exponierten Punkten der Menge. Damit gilt $\operatorname{Ext}(\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})}) \subset \overline{\operatorname{Exp}(\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})})}$. Nach Satz 2.2.8 gilt weiter $\operatorname{Exp}(\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})}) \subset \mathcal{P}$. Also ist jeder Extrempunkt von $\overline{\operatorname{conv}(\mathcal{P})}$ Grenzwert einer Folge von Punkten aus \mathcal{P} . Da aber \mathcal{P} nach Voraussetzung diskret ist und damit keine Häufungspunkte besitzt, müssen alle gegen einen Extrempunkt konvergierenden Folgen von exponierten Punkten

abbrechen, also den Extrempunkt bereits enthalten. Das heißt alle Extrempunkte von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ müssen bereits zu \mathcal{P} gehören. Damit folgt die Behauptung. \square

Damit hat man das erste Ziel bei der Beschreibung der Randstruktur bereits erreicht: Alle Extrempunkte der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} als auch alle Extrempunkte des Abschlusses dieser Menge sind in der gegebenen diskreten Punktmenge \mathcal{P} enthalten, das heißt es gilt

$$\text{Ext}(\text{conv}(\mathcal{P})) \subset \mathcal{P} \quad \text{und} \quad \text{Ext}(\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}) \subset \mathcal{P}.$$

Randbereiche

Da die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge sowohl Randbereiche, die in der konvexen Hülle enthalten sind, als auch welche, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, besitzen kann, stellt sich die Frage nach der Beschreibung solcher Randstücke. Um diesbezügliche Aussagen formulieren zu können, soll nun zunächst eine passende Notation eingeführt werden.

Definition 2.2.11 Es sei K eine nicht notwendig abgeschlossene, konvexe Menge. Die Menge aller zusammenhängender Randstücke von K sei mit

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(K) := \{T \subset \partial K \mid T \text{ zusammenhängend}\}$$

bezeichnet. Weiter sei

$$\mathcal{T}^{\subset} = \mathcal{T}^{\subset}(K) := \{T \in \mathcal{T} \mid T \subset K\}$$

die Menge aller zusammenhängender, in K enthaltener Randstücke, und

$$\mathcal{T}^{\emptyset} = \mathcal{T}^{\emptyset}(K) := \{T \in \mathcal{T} \mid T \cap K = \emptyset\},$$

die Menge aller zusammenhängender, nicht zu K gehörender Randstücke. Ein Randstück $T \in \mathcal{T}^{\subset}$ (bzw. $T \in \mathcal{T}^{\emptyset}$) heißt *maximal* in \mathcal{T}^{\subset} (bzw. \mathcal{T}^{\emptyset}), wenn es kein $T' \in \mathcal{T}^{\subset}$ (bzw. $T' \in \mathcal{T}^{\emptyset}$) mit $T \subsetneq T'$ gibt.

Die Definition eines maximalen Randstücks in \mathcal{T}^{\subset} (bzw. \mathcal{T}^{\emptyset}) ist sinnvoll, wenn in der Menge \mathcal{T}^{\subset} (bzw. \mathcal{T}^{\emptyset}) maximale Elemente auch wirklich existieren. Dazu überlege man sich folgendes: Betrachtet man die Menge \mathcal{T}^{\subset} (bzw. \mathcal{T}^{\emptyset}) mit der \subset -Relation, so erhält man eine Halbordnung auf der Menge. Bezüglich dieser Relation besitzt jede aufsteigende Kette eine obere Schranke, nämlich die Vereinigungsmenge der Kettenglieder. Das Zornsche Lemma 1.0.2 liefert dann die Existenz maximaler Elemente.

Man beachte an dieser Stelle, dass die Zusammenhangskomponenten des Randes von K bzw. der ganze Rand ∂K nicht unbedingt eine obere Schranke einer Kette in \mathcal{T}^C (bzw. \mathcal{T}^ζ) sein müssen. Jede obere Schranke ist sicherlich in einer Zusammenhangskomponente des Randes enthalten, kann aber eine echte Teilmenge davon sein. Betrachtet man dazu erneut das Beispiel 2.2.7, so bildet die Hyperebene $\text{Hyp}_a := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, a \rangle = 1\}$ eine Zusammenhangskomponente von $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$, die Teilmengen sowohl aus $\mathcal{T}^C(\text{conv}(\mathcal{P}))$ als auch aus $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ enthält. Eine Teilmenge von Hyp_a , die in $\mathcal{T}^C(\text{conv}(\mathcal{P}))$ enthalten ist, ist gerade die Menge $\{a\}$. Teilmengen von Hyp_a , die Elemente von $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ sind, sind alle zusammenhängenden Teilmengen, die in $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, a \rangle = 1, x_2 > 0\}$ oder in $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, a \rangle = 1, x_2 < 0\}$ enthalten sind. Somit ist Hyp_a von keiner Kette in $\mathcal{T}^C(\text{conv}(\mathcal{P}))$ bzw. $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ eine obere Schranke.

Das heißt um eine obere Schranke einer Kette in $\mathcal{T}^C(K)$ (bzw. $\mathcal{T}^\zeta(K)$) zu finden, muss man zunächst den Rand ∂K der konvexen Menge K in die disjunkten Mengen $R^\epsilon(K) := \{x \in \partial K \mid x \in K\}$ und $R^\zeta(K) := \{x \in \partial K \mid x \notin K\}$ zerlegen, und dann in $R^\epsilon(K)$ (bzw. $R^\zeta(K)$) aufsteigende Ketten von Randstücken betrachten. Man erhält dann, dass die maximalen Randstücke aus $\mathcal{T}^C(K)$ gerade die Zusammenhangskomponenten von $R^\epsilon(K)$ und die maximalen Randstücke aus $\mathcal{T}^\zeta(K)$ die Zusammenhangskomponenten von $R^\zeta(K)$ sind.

Betrachtet man beliebige konvexe Mengen K , so kann es sein, dass es in $R^\epsilon(K)$ und $R^\zeta(K)$ einelementige Zusammenhangskomponenten, also maximale Randstücke, die nur aus einem Punkt bestehen, gibt. Setzt man aber zusätzlich voraus, dass die betrachtete konvexe Menge die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge ist, so lässt sich zeigen, dass zwar in $R^\epsilon(\text{conv}(\mathcal{P}))$ nicht aber in $R^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ einelementige Zusammenhangskomponenten auftreten können. Dass es konvexe Hüllen von diskreten Punktmenge gibt, die ein maximales Randstück $T \in \mathcal{T}^C(\text{conv}(\mathcal{P}))$ mit $|T| = 1$ enthalten, sieht man bereits in dem oben betrachteten Beispiel 2.2.7, in dem die Menge $\{a\}$ ein solches maximales Randstück ist. Dass dagegen ein maximales Randstück $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ stets mehr als einen Punkt enthält, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 2.2.12 *Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen und $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ ein maximales Randstück. Dann gilt $|T| > 1$.*

Beweis: Angenommen es gilt $T = \{t\}$. Man zeige, dass dann t ein Extrempunkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ ist. Man nehme an, dass es $y, z \in \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$, $y \neq t \neq z$, und $0 < \lambda < 1$ mit $t = \lambda y + (1 - \lambda)z$ gibt. Da t ein Randpunkt ist, müssen dann nach Lemma 2.1.12 auch y, z im Rand von $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten sein, und es folgt weiter, dass auch $[y, t] := \text{conv}(y, t) \subset \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ und $[t, z] := \text{conv}(t, z) \subset \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt. Da T maximal ist und y, z von t verschieden sind, existiert sowohl in $[y, t]$ als auch in $[t, z]$ jeweils wenigstens

ein Randpunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$, der zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehört. Dann folgt aber, dass damit auch t in $\text{conv}(\mathcal{P})$ liegt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also muss t ein Extrempunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$ sein. Mit Satz 2.2.10 folgt dann aber weiter, dass t als Extrempunkt sogar in \mathcal{P} liegen muss, was ebenfalls ein Widerspruch ist. Insgesamt folgt damit die Behauptung. \square

Man kann sich nun fragen, wie diese Randbereiche aus $\mathcal{T}^c(K)$ bzw. die Bereiche aus $\mathcal{T}^z(K)$ aussehen, ob sie abgeschlossen, relativ offen, beschränkt oder unbeschränkt sind. Für allgemeine konvexe Mengen K kann sicherlich alles mögliche passieren und es werden sich keine konkreten Aussagen treffen lassen. Betrachtet man jedoch konvexe Hüllen diskreter Punktmenge, so kann man aus dieser zusätzlichen Bedingung Aussagen über das Randverhalten gewinnen. Dabei ist es sinnvoll, die Betrachtungen für maximale Randstücke durchzuführen, da sich nicht maximale Randbereiche nach belieben abgeschlossen, relativ offen oder beschränkt wählen lassen.

Satz 2.2.13 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Dann ist jedes maximale, beschränkte $T \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ abgeschlossen.*

Beweis: Es sei $T \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ ein beliebiges maximales, beschränktes Randstück. Da $T \subset \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt, liefert Folgerung 2.1.15, dass es zu jedem $x \in T$ Punkte $p_1(x), \dots, p_{k(x)}(x) \in \partial\mathcal{P}$ und $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{k(x)}(x) > 0$ mit $\sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x) = 1$ und $k(x) \leq n + 1$ (sogar $k(x) \leq n$) gibt, so dass $x = \sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x)p_i(x)$ gilt. Mit Lemma 2.1.13 folgt dann $\text{conv}(p_1(x), \dots, p_{k(x)}(x)) \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$. Da T maximal ist, folgt, dass auch $\text{conv}(p_1(x), \dots, p_{k(x)}(x)) \subset T$ gilt. Also sind für alle $x \in T$ auch die zugehörigen Punkte $p_i(x) \in \partial\mathcal{P}$ wieder in T . Aufgrund der Beschränktheit von T und der Diskretheit von \mathcal{P} , können aber in T nur endlich viele Punkte aus \mathcal{P} enthalten sein. Daher folgt, dass $\text{conv}(T \cap \mathcal{P})$ ein Polytop ist. Da sich alle Punkte aus T darstellen lassen als Konvexkombinationen aus Punkten aus $T \cap \mathcal{P}$ und T maximal ist, ist T als Teilmenge des Randes eine Vereinigung von Seiten des Polytops $\text{conv}(T \cap \mathcal{P})$. Nach Satz 1.4.3 ist jede Seite von $\text{conv}(T \cap \mathcal{P})$ ebenfalls wieder ein Polytop und damit abgeschlossen. Da T eine Vereinigung von endlich vielen dieser Seiten ist, folgt die Abgeschlossenheit von T . \square

Genau genommen hat man in obigem Beweis mehr als nur die Abgeschlossenheit eines maximalen, beschränkten Randstückes $T \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ gezeigt: Es wurde gezeigt, dass sich $\text{conv}(\mathcal{P})$ in diesem Randbereich „lokal polyedrisch“ verhält. Diese Eigenschaft von $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ wird später (siehe Seite 66) als „stückweise Linearität“ bezeichnet werden.

Um in dem Beweis von Satz 2.2.13 die Abgeschlossenheit zu zeigen würde es auch genügen nur zu zeigen, dass für jedes $x \in T$ auch die Strecken

$[x, p_i(x)] := \text{conv}(x, p_i(x))$ in T liegen, wobei die $p_i(x)$ die aus der Konvexdarstellung stammenden Randpunkte $p_1(x), \dots, p_{k(x)}(x) \in \partial\mathcal{P}$ seien. Dass dieses gilt, kann man wie folgt sehen: Für die Konvexdarstellung $x = \sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x) p_i(x)$ aus obigem Beweis gilt, dass für alle $i \in \{1, \dots, k(x)\}$ die Inklusion $[x, p_i(x)] \subset \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ erfüllt ist. Denn angenommen es gäbe eine Strecke $[x, p_j(x)]$, in der es ein $y \in [x, p_j(x)] \cap \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ gäbe, so könnte man nach dem Austauschlemma 2.1.6 in der Konvexdarstellung $x = \sum_{i=1}^{k(x)} \lambda_i(x) p_i(x)$ den Punkt $p_j(x)$ durch y ersetzen und würde neue $\lambda'_i(x) > 0$ finden, so dass sich x als Konvexkombination der übrigen $p_i(x)$ und y darstellen lassen würde. Dann wäre aber nach Lemma 2.1.7 auch x ein innerer Punkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$, im Widerspruch zu $x \in T \subset \partial \text{conv}(\mathcal{P})$. Also liegen alle diese Strecken $[x, p_i(x)]$ wieder im Rand von $\text{conv}(\mathcal{P})$.

Da T maximal ist, folgt dann wie in dem obigen Beweis, dass auch alle zu $x \in T$ zugehörigen Punkte $p_i(x) \in \partial\mathcal{P}$ in T enthalten sind. Mit der Beschränktheit von T und der Diskretheit von \mathcal{P} folgt dann auch hiermit die Behauptung.

Damit hat man nun gezeigt, dass ein maximales, beschränktes, in der konvexen Hülle enthaltenes Randstück stets abgeschlossen ist. Es folgt dann direkt, dass ein angrenzendes Randstück, das nicht in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten ist, nicht abgeschlossen sein kann. Man beachte noch, dass die Aussage aus Satz 2.2.13 für unbeschränkte Randstücke nicht mehr richtig sein muss. Als Beispiel betrachte man dazu die folgende Situation.

Beispiel 2.2.14 Es sei $\mathcal{P} := \{(x, 0, 1 - \frac{1}{|x|}) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \geq 0\} \cup \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y \in \mathbb{Z}, y \geq 1\}$, siehe Abbildung 2.13. Dann ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ eine Art „unbeschränkter Quader“, und es gilt, dass das maximale, in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthaltene Randstück, das die in der xz -Ebene liegenden Punkte aus \mathcal{P} enthält, nicht abgeschlossen ist.

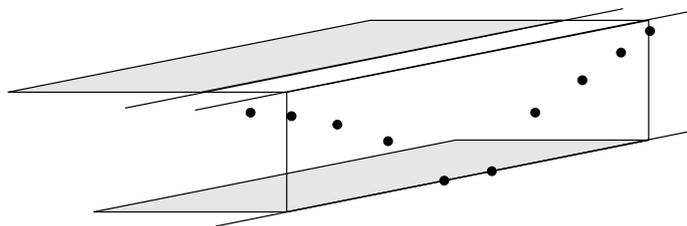


Abbildung 2.13: Unbeschränkter Quader

Wendet man sich nun den Randstücken zu, die nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehören, so entsteht aufgrund der bislang betrachteten Beispiele die Vermutung, dass

solche Randstücke unbeschränkt sein müssen, wenn sie zusätzlich maximal gewählt werden. Um diese Aussage zu beweisen, zeige man zunächst, dass der Schnitt des Randes der konvexen Hülle mit einer Stützhyperebene in einem nicht in der konvexen Hülle liegenden Randpunkt unbeschränkt ist.

Lemma 2.2.15 *Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen. Es sei $t \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})$ und Hyp_t eine beliebige Stützhyperebene in t an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Dann ist das Randstück $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ unbeschränkt.*

Beweis: Angenommen $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) =: T_t$ ist beschränkt. Es ist $T_t = \text{Hyp}_t \cap \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ als Schnitt zweier abgeschlossener konvexer Mengen ebenfalls abgeschlossen und nach Satz 1.1.7 konvex. Also ist T_t eine kompakte, konvexe Menge. Damit ist der Satz 1.2.16 von Minkowski anwendbar, und es folgt $T_t = \text{conv}(\text{Ext}(T_t))$. Nach Satz 1.2.14 gilt für die Menge der Extrempunkte $\text{Ext}(T_t) = \text{Ext}(\overline{\text{conv}(\mathcal{P})} \cap \text{Hyp}_t) = \text{Ext}(\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}) \cap \text{Hyp}_t$. Also sind alle Extrempunkte von T_t auch Extrempunkte von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$. Nach Satz 2.2.10 sind aber alle Extrempunkte von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ bereits in \mathcal{P} enthalten. Damit folgt $\text{Ext}(T_t) \subset \mathcal{P}$ und weiter $T_t = \text{conv}(\text{Ext}(T_t)) \subset \text{conv}(\mathcal{P})$. Dann gilt aber insbesondere auch $t \in \text{conv}(\mathcal{P})$, was ein Widerspruch ist. Somit folgt die Behauptung. \square

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der Schnitt des Randes $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ mit einer Stützhyperebene Hyp_t , die zu einem Punkt $t \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gehört, der nicht in $\text{conv}(\mathcal{P})$ liegt, nicht vollständig in $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten sein muss sondern auch Punkte aus $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten kann. Für ein Beispiel einer solchen Situation betrachte man erneut die Menge aus Beispiel 2.2.14. Dort ist der Randpunkt $t := (0, \frac{1}{2}, 1)$ nicht in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten, aber die eindeutig bestimmte Stützhyperebene $\text{Hyp}_t = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (0, 0, 1) \rangle = 1\}$ an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in t enthält sehr wohl Punkte aus $\text{conv}(\mathcal{P})$, sogar Punkte aus \mathcal{P} selbst. Allerdings lässt sich ebenfalls feststellen, dass der Schnitt von Hyp_t mit dem t enthaltenden maximalen Randstück $T \in \mathcal{T}^\mathcal{Q}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ in der Tat unbeschränkt ist.

Man zeige nun, dass aus der Unbeschränktheit von $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ für $t \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})$ auch die Unbeschränktheit des t enthaltenden, maximalen Randstücks $T \in \mathcal{T}^\mathcal{Q}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ folgt.

Satz 2.2.16 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, deren konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen sei. Dann ist jedes maximale $T \in \mathcal{T}^\mathcal{Q}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ unbeschränkt.*

Beweis: Zunächst sei die Beweisidee kurz skizziert: Es wird angenommen, dass T beschränkt ist. Dann ist auch für einen beliebigen Punkt $t \in T$ die Menge $T \cap \text{Hyp}_t$ beschränkt. Da $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ unbeschränkt ist, ist

in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ wenigstens ein Strahl enthalten. Für jeden Strahl, der in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten ist und mit T einen nicht leeren Schnitt hat, gilt nun, dass er wenigstens einen Punkt aus $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthält. Bezeichnet man die Menge aller dieser Strahlen mit \mathcal{S}_T , so lässt sich zeigen, dass dann $T \cap \text{Hyp}_t \subset \text{conv}(S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P}) \mid S(t', v') \in \mathcal{S}_T)$ gilt. Diese Teilaussage wird durch einen Widerspruch bewiesen. Aus dieser Inklusion folgt dann direkt $T \cap \text{Hyp}_t \subset \text{conv}(\mathcal{P})$, also ein Widerspruch zur Voraussetzung. Also muss die Menge $T \cap \text{Hyp}_t$ und damit auch T selbst unbeschränkt sein.

Sei nun $T \in \mathcal{T}^\mathcal{Z}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ ein beliebiges maximales Randstück. Es sei $t \in T$ ein beliebiger Punkt und Hyp_t eine beliebige Stützhyperebene in t an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Nach Lemma 2.2.15 ist $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ unbeschränkt, und mit Satz 1.2.14 folgt, dass die Extrempunkte von $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ zu der Menge der Extrempunkte von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ und damit nach Satz 2.2.10 zu \mathcal{P} gehören. Nimmt man nun an, dass T beschränkt ist, so ist auch $T \cap \text{Hyp}_t$ beschränkt. $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ enthält als unbeschränkte konvexe Menge nach Satz 1.1.16 wenigstens einen Strahl. Aus der Beschränktheit von $T \cap \text{Hyp}_t$ folgt nun, dass jeder in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ enthaltene Strahl, der mit T nicht leeren Schnitt hat, wenigstens einen Punkt in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthält. Denn sonst gäbe es einen Strahl $S(t', v')$ in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ mit $S(t', v') \cap T \neq \emptyset$ und $S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \emptyset$. Dann würde aber $T \subsetneq T \cup S(t', v') \in \mathcal{T}^\mathcal{Z}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ folgen, was ein Widerspruch zur Maximalität von T ist. Man betrachte also nun die Menge aller dieser Strahlen in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$, die mit T einen nicht leeren Schnitt haben, $\mathcal{S}_T := \{S(t', v') \subset \text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \mid S(t', v') \text{ Strahl, } t' \in \text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}), S(t', v') \cap T \neq \emptyset\}$. Dann folgt, dass $T \cap \text{Hyp}_t$ in $\text{conv}(S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P}) \mid S(t', v') \in \mathcal{S}_T)$ enthalten ist. Um diese Inklusion einzusehen, betrachte man einen beliebigen Punkt $t_0 \in T \cap \text{Hyp}_t$. Dazu betrachte man weiter die Menge aller Strahlen aus \mathcal{S}_T , die t_0 enthalten, also $\mathcal{S}_{t_0} := \{S(t', v') \in \mathcal{S}_T \mid t_0 \in S(t', v')\}$. Gilt nun für einen dieser Strahlen $S(t_1, v_1) \in \mathcal{S}_{t_0}$, dass es Punkte $x_1, x_2 \in S(t_1, v_1) \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ gibt, die $x_1 = t_1 + \lambda_1 v_1$, $x_2 = t_1 + \lambda_2 v_1$ mit $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ erfüllen, wobei $t_0 = t_1 + \lambda_0 v_1$ gelte, so folgt offensichtlich $t_0 \in \text{conv}(S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P}) \mid S(t', v') \in \mathcal{S}_T)$. An dieser Stelle sei kurz darauf hingewiesen, dass die Existenz eines solchen Punktes $x_1 \in \text{conv}(\mathcal{P})$ auf einem Strahl $S(t', v')$ für diesen Fall bereits ausreicht, da die Beschränktheit von $T \cap S(t', v')$ die Existenz eines Punktes $x_2 \in S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ mit den gewünschten Eigenschaften sicherstellt. Damit ist noch der verbleibende Fall zu betrachten, in dem für alle Strahlen $S(t', v') \in \mathcal{S}_{t_0}$ gilt, dass für alle Punkte $x' = t' + \lambda' v' \in S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ die Bedingung $\lambda' > \lambda'_0$ gilt, wobei jeweils $t_0 = t' + \lambda'_0 v'$ sei. In diesem Fall haben also alle Strahlen aus \mathcal{S}_{t_0} ihre Startpunkte stets in T . Dann folgt aber, dass es in T Extrempunkte gibt, genauer dass $T \cap \text{Ext}(\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \neq \emptyset$ gilt. Dieses sieht man wie folgt: Entweder gibt es in diesem Fall wenigstens einen Strahl $S(t', v') \in \mathcal{S}_{t_0}$, dessen Startpunkt t' ein Extrempunkt in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ ist, und man erhält $T \cap \text{Ext}(\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \neq \emptyset$. Oder keiner dieser Startpunkte t' ist ein Extrempunkt, was impliziert, dass es für

jeden dieser Punkte t' Punkte $x'_1, x'_2 \in \text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ und einen Wert $0 < \lambda' < 1$ mit $t' = \lambda'x'_1 + (1 - \lambda')x'_2$ gibt. Da $t' \in T$ gilt und T maximal ist, muss wenigstens einer der Punkte x'_1, x'_2 ebenfalls in T liegen, da sich t' sonst als Konvexkombination von Punkten aus $\text{conv}(\mathcal{P})$ darstellen ließe und damit selbst in $\text{conv}(\mathcal{P})$ liegen würde, was nicht sein kann. Sei nun o.B.d.A. $x'_1 \in T$. Da T beschränkt ist, gilt für die Punkte auf der Geraden $G(x'_1, x'_2 - x'_1) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = x'_1 + \lambda(x'_2 - x'_1), \lambda \in \mathbb{R}\}$, dass für $\lambda < 0$ gilt $x'_1 + \lambda(x'_2 - x'_1) \notin \text{conv}(\mathcal{P})$. Also findet man entweder auf einer dieser Geraden einen Extrempunkt in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ oder man iteriert das Verfahren und findet dann nach maximal n Schritten den gesuchten Extrempunkt in T . Insgesamt folgt also in diesem Fall $T \cap \text{Ext}(\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \neq \emptyset$. Das ist jedoch ein Widerspruch, da $T \in \mathcal{T}^\ell(\text{conv}(\mathcal{P}))$ und $\text{Ext}(\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \subset \mathcal{P}$ gilt. Dieser Fall kann somit nicht auftreten, und es folgt die behauptete Inklusion $T \cap \text{Hyp}_t \subset \text{conv}(S(t', v') \cap \text{conv}(\mathcal{P}) \mid S(t', v') \in \mathcal{S}_T)$. Damit folgt nun weiter $T \cap \text{Hyp}_t \subset \text{conv}(\mathcal{P})$, ebenfalls ein Widerspruch. Insgesamt folgt somit die Behauptung. \square

Der obige Beweis liefert auch, dass ein maximales Randstück T aus $\mathcal{T}^\ell(\text{conv}(\mathcal{P}))$ stets in wenigstens „einer Richtung linear“ ist. Denn man hat gezeigt, dass für jeden Punkt $t \in T$ und jede Stützhyperebene Hyp_t in t die Mengen $T \cap \text{Hyp}_t$ und $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ unbeschränkt sind. Da $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ konvex ist, ist in dieser Menge wenigstens ein Strahl enthalten. Analog zu dem Beweis von Satz 2.2.16 folgt, dass dann auch $T \cap \text{Hyp}_t$ wenigstens einen Strahl enthalten muss, also in wenigstens „einer Richtung linear“ ist. Denn angenommen $T \cap \text{Hyp}_t$ enthält keinen Strahl, so ist der Schnitt $S(t', v') \cap T$ für jeden in $\text{Hyp}_t \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ enthaltenen Strahl $S(t', v')$ beschränkt. Dieses führt aber ähnlich wie in obigem Beweis auf einen Widerspruch: Entweder existieren in diesem Fall Extrempunkte in T oder es gibt wenigstens einen solchen Strahl $S(t', v')$, der einen Startpunkt in $\text{conv}(\mathcal{P})$ besitzt, was aufgrund der Beschränktheit von $S(t', v') \cap T$ aber $S(t', v') \cap T \subset \text{conv}(\mathcal{P})$ impliziert; keiner der beiden Fälle kann somit auftreten. Also folgt, dass in $T \cap \text{Hyp}_t$ wenigstens ein Strahl existiert.

Mit Satz 2.2.16 erhält man natürlich auch die Aussage aus Lemma 2.2.12 als direkte Folgerung. Denn da ein maximales Randstück aus $\mathcal{T}^\ell(\text{conv}(\mathcal{P}))$ stets unbeschränkt ist, folgt sofort, dass die Zusammenhangskomponenten des nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörenden Randes nicht einelementig sein können.

Liniensegmente

Des weiteren scheint aus den bisher erzielten Ergebnissen über das Randverhalten der konvexen Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} zu folgen, dass es zu jedem Randpunkt $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ stets ein „Liniensegment“ in $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gibt, das diesen Punkt x enthält. Genauer gesagt heißt das, dass es stets eine Stützhyperebene an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in x gibt, deren Schnitt mit $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ den Punkt x echt enthält.

Hypothese 2.2.17 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Dann existiert zu jedem $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ eine Stützhyperebene Hyp_x in x an $\text{conv}(\mathcal{P})$ mit $\{x\} \subsetneq \text{Hyp}_x \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$.*

Für Punkte $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})$ folgt diese Behauptung direkt aus Lemma 2.2.15. Ist $x \in \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$, so findet man nach Folgerung 2.1.15 Punkte $p_1, \dots, p_k \in \partial \mathcal{P}$, $k \leq n + 1$, so dass $x \in \text{conv}(p_1, \dots, p_k)$ gilt. Also existiert eine Stützhyperebene Hyp_x in x , die wenigstens einen der Punkte p_i , $i \in \{1, \dots, k\}$, enthält. Also folgt auch in diesem Fall die Behauptung. Es ist jedoch noch nicht klar, ob diese Aussage auch für Punkte $p \in \partial \mathcal{P}$ gilt. Kann es sein, dass es einen Punkt $p \in \partial \mathcal{P}$ gibt, für den $\text{Hyp}_p \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$ für alle Stützhyperebenen Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p gilt? Von der Anschauung her würde man annehmen, dass dieses nicht passieren kann. Einen vollständigen Beweis dieser Aussage wird man erst später (siehe Satz 3.4.6) sehen. Zunächst sei der Spezialfall eines regulären Punktes $p \in \mathcal{P}$ betrachtet. Um für diesen Fall zu einem Beweis zu gelangen, betrachte man zunächst folgende Lemmata.

Lemma 2.2.18 *Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, in der es wenigstens einen regulären, exponierten Punkt $p \in \partial K$ gibt. Dann gilt*

- (1) $\dim K = n = \dim(\text{aff } \partial K)$,
- (2) ∂K ist zusammenhängend,
- (3) K enthält keine Gerade.

Beweis: Zu (1). Es sei $\partial K \neq \emptyset$ und $p \in \partial K$ ein regulärer, exponierter Punkt von K . Dann existiert in p genau eine Stützhyperebene Hyp_p an K , und es gilt $\text{Hyp}_p \cap K = \{p\}$. Zunächst überlege man sich, dass dann $|\partial K| > 1$ gilt. Angenommen es wäre $\partial K = \{p\}$. Dann wäre ∂K insbesondere eine nicht leere, konvexe Menge. In dem Fall, dass bereits $\dim K = n$ gilt, würde dann mit Lemma 1.2.19 folgen, dass K ein abgeschlossener Halbraum sein muss. Das ist aber ein Widerspruch zur Exponiertheit von p . Wäre aber $\dim K < n$, so wären alle Punkte von K Randpunkte und es würde $K = \partial K = \{p\}$ folgen. Der Punkt einer einelementigen Menge ist für $n \geq 2$ jedoch nie regulär, so dass auch dieser Fall auf einen Widerspruch führt.

Also gilt $\{p\} \subsetneq \partial K$. Damit folgt nun weiter $\dim(\text{aff } \partial K) = n$. Denn wäre $\dim(\text{aff } \partial K) < n$, so gäbe es eine Hyperebene $\text{Hyp} \subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial K \subset \text{Hyp}$. Aufgrund der Regularität von p ist dann $\text{Hyp} = \text{Hyp}_p$ die einzige p enthaltende Stützhyperebene an K . Da ∂K aber nicht nur aus p besteht, gäbe es somit weitere Randpunkte in Hyp_p , was ein Widerspruch zur Exponiertheit von p ist. Also gilt $\dim(\text{aff } \partial K) = n$, und es folgt $\dim K = n$.

Zu (2). Nach Satz 1.3.5 ist der Rand ∂K zusammenhängend, wenn K keine Schicht ist, das heißt der Rand nicht als Vereinigung $\partial K = \text{Hyp}_1 \cup \text{Hyp}_2$ zweier zueinander paralleler Hyperebenen $\text{Hyp}_1, \text{Hyp}_2$ dargestellt werden kann. Da in ∂K aber wenigstens ein exponierter Punkt p existiert, kann K keine Schicht sein. Also ist ∂K zusammenhängend.

Zu (3). Angenommen es existiert eine Gerade $G \subset K$. Ist G nicht parallel zu Hyp_p , so folgt, dass G die Hyperebene Hyp_p schneidet. Da K durch Hyp_p beschränkt wird, muss also G parallel zu Hyp_p sein. Dann existiert wegen Satz 1.1.17 aber auch eine zu G parallele, durch den Punkt p verlaufende Gerade in Hyp_p , die vollständig zu K gehört. Dieses ist jedoch ein Widerspruch, da p nach Voraussetzung regulär und exponiert ist. \square

Das bedeutet, eine konvexe Menge K des \mathbb{R}^n mit $\dim K < n$ besitzt nie einen Punkt, der gleichzeitig regulär und exponiert ist. Genauso kann eine n -dimensionale konvexe Menge des \mathbb{R}^n , deren Rand nicht zusammenhängend ist oder die eine Gerade enthält, keine regulären exponierten Punkte enthalten.

Lemma 2.2.19 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene konvexe Menge, und $p \in \partial K$ ein regulärer, exponierter Punkt. Dann findet man für alle $\varepsilon > 0$ in $B(p, \varepsilon) \cap \partial K \setminus \{p\}$ stets einen Extrempunkt.*

Beweis: Vorab sei kurz die Beweisidee skizziert: Man betrachtet eine gegen p konvergierende Folge von Randpunkten und zeigt, dass es zu jedem Punkt dieser Folge ein diesen Punkt enthaltendes Polytop gibt, dessen Ecken Extrempunkte von K sind oder auf extremalen Strahlen von K liegen. Diese Polytope lassen sich nun so wählen, dass unter den Eckpunkten stets Extrempunkte von K vorkommen. Es gilt, dass mit der gegen p konvergierenden Punktfolge auch die Abstände der zugehörigen Polytope zu der p enthaltenden Stützhyperebene gegen Null gehen und der minimale Abstand stets in einem Eckpunkt eines Polytops angenommen wird. Hier lässt sich nun weiter zeigen, dass sich die Polytope auch stets so wählen lassen, dass der minimale Abstand des Polytops zur Stützhyperebene von p in einer Ecke, die ein Extrempunkt von K ist, angenommen wird. Damit hat man eine Folge von Extrempunkten von K gefunden, die gegen die p enthaltende Stützhyperebene konvergiert. Diese Folge muss nun bereits gegen p konvergieren, da man sonst aufgrund der Regularität von p einen Widerspruch zur Exponiertheit von p erhalten würde.

Da $p \in \partial K$ regulär und exponiert ist, existiert in p genau eine Stützhyperebene Hyp_p an K und es gilt $\text{Hyp}_p \cap K = \{p\}$. Lemma 2.2.18 liefert weiter, dass K von der Dimension $\dim K = n$ und der Rand ∂K zusammenhängend ist. Also findet man eine Folge von Randpunkten $(y_i)_{i \in I} \subset \partial K$, die gegen p konvergiert. Weiter weiß man nach Lemma 2.2.18, dass K keine Gerade enthält. Daher lässt sich nach dem Darstellungssatz 1.2.18 von Klee jedes y_i als Konvexkombination aus Extrempunkten von K und Punkten auf extremalen Strahlen von K darstellen. Es gelte nun $y_i \in P(y_i) := \text{conv}(e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)})$, wobei $k(i) < \infty$ und $e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)} \in \partial K$ Extrempunkte von K oder Punkte auf extremalen Strahlen von K seien, die in einer Konvexkombination von y_i echt vorkommen. Das heißt es existieren $\lambda_1, \dots, \lambda_{k(i)} > 0$ mit $\sum_{i=1}^{k(i)} \lambda_i = 1$ und $y_i = \lambda_1 e_1^{(i)} + \dots + \lambda_{k(i)} e_{k(i)}^{(i)}$. Durch diese Bedingung wird wegen Lemma 2.1.12 und Lemma 2.1.13 sichergestellt, dass das Polytop $P(y_i)$ vollständig im Rand ∂K enthalten ist.

Zunächst überlege man sich, dass es für jedes y_i stets eine Konvexdarstellung gibt, in der wenigstens ein Extrempunkt von K vorkommt. Angenommen es gibt zu einem Punkt y_i eine Darstellung $y_i = \lambda_1 e_1^{(i)} + \dots + \lambda_{k(i)} e_{k(i)}^{(i)}$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_{k(i)} > 0$ und $\sum_{i=1}^{k(i)} \lambda_i = 1$, in der alle $e_j^{(i)}$ auf extremalen Strahlen liegen und keiner dieser Punkte ein Extrempunkt ist. Man wähle ein $e_r^{(i)}$, $r \in \{1, \dots, k(i)\}$ fest aus. Es gelte $e_r^{(i)} \in S_r \in \text{RExt}(K)$. Dann lässt sich $e_r^{(i)}$ als Konvexkombination aus dem Startpunkt $\tilde{s}_r^{(i)}$ von S_r , der nach Definition 1.2.17 ein Extrempunkt von K ist, und einem weiteren Punkt $s_r^{(i)} \in S_r$ darstellen. Man findet also ein $0 < \mu < 1$ mit $e_r^{(i)} = \mu \tilde{s}_r^{(i)} + (1 - \mu) s_r^{(i)}$. Ersetzt man nun in der Konvexdarstellung $y_i = \lambda_1 e_1^{(i)} + \dots + \lambda_{k(i)} e_{k(i)}^{(i)}$ den Punkt $e_r^{(i)}$ durch dessen Konvexdarstellung $\mu \tilde{s}_r^{(i)} + (1 - \mu) s_r^{(i)}$, so erhält man

$$y_i = \lambda_1 e_1^{(i)} + \dots + \lambda_{r-1} e_{r-1}^{(i)} + \lambda_r \mu \tilde{s}_r^{(i)} + \lambda_r (1 - \mu) s_r^{(i)} + \lambda_{r+1} e_{r+1}^{(i)} + \dots + \lambda_{k(i)} e_{k(i)}^{(i)}$$

als neue Konvexdarstellung von y_i , in der ein Extrempunkt von K mit einem Koeffizienten echt größer Null vorkommt. Das so entstandene neue, y_i enthaltende Polytop sei mit $P'(y_i) := \text{conv}(e_1^{(i)}, \dots, e_{r-1}^{(i)}, \tilde{s}_r^{(i)}, s_r^{(i)}, e_{r+1}^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)})$ bezeichnet. Da sich $\tilde{s}_r^{(i)}$ als Extrempunkt von K nicht aus den Punkten $e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)}, s_r^{(i)} \in \partial K$ konvex kombinieren lässt, ist $\tilde{s}_r^{(i)}$ auch ein Extrempunkt von $P'(y_i)$. Damit hat man ein y_i enthaltendes Polytop $P'(y_i) \subset \partial K$ gefunden, bei dem wenigstens eine Ecke ein Extrempunkt von K ist.

Da $(y_i)_{i \in I}$ gegen p konvergiert, gilt insbesondere $d(y_i, \text{Hyp}_p) \rightarrow 0$ und damit auch $d(P(y_i), \text{Hyp}_p) \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ für ein y_i enthaltendes Polytop $P(y_i) = \text{conv}(e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)}) \subset \partial K$. Nach Satz 2.1.10 wird der minimale Abstand von $P(y_i)$ zu Hyp_p auch stets in einer Ecke von $P(y_i)$, also in einem der Punkte $e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)}$ angenommen. Das heißt man findet mit $y_i \rightarrow p$ auch

eine Folge $(e_{j_i}^{(i)})_{i \in I}$ von Eckpunkten von zugehörigen Polytopen, die gegen Hyp_p konvergiert.

Man zeige, dass sich für jedes y_i die Punkte $e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)}$ aus der Konvexdarstellung so wählen lassen, dass der minimale Abstand von $P(y_i)$ zu Hyp_p stets auch in einem Extrempunkt von K angenommen wird. Dieses sieht man wie folgt: Angenommen es gibt auf einem extremalen Strahl $S_r \in \text{RExt}(K)$ einen in der Konvexdarstellung vorkommenden Punkt $e_r^{(i)}$, der kein Extrempunkt von K ist, dessen Abstand zu Hyp_p aber echt kleiner als der Abstand aller in $\{e_1^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)}\}$ vorkommenden Extrempunkte zu Hyp_p ist. Dann lässt sich wie oben $e_r^{(i)}$ als Konvexkombination aus dem Startpunkt $\tilde{s}_r^{(i)}$ von S_r und einem weiteren Punkt $s_r^{(i)} \in S_r$ darstellen. Ist S_r nicht parallel zu Hyp_p , so lässt sich der Punkt $s_r^{(i)}$ so wählen, dass $d(s_r^{(i)}, \text{Hyp}_p) > d(e_r^{(i)}, \text{Hyp}_p)$ gilt. Tauscht man nun den Punkt $e_r^{(i)}$ gegen die Punkte $\tilde{s}_r^{(i)}, s_r^{(i)}$ aus, so erhält man ein neues, y_i enthaltendes Polytop $\tilde{P}(y_i) := \text{conv}(e_1^{(i)}, \dots, \tilde{s}_r^{(i)}, s_r^{(i)}, \dots, e_{k(i)}^{(i)})$, aus dessen Eckenmenge der bislang nächste Punkt $e_r^{(i)}$ an Hyp_p eliminiert und in die gleichzeitig ein weiterer Extrempunkt von K hinzugenommen worden ist. Die für diese Konstruktion benötigte Bedingung, dass der extremale Strahl S_r nicht zu Hyp_p parallel sein darf, ist für alle extremalen Strahlen von K erfüllt. Denn nach Voraussetzung ist p regulär und exponiert, so dass die Menge K nach Satz 1.1.17 keinen zu Hyp_p parallelen Strahl enthalten kann. Wird bei dem so erzeugten neuen Polytop $\tilde{P}(y_i)$ der minimale Abstand zu Hyp_p immer noch nicht in einem Extrempunkt angenommen, so wende man dieses Verfahren erneut an. Spätestens nach $k(i)$ Schritten hat man dann ein y_i enthaltendes Polytop erzeugt, das den minimalen Abstand zu Hyp_p in einem Extrempunkt von K annimmt.

Insgesamt findet man somit eine Folge von Extrempunkten, die gegen Hyp_p konvergiert. Angenommen es gibt ein $\varepsilon_0 > 0$, für das $B(p, \varepsilon_0) \cap \partial K \setminus \{p\}$ keinen Extrempunkt von K enthält. Dann existiert in Hyp_p wenigstens ein von p verschiedener Häufungspunkt einer Folge von Punkten aus K . Da K abgeschlossen ist, gehört dieser Häufungspunkt zu K und man hat $|\text{Hyp}_p \cap K| > 1$. Das ist aber ein Widerspruch, da p regulär und exponiert ist und somit $|\text{Hyp}_p \cap K| = 1$ gilt. Also hat man eine gegen p konvergierende Folge von Extrempunkten gefunden, und es folgt die Behauptung. \square

Nach dem Satz 1.2.22 von Straszewicz ist bereits bekannt, dass jeder Extrempunkt einer abgeschlossenen konvexen Menge Grenzwert einer Folge von exponierten Punkten ist. Mit dem obigen Lemma 2.2.19 hat man nun zusätzlich gezeigt, dass auch jeder reguläre exponierte Punkt einer abgeschlossenen konvexen Menge Grenzwert einer Folge von Extrempunkten der Menge ist. Dabei ist die Bedingung der Regularität jedoch wesentlich,

wenn die Folge von Extrempunkten nicht nur aus einem Element bestehen soll. Für ein Beispiel, in dem die Aussage aufgrund fehlender Regularität (außer mit der trivialen einelementigen Folge) nicht gilt, sei an ein Polytop erinnert.

Wendet man dieses Lemma nun bei der Randbetrachtung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} an, so lässt sich zeigen, dass eine Stützhyperebene Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in einem Punkt $p \in \partial\mathcal{P}$ mit dem Rand $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht nur p gemeinsam haben kann, wenn sie in p eindeutig ist. Anders ausgedrückt heißt das, dass ein regulärer Punkt des Abschlusses der konvexen Hülle, der gleichzeitig in der diskreten Punktmenge enthalten ist, nie exponiert sein kann.

Folgerung 2.2.20 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $p \in \partial\mathcal{P}$ ein regulärer Punkt mit Stützhyperebene Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Dann ist p kein exponierter Punkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$, das heißt es gilt $\{p\} \subsetneq \text{Hyp}_p \cap \partial\text{conv}(\mathcal{P})$.*

Beweis: Es sei $p \in \partial\mathcal{P}$ ein regulärer Punkt mit Stützhyperebene Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Angenommen, p ist zusätzlich ein exponierter Punkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$. Dann folgt mit Lemma 2.2.19, dass es eine unendliche Folge von Extrempunkten von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ gibt, die gegen p konvergiert. Da nach Satz 2.2.10 alle Extrempunkte von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ in \mathcal{P} enthalten sind, erhält man somit einen Widerspruch zur Diskrettheit von \mathcal{P} . Also folgt die Behauptung. \square

Damit weiß man nun, dass es auch zu jedem regulären Punkt $p \in \partial\mathcal{P}$ einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} ein Liniensegment in $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ gibt, das p echt enthält. Für die nicht regulären Punkte $p \in \partial\mathcal{P}$ wird man die gleiche Aussage an späterer Stelle als einfache Folgerung aus dem Verhalten des „Richtungskegels“ von p erhalten (siehe Satz 3.4.6).

Insgesamt hat man jetzt das Randverhalten der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge weitgehend beschrieben. Man weiß nun, dass sowohl die Extrempunkte der konvexen Hülle als auch die Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle in der diskreten Punktmenge enthalten sind. Die Betrachtung der Randbereiche hat gezeigt, dass die maximalen Randbereiche, die mit der konvexen Hülle einen leeren Schnitt haben, stets unbeschränkt sind und auch mit allen zugehörigen Stützhyperebenen einen unbeschränkten Schnitt besitzen. Andererseits hat man gesehen, dass beschränkte, zu der konvexen Menge gehörende Randbereiche abgeschlossen sind und sich der Rand in diesen Bereichen polyedrisch verhält. Zusätzlich weiß man, dass es zu jedem Randpunkt ein Liniensegment im Rand der konvexen Hülle gibt, das diesen Punkt enthält und nicht nur aus diesem Punkt besteht. Es gibt also stets eine „Richtung“, in der sich der Rand der konvexen Hülle „linear“ verhält. Allerdings hat man noch nicht gezeigt, dass sich der Rand insgesamt „lokal polyedrisch“ verhalten würde. Dass diese

Aussage im Allgemeinen auch nicht stimmt, wird man an einem Beispiel im nächsten Abschnitt sehen (siehe Beispiel 2.3.9). Eine Ausnahme im Bezug auf diese Eigenschaft stellt der \mathbb{R}^2 dar. Man wird sehen, dass sich für die konvexe Hülle einer ebenen diskreten Punktmenge diese zusätzliche Eigenschaft zeigen lässt.

2.3 Spezialfall \mathbb{R}^2

Betrachtet man das Verhalten der konvexen Hülle einer ebenen diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ im Vergleich zu dem Verhalten der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge in beliebiger Dimension n , so stellt man fest, dass die Dimension 2 einen Spezialfall darstellt. Im \mathbb{R}^2 weist die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ zusätzliche Eigenschaften auf, die im Allgemeinen nicht gelten müssen. So lässt sich hier zeigen, dass der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge stets „stückweise linear“ ist. Setzt man zusätzlich die uniforme Diskretheit der Punktmenge \mathcal{P} voraus, so lässt sich mit dieser Eigenschaft weiter zeigen, dass sich jede diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ so zu einer Punktmenge $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$ erweitern lässt, dass sich der Abschluss der konvexen Hülle nicht ändert, aber die konvexe Hülle der Erweiterung abgeschlossen ist.

Da sich im \mathbb{R}^2 ein Teil der Aussagen aus dem vorhergehenden Abschnitt unabhängig vom allgemeinen Fall und zum Teil auch mit alternativen Methoden, die in beliebiger Dimension nicht mehr gelten, zeigen lassen, werden in diesem Abschnitt einige Eigenschaften, deren Gültigkeit bereits gezeigt worden ist, noch einmal neu bewiesen.

Definition 2.3.1 Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann heißt der Rand ∂K von K *stückweise linear*, wenn sich \overline{K} in jeder beschränkten Umgebung als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen lässt, das heißt wenn es zu jeder beschränkten Umgebung U (abgeschlossene) Halbräume H_1^-, \dots, H_k^- gibt, so dass gilt $U \cap \overline{K} = U \cap \left(\bigcap_{i=1}^k H_i^- \right)$. Die Menge K heißt dann *lokal polyedrisch*.

Setzt man die Abgeschlossenheit der konvexen Menge K voraus, so ist K genau dann lokal polyedrisch, wenn K geschnitten mit jedem Polytop wieder ein Polytop ist. Dieses sieht man wie folgt: Zu jedem Polytop P findet man eine beschränkte Umgebung U , die P enthält. In U sei nun K darstellbar als Schnitt von endlich vielen Halbräumen. Schneidet man K mit P , so ist $K \cap P$ immer noch darstellbar als Schnitt von endlich vielen Halbräumen und nach Konstruktion beschränkt. Da K und P abgeschlossen sind, ist auch $K \cap P$ abgeschlossen, also ein Polytop. Andererseits gelte nun, dass $K \cap P$ für alle Polytope P wieder ein Polytop sei. Zu jeder beschränkten Umgebung U lässt sich ein Polytop P finden, das U enthält. $K \cap P$ lässt sich insbesondere als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen. Damit ist dann auch K in U darstellbar als Schnitt von endlich vielen Halbräumen. Also folgt die behauptete Äquivalenz.

In der Literatur wird diese Eigenschaft einer abgeschlossenen konvexen Menge K auch als *beschränkt polyedrisch* (engl. *boundedly polyhedral*, vgl. [Klee59]) oder die Menge als *verallgemeinertes Polyeder* (engl. *generalized*

polyhedron, vgl. [Grub07]) bezeichnet. Bei diesem Begriff ist die Abgeschlossenheit der Menge von großer Bedeutung. Daher ist es begründet hier, wo ausdrücklich nicht abgeschlossene Mengen untersucht werden sollen, zur besseren Unterscheidung den Begriff einer „lokal“ polyedrischen Menge zu verwenden.

Erinnert man sich an Satz 2.2.13, in dessen Beweis gezeigt wurde, dass sich ein beschränktes, maximales, zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörendes Randstück der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ als Vereinigung endlich vieler Seiten eines Polytops darstellen lässt, so kann man dieses Randstück T auch als stückweise linear bzw. $\text{conv}(\mathcal{P})$ als in diesem Bereich lokal polyedrisch bezeichnen. Betrachtet man nun speziell den zweidimensionalen Fall, so scheinen es, als ließen sich nur Beispiele konvexer Hüllen diskreter Punktfolgen konstruieren, in denen $\text{conv}(\mathcal{P})$ stückweise linear ist. Das legt wiederum die Vermutung nahe, dass die konvexe Hülle einer ebenen diskreten Punktmenge immer lokal polyedrisch ist. Der Beweis dieser Aussage ist eines der Ziele dieses Abschnittes. Um dieses Ziel zu erreichen werden zunächst einige Hilfssätze benötigt.

Hilfssätze

Der Satz 1.1.9 von Caratheodory besagt für die konvexe Hülle einer zweidimensionalen Menge, dass für jeden Punkt der konvexen Hülle maximal drei Punkte der Ausgangsmenge benötigt werden, um ihn als Konvexkombination darzustellen. Zur Darstellung eines Randpunktes einer abgeschlossenen konvexen Hülle genügen sogar nur zwei Punkte der Ausgangsmenge.

Lemma 2.3.2 *Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ und $\text{conv}(M)$ abgeschlossen. Dann lässt sich jeder Randpunkt $x \in \partial \text{conv}(M)$ als Konvexkombination maximal zweier Punkte aus M darstellen.*

Beweis: Sei $x \in \partial \text{conv}(M)$ ein beliebiger Randpunkt. Nach dem Satz 1.1.9 von Caratheodory gibt es $p_1, p_2, p_3 \in M$, so dass sich x als Konvexkombination dieser Punkte darstellen lässt, $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$, $\lambda_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$. Betrachte zunächst den Fall, dass p_1, p_2, p_3 kollinear sind, o.B.d.A. liege p_2 auf der Strecke zwischen p_1 und p_3 . Das heißt es gibt $\mu \geq 0$ mit $p_2 = (1 - \mu)p_1 + \mu p_3$. Dann folgt für x die Darstellung $x = (\lambda_1 + \lambda_2(1 - \mu))p_1 + (\lambda_3 + \lambda_2\mu)p_3$, was wegen $(\lambda_1 + \lambda_2(1 - \mu)) + (\lambda_3 + \lambda_2\mu) = \lambda_1 + (1 - \mu + \mu)\lambda_2 + \lambda_3 = 1$ eine Konvexdarstellung aus p_1 und p_3 ist.

Es bleibt noch der Fall, dass die Punkte p_1, p_2, p_3 nicht kollinear sind, zu betrachten. Angenommen für $x = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3$ wären $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Dann wäre x nach Satz 1.1.11 im relativen Inneren von $\text{conv}(p_1, p_2, p_3)$. Da für nicht kollineare Punkte $\dim \text{conv}(p_1, p_2, p_3) = 2$ gilt, wäre x damit sogar

ein innerer Punkt von $\text{conv}(p_1, p_2, p_3)$, und es würde $x \in \text{conv}(M)^\circ$ folgen. Dieses ist ein Widerspruch. Dieser Fall kann somit nicht auftreten und es folgt die Behauptung. \square

Lässt sich ein Randpunkt einer ebenen konvexen Menge als nicht triviale Konvexkombination zweier anderer Punkte der Menge darstellen, so müssen auch diese beiden Punkte im Rand der Menge liegen, wodurch die Stützhyperebene in diesem Punkt eindeutig bestimmt wird. Man erhält also die Menge der Punkte, die nicht regulär sind, als Teilmenge der Menge der Extrempunkte.

Lemma 2.3.3 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine abgeschlossene konvexe Menge. Existieren in $x \in \partial K$ mehrere verschiedenen Stützhyperebenen an K , so ist x ein Extrempunkt von K .*

Beweis: Man zeige die äquivalente Aussage, dass ein Randpunkt, der kein Extrempunkt ist, stets regulär ist. Es sei $x \in \partial K$ kein Extrempunkt. Dann gibt es $x_1, x_2 \in K \setminus \{x\}$ und $\lambda > 0$ mit $x = (1 - \lambda)x_1 + \lambda x_2$. Wäre wenigstens einer der Punkte x_1, x_2 im Inneren von K , so würde auch $x \in K^\circ$ folgen, was ein Widerspruch wäre. Also gilt $x_1, x_2 \in \partial K$. Damit folgt auch $\text{conv}(x_1, x_2) \subset \partial K$. Denn gäbe es einen Punkt $y \in \text{conv}(x_1, x_2) \cap K^\circ$, so ließe sich x als Konvexkombination aus y und x_1 oder x_2 darstellen und wäre damit ein innerer Punkt, man erhielte wieder einen Widerspruch. Also sind x, x_1, x_2 alle in der gleichen stützenden Hyperebene von K enthalten. Da x im relativen Inneren von $\text{conv}(x_1, x_2)$ liegt und $K \subset \mathbb{R}^2$ gilt, ist damit die durch x laufende Stützhyperebene an K eindeutig bestimmt, also x ein regulärer Punkt. \square

Lemma 2.3.4 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossen konvexe Menge. Existieren in $x_0 \in \partial K$ wenigstens n Stützhyperebenen an K , deren Normalenvektoren linear unabhängig sind, so ist x_0 ein exponierter Punkt und damit auch ein Extrempunkt von K .*

Beweis: Es seien $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\begin{aligned} \text{Hyp}(y_1, c_1) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y_1 \rangle = c_1\}, \\ &\vdots \\ \text{Hyp}(y_n, c_n) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y_n \rangle = c_n\} \end{aligned}$$

Stützhyperebenen an K in x_0 seien. Definiere nun $y := \sum_{i=1}^n y_i$, $c := \sum_{i=1}^n c_i$ und

$$\text{Hyp}(y, c) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, y \rangle = c\}.$$

Da $x_0 \in \text{Hyp}(y_i, c_i)$ für alle $i = 1, \dots, n$ gilt, folgt $\langle x_0, y \rangle = \langle x_0, \sum_{i=1}^n y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_0, y_i \rangle = \sum_{i=1}^n c_i = c$ und damit $x_0 \in \text{Hyp}(y, c)$. Weiter gelten für alle Punkte $x \in K$ die Ungleichungen $\langle x, y_i \rangle \leq c_i$ für $i = 1, \dots, n$. Also gilt für alle $x \in K$ auch $\langle x, y \rangle = \langle x, \sum_{i=1}^n y_i \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x, y_i \rangle \leq \sum_{i=1}^n c_i = c$, also $x \in H^-(y, c)$. Damit ist $\text{Hyp}(y, c)$ eine weitere Stützhyperebene an K in x_0 . Sei nun $x \in \text{Hyp}(y, c) \cap K$. Das heißt für x gilt $\langle x, y_1 \rangle \leq c_1, \dots, \langle x, y_n \rangle \leq c_n$ und $\langle x, y \rangle = c$. Das impliziert aber $\langle x, y_i \rangle = c_i$ für alle $i = 1, \dots, n$, also $x \in \text{Hyp}(y_1, c_1) \cap \dots \cap \text{Hyp}(y_n, c_n)$. Da y_1, \dots, y_n linear unabhängig sind, gilt $\text{Hyp}(y_1, c_1) \cap \dots \cap \text{Hyp}(y_n, c_n) = \{x_0\}$. Also folgt $\text{Hyp}(y, c) \cap K = \{x_0\}$. Damit ist x_0 ein exponierter Punkt von K und nach Satz 1.2.21 auch Extrempunkt. \square

Nachdem man nun weiß, dass ein Randpunkt, in dem es mehrere stützende Hyperebenen gibt, ein Extrempunkt sein muss, stellt sich die Frage, ob es auch sein kann, dass alle Randpunkte einer konvexen Menge diese Eigenschaft besitzen. Es ist klar, dass es konvexe Mengen gibt, deren sämtliche Randpunkte Extrempunkte sind; ein Standardbeispiel für eine solche Menge ist die Kugel. Jedoch sieht man an diesem Beispiel auch, dass es nicht in jedem Extrempunkt mehrere verschiedene Stützhyperebenen geben muss. Denn im Fall der Kugel gibt es in jedem Randpunkt nur genau eine Stützhyperebene. Die Frage nach der Existenz konvexer Mengen, die in allen Randpunkten mehrere verschiedene Stützhyperebenen besitzen, wird damit also noch nicht beantwortet. Es ist jedoch anzunehmen, dass solche Fälle, sollte es sie geben, die Randbetrachtung von konvexen Mengen erheblich erschweren könnten. Eine Antwort auf diese Frage liefert der im ersten Kapitel zitierte Satz 1.2.7, der besagt, dass die Menge der regulären Punkte eines konvexen Körpers eine dichte Teilmenge des Randes ist. Dann gilt aber auch für eine beliebige konvexe Menge, dass die Menge der regulären Punkte in jedem Randstück, das mehr als einen Punkt enthält, dicht liegt.

Lemma 2.3.5 *In jedem Randstück $T \in \mathcal{T}(K)$ einer konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$, das mehr als einen Punkt enthält, gibt es unendlich viele reguläre Punkte, das heißt es gibt in T unendlich viele Punkte, in denen es genau eine Stützhyperebene an K gibt.*

Beweis: Nach Satz 1.2.7 liegt die Menge der regulären Punkte dicht in der Menge der Randpunkte eines konvexen Körpers. Um diesen Satz hier anwenden zu können, betrachte man eine Überdeckung $\bigcup_{i \in I} B_i$ von T , wobei die B_i n -dimensionale Kugeln seien, und I eine Indexmenge bezeichne. Für eine beliebige Kugel B_i ist dann der Abschluss der Einschränkung von K auf B_i , also $K_i := \overline{K \cap B_i}$, ein konvexer Körper. Da die Menge der regulären

Punkte von K_i dicht in der Menge aller Randpunkte von K_i liegt, liegen auch in $T \cap B_i \subset \partial K_i$ unendlich viele reguläre Randpunkte. Damit folgt direkt die Behauptung. \square

Diese Eigenschaft konvexer Mengen lässt sich nutzen, um zu zeigen, dass jede zweidimensionale konvexe Menge, deren Rand nicht vollständig in einer einzigen Hyperebene enthalten ist, eine „Sekante“ besitzt. Dabei sei mit „Sekante“ eine Hyperebene, die den Rand der konvexen Menge in genau zwei verschiedenen Punkten schneidet, bezeichnet.

Satz 2.3.6 *Es sei $K \subset \mathbb{R}^2$ eine konvexe Menge, $T \in \mathcal{T}(K)$ mit $|T| > 1$ und es existiere keine Hyperebene Hyp mit $T \subset \text{Hyp}$. Dann gibt es eine Hyperebene (Sekante) S durch T mit $|S \cap T| = 2$.*

Beweis: Man wähle einen beliebigen Punkt $t \in T$, in dem es genau eine Stützhyperebene Hyp_t an K gibt. Nach Lemma 2.3.5 existiert so ein Punkt. Da nach Voraussetzung $T \not\subset \text{Hyp}_t$ gilt, gibt es einen Punkt $t_0 \in T$ mit $t_0 \notin \text{Hyp}_t$. Dann erfüllt die durch t und t_0 laufende und dadurch eindeutig bestimmte Hyperebene $S := t_0 + \mathbb{R}(t - t_0)$ die gewünschte Bedingung $|S \cap T| = 2$, ist also die gesuchte Sekante durch T . Dieses sieht man wie folgt: Zunächst gilt $S \neq \text{Hyp}_t$, da nach Konstruktion $t_0 \in S$ aber $t_0 \notin \text{Hyp}_t$ gilt. Wegen $t, t_0 \in S \cap T$ gilt $|S \cap T| \geq 2$. Wäre nun $|S \cap T| > 2$, so gäbe es wenigstens einen weiteren Punkt $t' \in S \cap T$ mit $t \neq t' \neq t_0$. Dann wären t, t_0, t' kollineare Randpunkte von K und es würde $\text{conv}(t, t_0, t') \subset S \cap T$ gelten. Damit wäre dann S eine weitere Stützhyperebene an K in t , was ein Widerspruch ist. Also gilt $|S \cap T| = 2$ und es folgt die Behauptung. \square

Man wende sich wieder der Betrachtung der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge in \mathbb{R}^2 zu. Ähnlich wie im allgemeinen Fall, aber noch ein wenig einfacher, zeigt man, dass ein maximales zusammenhängendes Randstück der konvexen Hülle, das mit der konvexen Hülle keinen Punkt gemeinsam hat, stets mehr als einen Punkt besitzen muss. Dazu sei an die Beschreibung der Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle erinnert. Unter Verwendung der diesbezüglich erzielten Ergebnisse erhält man sofort folgendes Lemma, das für den allgemeinen Fall bereits unter 2.2.12 bewiesen wurde.

Lemma 2.3.7 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ diskret und $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen. Dann gilt für ein maximales Randstück $T \in \mathcal{T}^\ell(\text{conv}(\mathcal{P}))$ stets $|T| > 1$.*

Beweis: Angenommen, es gibt ein maximales $T \in \mathcal{T}^\ell(\text{conv}(\mathcal{P}))$ mit $|T| = 1$. Setze also $T = \{t\}$. Wenn in t wenigstens zwei verschiedene Stützhyperebenen an $\text{conv}(\mathcal{P})$ existieren, so ist t nach Lemma 2.3.3 ein Extrempunkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ und damit nach Satz 2.2.10 in \mathcal{P} , also ein Widerspruch.

Existiert dagegen in t genau eine Stützhyperebene Hyp_t an $\text{conv}(\mathcal{P})$, so folgt aus der Maximalität von T und der Eigenschaft $t \notin \text{conv}(\mathcal{P})$, dass t Endpunkt des in $\text{Hyp}_t \cap \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ liegenden Intervalls bzw. Strahls sein muss und damit ebenfalls wieder ein Extrempunkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ ist. Dieses führt wie gerade auf einen Widerspruch. \square

Struktursatz

Damit hat man nun alle Grundlagen zusammen, um auch im zweidimensionalen Fall die Unbeschränktheit der maximalen Randstücke $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ zeigen und diese Aussage, die bereits für den allgemeinen Fall in Satz 2.2.16 gezeigt wurde, noch weiter verschärfen zu können.

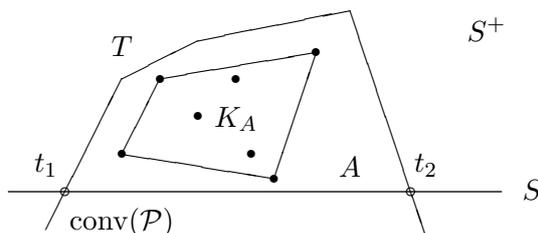
Satz 2.3.8 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ eine diskrete Menge und es gelte $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Dann ist der Rand $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ der konvexen Hülle von \mathcal{P} stückweise linear und jedes maximale $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ ist unbeschränkt und in einer Hyperebene enthalten.*

Beweis: In diesem Beweis soll die Struktur des Randes der konvexen Hülle einer beliebigen diskreten Menge des \mathbb{R}^2 geklärt werden. Daher sei zunächst die Beweisstruktur kurz skizziert: Zu Beginn überlegt man sich, wie maximale Teilmengen von $\mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ und $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ aussehen und zeigt dann, dass ein maximales Randstück $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ stets in einer Hyperebene enthalten ist, wodurch auch die Unbeschränktheit eines solchen Randstückes T folgt. Es lässt sich weiter zeigen, dass $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ höchstens vier verschiedene maximale Randstücke in höchstens zwei verschiedenen Hyperebenen enthalten kann. Die Anwendung dieser Ergebnisse liefert dann die stückweise Linearität des Randes.

Betrachte zunächst ein beliebiges maximales $T \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$. Dann folgt mit dem gleichen Beweis wie bei Lemma 2.3.2, dass sich jeder Punkt $x \in T$ als Konvexkombination aus maximal zwei Punkten aus \mathcal{P} schreiben lässt. Damit gehört x entweder selbst schon zu \mathcal{P} oder x liegt auf einem linearen Teilstück zwischen zwei Punkten $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, die nach Lemma 2.1.12 ebenfalls bereits Randpunkte von $\text{conv}(\mathcal{P})$ sein müssen. Mit $x, p_1, p_2 \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gehört dann auch die ganze Strecke $[p_1, p_2] = \{(1 - \lambda)p_1 + \lambda p_2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$ zu $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ und aufgrund der Maximalität von T gilt sogar $[p_1, p_2] \subset T$. Weiter gilt, dass die Endpunkte von T zu \mathcal{P} gehören müssen.

Betrachte nun ein beliebiges maximales $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$. Nach Lemma 2.3.7 gilt $|T| > 1$. Man mache die Annahme, dass T nicht in einer Hyperebene enthalten sei. Dann existiert nach Satz 2.3.6 eine Sekante S , die T teilt und mit T genau zwei Punkte gemeinsam hat. Diese seien mit t_1, t_2 bezeichnet, also $S \cap T = \{t_1, t_2\}$. Betrachte nun den zwischen S und T liegenden Teil $A := \text{conv}(\mathcal{P}) \cap S^+$, wobei S^+ der von S begrenzte Halbraum sei, für

den $\partial \operatorname{conv}(\mathcal{P}) \cap S^+ \subset T$ gilt, siehe Abbildung 2.14. (Erfüllen beide von S begrenzten Halbräume diese Bedingung, so wähle einen der beiden als S^+ aus.) Nach Konstruktion ist A beschränkt. Bezeichne weiter $\mathcal{P}_A := \mathcal{P} \cap A^\circ$. Es gilt $\mathcal{P}_A \neq \emptyset$. Denn wäre $\mathcal{P}_A = \emptyset$, so wäre $\mathcal{P} \subset S^-$ und damit auch $\operatorname{conv}(\mathcal{P}) \subset S^-$. Da S mit T und damit auch mit $\partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, wäre S dann eine Stützhyperebene an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$. Dann wäre mit $t_1, t_2 \in S \cap T$ auch die Strecke $[t_1, t_2] := \{(1-\lambda)t_1 + \lambda t_2 \mid \lambda \in [0, 1]\}$ in $S \cap T$, also ein Widerspruch zu $|S \cap T| = 2$. Da \mathcal{P} diskret und A beschränkt ist, gilt also nun $1 \leq |\mathcal{P}_A| < \infty$. Betrachte nun das von \mathcal{P}_A erzeugte Poytop $K_A := \operatorname{conv}(\mathcal{P}_A)$. Es gilt $K_A \subset A^\circ \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P})^\circ$. Nach Satz 2.1.9 gibt es dann endlich viele Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, so dass $K_A \subset \operatorname{conv}(p_1, \dots, p_k)^\circ$ gilt. Die Punkte p_1, \dots, p_k seien o.B.d.A. minimal mit dieser Eigenschaft (sonst lasse für die Konvexkombination nicht benötigte Punkte weg und benenne die verbliebenen um). Dann folgt $\mathcal{P}_A \cap \{p_1, \dots, p_k\} = \emptyset$ und $p_1, \dots, p_k \in \operatorname{conv}(\mathcal{P}) \setminus A^\circ$. Also muss $p_1, \dots, p_k \in S^-$ gelten, was aber ein Widerspruch zu $K_A \subset A^\circ \subset (S^+)^\circ$ ist. Damit ist gezeigt, dass jedes zusammenhängende, maximale, nicht zu $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gehörende Randstück in einer Hyperebene enthalten ist.

Abbildung 2.14: $\operatorname{conv}(\mathcal{P}) \cap S^+$

Damit folgt nun auch direkt, dass jedes maximale $T \in \mathcal{T}^\zeta(\operatorname{conv}(\mathcal{P}))$ unbeschränkt sein muss. Denn nimmt man an, dass T beschränkt ist, so folgt, da T in einer Hyperebene enthalten ist, dass T eine beschränkte Strecke ist. Das heißt man findet $t'_1, t'_2 \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ mit $\{(1-\lambda)t'_1 + \lambda t'_2 \mid \lambda \in (0, 1)\} =: (t'_1, t'_2) \subset T \subset [t'_1, t'_2]$. Da T maximal und ungleich dem gesamten Rand von $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ ist, gibt es zu $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gehörende Randstücke $T_1, T_2 \in \mathcal{T}^c(\operatorname{conv}(\mathcal{P}))$, die an T angrenzen, also zu T den Abstand Null haben. Analog zu obiger Überlegung müssen die Endpunkte t'_1 und t'_2 von T dann zu T_1 bzw. T_2 gehören, also $T = (t'_1, t'_2)$ relativ offen sein. Dann folgt aber direkt, dass $T \subset \operatorname{conv}(t'_1, t'_2) \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gilt, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

Weiter folgt, dass es in $\mathcal{T}^\zeta(\operatorname{conv}(\mathcal{P}))$ höchstens vier paarweise verschiedene maximale Randstücke geben kann. Denn enthält eine zweidimensionale

konvexe Menge K wenigstens drei paarweise verschiedene solche $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{T}^\zeta(K)$, so müssen zwei dieser Randstücke, o.B.d.A. T_1 und T_2 , in der gleichen Hyperebene und das dritte Randstück T_3 in einer dazu parallelen Hyperebene liegen. Da solche Randstücke unbeschränkt sind, kann es in einer Hyperebene maximal zwei verschiedene geben. Existiert ein viertes solches Randstück, so ist die Menge K durch diese vier Randstücke bereits eindeutig bestimmt und es kann keine weiteren Randstücke dieser Art in $\mathcal{T}^\zeta(K)$ geben, siehe Abbildung 2.15.

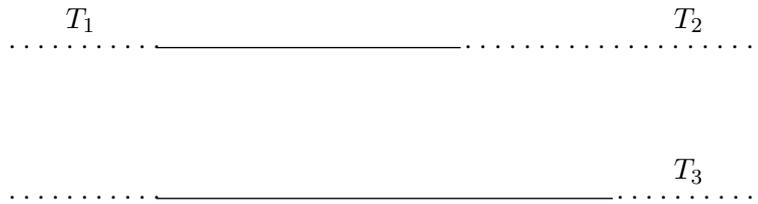


Abbildung 2.15: Maximal 4 verschiedene Randstücke

Sei nun $U \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige beschränkte Umgebung. Näher zu betrachten sind nur die Umgebungen U , für die $U \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ nicht leeren Schnitt mit dem Rand $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ hat. Denn im Fall $U \cap \text{conv}(\mathcal{P}) \subset \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ oder $U \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \emptyset$ lässt sich $\text{conv}(\mathcal{P})$ in U trivialerweise als Schnitt von endlich vielen, nämlich einer bzw. gar keiner Hyperebene darstellen. Sei also nun $U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$.

Betrachte zunächst den Fall $U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$. Dann kann nach obiger Überlegung U höchstens vier getrennte Randstücke enthalten, die in maximal zwei verschiedenen Hyperebenen liegen. Damit erhält man dann aber auch $U \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ als Schnitt von höchstens zwei Halbräumen in U .

Betrachte nun den Fall, dass $U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ gilt. Da U beschränkt und \mathcal{P} diskret ist, kann U nur endlich viele Randstücke $[p_1, p_2]$ mit $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ schneiden. Jedes dieser linearen Randstücke $[p_i, p_j]$ definiert eine $\text{conv}(\mathcal{P})$ stützende Hyperebene. Somit lässt sich $\text{conv}(\mathcal{P})$ in U als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellen.

Es bleibt noch der gemischte Fall, dass $U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ aus Teilen sowohl aus $\mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ als auch aus $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ besteht, zu betrachten. Da die maximalen Randstücke aus $\mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ unbeschränkt sind, kann ein maximales $T \in \mathcal{T}^\zeta(\text{conv}(\mathcal{P}))$ höchstens an ein Randstück $T' \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ angrenzen. Betrachtet man nun $U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ für eine beliebige beschränkte Umgebung U , so liegen die nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörenden Randstücke in U weiterhin auf maximal zwei verschiedenen Hyperebenen. Für die zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörenden Randstücke in U findet man analog zu obiger Überlegung end-

lich viele Hyperebenen, die diese Randstücke enthalten. Insgesamt erhält man damit eine Darstellung von $\text{conv}(\mathcal{P})$ in U als Schnitt von endlich vielen Halbräumen. Damit folgt nach Definition 2.3.1 die stückweise Linearität von $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$. \square

Natürlich kann man die Aussage, dass jedes maximale Randstück $T \in \mathcal{T}^\mathcal{C}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ einer ebenen diskreten Punktmenge \mathcal{P} unbeschränkt und in einer Hyperebene enthalten ist, auch aus Lemma 2.2.15 und Satz 2.2.16 aus der Betrachtung des allgemeinen Falls erhalten. Denn dort hatte man bereits gesehen, dass ein solches Randstück einen unbeschränkten Schnitt mit einer Hyperebene besitzt, was in Dimension 2 sofort liefert, dass dieses Randstück einen Strahl enthält. Damit folgt dann, dass dieses Randstück in einer Hyperebene enthalten sein muss. Ausgehend von diesem allgemeinen Zugang wird deutlich, dass die Dimension 2 einen Spezialfall darstellt. Trotzdem hat auch der oben geführte Beweis seine Berechtigung, da man sieht, dass sich diese Tatsache in Dimension 2 auch unabhängig vom allgemeinen Fall mit einem eigenständigen Beweis zeigen lässt. Man beachte jedoch, dass dieser Beweis, der in Dimension 2 gilt, sich nicht ohne weiteres auf den allgemeinen Fall übertragen lässt. Denn bereits in Dimension 3 muss die Beschränktheit der Menge A aus obiger Konstruktion, die wesentlich in dem Beweis einging, nicht mehr erfüllt sein.

Dass die stückweise Linearität des Randes der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge in höheren Dimensionen tatsächlich nicht mehr erfüllt sein muss, zeigt das folgende Beispiel.

Beispiel 2.3.9 Betrachte $\mathcal{P} := \{(\cos \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}, \sin \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}, n) \in \mathbb{R}^3 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{(\cos \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}, \sin \frac{2\pi n}{\sqrt{2}}, -n) \in \mathbb{R}^3 \mid n \in \mathbb{N}\}$. Da die Projektion von \mathcal{P} auf die x_1x_2 -Ebene dicht auf dem Einheitskreis $S := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| = 1\}$ liegt, erhält man als Rand von $\text{conv}(\mathcal{P}) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ die Zylinderoberfläche $S \times \mathbb{R}$, siehe Abbildung 2.16. Diese ist nicht stückweise linear, da $\text{conv}(\mathcal{P})$ in jeder beschränkten Umgebung, die mit dem Rand $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ nicht leeren Schnitt hat, Schnitt von unendlich vielen Halbräumen ist.

Zusammenfassend hat man damit den Rand der konvexen Hülle einer ebenen diskreten Punktmenge vollständig beschrieben. Der gesamte Rand ist stückweise linear, wobei die maximalen Randstücke, die mit $\text{conv}(\mathcal{P})$ einen leeren Schnitt haben, unbeschränkt und in einer Hyperebene enthalten sind, also einen Strahl enthalten. Das heißt zu jedem maximalen $T \in \mathcal{T}^\mathcal{C}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ findet man einen Strahl S oder eine Gerade G , so dass $T = S$ oder $T = G$ gilt. In dem Fall, dass $T = S$ gilt, muss an dem Startpunkt s_0 von S zwangsläufig ein Randstück $T' \in \mathcal{T}^\mathcal{C}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ anschließen.

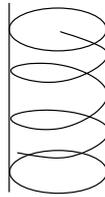


Abbildung 2.16: Zylinder

Nach den obigen Überlegungen gilt dann $s_0 \in T'$, das heißt es gilt genauer $T = S \setminus \{s_0\}$.

Die maximalen Randstücke, die in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten sind, bestehen aus aneinander hängenden Strecken, deren Endpunkte stets zu dem Randstück dazu gehören. In dem Fall, dass \mathcal{P} uniform diskret ist, erhält man zusätzlich, dass jede Strecke wenigstens die Länge $r = \min \mathcal{P}$ besitzt. Man beachte hier jedoch, dass auch diese Randstücke unbeschränkt sein können.

Letztendlich gilt noch für die Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle, die gleich den exponierten Punkten (Ecken) sind, dass sie alle in \mathcal{P} liegen.

Erweiterungssatz

Ausgehend von dieser Beschreibung des Randes der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge in \mathbb{R}^2 entsteht die Vermutung, dass sich jede ebene diskrete Punktmenge \mathcal{P} so zu einer \mathcal{P} umfassenden diskreten Punktmenge \mathcal{P}' erweitern lässt, dass beide konvexe Hüllen den gleichen Rand haben, die konvexe Hülle der erweiterten Punktmenge \mathcal{P}' aber abgeschlossen ist. Setzt man zusätzlich uniforme Diskretheit voraus, so lässt sich diese Aussage für ebene Punktmenge beweisen. Dabei ist die Grundidee, dass man auf den nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörenden Randstücken eine (uniform) diskrete Punktmenge findet, um die man \mathcal{P} erweitern kann.

Satz 2.3.10 (Erweiterungssatz) *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ uniform diskret und $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Dann existiert eine uniform diskrete Menge $\mathcal{P}' \supset \mathcal{P}$, so dass $\text{conv}(\mathcal{P}')$ abgeschlossen ist und $\text{conv}(\mathcal{P}') = \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ gilt. Man nennt dann \mathcal{P}' eine Erweiterung von \mathcal{P} .*

Beweis: Ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ bereits abgeschlossen, so setze $\mathcal{P}' := \mathcal{P}$ und es folgt die Behauptung.

Man betrachte also nun den Fall, dass $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist. Für diesen Fall sei zunächst die Beweisidee kurz skizziert: Zu jedem Punkt p der Punktmenge \mathcal{P} bildet man die Kugel mit Radius $\frac{r}{2}$ um p , wobei $r = \min \mathcal{P}$ sei, und bezeichnet die Vereinigung aller dieser Kugeln mit \mathcal{U} . Man

zeigt dann, dass \mathcal{U} ein beliebiges maximales Randstück $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{Z}}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ nicht vollständig überdeckt, siehe Abbildung 2.17. Für die nicht überdeckte Menge $T \setminus \mathcal{U}$ gilt, dass sie entweder eine unbeschränkte, zusammenhängende Teilmenge enthält oder aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht. Daher lässt sich in $T \setminus \mathcal{U}$ eine uniform diskrete Punktmenge wählen, für die gilt, dass T in der konvexen Hülle der Vereinigung der alten Punktmenge \mathcal{P} mit der neu gewählten Punktmenge liegt. Eine Anwendung dieses Verfahrens auf alle maximalen Randstücke $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{Z}}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ liefert dann die gesuchte Punktmenge \mathcal{P}' .

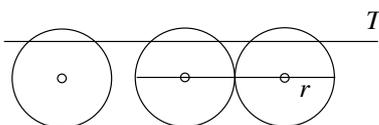


Abbildung 2.17: Konstruktion der Überdeckung

Sei also nun $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen. Das heißt $\mathcal{T}^{\mathcal{Z}}(\text{conv}(\mathcal{P})) \neq \emptyset$. Nach Satz 2.3.8 ist der Rand $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ stückweise linear und jedes maximale $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{Z}}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ ist unbeschränkt und in einer Hyperebene enthalten. Es sei $r := \min \mathcal{P}$ der Minimalabstand von \mathcal{P} und $B(p, \frac{r}{2})$ die abgeschlossene Kugel vom Radius $\frac{r}{2}$ um den Punkt $p \in \mathcal{P}$. Weiter bezeichne $\mathcal{U} := \bigcup_{p \in \mathcal{P}} B(p, \frac{r}{2})$. Für jedes maximale $T \in \mathcal{T}^{\mathcal{Z}}(\text{conv}(\mathcal{P}))$ gilt $T \setminus \mathcal{U} \neq \emptyset$.

Denn für zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ gilt genau dann $B(p_1, \frac{r}{2}) \cap B(p_2, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$, wenn sie den Abstand $d(p_1, p_2) = r$ haben. In diesem Fall gilt dann, dass $B(p_1, \frac{r}{2}) \cup B(p_2, \frac{r}{2})$ genau die Strecke $[p_1 - \frac{1}{2}(p_2 - p_1), p_2 + \frac{1}{2}(p_2 - p_1)]$ und damit insbesondere auch $[p_1, p_2]$ überdeckt. Man nehme nun an, T würde vollständig von \mathcal{U} überdeckt. Da T unbeschränkt ist, kann T nicht vollständig in einer einzigen Kugel $B(p, \frac{r}{2})$ enthalten sein. Also gibt es, da T zusammenhängend ist, eine Menge von Kugeln $\{B(p_i, \frac{r}{2}) | i \in I\}$ bzw. Punkte $\{p_i \in \mathcal{P} | i \in I\}$, I eine Indexmenge, so dass es zu jedem p_i mit $i \in I$ ein p_j mit $j \in I$ gibt, so dass $B(p_i, \frac{r}{2}) \cap B(p_j, \frac{r}{2}) \neq \emptyset$ gilt. Da T in einer Hyperebene enthalten ist und $B(p_i, \frac{r}{2}) \cup B(p_j, \frac{r}{2})$ gerade die Strecke $[p_i, p_j]$ überdeckt, folgt dann $T \cap [p_i, p_j] \neq \emptyset$, was aber ein Widerspruch zu $T \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \emptyset$ ist. Somit wird T von \mathcal{U} nicht vollständig überdeckt, das heißt es existieren Punkte in $T \setminus \mathcal{U}$. Gilt nun, dass T mit wenigstens zwei Kugeln $B(q_1, \frac{r}{2}), B(q_2, \frac{r}{2})$ mit $q_1, q_2 \in \mathcal{P}$ nicht leeren Schnitt hat, so folgt, dass $T \cap \mathcal{U}$ nicht zusammenhängend ist. Weiter folgt dann, dass $T \setminus \mathcal{U} \neq T$ ist und damit, dass auch $T \setminus \mathcal{U}$ nicht zusammenhängend ist. Falls $T \cap \mathcal{U}$ aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten besteht, so auch $T \setminus \mathcal{U}$. Besteht $T \cap \mathcal{U}$ dagegen aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, so gibt es in $T \setminus \mathcal{U}$ wenigstens eine Zusammenhangskomponente, die unbeschränkt ist.

Da T unbeschränkt ist, gibt es einen Strahl $S(T) \subset T$. Nach obigen Überlegungen besteht auch $S(T) \setminus \mathcal{U}$ entweder aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten oder $S(T) \setminus \mathcal{U}$ enthält eine Zusammenhangskomponente, die unbeschränkt ist. Daher findet man in $S(T) \setminus \mathcal{U}$ eine unendliche uniform diskrete Punktmenge $\mathcal{P}(S(T))$ mit Minimalabstand $r_{S(T)} := \min \mathcal{P}(S(T)) \geq r$. Dazu wähle man einen ersten Punkt $p_{s,0} \in S(T) \setminus \mathcal{U}$ beliebig und gehe dann entlang $S(T)$ weiter. Der nächste Punkt $p_{s,1}$ wird dann so in $S(T) \setminus \mathcal{U}$ gewählt, dass $d(p_{s,0}, p_{s,1}) \geq r$ erfüllt ist. Dieses Verfahren wird nun iteriert, und man findet die gesuchte Punktmenge $\mathcal{P}(S(T))$. Gilt zusätzlich $-S(T) \subset T$, so lässt sich analog auch in $-S(T) \setminus \mathcal{U}$ eine unendliche uniform diskrete Punktmenge $\mathcal{P}(-S(T))$ mit Minimalabstand $r_{-S(T)} := \min \mathcal{P}(-S(T)) \geq r$ finden.

In dem Fall, dass $S(T) \subset T$ und $-S(T) \not\subset T$ gilt, existiert ein Randstück $T' \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$, das auf einer Seite an T anschließt. Damit folgt $T \subset \text{conv}(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}(S(T)))$. In dem Fall $S(T) \subset T$ und $-S(T) \subset T$ folgt nach Konstruktion $T \subset \text{conv}(\mathcal{P}(S(T)) \cup \mathcal{P}(-S(T))) \subset \text{conv}(\mathcal{P} \cup \mathcal{P}(S(T)) \cup \mathcal{P}(-S(T)))$. Da $\mathcal{P}(S(T))$ und $\mathcal{P}(-S(T))$ uniform diskret in $T \setminus \mathcal{U}$ gewählt worden sind, ist auch die neue Punktmenge $\mathcal{P}'' := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}(S(T))$ bzw. $\mathcal{P}'' := \mathcal{P} \cup \mathcal{P}(S(T)) \cup \mathcal{P}(-S(T))$ wieder uniform diskret und besitzt einen Minimalabstand $r_2 \geq \frac{r}{2}$.

Iteriert man dieses Verfahren nun über alle maximalen $T \in \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ und ersetzt dabei die Punktmenge \mathcal{P} jeweils durch die im vorherigen Schritt erzeugte Punktmenge \mathcal{P}'' , so erhält man die gesuchte uniform diskrete Punktmenge \mathcal{P}' . \square

Man beachte, dass die Uniformität der Diskretheit der Punktmenge, das heißt die Existenz eines positiven Minimalabstandes der diskreten Punktmenge, in obigem Beweis wesentlich benutzt wurde. Mit Hilfe des Minimalabstandes $\min \mathcal{P}$ konnte die Menge \mathcal{U} konstruiert und gezeigt werden, dass ein nicht in der konvexen Hülle enthaltenes Randstück $T \subset \mathcal{T}^c(\text{conv}(\mathcal{P}))$ nicht vollständig von \mathcal{U} überdeckt wird. Daher ließen sich aus der Menge $(\partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \text{conv}(\mathcal{P})) \setminus \mathcal{U}$ zusätzliche Punkte wählen, mit denen sich dann eine Erweiterung mit den gewünschten Eigenschaften bilden ließ. Eine Verallgemeinerung der Aussage des Erweiterungssatzes 2.3.10 auf (allgemeine) diskrete Mengen, ist daher mit diesem Beweis nicht ohne Weiteres möglich.

Des weiteren wurde in dem Beweis des Erweiterungssatzes 2.3.10 die für den Spezialfall der Dimension 2 geltende Aussage aus Satz 2.3.8, dass jedes nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehörende Randstück vollständig in einer Hyperebene enthalten ist, verwendet. Daher lässt sich dieser Beweis auch nicht ohne Weiteres auf einen höherdimensionalen Fall übertragen. Es ist jedoch noch offen, ob man eine vergleichbare Aussage für allgemeine diskrete Mengen in beliebiger endlicher Dimension nicht vielleicht mit einem anderen Beweis zeigen kann.

Kapitel 3

Voronoizellen diskreter Punkt Mengen

Man wende sich nun dem zweiten Schwerpunkt dieser Arbeit zu: der Beschreibung der Voronoizellen einer diskreten Punktmenge. Unter Anwendung der im zweiten Kapitel erzielten Ergebnisse sollen Strukturaussagen über Voronoizellen bewiesen und die bestehende Theorie ergänzt und fortgeführt werden.

Dieses Kapitel besteht aus vier Abschnitten: Der erste Abschnitt enthält eine Zusammenfassung der bereits bekannten Ergebnisse über die Gestalt der Voronoizellen von Gittern und (r, R) -Systemen. Die wesentliche Aussage ist dabei, dass in diesen Fällen alle Voronoizellen Polytope sind. Im zweiten Abschnitt werden erste Ansätze zur Charakterisierung derjenigen diskreten Punkt Mengen, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind, diskutiert und ein Zusammenhang zwischen dem Auftreten nicht-polyedrischer Voronoizellen und dem Randverhalten der konvexen Hülle der Punktmenge hergestellt. Es wird der erste Hauptsatz dieser Arbeit, der besagt, dass genau dann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge Polytope sind, wenn die Punktmenge nur aus inneren Punkten besteht, bewiesen. Dadurch erhält man eine Verallgemeinerung der im ersten Abschnitt dargestellten Ergebnisse; die Fälle, in denen die Punktmenge ein Gitter oder ein (r, R) -System ist, erhält man hier als Spezialfälle. Der dritte Abschnitt untersucht speziell den Fall einer zweidimensionalen diskreten Punktmenge. Dabei wird gezeigt, dass sich die polyedrischen Voronoizellen einer ebenen diskreten Punktmenge auf vier Typen reduzieren lassen und bereits aus der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge die Polyedrizität sämtlicher Voronoizellen folgt. Dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt, das heißt dass aus der Polyedrizität aller Voronoizellen die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle folgen würde, hat man bereits an einem Beispiel im zweiten Abschnitt dieses Kapitels gesehen. Daher wird im vierten Abschnitt der Zusammenhang zwischen der Gestalt der Voronoizellen und dem lokalen Randverhalten der konvexen

Hülle untersucht. Mithilfe des Begriffs des Richtungskegels lässt sich nun die gesuchte äquivalente Charakterisierung angeben. Im zweiten Hauptsatz dieser Arbeit wird gezeigt, dass genau dann alle Voronoizellen Polyeder sind, wenn die diskrete Punktmenge lokal endlich erzeugt ist.

Es sei noch bemerkt, dass bereits in der Vergangenheit Beziehungen zwischen Voronoizellen und konvexen Hüllen hergestellt wurden (vgl. [Aure90]). Allerdings wurde noch nicht versucht, einen Zusammenhang zwischen dem Randverhalten der konvexen Hülle einer (unendlichen) diskreten Punktmenge und der Gestalt ihrer Voronoizellen herzustellen. In [Aure90] wurden nur Voronoizellen von endlichen Punktmengen betrachtet und für diese eine Konstruktionsmethode zur Bestimmung der Voronoizellen entwickelt, bei der die konvexe Hülle einer anderen, aber zugehörigen Menge Verwendung fand. Die in dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen stellen somit einen neuen Ansatz dar.

Vorab sollen für die nachfolgenden Betrachtungen einige Definitionen und Bezeichnungen festgelegt werden. Allgemeine Halbräume und Hyperebenen werden genauso wie in Definition 1.2.1 bezeichnet. Für die bei der Darstellung einer Voronoizelle benötigten Halbräume und Hyperebenen führe man zur Vereinfachung der Notation eine weitere Bezeichnung ein:

Definition 3.0.1 Zu $v \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ bezeichnet

$$\text{Hyp}(v, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = \alpha\}$$

die durch v und α definierte affine Hyperebene und

$$\begin{aligned} H^-(v, \alpha) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \leq \alpha\}, \\ H^+(v, \alpha) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \geq \alpha\} \end{aligned}$$

die zugehörigen abgeschlossenen Halbräume. Da bei der Betrachtung von Voronoizellen die Hyperebenen, die orthogonal zu einem Vektor v liegen und durch den Punkt $\frac{1}{2}v$ verlaufen, von besonderer Bedeutung sind, werden für diese Hyperebenen und ihre zugehörigen, die Null enthaltenden Halbräume folgende Bezeichnungen eingeführt:

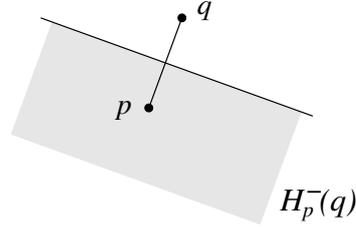
$$\text{Hyp}(v) := \text{Hyp}_0(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle\},$$

$$H^-(v) := H_0^-(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \leq \frac{1}{2}\langle v, v \rangle\}.$$

Entsprechend definiere man die um einen Vektor p verschobene Hyperebene und den zugehörigen Halbraum als

$$\text{Hyp}_p(q) := \text{Hyp}(q - p) + p, \quad H_p^-(q) := H^-(q - p) + p,$$

siehe Abbildung 3.1.

Abbildung 3.1: Halbraum $H_p^-(q)$

Da die Hyperebene $\text{Hyp}_p(q)$ orthogonal zu dem Vektor $q - p$ liegt und diesen auf der Hälfte schneidet, lässt sich $\text{Hyp}_p(q)$ auch als Tangente an die Kugel $B(p, \frac{1}{2}\|q - p\|)$ auffassen.

Wählt man zwei beliebige Punkte $p, q \in \mathbb{R}^n$ mit $p \neq q$ und betrachtet den durch q definierten und um p verschobenen Halbraum $H_p^-(q)$, der p enthält, so lässt sich dieser darstellen als

$$\begin{aligned}
 H_p^-(q) &= H^-(q - p) + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, q - p \rangle \leq \frac{1}{2}\langle q - p, q - p \rangle\} + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid 2\langle x, q - p \rangle \leq \langle q - p, q - p \rangle\} + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, x \rangle \leq \langle x, x \rangle - 2\langle x, q - p \rangle + \langle q - p, q - p \rangle\} + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq \langle x - (q - p), x - (q - p) \rangle\} + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 \leq \|x - (q - p)\|^2\} + p \\
 &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\|^2 \leq \|x - q\|^2\}.
 \end{aligned}$$

Diese Rechnung lässt sich zur Beschreibung der Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes p einer Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ verwenden. Mit der bereits bekannten Definition 0.0.1 erhält man dann für $V(p)$ die Darstellung

$$V(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - p\|^2 \leq \|x - q\|^2 \forall q \in \mathcal{P}\} = \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H_p^-(q).$$

Nach Satz 1.1.7 ist damit $V(p)$ eine abgeschlossene konvexe Menge, die sich nach Satz 1.2.5 als Schnitt über die Halbräume der zugehörigen Stützhyperebenen darstellen lässt. In der Regel werden nicht alle Halbräume, die in der obigen Darstellung vorkommen, zu Stützhyperebenen von $V(p)$ gehören. Und selbst von den zu Stützhyperebenen zugehörigen Halbräumen werden im Allgemeinen nicht alle Halbräume zur Beschreibung von $V(p)$ benötigt werden. Da eine Hyperebene $\text{Hyp}_p(q)$ durch den Punkt $q \in \mathcal{P}$ eindeutig definiert ist, genügt es, die für die Darstellung der Voronoizelle benötigten Punkte zu betrachten.

Definition 3.0.2 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge und $p \in \mathcal{P}$. Dann heißt ein Punkt $p' \in \mathcal{P}$ *voronoirelevant* für p , wenn gilt

$$V(p) \subsetneq \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p, p'\}} H_p^-(q).$$

Existiert des weiteren eine Indexmenge I , so dass sich \mathcal{P} darstellen lässt als $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I\}$, so bezeichne $\mathcal{R}^v(p)$ die *Indexmenge aller für p voronoirelevanten Punkte*,

$$\mathcal{R}^v(p) := \{i \in I \mid p_i \in \mathcal{P} \text{ voronoirelevant für } p\}.$$

Damit lässt sich dann eine *reduzierte Darstellung* der Voronoizelle angeben,

$$V(p) = \bigcap_{i \in \mathcal{R}^v(p)} H_p^-(p_i).$$

Da in dieser Arbeit nur Voronoizellen diskreter Punktmenget \mathcal{P} betrachtet werden, stellt die Bedingung, dass sich \mathcal{P} mittels einer Indexmenge darstellen lässt, keine Einschränkung dar. Denn die Diskretheit einer Menge impliziert, dass diese auch abzählbar ist. Also existiert zu jeder diskreten Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine Indexmenge $I(\mathcal{P}) \subset \mathbb{N}$, so dass man eine Darstellung $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in I(\mathcal{P})\}$ erhält.

In dem für viele Anwendungen wichtigen Spezialfall, dass die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ endlich ist, erhält man aufgrund der obigen Überlegungen sofort, dass sich jede Voronoizelle als Schnitt endlich vieler Halbräume darstellen lässt. Das heißt aus der Endlichkeit von \mathcal{P} folgt direkt, dass alle Voronoizellen Polyeder sind. Zu untersuchen bleibt somit der Fall einer unendlichen diskreten Punktmenge.

3.1 Voronoizellen von Gittern und (r, R) -Systemen

Bei der Betrachtung von Voronoizellen unendlicher diskreter Punktmengen hat man in der Vergangenheit die Punktmengen stets als Gitter oder (r, R) -Systeme vorausgesetzt. Dieses ist vor allem durch Anwendungen, wie sie zum Beispiel in der Kristallographie oder auch in der Informationstheorie vorkommen, bedingt. Dabei soll die zugrundegelegte Punktmenge eine gewisse „Struktur“ aufweisen.

Gitter

Ein *Gitter* $L \subset \mathbb{R}^n$ ist ein diskreter, freier \mathbb{Z} -Modul. Insbesondere existiert daher eine Basis von L und es gilt, dass alle Basen die gleiche Länge haben. Die Länge einer Basis von L wird als *Rang* von L bezeichnet. Wird nun die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} = L$ als Gitter gewählt, so haben alle Voronoizellen die gleiche Gestalt. Die Voronoizelle $V(p)$ eines beliebigen Punktes $p \in L$ erhält man als Translat der Voronoizelle $V(0)$ von $0 \in L$. Daher wird $V(L) := V(0)$ auch als *die Voronoizelle des Gitters* definiert.

Im Hinblick auf die Anwendung von Voronoizellen bei Quantizern sieht man somit, dass sich Gitter aufgrund der Kongruenz sämtlicher Voronoizellen hervorragend zur Konstruktion von Quantizern eignen. Die verwendete diskrete Punktmenge ist dann zwar (theoretisch) unendlich, besitzt dafür aber eine (Gruppen-)Struktur, durch die sich die Konstruktion eines Quantisierungsalgorithmus wesentlich vereinfachen lässt (vgl. [AgEr96]). Um die Güte eines solchen Gitter-Quantizers zu bestimmen, genügt es dann, die Voronoizelle $V(L)$ des Gitters zu betrachten, über die bereits eine Reihe von Sätzen bekannt sind (vgl. [ConSlo99], [Hemke03]).

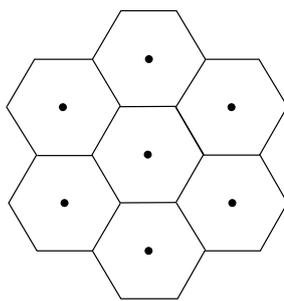


Abbildung 3.2: Voronoidiagramm des hexagonalen Gitters

Was lässt sich nun über die Struktur der Voronoizelle eines Gitters sagen? Anhand der Abbildung 3.2, die die Voronoizellen des hexagonalen Gitters zeigt, lässt sich vermuten, dass die Voronoizelle eines Gitters von vollem

Rang stets ein Polytop ist. Dieses ist in der Tat so und geht bereits auf Sätze von P.G.L. Dirichlet und G.F. Voronoi zurück.

Satz 3.1.1 (vgl. [Hemke03]) *Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter vom Rang n . Dann ist die Voronoizelle $V(L)$ des Gitters ein Polytop.*

Zum Beweis dieses Satzes (vgl. [Hemke03]) zeigt man, dass $V(L)$ beschränkt ist und sich als Schnitt von endlich vielen Halbräumen schreiben lässt. Die Beschränktheit der Voronoizelle folgt direkt aus der Bedingung, dass L vom Rang n ist. Dass sich $V(L)$ als Schnitt von Halbräumen darstellen lässt, ist aufgrund der Überlegungen nach Definition 3.0.1 bereits klar. Damit bleibt nur noch zu zeigen, dass die Menge der in Definition 3.0.2 eingeführten *voronoirelevanten Vektoren* von $V(L)$ endlich ist. Dieses folgt aber mit der von G.F. Voronoi angegebenen Charakterisierung der relevanten Gittervektoren:

Satz 3.1.2 (Voronoi) (vgl. [Vor08], [Hemke03]) *Ein von Null verschiedener Gittervektor $v \in L \setminus \{0\}$ ist genau dann relevant, wenn $\pm v$ die einzigen kürzesten Vektoren in der Nebenklasse $v + 2L$ von $L/2L$ sind.*

Mittels dieser Charakterisierung folgt weiter, dass es in einem Gitter L höchstens $2 \cdot (2^n - 1)$ relevante Vektoren gibt und damit $V(L)$ als Schnitt über endlich viele Halbräume dargestellt werden kann. Die Konvexität der Voronoizelle $V(L)$ eines Gitters L ist nach den obigen Überlegungen ebenfalls bereits klar. Zusätzlich ist die Gestalt der Facetten der Voronoizelle bekannt.

Satz 3.1.3 (vgl. [Hemke03]) *Es sei L ein Gitter von vollem Rang, $V(L)$ die Voronoizelle des Gitters. Dann gilt:*

1. $V(L)$ ist konvex.
2. Die Wände von $V(L)$ sind zentralsymmetrisch. Mittelpunkt der in Hyp_v liegenden Wand ist $\frac{1}{2}v$.

Für einen Beweis des Satzes vgl. [Hemke03].

Der Fall, dass die betrachtete Punktmenge $\mathcal{P} = L$ ein Gitter ist, stellt sicherlich einen Spezialfall dar. Denn als diskreter \mathbb{Z} -Modul ist L insbesondere bzgl. der Addition eine abelsche Gruppe und die Punktmenge \mathcal{P} somit uniform diskret und „gleichmäßig“ im Raum verteilt. Diese Betrachtungsweise führt auf folgende Verallgemeinerung: Man betrachte eine unendliche uniform diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, die in einer gewissen Art und Weise „gleichmäßig“ auf dem \mathbb{R}^n verteilt ist. Gilt für diese Menge dann ebenfalls, dass alle Voronoizellen Polytope sind?

(r, R) -Systeme

Um die Frage nach der Gestalt der Voronoizellen einer solchen Punktmenge beantworten zu können, wird zunächst der Begriff der „gleichmäßigen Verteilung“ einer Punktmenge geklärt.

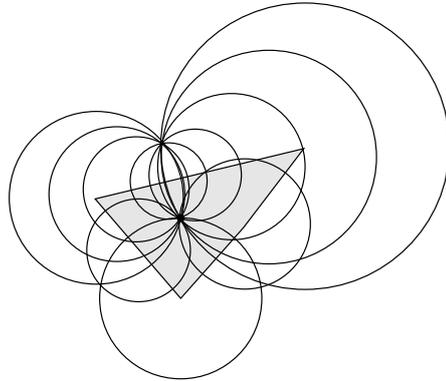
Definition 3.1.4 Eine uniform diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ mit Minimalabstand $r > 0$ heißt (r, R) -System (oder *Delonemenge*), wenn es eine Konstante $R < \infty$ gibt, so dass zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ ein Punkt $p \in \mathcal{P}$ existiert mit $\|x - p\| \leq R$.

Ein (r, R) -System wird auch als *gleichmäßig ausgedehnte*, auch „relativ dichte“ (engl. *relatively dense*, vgl. [Sen95]), uniform diskrete Punktmenge bezeichnet. Die Existenz der Konstante R bedeutet anschaulich, dass es keine beliebig große Kugel $B \subset \mathbb{R}^n$ gibt, die mit \mathcal{P} leeren Schnitt hat (vgl. [Engel86]). Damit ist ein (r, R) -System „gleichmäßig“ im Raum verteilt und es lässt sich zeigen, dass in diesem Fall tatsächlich alle Voronoizellen Polytope sind.

Satz 3.1.5 (vgl. [Engel86]) Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ ein (r, R) -System. Dann sind alle zu der Punktmenge zugehörigen Voronoizellen Polytope.

Zum Beweis dieser Aussage (vgl. [Engel86]) überlegt man sich zunächst, wie man die relevanten Vektoren, das heißt die Punkte, die die Wände einer Voronoizelle definieren, näher beschreiben kann. Sei nun $p_0 \in \mathcal{P}$ ein beliebiger fest gewählter Punkt, $V(p_0)$ bezeichne die zugehörige Voronoizelle. Weiter definiert man die Menge $Q_{p_0} := \bigcup_{x \in V(p_0)} B^\circ(x, \|x - p_0\|)$, wobei $B^\circ(x, \|x - p_0\|)$ die offene Kugel um x mit Radius $\|x - p_0\|$ bezeichnet, siehe Abbildung 3.3. Dann sieht man, dass alle Punkte $p \in \mathcal{P}$, die eine Wand von $V(p_0)$ definieren, auf dem Rand von Q_{p_0} liegen. Da \mathcal{P} ein (r, R) -System ist, ist Q_{p_0} enthalten in der Kugel $B(p_0, 2R)$. Aufgrund der Diskretheit von \mathcal{P} sind aber nur endlich viele Punkte von \mathcal{P} in $B(p_0, 2R)$, und somit existieren zu $V(p_0)$ nur endlich viele relevante Vektoren. Damit existiert für $V(p_0)$ eine Darstellung als Schnitt von endlich vielen Halbräumen, und es folgt die Behauptung.

Bei allen bisherigen Überlegungen wurden stets gleichmäßig ausgedehnte, uniform diskrete Mengen betrachtet. Damit schließt sich nun als nächster Schritt der Übergang zu einer beliebigen diskreten Menge an. Es soll von nun an also nur noch verlangt werden, dass die Punktmenge \mathcal{P} keine Häufungspunkte besitzt. Für diese Mengen lässt sich immerhin noch zeigen, dass alle Voronoizellen verallgemeinerte Polyeder sind, vgl. [Grub07]. Denn ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ diskret und $V(p) = \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H_p^-(q)$ die Voronoizelle eines Punktes

Abbildung 3.3: Konstruktion der Menge Q_{p_0}

$p \in \mathcal{P}$, so gilt für ein beliebiges Polytop $K \subset \mathbb{R}^n$, dass es nur endlich viele Halbräume $H_p^-(q)$ aus der Darstellung von $V(p)$ gibt, für die $K \not\subset (H_p^-(q))^\circ$ gilt. Daher ist $V(p) \cap K$ ein Polytop, also $V(p)$ nach Definition 2.3.1 ein verallgemeinertes Polyeder. Es bleibt die Frage ob bzw. wann mehr gilt. Daher soll im Folgenden die Struktur der Voronoizellen einer diskreten Punktmenge näher untersucht werden.

3.2 Der Abschluss der konvexen Hülle

In diesem Abschnitt werden verschiedene Ansätze zur Charakterisierung derjenigen diskreten Punktmengen, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind, diskutiert. Als erste Verallgemeinerung der bereits bekannten Theorie wird der erste Hauptsatz formuliert, der besagt, dass genau dann alle Voronoizellen Polytope sind, wenn die Menge nur aus inneren Punkten besteht.

Nicht-polyedrische Voronoizellen

Man hat bereits gesehen, dass in den für Anwendungen wichtigen Fällen, in denen \mathcal{P} entweder endlich oder uniform diskret und gleichmäßig ausgedehnt ist, alle Voronoizellen Polyeder bzw. sogar Polytope sind. Und man weiß, dass die Voronoizellen einer diskreten Punktmenge immer lokal polyedrisch sind (vgl. [Grub07]). Daher stellt sich die Frage, ob auch alle Voronoizellen einer beliebigen diskreten Punktmenge immer Polyeder sind. Um eine bessere Vorstellung der Situation zu bekommen, betrachte man erneut die Punktmenge aus Beispiel 2.2.7.

Beispiel 3.2.1 Es sei $\mathcal{P} := (\{0\} \times \mathbb{Z}) \cup \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ und $a := (1, 0)$, $p_0 := (0, 0)$, $p_1 := (0, 1)$, $p_j := (0, j)$ für $j \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun die Voronoizelle $V(a)$ von a . Dazu bestimme man die begrenzenden Hyperebenen (Geraden) sowie die Ecken der Voronoizelle (die Schnitte zweier aufeinanderfolgender begrenzender Geraden):

- p_0 liefert als begrenzende Gerade $\text{Hyp}_a(p_0) : (\frac{1}{2}, 0) + \mathbb{R}(0, 1)$
- p_1 liefert als begrenzende Gerade $\text{Hyp}_a(p_1) : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) + \mathbb{R}(1, 1)$
Denn: $p_1 - a = (-1, 1)$ und $\text{Hyp}_a(p_1)$ halbiert die Strecke $p_1 - a$, läuft also durch den Punkt $a + \frac{1}{2}(p_1 - a) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; da $\text{Hyp}_a(p_1)$ orthogonal zu $p_1 - a$ ist, erhält man damit die angegebene Form.
- Schnittpunkt $\text{Hyp}_a(p_0) \cap \text{Hyp}_a(p_1) : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$
- p_2 liefert als begrenzende Gerade $\text{Hyp}_a(p_2) : (\frac{1}{2}, 1) + \mathbb{R}(2, 1)$
- Schnittpunkt $\text{Hyp}_a(p_1) \cap \text{Hyp}_a(p_2) : (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$
- p_j liefert als begrenzende Gerade $\text{Hyp}_a(p_j) : (\frac{1}{2}, \frac{j}{2}) + \mathbb{R}(j, 1)$
- Schnittpunkt $\text{Hyp}_a(p_{j-1}) \cap \text{Hyp}_a(p_j) : (\frac{1}{2} + \frac{j-1}{2}j, \frac{1}{2}(2j-1))$
- Schnittpunkt $\text{Hyp}_a(p_j) \cap \text{Hyp}_a(p_{j+1}) : (\frac{1}{2} + \frac{j+1}{2}i, \frac{1}{2}(2j+1))$

Betrachtet man nun zwei aufeinander folgende Schnittpunkte, so sieht man, dass die 1. Koordinate quadratisch gegen Unendlich strebt; die 2. Koordinate ist für große j fast gleich, strebt aber ebenfalls gegen Unendlich. Das

bedeutet, dass jeder weitere Punkt p_j relevant ist und für die Beschreibung der Voronoizelle $V(a)$ benötigt wird. Damit ist $V(a)$ nicht darstellbar als Schnitt über endlich viele Halbräume; alle Punkte aus $\mathcal{P} \setminus \{a\}$ sind bezüglich a relevant. $V(a)$ ist somit kein Polyeder, siehe Abbildung 3.4.

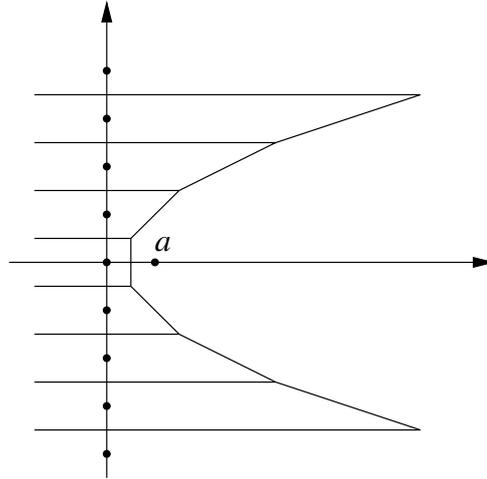


Abbildung 3.4: Nicht-polyedrische Voronoizelle

Dieses Beispiel beantwortet somit die oben gestellte Frage, ob alle Voronoizellen einer beliebigen diskreten Punktmenge Polyeder sind, im negativen Sinne. In der hier betrachteten Punktmenge \mathcal{P} gibt es gerade einen Punkt $a \in \mathcal{P}$, dessen Voronoizelle keine Darstellung als Schnitt über endlich viele Halbräume besitzt.

Definition 3.2.2 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Dann heißt $p \in \mathcal{P}$ *kritischer Punkt*, wenn die zugehörige Voronoizelle $V(p)$ kein Polyeder ist.

Eine weitere Untersuchung des Beispiels 3.2.1 zeigt, dass die Voronoizellen $V(q)$ von allen anderen Punkten $q \in \mathcal{P} \setminus \{a\}$ Polyeder sind, a also der einzige kritische Punkt von \mathcal{P} ist. Man sieht zusätzlich, dass die im Beispiel betrachtete Punktmenge \mathcal{P} sogar uniform diskret ist. Eine Verschärfung des Diskretheitsbegriffes kann also das Auftreten nichtpolyedrischer Voronoizellen nicht verhindern.

Welche weiteren Schlüsse lassen sich nun aus diesem Beispiel ziehen, das heißt wie lässt sich die dort betrachtete Situation verallgemeinern? Eine Vermutung könnte sein, dass es von den vorkommenden Richtungen abhängt, ob die Voronoizelle eines gegebenen Punktes ein Polyeder ist oder nicht.

Definition 3.2.3 Zu einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} bezeichne

$$\mathcal{D}_p := \left\{ \frac{1}{\|q-p\|} (q-p) \mid q \in \mathcal{P} \setminus \{p\} \right\}$$

die Menge aller *normierten Differenzvektoren (Richtungen)* von p in \mathcal{P} .

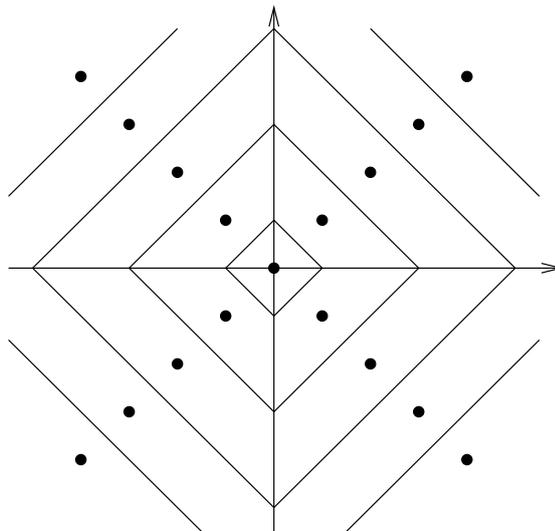


Abbildung 3.5: Voronoidiagramm zu $\{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(z, -z) \mid z \in \mathbb{Z}\}$

Betrachtet man in Beispiel 3.2.1 die Menge der Richtungen \mathcal{D}_a zu dem Punkt a , so sieht man, dass

$$\mathcal{D}_a = \left\{ \frac{1}{\|p-a\|} (p-a) \mid p \in \mathcal{P} \setminus \{a\} \right\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+z^2}} (-1, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z \in \mathbb{Z} \right\}$$

gilt. Somit ist \mathcal{D}_a eine echte Teilmenge der 1-Sphäre S^1 . Alle in \mathcal{D}_a vorkommenden Richtungen liegen in nur einer Hemisphäre von S^1 , was insbesondere heißt, dass \mathcal{D}_a in S^1 nicht dicht liegt. Daraus lässt sich jedoch nicht ohne weiteres ein Kriterium für die Eigenschaft der Voronoizelle, ein Polyeder zu sein, ableiten. Man kann zwar zeigen, dass die Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop ist, wenn die Menge der normierten Differenzvektoren \mathcal{D}_p von p dicht in S^{n-1} liegt, jedoch ist die Umkehrung im Allgemeinen nicht richtig. Die Implikation, dass aus der dichten Lage der Menge \mathcal{D}_p in S^{n-1} folgt, dass die Voronoizelle $V(p)$ ein Polytop ist, wird man an späterer Stelle in diesem Abschnitt (siehe Folgerung 3.2.11) als einfache Folgerung erhalten. Um sich davon zu überzeugen, dass die Umkehrung dieser Aussage nicht gilt, betrachte man als Beispiel die Punktmenge $\mathcal{P} := \{(z, z) \mid z \in \mathbb{Z}\} \cup \{(z, -z) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$. Die Voronoizelle

$V((0,0)) = H^-((1,1)) \cap H^-((1,-1)) \cap H^-((-1,1)) \cap H^-((-1,-1))$ ist offensichtlich ein Polytop (siehe Abbildung 3.5), aber es gilt $|\mathcal{D}_{(0,0)}| = 4$ und $\mathcal{D}_{(0,0)}$ liegt somit nicht dicht in S^1 . Es wird sich jedoch noch zeigen, dass der Ansatz, die von einem Punkt $p \in \mathcal{P}$ ausgehenden Richtungen zu betrachten, nicht völlig falsch ist. In Abschnitt 3.4 wird ein hiermit verwandter Ansatz verfolgt und damit ein hinreichendes und notwendiges Kriterium für die Polyedrizität der Voronoizelle angegeben werden.

Eine andere Beobachtung, zu der die Betrachtung von Beispiel 3.2.1 führt, ist die Tatsache, dass dort alle nicht kritischen Punkte der betrachteten Punktmenge in einem Unterraum enthalten sind und nur der kritische Punkt außerhalb dieses Unterraumes liegt. Man könnte nun versuchen, diese „Struktur“ der Punktmenge, eine Aufteilung der Punkte auf verschiedene Unterräume, für eine Charakterisierung der Polyedereigenschaft der Voronoizellen zu nutzen. Eine Betrachtung weiterer Beispiele zeigt jedoch sehr schnell, dass dieses nicht zum Ziel führt.

Randverhalten der konvexen Hülle

Nachdem man bis jetzt die Punktmenge \mathcal{P} aus Beispiel 3.2.1 „von Innen heraus“ betrachtet hat, ändere man nun die Blickrichtung und betrachte die Menge \mathcal{P} „als Ganzes“, sozusagen „von Außen“. Das heißt man wende sich der von ihr erzeugten konvexen Hülle zu. Dabei fallen in Beispiel 3.2.1 zwei Dinge auf: Zum einen sieht man, dass $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist. Denn mit den Halbräumen $H^-((-1,0),0) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (-1,0) \rangle \leq 0\}$ und $H^-((1,0),1) := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (1,0) \rangle \leq 1\}$ erhält man die Darstellung $\text{conv}(\mathcal{P}) = H^-((-1,0),0) \cap H^-((1,0),1)$. Aber $\text{Hyp}((1,0),1) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, (1,0) \rangle = 1\}$ gehört nicht vollständig zu $\text{conv}(\mathcal{P})$. Daher lässt sich ein Zusammenhang zwischen der Gestalt der Voronoizellen und dem Randverhalten der konvexen Hülle der Punktmenge vermuten. Zum anderen fällt auf, dass der kritische Punkt a gerade auf der Hyperebene $\text{Hyp}((1,0),1) \subset \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ liegt, es also an a angrenzende Randstücke gibt, die nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehören. Der Punkt a liegt sozusagen „isoliert“ auf dem Rand der konvexen Hülle.

Man untersuche zunächst, in wie weit eine „isolierte“ Lage eines Randpunktes mit der Gestalt der zugehörigen Voronoizelle zusammen hängt. Dazu muss zunächst der Begriff eines „isolierten Randpunktes“ klar definiert werden.

Definition 3.2.4 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Menge. Ein Punkt $p \in \partial \mathcal{P}$ heißt *isolierter Randpunkt* von \mathcal{P} , wenn alle Stützhyperebenen an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p außer p keinen weiteren Punkt mit \mathcal{P} gemeinsam haben.

Das heißt ein Randpunkt $p \in \partial\mathcal{P}$ ist genau dann isoliert, wenn für jede zu p zugehörige Stützhyperebene Hyp_p von $\text{conv}(\mathcal{P})$ die Bedingung $\text{Hyp}_p \cap \mathcal{P} = \{p\}$ erfüllt ist. Allgemein lässt sich zeigen, dass es zu einem isolierten Randpunkt p einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine Umgebung U gibt, für die $(U \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$ gilt.

Betrachtet man erneut Beispiel 3.2.1, so sieht man, dass der Punkt a ein isolierter Randpunkt im Sinne obiger Definition ist. Ausgehend von diesem Beispiel könnte man zusätzlich vermuten, dass es in einem isolierten Randpunkt nur genau eine Stützhyperebene an die konvexe Hülle der Punktmenge geben kann. Dass dieses nicht so ist, sondern dass es auch in einem isolierten Randpunkt mehrere Stützhyperebenen geben kann, zeigt das nächste Beispiel.

Beispiel 3.2.5 Man betrachte die Menge $\mathcal{P} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \{-1, 1\}\} \cup \{(0, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$. Hier ist der Punkt $(0, 0, 1)$ ein isolierter Randpunkt, in dem es mehr als eine stützende Hyperebene an $\text{conv}(\mathcal{P})$ gibt, siehe Abbildung 3.6.

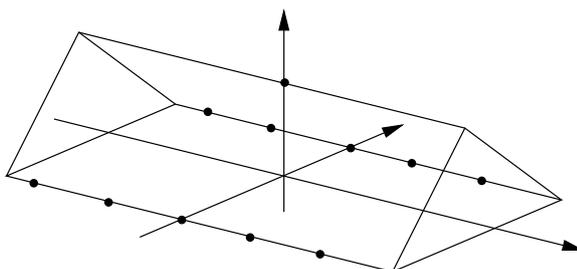


Abbildung 3.6: Punktmenge aus Beispiel 3.2.5

Stellt man nun die Hypothese auf, dass die kritischen Punkte einer diskreten Punktmenge genau die isolierten Randpunkte der Menge sind, so zeigt das folgende Beispiel, dass diese Äquivalenz nicht gilt.

Beispiel 3.2.6 Betrachte erneut die Menge $\mathcal{P} := (\{0\} \times \mathbb{Z}) \cup \{(1, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ aus Beispiel 3.2.1. Dort wurde gezeigt, dass $a = (1, 0)$ ein kritischer Punkt ist. Erweitert man nun die Menge \mathcal{P} um einen Punkt $b := (1, 1)$ zu $\mathcal{P}' := \mathcal{P} \cup \{b\}$, so sieht man, dass nun sowohl a als auch b kritische Punkte der Menge \mathcal{P}' sind, aber keiner der beiden isoliert ist, siehe Abbildung 3.7.

Das heißt ein kritischer Randpunkt muss nicht isoliert sein. Es bleibt noch zu überprüfen, ob zumindest ein isolierter Punkt stets kritisch ist. Dass dieses gilt, wird man aus einem späteren Resultat (siehe Folgerung 3.4.12) als einfache Folgerung erhalten.

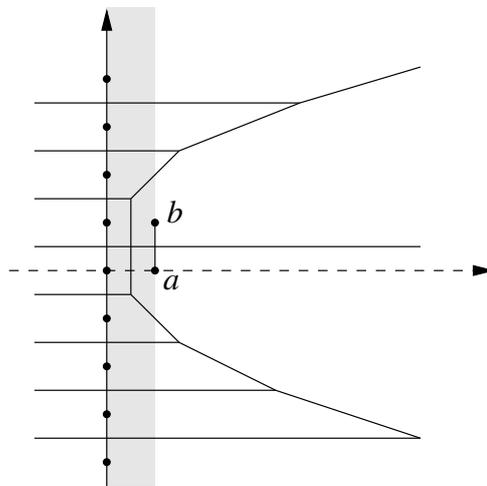


Abbildung 3.7: Nicht isolierte, kritische Punkte

Damit wende man sich nun dem vermuteten Zusammenhang zwischen der Gestalt der Voronoi-Zellen und dem Randverhalten der konvexen Hülle der diskreten Punktmenge zu und starte mit einer ersten Arbeitshypothese:

Hypothese 3.2.7 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Es ist genau dann jede Voronoi-Zelle ein Polyeder, wenn $\text{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen ist.*

Die in der Vergangenheit betrachteten Spezialfälle diskreter Punktmen- gen scheinen diese Hypothese zu unterstützen. Die konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge als auch die konvexe Hülle eines (r, R) -Systems ist abgeschlossen und alle Voronoi-Zellen sind Polyeder. Leider wird man später (siehe Seite 96 ff) jedoch feststellen, dass diese Hypothese so nicht haltbar ist. Man beginne jedoch zunächst mit der Untersuchung der Voronoi-Zellen von inneren Punkten.

Voronoi-Zellen innerer Punkte

Ist die diskrete Punktmenge ein (r, R) -System, so sind sogar alle Voronoi-Zellen Polytope. Für die konvexe Hülle eines (r, R) -Systems gilt, dass sie gleich dem ganzen Raum und damit ihr Rand leer ist. Also sind alle Punkte eines (r, R) -Systems innere Punkte. Auch im Fall einer endlichen Punktmenge beobachtet man, dass die Voronoi-Zellen von inneren Punkten stets Polytope sind. Diese Aussage wird in [Klei97] für endliche Punktmen- gen in \mathbb{R}^2 begründet. Ein anderer Beweis der gleichen Aussage, ebenfalls nur für endliche Punktmen- gen, findet sich auch in [OBS92]. Diese Aussage soll nun hier für beliebige diskrete Punktmen- gen des \mathbb{R}^n bewiesen werden. Man

erhält somit als weiteren Hinweis zur Charakterisierung aller polyedrischen Voronoizellen den folgenden Zusammenhang:

Satz 3.2.8 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Dann ist die Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \mathcal{P}$ genau dann ein Polytop, wenn $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt ist.*

Beweis: Es sei zunächst eine kurze Beweisskizze angegeben: Ist p ein innerer Punkt von \mathcal{P} , so lässt sich p nach dem Satz von Steinitz auch als innerer Punkt der konvexen Hülle von endlich vielen Punkten aus \mathcal{P} darstellen. Verschiebt man nun dieses p enthaltende Polytop, so dass die Null im Inneren liegt, bildet dann das dazu polare Polytop und verschiebt dieses wieder zurück, so lässt sich die dadurch erhaltene konvexe Menge so skalieren, dass $V(p)$ in dieser Menge enthalten ist. Damit folgt, dass $V(p)$ beschränkt ist und es nur endlich viele voronoirelevante Vektoren geben kann, $V(p)$ also ein Polytop ist. Setzt man andererseits $V(p)$ als Polytop voraus, so ist auch die Polare der um $-p$ verschobenen Voronoizelle wieder ein Polytop. Diese Menge lässt sich im Wesentlichen durch endlich viele Punkte $p_1 - p, \dots, p_k - p$ mit $p_i \in \mathcal{P}$ für $i = 1, \dots, k$ beschreiben. Da die Null ein innerer Punkt der Polaren der verschobenen Voronoizelle ist, erhält man p als inneren Punkt der zugehörigen, zurück verschobenen Menge, also als inneren Punkt der konvexen Hülle von $\{p_1, \dots, p_k\}$. Damit ist p auch ein innerer Punkt von \mathcal{P} .

Ist $p \in \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ ein innerer Punkt der konvexen Hülle von \mathcal{P} , so folgt mit dem Satz 1.1.10 von Steinitz, dass es Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ gibt mit $k \leq 2n$ und $p \in \text{conv}(p_1, \dots, p_k)^\circ$. Als konvexe Hülle einer endlichen Punktmenge ist $\text{conv}(p_1, \dots, p_k)$ nach Satz 2.1.5 kompakt. Verschiebt man $\text{conv}(p_1, \dots, p_k)$ um $-p$, so dass p im Ursprung liegt, so gilt $0 \in (\text{conv}(p_1, \dots, p_k) - p)^\circ$, und Satz 1.4.7 liefert die Beschränktheit der zu $\{p_1 - p, \dots, p_k - p\}$ polaren Menge $C := \{p_1 - p, \dots, p_k - p\}^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p_i - p \rangle \leq 1, i = 1, \dots, k\}$. Skaliert man nun C mit $m := \max\{\frac{1}{2}\|p_i - p\|^2 \mid i = 1, \dots, k\}$ und verschiebt diese Menge dann wieder um p , so sieht man, dass $\bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i) \subset (m \cdot C) + p$ gilt. Denn nach Definition 3.0.1 und der Definition von m ist

$$\begin{aligned} \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i) &= \left(\bigcap_{i=1}^k H^-(p_i - p) \right) + p \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p_i - p \rangle \leq \frac{1}{2}\|p_i - p\|^2, i = 1, \dots, k\} + p \\ &\subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p_i - p \rangle \leq m, i = 1, \dots, k\} + p \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle \frac{1}{m}x, p_i - p \rangle \leq 1, i = 1, \dots, k\} + p \\ &= \{mx \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p_i - p \rangle \leq 1, i = 1, \dots, k\} + p \\ &= m \cdot C + p. \end{aligned}$$

Da mit $V(p) \subset \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i)$ auch $V(p) \subset (m \cdot C) + p$ gilt, folgt die Beschränktheit von $V(p)$.

Die Darstellbarkeit von $V(p)$ als Schnitt von endlich vielen Halbräumen sieht man wie folgt: da $(m \cdot C) + p$ eine beschränkte konvexe Menge ist, existiert ein maximaler Abstand von p zum Rand von $(m \cdot C) + p$. Dieser sei mit $s := \max\{\|x - p\| \mid x \in \partial((m \cdot C) + p)\}$ bezeichnet. Da $V(p)$ in $(m \cdot C) + p$ enthalten ist, sind alle Punkte, die zu p einen Abstand haben, der echt größer als $2s$ ist, nicht relevant. Denn die zu einem Punkt $q \in \mathcal{P}$ mit $d(p, q) > 2s$ zugehörige Hyperebene $\text{Hyp}_p(q)$ hat mit $(m \cdot C) + p$ einen leeren Schnitt; da $\text{Hyp}_p(q)$ Tangente an die Kugel $B(p, \frac{1}{2}\|q - p\|)$ ist, gilt $d(p, x) \geq \frac{1}{2}\|q - p\| > s$ für alle $x \in \text{Hyp}_p(q)$ und mit $(m \cdot C) + p \subset B(p, s)$ erhält man $\text{Hyp}_p(q) \cap (m \cdot C) + p = \emptyset$. Dann gilt aber erst recht $\text{Hyp}_p(q) \cap V(p) = \emptyset$. Das heißt der zugehörige Halbraum $H_p^-(q)$ trägt zu der Darstellung von $V(p)$ nichts bei, $V(p) \cap H_p^-(q) = V(p)$ und q ist nicht voronoirelevant für p . Also müssen alle zu p voronoirelevanten Punkte in der Kugel $B(p, 2s)$ enthalten sein. Da \mathcal{P} diskret ist, gilt $|B(p, 2s) \cap \mathcal{P}| < \infty$, das heißt es existieren nur endlich viele relevante Punkte zu p . Also ist $V(p)$ ein Polytop.

Zeige nun die Umkehrung. Es sei $V(p)$ ein Polytop. Aufgrund der Konstruktion einer Voronoizelle gilt $\dim V(p) = n$ und $p \in V(p)^\circ$. Verschiebt man nun wieder $V(p)$ um $-p$, so dass p wieder im Ursprung liegt, also $0 \in (V(p) - p)^\circ$ gilt, so folgt mit Satz 1.4.7, dass auch die Polare $(V(p) - p)^*$ wieder ein Polytop ist und $0 \in ((V(p) - p)^*)^\circ$ gilt. Da $V(p)$ als Polytop insbesondere als Schnitt von endlich vielen Halbräumen darstellbar ist, gibt es $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ mit $V(p) = \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i)$. Für die um $-p$ verschobene Menge

heißt das $V(p) - p = \left(\bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i)\right) - p = \bigcap_{i=1}^k (H_p^-(p_i) - p) = \bigcap_{i=1}^k H^-(p_i - p)$. Da-

mit gibt es auch für $V(p) - p$ eine Darstellung als Schnitt von endlich vielen Halbräumen, wobei die zu den Halbräumen zugehörigen (normierten) Normalenvektoren von der Form $q_i := \lambda_i(p_i - p)$, für ein $\lambda_i > 0$, $i \in \{1, \dots, k\}$, sind. Mit Satz 1.4.7 folgt dann $(V(p) - p)^* = \text{conv}(q_1, \dots, q_k)$. O.B.d.A. seien q_1, \dots, q_l , $l \leq k$, die Extrempunkte von $\text{conv}(q_1, \dots, q_k) = \text{conv}(q_1, \dots, q_l)$. Gilt nun für einen Extrempunkt $q_i = \lambda_i(p_i - p)$, dass $\lambda_i \leq 1$ ist, so ist offensichtlich $\text{conv}(q_1, \dots, q_i, \dots, q_l) \subset \text{conv}(q_1, \dots, p_i - p, \dots, q_l)$. Gilt andererseits für einen Extrempunkt $q_j = \lambda_j(p_j - p)$, dass $\lambda_j > 1$ ist, so folgt nach dem Austauschlemma 2.1.6 immerhin aus $0 \in \text{conv}(q_1, \dots, q_j, \dots, q_l)^\circ$ noch $0 \in \text{conv}(q_1, \dots, p_j - p, \dots, q_l)^\circ$. Damit folgt insgesamt, dass mit $0 \in \text{conv}(q_1, \dots, q_l)^\circ$ auch $0 \in \text{conv}(p_1 - p, \dots, p_l - p)^\circ$ gilt. Verschiebt man nun wieder alles um $+p$ zurück, so erhält man, dass p ein innerer Punkt von $\text{conv}(p_1, \dots, p_l)$ ist, also auch $p \in \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ und damit $p \in \mathcal{P}^\circ$ gilt. \square

Damit hat man eine Charakterisierung derjenigen diskreten Punktmen- gen, deren sämtliche Voronoizellen Polytope sind, gefunden:

Satz 3.2.9 (1. Hauptsatz) *Es sind genau dann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ Polytope, wenn $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$ gilt, die Menge \mathcal{P} also nur aus inneren Punkten besteht.* \square

Diese Aussage verallgemeinert die in der Vergangenheit betrachteten Fälle von Voronoizellen von Gittern und (r, R) -Systemen. Denn sowohl in dem Fall, in dem die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ ein Gitter ist, als auch in dem Fall, in dem \mathcal{P} ein (r, R) -System ist, erzeugt die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ den gesamten Raum \mathbb{R}^n . In beiden Fällen gilt $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) = \emptyset$ und die Punktmenge $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$ besteht nur aus inneren Punkten. Beides sind also Spezialfälle der folgenden Aussage:

Folgerung 3.2.10 *Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ diskret und gilt $\text{conv}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^n$, so ist für alle $p \in \mathcal{P}$ die zugehörige Voronoizelle $V(p)$ ein Polytop.*

Beweis: Gilt $\text{conv}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^n$, so folgt $\partial \text{conv}(\mathcal{P}) = \emptyset$ und damit $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$. Der erste Hauptsatz 3.2.9 liefert dann direkt die Behauptung. \square

Man beachte jedoch, dass die Eigenschaft $\text{conv}(\mathcal{P}) = \mathbb{R}^n$ einer Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ nicht zu der Eigenschaft $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$ äquivalent ist. Wie man in Beispiel 2.2.2 gesehen hat, existieren diskrete Punktmenge, deren konvexe Hüllen nicht den gesamten Raum erzeugen, die aber trotzdem keinen Punkt auf dem Rand ihrer konvexen Hülle besitzen, also nur aus inneren Punkten bestehen. Alle Voronoizellen der Punktmenge aus Beispiel 2.2.2 sind nach dem ersten Hauptsatz 3.2.9 Polytope. Dass dieses tatsächlich so ist, lässt sich auch geometrisch, siehe Abbildung 3.8 verifizieren: Die Voronoizelle eines Punkte $p \in \mathcal{P}$ wird hier von drei Geraden begrenzt. Zwei dieser Geraden werden dabei durch die direkten „Nachbarn“ q_1, q_2 , siehe Abbildung 3.8, bestimmt. In der hier dargestellten Situation sieht man, dass diese beiden Geraden $\text{Hyp}_p(q_1), \text{Hyp}_p(q_2)$ einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Die dritte begrenzende Gerade $\text{Hyp}_p(q_3)$ wird durch einen von p weit entfernten Punkt q_3 bestimmt; diese Gerade hat mit den ersten beiden ebenfalls jeweils einen gemeinsamen Schnittpunkt. In Abbildung 3.8 erkennt man, dass sich die beteiligten Geraden $\text{Hyp}_p(q_1), \text{Hyp}_p(q_2), \text{Hyp}_p(q_3)$ so schneiden, dass als Voronoizelle $V(p)$ ein Dreieck entsteht.

Da die Vereinigung der Voronoizellen nach Definition 0.0.1 eine Pflasterung des gesamten Raumes liefert, erhält man mittels der diskreten Punktmenge aus Beispiel 2.2.2 eine Pflasterung des \mathbb{R}^2 , die nur aus Polytopen besteht, wobei die zugehörige Punktmenge vollständig in einem Streifen enthalten ist.

Erinnert man sich an die zu Beginn dieses Abschnittes diskutierte Vermutung eines Zusammenhanges zwischen der Polyedrizität der Voronoizelle

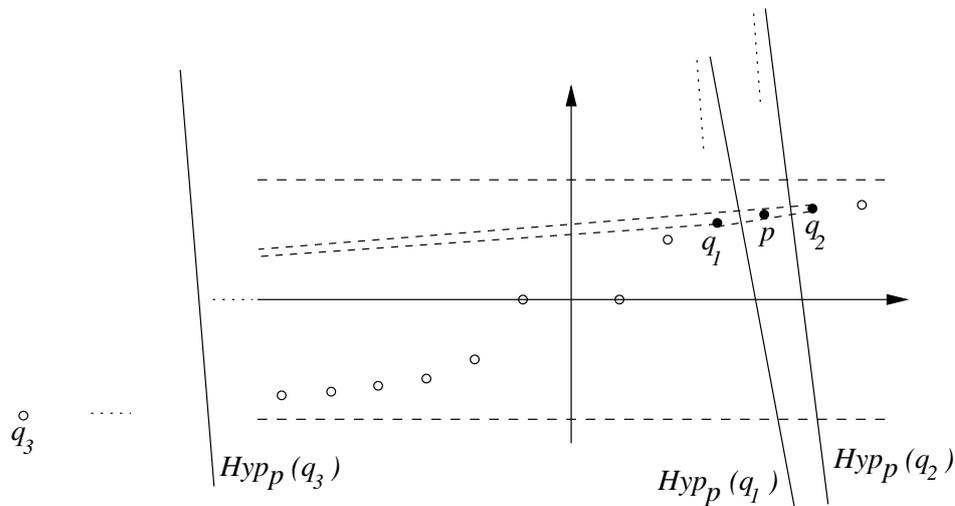


Abbildung 3.8: Polyedrische Voronoizellen in Beispiel 2.2.2

$V(p)$ und der Menge \mathcal{D}_p der von dem Punkt p ausgehenden normierten Richtungen, so erhält man die zu Anfang bereits formulierte Implikation jetzt ebenfalls als direkte Folgerung. Denn liegt \mathcal{D}_p dicht in S^{n-1} , so ist p ein innerer Punkt von \mathcal{P} und damit $V(p)$ nach Satz 3.2.8 ein Polytop.

Folgerung 3.2.11 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Gilt für einen Punkt $p \in \mathcal{P}$, dass die Menge \mathcal{D}_p der normierten Richtungen von p dicht in S^{n-1} liegt, so ist die Voronoizelle $V(p)$ ein Polytop.* \square

Insbesondere hat man mit Satz 3.2.8 auch gezeigt, dass die Punkte, deren Voronoizellen keine Polyeder sind, auf dem Rand der von der Punktmenge erzeugten konvexen Hülle liegen müssen. Denn die Voronoizellen von inneren Punkten einer diskreten Punktmenge sind stets Polytope also insbesondere Polyeder. Ein kritischer Punkt muss folglich im Rand der konvexen Hülle der Punktmenge enthalten sein.

Folgerung 3.2.12 *$\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ sei eine diskrete Punktmenge. Ist $p \in \mathcal{P}$ ein kritischer Punkt, so folgt $p \in \partial\mathcal{P}$.* \square

Verwerfung der Hypothese

Man betrachte erneut die zu Anfang formulierte Hypothese 3.2.7 und überprüfe inwieweit die bis jetzt erzielten Ergebnisse diese Behauptung stützen oder widerlegen. Ist die Punktmenge \mathcal{P} endlich, so ist die konvexe Hülle von \mathcal{P} als Polytop abgeschlossen und alle Voronoizellen sind Polyeder. Die konvexe Hülle eines (r, R) -Systems ist ebenfalls abgeschlossen und alle Voronoizellen sind Polytope. Diese Fälle unterstützen also die Hypothese 3.2.7. Die Tatsache, dass die kritischen Punkte einer diskreten Punktmenge ausschließlich auf dem Rand ihrer konvexen Hülle liegen, unterstützt ebenfalls die Vermutung, dass die Polyedrizität der Voronoizellen mit dem Randverhalten der konvexen Hülle in Zusammenhang steht.

Erinnert man sich jedoch an die oben bereits diskutierte Punktmenge aus Beispiel 2.2.2, so sieht man, dass die Hypothese 3.2.7 so nicht stimmt. Denn obwohl dort $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist, sind alle Punkte aus \mathcal{P} innere Punkte und damit alle Voronoizellen von \mathcal{P} nach dem ersten Hauptsatz 3.2.9 Polytope. Andererseits hat man die Situation, in der $\mathcal{P} = \mathcal{P}^\circ$ erfüllt ist, nach dem ersten Hauptsatz 3.2.9 bereits unter Kontrolle. Zu untersuchen ist somit nur noch die Situation, in der \mathcal{P} Randpunkte enthält. Aus diesen Überlegungen entsteht nun eine neue Hypothese:

Hypothese 3.2.13 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $\partial\mathcal{P} \neq \emptyset$. Es sind genau dann alle Voronoizellen aller Randpunkte der diskreten Punktmenge Polyeder, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge abgeschlossen ist.*

Jedoch zeigt das folgende Beispiel, dass auch diese Hypothese nicht stimmt. Denn aus der Polyedrizität aller Voronoizellen von Randpunkten folgt im Allgemeinen nicht die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge.

Beispiel 3.2.14 Betrachte die Menge $\mathcal{P} := \{(z, 1 - \frac{1}{|z|}) \mid z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \cup \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^2$. Es gilt, dass der Abschluss von $\text{conv}(\mathcal{P})$ gerade die Menge $\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq \langle x, (0, 1) \rangle \leq 1\}$ ist. Man überlegt sich leicht, dass alle zu \mathcal{P} zugehörigen Voronoizellen Polyeder sind, jedoch auch hier die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist, siehe Abbildung 3.9.

Damit müssen beide Hypothesen 3.2.7 und 3.2.13 verworfen werden. Die globale Eigenschaft der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge führt nicht zu einer Äquivalenzaussage über die Polyedrizität aller Voronoizellen. Es ist allerdings noch offen, ob zumindest die andere Implikation der Hypothesen stimmt: Folgt aus der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle, dass alle Voronoizellen Polyeder sind?

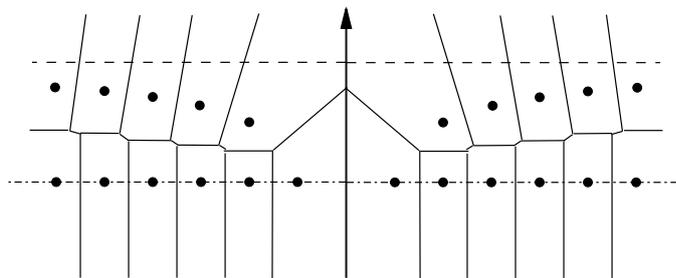


Abbildung 3.9: Voronoidiagramm zu Beispiel 3.2.14

3.3 Voronoizellen in \mathbb{R}^2

Wie schon bei der Untersuchung des Randverhaltens der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge im vorherigen Kapitel, bei der die Dimension 2 einen Spezialfall darstellte, ist es auch bei der Betrachtung der Voronoizellen einer diskreten Punktmenge sinnvoll, den zweidimensionalen Fall gesondert zu behandeln. Auch hier stellt die Dimension 2 eine Art Spezialfall dar, da sich die Gestalt einer polyedrischen Voronoizelle eines Punktes einer diskreten Punktmenge in der Ebene auf vier verschiedene Typen reduzieren lässt. Dadurch lässt sich die noch offene Implikation aus der Hypothese 3.2.7, dass alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge Polyeder sind, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge abgeschlossen ist, für eine diskrete Punktmenge des \mathbb{R}^2 beweisen.

Satz 3.3.1 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ eine diskrete Punktmenge mit $|\mathcal{P}| \geq 2$ und $p \in \mathcal{P}$ ein beliebiger Punkt. Die Voronoizelle $V(p)$ ist genau dann ein Polyeder, wenn einer der folgenden Fälle gilt:*

- (1) *Es existiert ein Punkt $p_1 \in \mathcal{P}$, so dass gilt:
 $\forall p' \in \mathcal{P} \exists \alpha \in \mathbb{R}_{>0} : (p' - p) = \alpha(p_1 - p)$.*
- (2) *Es existieren $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass $-(p_1 - p) = \alpha(p_2 - p)$ erfüllt ist und für alle anderen Punkte $p' \in \mathcal{P}$ gilt:
 $\exists \alpha' \in \mathbb{R}$ mit $(p - p') = \alpha'(p - p_1)$.*
- (3) *Es existieren $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, $0 < \theta \leq \pi$, so dass $D_\theta(p_1 - p) = \alpha(p_2 - p)$ gilt und für alle anderen $p' \in \mathcal{P} \setminus \{p, p_1, p_2\}$ ein $\alpha' \in \mathbb{R}_{>0}$ und $0 \leq \rho \leq \theta$ existieren, so dass $D_\rho(p_1 - p) = \alpha'(p' - p)$ erfüllt ist. Und es gibt wenigstens einen Punkt $p' \in \mathcal{P}$, für den $D_\rho(p_1 - p) = \alpha'(p' - p)$ mit $0 < \rho < \pi$ gilt.*
- (4) *Es existieren $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, $3 \leq k \leq 4$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}$ mit:
 $D_{\theta_i}(p_i - p) = \alpha_i(p_{i+1} - p)$ mit $0 < \theta_i < \pi$ für $i = 1, \dots, k - 1$,
und $\pi < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < 2\pi$.*

Dabei bezeichne $D_\theta := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ die Matrix, die eine Drehung um den Winkel $\theta \in [0, 2\pi]$ bewirkt.

Man mache sich zunächst die anschauliche Bedeutung der obigen Beschreibungen (1)–(4) klar.

- (1) In diesem Fall ist die Punktmenge \mathcal{P} vollständig in einem Strahl enthalten. Der Punkt $p \in \mathcal{P}$, dessen Voronoizelle bestimmt werden soll, ist in diesem Fall gerade der Startpunkt des Strahls.

- (2) Ist die Punktmenge \mathcal{P} von der unter (2) angegebenen Struktur, so existiert eine Gerade, in der \mathcal{P} vollständig enthalten ist. Es ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass es auch einen Strahl gibt, der ebenfalls bereits ganz \mathcal{P} enthält. Der Unterschied zu der Situation aus (1) ist nur, dass in diesem Fall der betrachtete Punkt $p \in \mathcal{P}$ im relativen Inneren der \mathcal{P} enthaltenden Geraden (bzw. des \mathcal{P} enthaltenden Strahls) liegt, also nicht Startpunkt eines \mathcal{P} enthaltenden Strahls ist.
- (3) In der unter (3) angegebenen Situation findet man einen konvexen Kegel, der ganz \mathcal{P} enthält. Das heißt man findet Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, so dass der Winkel zwischen den zugehörigen Richtungsvektoren $p_1 - p, p_2 - p$ unter allen vorkommenden Winkeln maximal ist, alle anderen Winkel also dazwischen liegen. Dabei soll der Fall (2) explizit ausgeschlossen werden. Das heißt in diesem Fall gibt es einen Halbraum, in dem die Punktmenge \mathcal{P} vollständig enthalten ist, und es gibt wenigstens einen Punkt aus \mathcal{P} , der im Inneren dieses Halbraumes liegt. Der Fall, dass der von $p_1 - p, p_2 - p$ aufgespannte Kegel gleich einem Halbraum ist und ganz \mathcal{P} auf dem Rand dieses Halbraumes liegt, wird damit ausgeschlossen. Dabei betrachtet man die Punktmenge \mathcal{P} von dem Punkt $p \in \mathcal{P}$ aus, für den man die Voronoizelle bestimmen möchte. Das heißt p ist die Spitze eines \mathcal{P} enthaltenden Kegels, also insbesondere ein Randpunkt von \mathcal{P} .
- (4) In dieser Situation ist der für die Voronoizelle betrachtete Punkt $p \in \mathcal{P}$ ein innerer Punkt der Punktmenge. Das heißt man findet eine Teilmenge aus $\{p_1, \dots, p_k\} \subset \mathcal{P}$, so dass p im Inneren des von p_1, \dots, p_k erzeugten Polytops liegt. Da $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ gilt, muss k größer gleich 3 sein, und nach dem Satz 1.1.10 von Steinitz ist dieses mit $k \leq 4$ möglich.

In den ersten beiden Fällen hat die von \mathcal{P} erzeugte konvexe Hülle die Dimension 1, in den Fällen (3) und (4) ist die konvexe Hülle von \mathcal{P} dagegen von der Dimension 2.

Beweis: Ist $V(p)$ ein Polyeder, so ist $V(p)$ von einer der folgenden Formen:

- (a) $V(p)$ ist unbeschränkt und begrenzt von genau einer Hyperebene, das heißt $V(p)$ ist ein Halbraum.
- (b) $V(p)$ ist unbeschränkt und begrenzt von genau zwei parallelen Hyperebenen, das heißt $V(p)$ ist ein Streifen.
- (c) $V(p)$ ist unbeschränkt und begrenzt von wenigstens zwei sich schneidenden Hyperebenen, das heißt $V(p)$ ist enthalten in einem Kegel.
- (d) $V(p)$ ist beschränkt, also ein Polytop.

Der Fall (a) kann nur eintreten, wenn alle Richtungsvektoren $(p' - p)$, mit $p' \in \mathcal{P}$, Vielfache voneinander sind und p der „Endpunkt“ der Punktmenge ist, das heißt wenn alle Punkte aus \mathcal{P} auf einem Strahl mit Ausgangspunkt p liegen, siehe Abbildung 3.10. Das ist aber gerade die in (1) beschriebene Situation.

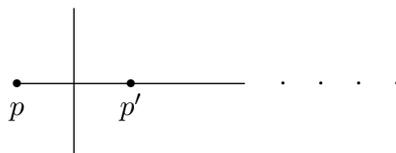


Abbildung 3.10: Fall (a)

Fall (b) setzt voraus, dass es wenigstens zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ gibt, die zusammen mit p so auf einer Geraden liegen, dass p zwischen p_1 und p_2 liegt und dass alle Richtungsvektoren $(p' - p)$, $p' \in \mathcal{P}$, Vielfache der Richtungsvektoren $(p_1 - p)$, $(p_2 - p)$ sind, siehe Abbildung 3.11. Dieses erfüllt Fall (2).

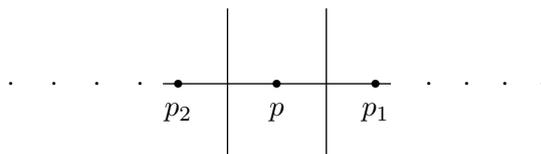


Abbildung 3.11: Fall (b)

Da $V(p)$ im Fall (c) kein Streifen ist, folgt, dass es wenigstens zwei Punkte $q, q' \in \mathcal{P}$ gibt, für die gilt, dass es keine Gerade durch p, q, q' gibt. Die zugehörigen Hyperebenen $\text{Hyp}_p(q)$ und $\text{Hyp}_p(q')$ besitzen dann einen Schnittpunkt und beschreiben somit einen Kegel. Die Voronozelle $V(p)$ ist offensichtlich in diesem Kegel enthalten, siehe Abbildung 3.12. Da $V(p)$ als unbeschränktes Polyeder vorausgesetzt ist, findet man zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, deren zugehörige Hyperebenen $\text{Hyp}_p(p_1)$, $\text{Hyp}_p(p_2)$ einen „maximalen“, $V(p)$ enthaltenden Kegel begrenzen. Das heißt es muss zwei Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ geben, für die gilt, dass der Winkel θ zwischen den Richtungsvektoren $(p_1 - p)$ und $(p_2 - p)$ kleiner oder gleich 180° ist und es (bei gleicher Drehrichtung) keinen Punkt $p' \in \mathcal{P}$ gibt, für den der Winkel zwischen $(p_1 - p)$ und $(p' - p)$ größer als θ ist. Damit liegt die Situation aus Fall (3) vor.

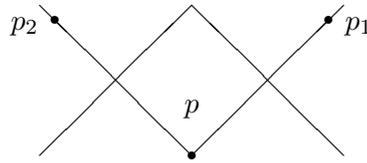


Abbildung 3.12: Fall (c)

Im Fall (d) ist $V(p)$ ein Polytop. Nach Satz 3.2.8 muss dann p ein innerer Punkt der Punktmenge \mathcal{P} sein. Also gibt es nach dem Satz 1.1.10 von Steinitz eine Teilmenge von \mathcal{P} , die aus maximal vier Punkten $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, $3 \leq k \leq 4$ besteht und für die gilt, dass p im Inneren des von p_1, \dots, p_k erzeugten Polytops liegt, siehe Abbildung 3.13. Dann müssen die Richtungsvektoren $(p_i - p)$, $i = 1, \dots, k$, aber gerade die Bedingungen aus (4) erfüllen.

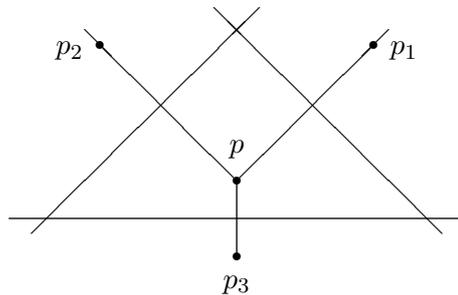


Abbildung 3.13: Fall (d) für $k = 3$

Sei nun $p \in \mathcal{P}$ so, dass einer der Fälle (1)–(4) erfüllt ist.

- (1) Wählt man hier p_1 nächstmöglich an p , so folgt, dass $V(p) = H_p^-(p_1) = H^-(p_1 - p) + p$ ein Halbraum und somit ein Polyeder ist.
- (2) Es seien p_1 und p_2 mit obiger Eigenschaft nächstmöglich an p gewählt. Dann ist $V(p)$ gleich dem Streifen $H_p^-(p_1) \cap H_p^-(p_2)$, also ein Polyeder.
- (3) Bezeichne zunächst:
 - θ ist der Winkel zwischen $(p_1 - p)$ und $(p_2 - p)$, $\theta \leq \pi$

- ρ ist (bei gleicher Drehrichtung) der Winkel zwischen $(p_1 - p)$ und $(p' - p)$, $\rho \leq \theta$, $\rho < \pi$
- $C := H_p^-(p_1) \cap H_p^-(p_2)$
- $h_i : p + \mathbb{R}(p_i - p)$ die durch p, p_i definierte Gerade, $i = 1, 2$
- H_i der von h_i begrenzte Halbraum, der \mathcal{P} enthält, $i = 1, 2$
- $S := C \cap H_1 \cap H_2$
- $s := \max\{\|x - p\| \mid x \in \partial S\}$, der maximale Abstand von p zum Rand von S
- $C' := H_p^-(p_1) \cap H_p^-(p_2) \cap H_p^-(p')$
- $b_1 := \text{Hyp}_p(p_1) \cap \text{Hyp}_p(p')$, der Schnittpunkt zwischen den Hyperebenen orthogonal zu $(p_1 - p)$ und $(p' - p)$
- $h_{b_1} : b_1 + \mathbb{R}(p_1 - p)$ die durch b_1 parallel zu h_1 verlaufende Gerade
- H_{b_1} der von h_{b_1} begrenzte Halbraum, der b_2 enthält
- $b_2 := \text{Hyp}_p(p_2) \cap \text{Hyp}_p(p')$, der Schnittpunkt zwischen den Hyperebenen orthogonal zu $(p_2 - p)$ und $(p' - p)$
- $h_{b_2} : b_2 + \mathbb{R}(p_1 - p)$ die durch b_2 parallel zu h_2 verlaufende Gerade
- H_{b_2} der von h_{b_2} begrenzte Halbraum, der b_1 enthält
- $S' := C' \cap H_{b_1} \cap H_{b_2}$
- $s' := \max\{\|x - p\| \mid x \in \partial S'\}$.

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{P} \subset H_1 \cap H_2$ und $V(p) \subset C$. Man betrachte zuerst den Fall, dass $\theta < \pi$ erfüllt ist, siehe Abbildung 3.14. In diesem Fall ist dann $h_1 \neq h_2$ und damit $H_1 \cap H_2$ ein von einem Halbraum verschiedener Kegel. Die C begrenzenden Hyperebenen $\text{Hyp}_p(p_1)$, $\text{Hyp}_p(p_2)$ sind in diesem Fall nicht parallel, so dass auch C ein echter Kegel ist. Da für $i = 1, 2$ gilt, dass h_i orthogonal zu $\text{Hyp}_p(p_i)$ ist und $h_i \cap \text{Hyp}_p(p_i) = p + \frac{1}{2}(p_i - p)$ gilt, folgt die Beschränktheit von S . Insbesondere ist S konstruierbar, da es Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ gibt, deren Richtungsvektoren den maximalen Winkel annehmen. Also ist $s := \max\{\|x - p\| \mid x \in \partial S\}$ definiert und es gilt $s < \infty$. Ist nun $p' \in \mathcal{P}$ ein voronoi-relevanter Punkt für p , so gilt $p' \in H_1 \cap H_2$ und $\text{Hyp}_p(p') \cap C \neq \emptyset$. Da man $\text{Hyp}_p(p')$ als Tangente an die Kugel $B(p, \frac{1}{2}\|p' - p\|)$ auffassen kann, folgt, dass $p + \frac{1}{2}(p' - p) \in (H_1 \cap H_2) \cap B(p, s)$ gilt, wenn p' voronoi-relevant ist. Also ist die Menge aller zu p voronoi-relevanten Punkte in der Kugel $B(p, 2s)$ enthalten. Da \mathcal{P} diskret ist, gilt $|B(p, 2s) \cap \mathcal{P}| < \infty$. Damit kann es also nur endlich viele voronoi-relevante Punkte geben. $V(p)$ ist somit ein Polyeder.

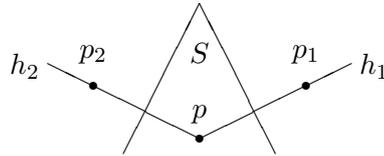


Abbildung 3.14: Fall $\theta < \pi$

Gilt $\theta = \pi$, so gilt $h_1 = h_2$ und $\mathcal{P} \subset H_1 = H_2$ (siehe Abbildung 3.15). Da jedoch in diesem Fall S nicht beschränkt ist, ist die obige Konstruktion hier nicht ohne Weiteres anwendbar. Um eine analoge Abschätzung zu erhalten, betrachte man einen weiteren Punkt $p' \in \mathcal{P} \setminus \{p, p_1, p_2\}$ mit Winkel $\rho < \theta$, der nach Voraussetzung existiert. Dann ist $V(p) \subset C'$. Für einen voronoi-relevanten Punkt $p'' \in \mathcal{P}$ muss somit $p'' \in H_1$ und $\text{Hyp}_p(p'') \cap C' \neq \emptyset$ gelten. Da $\text{Hyp}_p(p_1)$ und $\text{Hyp}_p(p_2)$ parallel sind und $\mathcal{P} \subset H_1$ gilt, muss sich die Schnittmenge $\text{Hyp}_p(p'') \cap C'$ in $H_{b_1} \cap H_{b_2}$ befinden. Nach Konstruktion ist $(\text{Hyp}_p(p_1) \cap \text{Hyp}_p(p_2)) \cap (H_{b_1} \cap H_{b_2})$ abgeschlossen. Also ist auch S' als Teilmenge von $(\text{Hyp}_p(p_1) \cap \text{Hyp}_p(p_2)) \cap (H_{b_1} \cap H_{b_2})$ abgeschlossen, und $s' < \infty$ ist definiert. Fasst man $\text{Hyp}_p(p'')$ wieder als Tangente an $B(p, \frac{1}{2}\|p'' - p\|)$ auf, so folgt, dass p'' nur voronoi-relevant sein kann, wenn $p + \frac{1}{2}(p'' - p) \in H_1 \cap B(p, s')$ gilt. Also sind alle voronoi-relevanten Punkte in der Kugel $B(p, 2s')$ enthalten. Da \mathcal{P} diskret ist, gilt $|B(p, 2s') \cap \mathcal{P}| < \infty$, und $V(p)$ ist ein Polyeder.

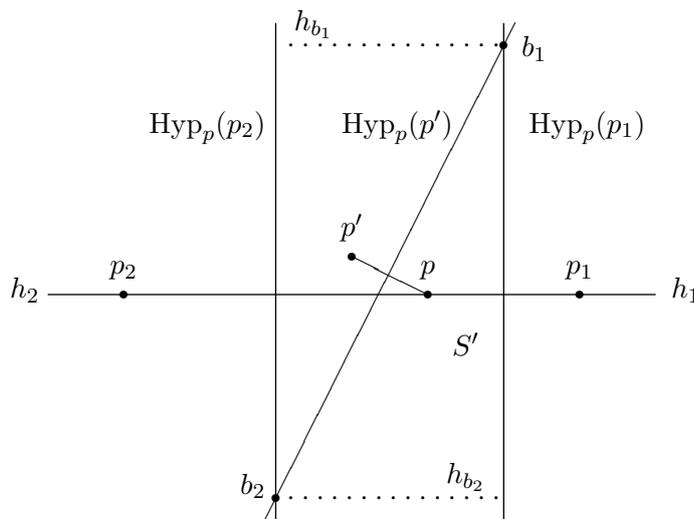


Abbildung 3.15: Fall $\theta = \pi$

- (4) Aufgrund der Bedingungen $D_{\theta_i}(p_i - p) = \alpha_i(p_{i+1} - p)$ mit $0 < \theta_i < \pi$ für $i = 1, \dots, k-1$ und $\pi < \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i < 2\pi$, wobei $3 \leq k \leq 4$ gilt, ist p ein innerer Punkt von $\text{conv}(p_1, \dots, p_k)$. Mit Satz 3.2.8 folgt dann direkt, dass $V(p)$ ein Polytop, also insbesondere auch ein Polyeder ist. Analog zu der Betrachtung von Fall (3) lässt sich auch hier eine Konstruktion angeben: Da $V(p) \subset H_p^-(p_1) \cap \dots \cap H_p^-(p_k) =: D$ gilt, und D nach Konstruktion beschränkt ist, lässt sich $d := \max\{\|x - p\| \mid x \in D\} < \infty$ definieren und es folgt, dass alle voronoirelevanten Punkte in $B(p, 2d)$ enthalten sein müssen. Aufgrund der Diskretheit von \mathcal{P} kann es damit nur endlich viele für p voronoirelevante Punkte geben. Da $V(p)$ in diesem Fall zusätzlich beschränkt ist, erhält man $V(p)$ als Polytop.

□

Man beachte an dieser Stelle, dass die Bedingung $|\mathcal{P}| \geq 2$ in obigem Satz keine wirkliche Einschränkung an die Punktmenge \mathcal{P} darstellt. Denn ist $\mathcal{P} = \{p\}$ einelementig, so gilt für die Voronoizelle $V(p) = \mathbb{R}^2$; das heißt die Struktur der Voronoizelle ist bekannt. Da aber der gesamte Raum \mathbb{R}^2 nicht als Polyeder gezählt werden soll, muss dieser Fall ausgeschlossen werden.

Damit lässt sich in Dimension 2 die Gestalt einer polyedrischen Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \mathcal{P}$ in Abhängigkeit der p umgebenden Punkte genau beschreiben. Und andererseits weiß man, dass die Voronoizelle $V(p)$ ein Polyeder ist, wenn für p eine der Konstellationen (1)–(4) gilt. Ein Vergleich mit Beispiel 3.2.1 bestätigt, dass die Voronoizelle $V(a)$ des Punktes a der dort betrachteten Punktmenge \mathcal{P} kein Polyeder ist und für a keiner der Fälle (1)–(4) zutrifft. Es existiert zwar ähnlich wie in Fall (3) ein Kegel, genauer Halbraum, in dem die Punktmenge \mathcal{P} vollständig enthalten ist und auf dessen Rand der Punkt a liegt, doch es existieren keine Punkte $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, deren Richtungsvektoren den maximalen Kegel aufspannen würden.

Das Ergebnis aus Satz 3.3.1 lässt sich nun nutzen, um die noch offene Richtung der Hypothese 3.2.7, dass alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge, deren konvexe Hülle abgeschlossen ist, Polyeder sind, im zweidimensionalen Fall zu zeigen. Besteht die Menge $\mathcal{P} = \{p\}$ nur aus einem Punkt, so ist die Voronoizelle $V(p) = \mathbb{R}^n$ und damit ein triviales Polyeder. Für Punktmenge, die wenigstens zwei Punkte besitzen, liefert der nachfolgende Satz die Behauptung.

Satz 3.3.2 *Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ diskret, $|\mathcal{P}| > 1$ und $\text{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen, so sind alle Voronoizellen $V(p)$ von Punkten $p \in \mathcal{P}$ Polyeder.*

Beweis: Ist $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt, so gilt nach Satz 3.2.8, dass $V(p)$ ein Polytop und damit insbesondere ein Polyeder ist. Damit bleiben noch die Voronoizellen der Randpunkte zu betrachten.

Es sei nun $\partial\mathcal{P} \neq \emptyset$, also insbesondere auch $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) \neq \emptyset$. Da nach Voraussetzung $|\mathcal{P}| \geq 2$ gilt, folgt $|\partial\text{conv}(\mathcal{P})| \neq 1$. Weiter folgt, dass der Rand $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist. Denn ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ eindimensional, so sind alle Punkte Randpunkte und $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) = \text{conv}(\mathcal{P})$ ist als zusammenhängende Teilmenge einer Hyperebene eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit. Gilt andernfalls $\dim\text{conv}(\mathcal{P}) = 2$, so liefert Satz 1.3.1, dass $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit ist.

Um zu zeigen, dass für einen Randpunkt $p \in \partial\mathcal{P}$ eine der Konstellationen (1)–(3) aus Satz 3.3.1 erfüllt ist, zeige man zunächst, dass es zu einem beliebigen $p \in \partial\mathcal{P}$ stets wenigstens einen Punkt $p_1 \in \partial\mathcal{P}$ mit $p \neq p_1$ und $[p, p_1] \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ gibt. Dieses kann man wie folgt einsehen: Nach Voraussetzung ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen, das heißt es gilt $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) \subset \text{conv}(\mathcal{P})$. Nach Satz 2.3.8 ist der Rand $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ der konvexen Hülle stückweise linear. Lemma 2.3.2 liefert, dass für jeden Punkt $x \in \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ eine Konvexdarstellung aus maximal zwei Punkten aus \mathcal{P} , die nach Folgerung 2.1.15 sogar in $\partial\mathcal{P}$ liegen, existiert. Mit Satz 1.3.3 folgt, dass es zu $p \in \partial\mathcal{P}$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) \cap B(p, \varepsilon')$ für alle $0 < \varepsilon' \leq \varepsilon$ zusammenhängend ist. Dabei sei nun ε' so gewählt, dass $\varepsilon' < d(p, \mathcal{P} \setminus \{p\})$ gilt. Dieses ist möglich, da \mathcal{P} aufgrund der Diskretheit keinen Häufungspunkt besitzt und daher für einen fest gewählten Punkt $p \in \mathcal{P}$ stets $d(p, \mathcal{P} \setminus \{p\}) > 0$ erfüllt ist. Damit gilt $B(p, \varepsilon') \cap \mathcal{P} = \{p\}$. Des weiteren gilt $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) \cap B(p, \varepsilon') \neq \{p\}$, da es sonst ein $\varepsilon_1 > 0$ gäbe, so dass $B(p, \varepsilon_1) \setminus \{p\} \subset \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ erfüllt wäre. Dann ließe sich aber p als Konvexkombination aus inneren Punkten darstellen und wäre somit selbst ein innerer Punkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$, was ein Widerspruch zu $p \in \partial\mathcal{P}$ ist. Wähle also nun ein $x \in \partial\text{conv}(\mathcal{P}) \cap B(p, \varepsilon')$ mit $x \neq p$. Dieses x lässt sich als Konvexkombination zweier Punkte aus $\partial\mathcal{P}$ darstellen, von denen einer als p gewählt werden kann, da p und x nach Konstruktion in der gleichen Zusammenhangskomponente von $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ liegen und p einer der beiden zu x nächsten Punkte aus $\partial\mathcal{P}$ ist; das heißt wenn T die Zusammenhangskomponente von $\partial\text{conv}(\mathcal{P})$ ist, die x enthält, gilt für p entweder $d(x, p) = d(x, T \cap \mathcal{P})$ oder es existiert ein $p' \in T \cap \mathcal{P}$ mit $d(x, T \cap \mathcal{P}) = d(x, p')$ und $d(x, p') < d(x, p) < d(x, q)$ für alle $q \in T \cap \mathcal{P} \setminus \{p, p'\}$. Also gibt es ein $p_1 \in \partial\mathcal{P}$, so dass sich $x = \lambda p + (1 - \lambda)p_1$ mit $0 < \lambda < 1$ darstellen lässt. Mit Lemma 2.1.13 folgt dann aus $x, p, p_1 \in \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ auch $[p, p_1] = \{\lambda p + (1 - \lambda)p_1 \mid 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$. Existiert in $\partial\text{conv}(\mathcal{P}) \cap B(p, \|x - p\|)$ ein weiterer Punkt x' , der nicht in $[p, x]$ enthalten ist, so lässt sich zu diesem $x' \in \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ analog ein $p_2 \in \partial\mathcal{P}, p_2 \neq p_1$ finden, so dass auch $[p, p_2] \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ erfüllt ist (siehe Abbildung 3.16).

Nun lässt sich Satz 3.3.1 anwenden und man sieht, dass alle $p \in \partial\mathcal{P}$ einen der Fälle (1)–(3) erfüllen. Denn ist $\text{conv}(\mathcal{P})$ eindimensional, so findet man eine Gerade G mit $\text{conv}(\mathcal{P}) \subset G$. Nach obigen Überlegungen gibt es zu einem Punkt $p \in \partial\mathcal{P}$ stets einen Punkt $p_1 \in \mathcal{P}$, so dass $[p, p_1] \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ erfüllt ist. Existiert nun kein zweiter solcher Punkt $p_2 \neq p_1$, so liegt die Situation (1) vor. Findet man aber ein solches p_2 , so ist man in Fall (2).

Es bleibt noch der Fall $\dim \operatorname{conv}(\mathcal{P}) = 2$ zu betrachten. In diesem Fall findet man zu einem Punkt $p \in \partial \mathcal{P}$ stets zwei Punkte $p_1, p_2 \in \partial \mathcal{P}$, $p_1 \neq p_2$, mit $[p, p_1] \subset \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ und $[p, p_2] \subset \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$. Dieses impliziert aber, dass dann alle anderen Punkte aus \mathcal{P} in dem von p, p_1, p_2 aufgespannten Kegel liegen müssen, man also einen Winkel $\theta \in [0, \pi]$ findet, der die Bedingungen aus Fall (3) erfüllt. Damit sind nach Satz 3.3.1 auch alle Voronoizellen von Randpunkten stets Polyeder und es folgt die Behauptung. \square

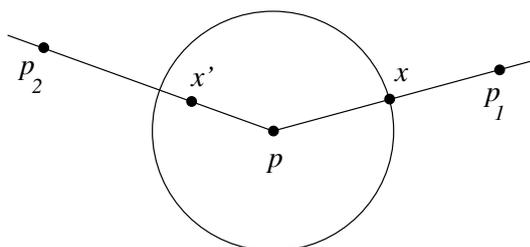


Abbildung 3.16: Existenz der Punkte p_1, p_2 zu p

Um im obigen Beweis Satz 3.3.1 anwenden zu können, hat man gezeigt, dass zu einem beliebigen Punkt $p \in \partial \mathcal{P}$ stets ein Punkt $p_1 \in \partial \mathcal{P}$ existiert, so dass auch die Strecke $[p, p_1]$ vollständig im Rand der konvexen Hülle enthalten ist. Dabei wurde benutzt, dass sich aufgrund der Abgeschlossenheit von $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ jeder Punkt $x \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$ als Konvexkombination aus den beiden, in der x enthaltenden Zusammenhangskomponente von $\partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ enthaltenden, zu x nächstgelegenen Punkten aus $\partial \mathcal{P}$ darstellen lässt. Dieses Argument gilt nur in Dimension 2. Denn bereits ab Dimension 3 kann der Fall eintreten, dass sich x nicht aus den Punkte aus $\partial \mathcal{P}$, die am nächsten an x liegen, konvex kombinieren lässt. Zur Veranschaulichung einer solchen Situation erinnere man sich an Beispiel 2.3.9. Die dort betrachtete Punktmenge lässt sich durch eine Skalierung der z -Komponente so variieren, dass genau dieser Fall auftritt. Der obige Beweis kann somit nicht ohne weiteres auf höhere Dimensionen übertragen werden.

In der Ebene erhält man damit die bereits bekannten Ergebnisse. Ist die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ ein Gitter oder allgemeiner ein (r, R) -System, so weiß man bereits nach dem ersten Hauptsatz 3.2.9, dass alle Voronoizellen Polytope sind. Mit Satz 3.3.1 folgt nun auch, dass alle Voronoizellen einer endlichen Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ Polyeder sind. Denn offensichtlich ist $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ für eine endliche Menge \mathcal{P} abgeschlossen, so dass die Behauptung direkt aus obigem Satz folgt.

Folgerung 3.3.3 *Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ eine endliche diskrete Menge, so sind alle Voronoizellen Polyeder.* \square

Damit hat man im zweidimensionalen Fall ein hinreichendes Kriterium für die Polyedrizität der Voronoizellen einer diskreten Punktmenge gefunden. Die Fälle, in denen die Punktmenge endlich oder ein (r, R) -System ist, ergeben sich hier als Spezialfälle.

3.4 Richtungskegel

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen dem lokalen Randverhalten der konvexen Hülle der Punktmenge und der Gestalt der Voronoizelle eines Randpunktes der diskreten Punktmenge untersucht. Es wird gezeigt, dass die Voronoizelle eines Randpunktes genau dann ein Polyeder ist, wenn der Richtungskegel des Randpunktes endlich erzeugt ist. Damit erhält man die gesuchte Charakterisierung: Es sind genau dann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge polyedrisch, wenn die Punktmenge lokal endlich erzeugt ist.

Über die Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ ist bis jetzt folgendes bekannt: Die Gestalt der Voronoizelle $V(p)$ ist davon abhängig, wo der Punkt p in der diskreten Punktmenge liegt. Ist p ein innerer Punkt, so folgt mit dem ersten Hauptsatz 3.2.9, dass $V(p)$ ein Polytop ist. Ist $p \in \partial\mathcal{P}$ dagegen ein Randpunkt, so weiß man bislang nur, dass die Voronoizelle $V(p)$ kein Polytop ist. Es existieren Beispiele, in denen alle Voronoizellen von Randpunkten polyedrisch sind (siehe Beispiel 3.2.14), und welche, in denen es Randpunkte $p \in \partial\mathcal{P}$ gibt, für die $V(p)$ nicht polyedrisch ist (siehe Beispiel 3.2.1). In Dimension 2 weiß man zusätzlich, dass die Voronoizellen aller Randpunkte polyedrisch sind, wenn die konvexe Hülle der Punktmenge abgeschlossen ist (vgl. Satz 3.3.2). Allerdings hat man auch gesehen, dass die globale Eigenschaft der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle nicht zu einer äquivalenten Charakterisierung der Punktmenge mit polyedrischen Voronoizellen führen kann, da es Punktmenge gibt, deren konvexe Hülle nicht abgeschlossen ist und deren sämtliche Voronoizellen sogar Polytope sind (man erinnere sich an die Punktmenge aus Beispiel 2.2.2). Das heißt man weiß bislang, dass ein Zusammenhang zwischen dem Randverhalten der konvexen Hülle der Punktmenge und der Gestalt der Voronoizellen der Randpunkte existiert, dieser aber nicht global wirkt. Die Gestalt der Voronoizelle $V(p)$ eines Randpunktes $p \in \partial\mathcal{P}$ ist vielmehr eine lokale Eigenschaft der Punktmenge. Daher ist es begründet, einen Zusammenhang zwischen dem „lokalen“ Randverhalten der konvexen Hülle und der Gestalt der Voronoizelle eines Randpunktes anzunehmen. Dabei spiegelt sich das lokale Randverhalten der konvexen Hülle im Verhalten des „Richtungskegels“ im Punkt p wider, siehe Abbildung 3.17.

Definition 3.4.1 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ diskret und $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Randpunkt von \mathcal{P} . Dann heißt

$$C(p) := \text{cone}(\mathcal{P} - p) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i (p_i - p) \mid p_i \in \mathcal{P}, \lambda_i \geq 0, m \in \mathbb{N} \right\}$$

Richtungskegel von p .

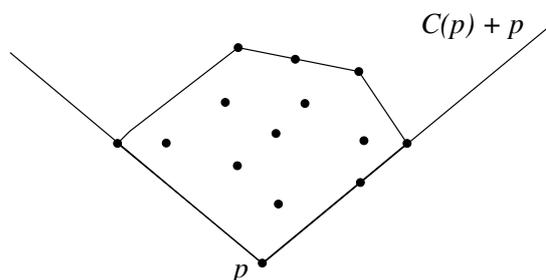


Abbildung 3.17: Richtungskegel

Diese Definition lässt sich natürlich auf beliebige Punkte $x \in \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ und auch auf beliebige konvexe Mengen erweitern. Da die Richtungskegel hier speziell für die Beschreibung von Voronoizellen von Randpunkten diskreter Punktfolgen verwendet werden sollen, genügt an dieser Stelle die obige Definition. In der Literatur, vgl. [Schn93], wird der Abschluss des Richtungskegels auch als *Stützkegel* (engl. *support cone*) bzw. als *Projektionskegel* (engl. *projection cone*) bezeichnet. In [Barv02] findet man auch die Bezeichnung des „Kegels der zulässigen Richtungen“ (engl. *cone of feasible directions*).

Als erste Eigenschaft des Richtungskegels $C(p)$ eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P}$ erhält man sofort, dass $C(p)$ in der Tat ein konvexer Kegel mit Spitze in Null ist. Genauso offensichtlich folgt die Inklusion $\text{conv}(\mathcal{P}) \subset C(p) + p$, die für jeden Punkt $p \in \partial\mathcal{P}$ erfüllt ist. Eine weitere wichtige Eigenschaft des Richtungskegels $C(p)$ ist eine gewisse „Dualität“ zu der Voronoizelle $V(p)$. Damit ist gemeint, dass die $C(p)$ erzeugenden Richtungsvektoren $q - p$ mit $q \in \mathcal{P}$ gerade orthogonal zu den Hyperebenen der Halbräume, durch deren Schnitt $V(p)$ erzeugt wird, sind (vgl. Definition 3.0.1). Daher ist es naheliegend, diese Eigenschaft des Richtungskegels zur Bestimmung der Gestalt der Voronoizelle zu nutzen.

Für den Abschluss eines Richtungskegels gilt, dass er sich als Schnitt von Halbräumen darstellen lässt. Nach Satz 1.2.6 gibt es in $p \in \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ wenigstens eine Stützhyperebene an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Sei nun $\{\text{Hyp}_{p,i} \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller Stützhyperebenen in p an $\text{conv}(\mathcal{P})$, wobei $I(p)$ eine Indexmenge sei. Die zugehörigen, $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthaltenden Halbräume seien mit $H_{p,i}^-$ bezeichnet. Dann lässt sich der Abschluss $\overline{C(p)}$ als Translation des Schnittes über alle Halbräume $H_{p,i}^-$ darstellen (vgl. [Schn93]),

$$\overline{C(p)} = \left(\bigcap_{i \in I(p)} H_{p,i}^- \right) - p.$$

In der Regel werden in der obigen Darstellung jedoch nicht alle Halbräume benötigt. Man betrachte zum Beispiel eine Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$, deren konvexe Hülle die Dimension $\dim \operatorname{conv}(\mathcal{P}) = 2$ besitzt und in der $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Eckpunkt von $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ ist. Dann gibt es in p unendlich viele Stützhyperebenen und es gilt $|I(p)| = \infty$, aber für die Darstellung von $\overline{C(p)}$ werden nur zwei Halbräume benötigt. Es sind also nicht notwendig alle Halbräume für die Darstellung von $\overline{C(p)}$ „relevant“.

Richtungsrelevante Halbräume

Definition 3.4.2 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ diskret und $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Randpunkt. Weiter sei $\{\operatorname{Hyp}_{p,i} \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller Stützhyperebenen in p an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ sowie $\{H_{p,i}^- \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller zugehörigen, $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ enthaltenden Halbräume. Dann heißt für $j \in I(p)$ die Hyperebene $\operatorname{Hyp}_{p,j}$ bzw. der Halbraum $H_{p,j}^-$ *richtungsrelevant* für p , wenn

$$\left(\bigcap_{i \in I(p), i \neq j} H_{p,i}^- \right) - p \neq \overline{C(p)}$$

gilt. Existiert in p nur genau eine Stützhyperebene, so wird diese auch als *richtungsrelevant* bezeichnet. Die Indexmenge der bzgl. $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ für p richtungsrelevanten Halbräume bzw. Hyperebenen sei mit

$$\mathcal{R}^r(p) := \{i \in I(p) \mid H_{p,i}^- \text{ richtungsrelevant}\}$$

bezeichnet.

Das heißt eine Hyperebene bzw. ein Halbraum ist genau dann richtungsrelevant für p , wenn man den (zugehörigen) Halbraum bei der Darstellung von $\overline{C(p)}$ als Schnitt von Halbräumen nicht weglassen kann. Genauer gilt, wenn $H_{p,j}^-$ ein für p richtungsrelevanter Halbraum ist, die Inklusion

$$\overline{C(p)} \subsetneq \left(\bigcap_{i \in I(p), i \neq j} H_{p,i}^- \right) - p.$$

Damit erhält man für den Richtungskegel, analog zu der Darstellung der Voronoizelle als Schnitt über die zu den voronoirelevanten Vektoren zugehörigen Halbräume, folgende Darstellung

$$\overline{C(p)} = \left(\bigcap_{i \in \mathcal{R}^r(p)} H_{p,i}^- \right) - p.$$

Um die Bedeutung der richtungsrelevanten Halbräume und Hyperebenen besser zu verstehen, ist es hilfreich, notwendige und hinreichende Bedingungen für die Richtungsrelevanz zu kennen. Man weiß bereits, dass sich die für

p richtungsrelevanten Hyperebenen unter den Stützhyperebenen an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p befinden. Es ist jedoch nicht von vornherein klar, welche dieser Stützhyperebenen auch richtungsrelevant sind. Nutzt man aber aus, dass \mathcal{P} diskret ist, so kann man zeigen, dass jede zu p richtungsrelevante Hyperebene außer p noch weitere Randpunkte der konvexen Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthält und erhält somit für die richtungsrelevanten Hyperebenen ein notwendiges Kriterium.

Satz 3.4.3 Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ diskret, $p \in \partial\mathcal{P}$, $\{\text{Hyp}_{p,i} \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller Stützhyperebenen in p an $\text{conv}(\mathcal{P})$ sowie $\{H_{p,i}^- \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller zugehörigen, $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthaltenden Halbräume. Ist der Halbraum $H_{p,j}^-$, $j \in I(p)$, richtungsrelevant für p , so folgt $\{p\} \subsetneq \text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$.

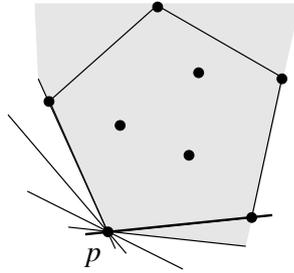


Abbildung 3.18: Konstruktion aus Beweis zu Satz 3.4.3

Beweis: Gibt es in p nur genau eine Stützhyperebene Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$, so ist diese richtungsrelevant und enthält nach Folgerung 2.2.20 außer p noch weitere Punkte aus $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$.

Also betrachte man den Fall, dass $|I(p)| > 1$ gilt. Da p ein Randpunkt und $\text{Hyp}_{p,j}$ eine Stützhyperebene in p ist, gilt offensichtlich $p \in \text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$. Ist nun $H_{p,j}^-$ richtungsrelevant für p , so heißt das $\overline{C(p)} \subsetneq \left(\bigcap_{i \in I(p), i \neq j} H_{p,i}^- \right) - p$, siehe Abbildung 3.18. Zur Vereinfachung der Schreibweise

setze man $C_{-j} := \bigcap_{i \in I(p), i \neq j} H_{p,i}^-$. Dann folgt $(\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap C_{-j} \neq \emptyset$,

das heißt dass es Punkte aus $\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gibt, die im Inneren von C_{-j} liegen. Dieses überlegt man sich wie folgt: Es gilt $(\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap C_{-j} \neq \emptyset$, da nach Voraussetzung $p \in \text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ und $p \in C_{-j}$ erfüllt ist. Angenommen, es gäbe keinen Punkt $x \in \text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$, für den zusätzlich $x \in C_{-j}$ gilt. Dann würde für alle $y \in (\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap C_{-j}$ folgen, dass $y \in \partial C_{-j}$ gelten muss. Damit gäbe es für jeden dieser Punkte y eine Hyperebene $\text{Hyp}_{p,\eta}$ mit $\eta \in I(p)$, $\eta \neq j$ und $y \in \text{Hyp}_{p,\eta}$. Dann wäre aber bereits $\overline{C(p)} = C_{-j} - p$, also $H_{p,j}^-$ nicht relevant, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Ist nun $(\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap C_{-j} \neq \emptyset$, so existiert ein $z \in (\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \cap C_{-j}$ und es gilt $z \neq p$, da nach Konstruktion

$p \in \partial C_{-j}$ gilt. Damit gilt insbesondere aber $z \in (\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}))$ und es folgt die Behauptung. \square

Man beachte, dass in obigem Beweis die Diskretheit der Menge \mathcal{P} nur für den Fall, dass p regulär ist, benötigt wurde. Für nicht reguläre Randpunkte lässt sich eine analoge Behauptung für beliebige konvexe Mengen formulieren. Des weiteren sei darauf hingewiesen, dass das eben bewiesene Kriterium in der Tat nur notwendig und nicht hinreichend ist. Man überlegt sich leicht, dass aus der Eigenschaft, dass eine Stützhyperebene mehr als einen Randpunkt enthält, noch nicht die Richtungsrelevanz dieser Hyperebene folgen muss. Um sich diese Tatsache in einer konkreten Situation veranschaulichen zu können, betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 3.4.4 Man betrachte die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} = \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \mid \varepsilon_i \in \{1, -1\}, i = 1, 2, 3\} \cup \{(1, 1, 0)\} \subset \mathbb{R}^3$, deren konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ ein Würfel ist. Zu dem Punkt $p := (1, 1, 0)$ sind dann die beiden Stützhyperebenen $\text{Hyp}_{p,1} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1, 0, 0) \rangle = 1\}$ und $\text{Hyp}_{p,2} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (0, 1, 0) \rangle = 1\}$ richtungsrelevant. Eine weitere Stützhyperebene in p ist $\text{Hyp}_{p,3} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1, 1, 0) \rangle = 2\}$, die offensichtlich nicht richtungsrelevant ist, deren Schnitt mit $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ aber mehr als nur einen Punkt enthält.

Ein leicht zu sehendes, hinreichendes Kriterium für die Richtungsrelevanz einer Stützhyperebene erhält man durch die Betrachtung der folgenden Situation: Es sei $p \in \partial \mathcal{P}$ ein Randpunkt einer diskreten Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ und $\{\text{Hyp}_{p,i} \mid i \in I(p)\}$ die Menge aller Stützhyperebenen in p an $\text{conv}(\mathcal{P})$. Gilt für eine Hyperebene $\text{Hyp}_{p,j}$, $j \in I(p)$, dass es eine Kugel $B(p, \varepsilon)$ mit $(B(p, \varepsilon) \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})) \subset \text{Hyp}_{p,j}$ gibt, so ist $\text{Hyp}_{p,j}$ die einzige Stützhyperebene an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p und damit richtungsrelevant für p .

Welche Folgerungen lassen sich aus Satz 3.4.3 ziehen? Es sei diesbezüglich an die in der Hypothese 2.2.17 aufgestellte Behauptung über das Randverhalten der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} erinnert. Dort wurde behauptet, dass es zu jedem Randpunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$ stets ein diesen Punkt enthaltendes Liniensegment in $\partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gibt. In der am Ende von Abschnitt 2.2 geführten Diskussion über das Randverhalten wurde die Richtigkeit dieser Behauptung bereits für alle Randpunkte $x \in \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \setminus \mathcal{P}$ gezeigt. Des weiteren wurde gezeigt, dass auch alle regulären Punkte aus $\partial \mathcal{P}$ diese Bedingung erfüllen. Der Fall der nicht-regulären Randpunkte aus \mathcal{P} war bislang jedoch noch offen geblieben. Dieser Fall lässt sich nun mit dem in Satz 3.4.3 gewonnenen Ergebnis klären.

Folgerung 3.4.5 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $p \in \partial \mathcal{P}$ ein beliebiger Randpunkt. Dann gibt es stets eine Stützhyperebene Hyp an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p , für die $\text{Hyp} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \supsetneq \{p\}$ gilt.*

Beweis: Da nach Satz 1.2.6 in jedem Punkt $x \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ wenigstens eine Stützhyperebene an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ existiert, gibt es auch in jedem Randpunkt $p \in \partial \mathcal{P}$ wenigstens eine richtungsrelevante Stützhyperebene an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$. Für diese gilt nach Satz 3.4.3, dass sie mit $\partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ noch weitere Punkte gemeinsam hat. Damit folgt die Behauptung. \square

Anders ausgedrückt besagt Folgerung 3.4.5, dass man zu jedem Punkt $p \in \partial \mathcal{P}$ stets einen weiteren, von p verschiedenen Punkt $x \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ findet, so dass auch die zwischen p und x liegende Strecke, also das „Linien-segment“ $[p, x]$, im Rand von $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ enthalten ist. Mit diesem Ergebnis ist nun die in Hypothese 2.2.17 aufgestellte Behauptung vollständig bewiesen und lässt sich damit als Satz formulieren.

Satz 3.4.6 *Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, so existiert zu jedem $x \in \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ eine Stützhyperebene Hyp_x in x an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ mit $\{x\} \subsetneq \operatorname{Hyp}_x \cap \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P})$.* \square

Abgeschlossenheit des Richtungskegels

Man wende sich nun wieder der Betrachtung des Richtungskegels $C(p)$ eines Punktes $p \in \partial \mathcal{P}$ zu. Für den Abschluss $\overline{C(p)}$ des Richtungskegels weiß man bereits, dass er sich als Schnitt von Halbräumen darstellen lässt, und man hat ein notwendiges Kriterium für die dabei benötigten richtungsrelevanten Halbräume gefunden. Daher kann man nun die Frage angehen, wann diese Form der Darstellung und das Wissen über die dabei benutzten Halbräume auch eine Aussage über den Richtungskegel $C(p)$ liefert. Anders ausgedrückt stellt sich die Frage, wann der Richtungskegel abgeschlossen ist, also $C(p) = \overline{C(p)}$ gilt.

Es ist klar, dass alle Richtungskegel $C(p) = \operatorname{cone}(\mathcal{P} - p)$ von Punkten $p \in \partial \mathcal{P}$ abgeschlossen sind, wenn auch die konvexe Hülle $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen ist. Denn für abgeschlossene konvexe Mengen gilt nach Satz 1.2.5, dass sie sich als Schnitt über alle zu den Stützhyperebenen zugehörigen abgeschlossenen Halbräume schreiben lassen. Da sich auch $\overline{C(p)}$ als Translation des Schnittes über die abgeschlossenen Halbräume, deren begrenzende Hyperebenen Stützhyperebenen an $\operatorname{conv}(\mathcal{P})$ in p sind, darstellen lässt, erhält man in diesem Fall, dass $\partial(C(p) + p) \cap \partial \operatorname{conv}(\mathcal{P}) \subset \operatorname{conv}(\mathcal{P})$ gilt, woraus die Abgeschlossenheit von $C(p)$ folgt.

Die Umkehrung, dass aus der Abgeschlossenheit aller Richtungskegel von Randpunkten auch die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle folgen würde, gilt jedoch nicht, wie man leicht an Beispiel 3.2.14 sieht. Dort ist die konvexe Hülle nicht abgeschlossen, obwohl alle Richtungskegel aller Punkte $p \in \partial \mathcal{P}$ abgeschlossen sind.

Benutzt man erneut Satz 3.4.3, so lässt sich eine weitere Aussage über die Abgeschlossenheit des Richtungskegels eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P}$ in Abhängigkeit der für p richtungsrelevanten Hyperebenen machen.

Folgerung 3.4.7 *Gilt für einen Punkt $p \in \partial\mathcal{P}$ einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, dass es eine für p richtungsrelevante Hyperebene $\text{Hyp}_{p,j}$, $j \in \mathcal{R}^r(p)$, mit $\text{Hyp}_{p,j} \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$ gibt, so ist der Richtungskegel $C(p)$ nicht abgeschlossen. Man erhält ebenfalls, dass in diesem Fall auch $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist.*

Beweis: Da $\text{Hyp}_{p,j}$ für p richtungsrelevant ist, folgt nach Satz 3.4.3 $\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P}) \supsetneq \{p\}$. Wegen $\text{Hyp}_{p,j} \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$ ist aber der Schnitt $\text{Hyp}_{p,j} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ nicht in $\text{conv}(\mathcal{P})$ enthalten. Damit folgt, dass $C(p)$ und $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen sind. \square

Dazu äquivalent ist die Aussage, dass aus der Abgeschlossenheit des Richtungskegels $C(p)$ eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P}$ für alle für p richtungsrelevanten Hyperebenen $\text{Hyp}_{p,j}$ die Bedingung $\{p\} \subsetneq \text{Hyp}_{p,j} \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ folgt. In dem Fall, dass die konvexe Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$ abgeschlossen ist, folgt damit, da in diesem Fall auch die Richtungskegel aller Punkte $p \in \partial\mathcal{P}$ abgeschlossen sind, dass dann alle richtungsrelevanten Hyperebenen aller Punkte $p \in \partial\mathcal{P}$ diese Bedingung erfüllen.

Die Umkehrung der Aussage aus Folgerung 3.4.7 gilt im Allgemeinen nicht. So kann es sein, dass zwar für alle richtungsrelevanten Hyperebenen $\text{Hyp}_{p,j}$ eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P}$ die Bedingung $\{p\} \subsetneq \text{Hyp}_{p,j} \cap \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt, es aber trotzdem eine Hyperebene $\text{Hyp}_{p,i}$ mit $\text{Hyp}_{p,i} \cap \overline{C(p)} \not\subset \text{cone}(\mathcal{P} - p) = C(p)$ gibt. Die Abgeschlossenheit des Richtungskegels $C(p)$ wird daher nicht impliziert.

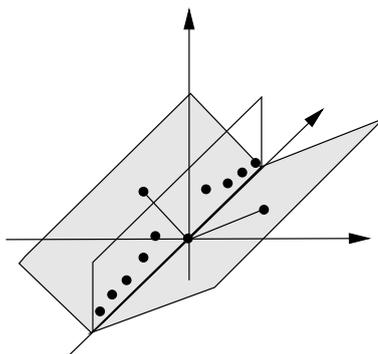


Abbildung 3.19: $C(p)$ nicht abgeschlossen

Beispiel 3.4.8 Man betrachte die diskrete Punktmenge $\mathcal{P} = \{(0, y, \frac{1}{|y|}) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{Z}, y \neq 0\} \cup \{(0, 0, 0), (1, 0, 1), (-1, 0, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$, siehe Abbildung 3.19. Wählt man nun den Punkt $p_0 := (0, 0, 0)$ aus, so erhält man als Abschluss des Richtungskegels von p_0 die Menge $\overline{C(p_0)} = H_{p_0,1}^- \cap H_{p_0,2}^-$ mit $H_{p_0,1}^- := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (1, 0, -1) \rangle \leq 0\}$ und $H_{p_0,2}^- := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, (-1, 0, -1) \rangle \leq 0\}$. Damit gibt es zwei für p_0 richtungsrelevante Hyper-ebenen, die mit $(1, 0, 1) \in \text{Hyp}_{p_0,1}$ und $(-1, 0, 1) \in \text{Hyp}_{p_0,2}$ beide weitere Punkte aus $\text{conv}(\mathcal{P})$ und sogar aus \mathcal{P} enthalten. Da aber für die y -Achse $\text{Hyp}_{p_0,1} \cap \text{Hyp}_{p_0,2} \not\subset C(p_0)$ gilt, ist der Richtungskegel nicht abgeschlossen.

Endlich erzeugte Richtungskegel

Nachdem man nun einige erste Eigenschaften von Richtungskegeln kennengelernt hat, wende man sich dem Zusammenhang zwischen dem Richtungskegel $C(p)$ und der Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P}$ zu. Aufgrund der Definitionen 3.0.1 und 3.4.1 ist klar, dass die $C(p)$ bestimmenden Richtungen gerade orthogonal zu den Hyperebenen der $V(p)$ definierenden Halbräume sind. $C(p)$ und $V(p)$ sind in diesem Sinne dual zueinander. Da man sowohl für $V(p)$ als auch für $C(p)$ relevante Punkte bzw. Hyperebenen definiert hat, stellt sich die Frage, ob sich diese relevanten Objekte mit Hilfe der Dualität ineinander überführen lassen. Das ist leider nicht so ohne Weiteres der Fall. So können einerseits in einer richtungsrelevanten Hyperebene mehrere voronoirelevante Punkte liegen, andererseits müssen nicht alle Punkte, die in einer richtungsrelevanten Hyperebene liegen, voronoirelevant sein, vgl. dazu die Punkte $\{(z, 0) \mid z \in \mathbb{Z}\}$ in Beispiel 3.2.14. Es enthält auch nicht notwendig jede richtungsrelevante Hyperebene einen voronoirelevanten Punkt. Genauso muss nicht zu jedem voronoirelevanten Punkt eine richtungsrelevante Hyperebene existieren, vgl. hierzu den Punkt a in Beispiel 3.2.1.

Jedoch lässt sich zeigen, dass der Richtungskegel $C(p)$ endlich erzeugt ist, wenn dieses auch für die Voronoizelle $V(p)$ gilt.

Satz 3.4.9 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Randpunkt von \mathcal{P} . Ist die Voronoizelle $V(p)$ von p ein Polyeder, so ist der Richtungskegel $C(p)$ endlich erzeugt.*

Beweis: Der Beweis basiert auf folgender Idee: Ist $V(p)$ eine polyedrische Voronoizelle eines Randpunktes $p \in \partial\mathcal{P}$, so ist der Polarkegel des charakteristischen Kegels der Voronoizelle gleich dem Richtungskegel $C(p)$ von p . Da $V(p)$ als Polyeder endlich erzeugt ist, ist dann auch $C(p)$ endlich erzeugt.

Ist $V(p)$ ein Polyeder, so gibt es Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, die für p voronoirelevant sind und mit denen sich die Voronoizelle darstellen lässt als

$$V(p) = \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H_p^-(q) = \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i).$$

Indiziert man die Punktmenge \mathcal{P} mittels einer Indexmenge $I \subset \mathbb{N}_0$, wobei $0, 1, \dots, k \in I$ gelte, $p = p_0$ sei und $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ weiterhin die für $p = p_0$ voronoi-relevanten Vektoren seien, so erhält man zusätzlich die Gleichung

$$V(p) = \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H_p^-(q) = \bigcap_{i=1}^m H_p^-(p_i) = \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i)$$

für alle $m \geq k$, $m \in I$. Insbesondere folgt damit

$$\bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H_p^-(q) = \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^m H_p^-(p_i) = \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i).$$

Nutzt man die Notation aus Definition 3.0.1, so gilt

$$\begin{aligned} H_p^-(p_i) &= H^-(p_i - p) + p = H^-(p_i - p, \frac{1}{2}\|p_i - p\|^2) + p \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, p_i - p \rangle \leq \frac{1}{2}\|p_i - p\|^2\} + p, \end{aligned}$$

und es folgt für alle $m \geq k$, $m \in I$ die Darstellung

$$V(p) = \bigcap_{i=1}^m H^-(p_i - p, \frac{1}{2}\|p_i - p\|^2) + p.$$

Auf dieses Ergebnis wende man nun Satz 1.1.20 an. Damit erhält man für alle $m \geq k$, $m \in I$ für den charakteristischen Kegel der Voronoizelle

$$C_c(V(p)) = C_c(V(p) - p) = \bigcap_{i=1}^m H^-(p_i - p, 0),$$

und es folgt

$$\begin{aligned} C_c(V(p)) &= \bigcap_{i=1}^k H^-(p_i - p, 0) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \bigcap_{i=1}^m H^-(p_i - p, 0) = \bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H^-(q - p, 0). \end{aligned}$$

Satz 1.4.9 besagt, dass der Polarkegel K^* eines beliebigen konvexen Kegels K gleich dem Normalenkegel von K ist, also von den Normalenvektoren der Stützhyperebenen an K in 0 erzeugt wird. Wendet man diesen Satz auf den charakteristischen Kegel von $V(p)$ an, so folgt

$$\begin{aligned} (C_c(V(p)))^* &= \left(\bigcap_{i=1}^k H^-(p_i - p, 0) \right)^* = \left(\bigcap_{q \in \mathcal{P} \setminus \{p\}} H^-(q - p, 0) \right)^* \\ &= \text{cone}(p_1 - p, \dots, p_k - p) = \text{cone}(\mathcal{P} - p) = C(p). \end{aligned}$$

Damit ist der Richtungskegel $C(p)$ endlich erzeugt. \square

Man weiß also nun, dass der Richtungskegel $C(p)$ eines Randpunktes $p \in \partial\mathcal{P}$ endlich erzeugt ist, wenn die Voronoizelle $V(p)$ ein Polyeder ist. Da ein endlich erzeugter Kegel insbesondere abgeschlossen ist, folgt direkt aus Satz 3.4.9 folgende Aussage.

Folgerung 3.4.10 *Sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Randpunkt von \mathcal{P} . Ist der Richtungskegel $C(p)$ nicht abgeschlossen, so ist die Voronoizelle $V(p)$ kein Polyeder.* \square

Also folgt aus der Nicht-Abgeschlossenheit des Richtungskegels $C(p)$ eines Randpunktes $p \in \partial\mathcal{P}$ zum einen, dass $\text{conv}(\mathcal{P})$ nicht abgeschlossen ist, und zum anderen, dass $V(p)$ kein Polyeder ist. Man beachte jedoch, dass dieses noch keine Aussage über einen Zusammenhang zwischen der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle und der Polyedereigenschaft der Voronoizelle impliziert. Was man jedoch als Folgerung aus diesem Ergebnis bekommt, ist die Aussage, dass die Voronoizelle $V(p)$ kein Polyeder sein kann, wenn es im Rand der konvexen Hülle einen Strahl gibt, der mit der konvexen Hülle nur den Punkt p gemeinsam hat.

Folgerung 3.4.11 *Es sei $p \in \partial\mathcal{P}$ Randpunkt einer diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$. Existiert ein Strahl $S \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ mit $S \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$, so ist $V(p)$ kein Polyeder.*

Beweis: Da sich $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ darstellen lässt als Schnitt über alle zu Stützhyperebenen an $\text{conv}(\mathcal{P})$ zugehörigen Halbräume und $\overline{C(p)} + p$ der Schnitt aller Halbräume zu Stützhyperebenen in p ist, gilt offensichtlich $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})} \subset \overline{C(p)} + p$. Daher folgt aus $S \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ mit $S \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$ auch $S \subset \partial C(p) + p$. Da nach Voraussetzung $S \not\subset \text{conv}(\mathcal{P})$ gilt, folgt auch $S \not\subset C(p) + p$. Damit ist $C(p)$ nicht abgeschlossen, also $V(p)$ nach Folgerung 3.4.10 kein Polyeder. \square

Mit dieser Erkenntnis betrachte man noch einmal den Zylinder aus Beispiel 2.3.9. Für die dort definierte Punktmenge \mathcal{P} gilt, dass in jedem Punkt $p \in \mathcal{P}$ ein Strahl $S \subset \partial\text{conv}(\mathcal{P})$ existiert, der mit $\text{conv}(\mathcal{P})$ nur den Punkt p gemeinsam hat. Daher ist in diesem Beispiel keine der Voronoizellen ein Polyeder.

Des Weiteren erhält man nun auch die zu Beginn des Kapitels formulierte Behauptung, dass die Voronoizelle eines isolierten Randpunktes nie ein Polyeder ist, als einfache Folgerung.

Folgerung 3.4.12 *Ist $p \in \partial\mathcal{P}$ ein isolierter Randpunkt einer diskreten Menge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, so ist p kritisch.*

Beweis: Da p isoliert ist, gilt für alle Stützhyperebenen $\text{Hyp}_{p,i}$ an $\text{conv}(\mathcal{P})$ in p , dass $\text{Hyp}_{p,i} \cap \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ nicht zu $\text{conv}(\mathcal{P})$ gehört. Damit ist der Richtungskegel $C(p)$ von p , dessen Abschluss sich als Schnitt über die zu den Stützhyperebenen in p zugehörigen Halbräume darstellen lässt, nicht abgeschlossen. Folgerung 3.4.10 liefert nun, dass die Voronoizelle $V(p)$ kein Polyeder ist. Nach Definition 3.2.2 ist damit p ein kritischer Punkt. \square

Neben isolierten Randpunkten fallen in einer diskreten Punktmenge noch die Punkte auf, die zwar Extrempunkte der konvexen Hülle, nicht aber Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle sind. Ähnlich wie bei isolierten Randpunkten folgt auch für solche Punkte, dass sie kritisch sind.

Folgerung 3.4.13 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $p \in \partial \mathcal{P}$ ein Randpunkt von \mathcal{P} . Ist p ein Extrempunkt der konvexen Hülle $\text{conv}(\mathcal{P})$, aber kein Extrempunkt des Abschlusses $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$, so ist die Voronoizelle $V(p)$ kein Polyeder.*

Beweis: Da p kein Extrempunkt von $\overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ ist, findet man Punkte $x, y \in \overline{\text{conv}(\mathcal{P})}$ und $0 < \lambda < 1$ mit $p = \lambda x + (1 - \lambda)y$. Nach Lemma 2.1.12 muss dann $x, y \in \partial \text{conv}(\mathcal{P})$ gelten. Damit gibt es eine Stützhyperebene Hyp_p an $\text{conv}(\mathcal{P})$, für die $p, x, y \in \text{Hyp}_p$ gilt. Da aber p ein Extrempunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$ ist, folgt $\text{Hyp}_p \cap \text{conv}(\mathcal{P}) = \{p\}$. Also ist der Richtungskegel $C(p)$ von p nicht abgeschlossen und damit $V(p)$ nach Folgerung 3.4.10 kein Polyeder. \square

Man überlegt sich jedoch leicht, dass die Umkehrung der Aussage nicht gelten kann. So kann es sein, dass es in $\text{conv}(\mathcal{P})$ keine Extrempunkte gibt, aber trotzdem ein Punkt p existiert, dessen Voronoizelle kein Polyeder ist. Um sich diese Situation zu veranschaulichen, betrachte man folgendes Beispiel.

Beispiel 3.4.14 Es sei \mathcal{P} die Menge $\mathcal{P} = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{R}^3$ und $a := (0, 0, 0) \in \mathcal{P}$, siehe Abbildung 3.20. Dann ist a kein Extrempunkt von $\text{conv}(\mathcal{P})$, da $a = \frac{1}{2}((0, 1, 0) + (0, -1, 0))$ und $(0, 1, 0), (0, -1, 0) \in \mathcal{P}$ gilt. Da aber, analog zu Beispiel 3.2.1, alle Punkte aus $\{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$ für a voronoirelevant sind, ist die Voronoizelle $V(a)$ kein Polyeder.

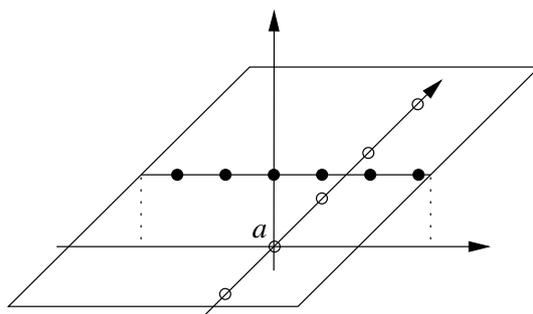


Abbildung 3.20: $\mathcal{P} = \{(0, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{Z}\} \cup \{(x, 0, 1) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

Lokal endlich erzeugte Punktmengen

Man zeige nun die Umkehrung der Aussage von Satz 3.4.9.

Satz 3.4.15 *Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge und $p \in \partial\mathcal{P}$ ein Randpunkt von \mathcal{P} . Ist der Richtungskegel $C(p)$ von p endlich erzeugt, so ist die Voronoizelle $V(p)$ ein Polyeder.*

Beweis: Zunächst sei die Beweisidee kurz skizziert: Man betrachte eine endliche Menge von Punkten aus \mathcal{P} , die $C(p)$ erzeugen, und bilde den Schnitt H über die zu diesen Punkten zugehörigen Halbräume aus der Voronoizellendarstellung, siehe Abbildung 3.21. Dann gilt, dass der charakteristische Kegel von H gleich dem Polarkegel von $C(p)$ ist. Dieses impliziert, dass die Menge $H \cap (C(p) + p)$ abgeschlossen und beschränkt ist. Also gibt es einen maximalen Abstand s' von p zum Rand von $H \cap (C(p) + p)$. Man setzt nun s als das Maximum von s' und dem maximalen Abstand von p zu den Extrempunkten von H . Es lässt sich zeigen, dass dann alle für p voronoirelevanten Punkte in der Kugel $B(p, 2s)$ enthalten sind; dieses wird durch einen Widerspruch gezeigt. Die Diskretheit von \mathcal{P} liefert dann die Behauptung.

Ist $C(p)$ endlich erzeugt, so existieren Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ mit $C(p) = \text{cone}(\mathcal{P} - p) = \text{cone}(p_1 - p, \dots, p_k - p)$ und $C(p)$ ist offensichtlich abgeschlossen. Da p ein Randpunkt von \mathcal{P} ist, gilt $C(p) \neq \mathbb{R}^n$. Man setze $H := \bigcap_{i=1}^k H_p^-(p_i)$. Dann gilt $V(p) \subset H$ und $C_c(H) = \bigcap_{i=1}^k H^-(p_i - p, 0) = C(p)^\star$. Wegen $C(p) \neq \mathbb{R}^n$ ist auch $C(p)^\star = C_c(H) \neq \{0\}$ erfüllt. H ist damit nicht beschränkt. Da ein voronoirelevanter Punkt notwendig in $C(p) + p$ enthalten sein und dessen zugehörige Hyperebene einen nicht leeren Schnitt mit dem Inneren der Menge H haben muss, betrachte man nun die Menge $H \cap (C(p) + p)$. Es gilt, dass $H \cap (C(p) + p)$ beschränkt ist. Dieses sieht

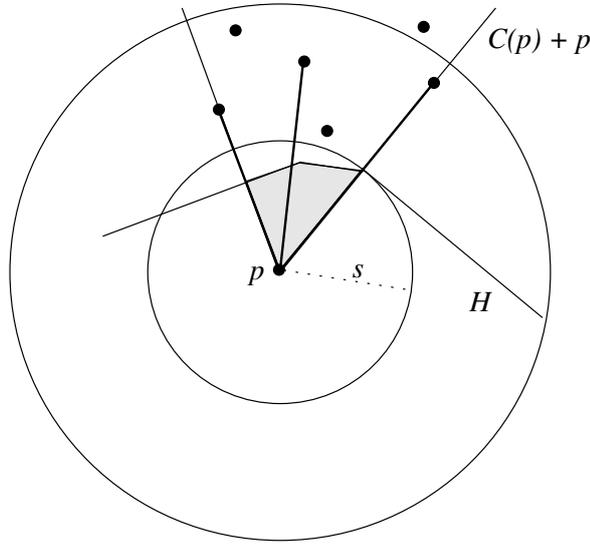


Abbildung 3.21: Konstruktion aus Beweis zu Satz 3.4.15

man wie folgt: Es sei $S(x_0, v)$ ein Strahl in $H \cap (C(p) + p)$. Nach Definition 1.1.19 des charakteristischen Kegels gilt dann $S(0, v) \subset C_c(H)$ und $S(0, v) \subset C_c(C(p) + p) = C(p)$. Also folgt $v \in C_c(H) \cap C(p) = C(p)^* \cap C(p)$. Es ist aber $C(p) \cap C(p)^* = \{0\}$ und damit $v = 0$. Das heißt es existiert kein Strahl in $C_c(H) \cap C(p)$ und damit auch keiner in $H \cap (C(p) + p)$. Satz 1.1.16 liefert nun die Beschränktheit von $H \cap (C(p) + p)$. Da $H \cap (C(p) + p)$ als Schnitt zweier abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen ist, ist $H \cap (C(p) + p)$ sogar kompakt. Daher existiert ein maximaler Abstand $s' := \max\{\|x - p\| \mid x \in \partial(H \cap (C(p) + p))\} < \infty$ von p zum Rand von $H \cap (C(p) + p)$. Als Schnitt über endlich viele Halbräume ist H ein Polyeder und besitzt daher nur endlich viele Extrempunkte. Somit existiert auch ein maximaler Abstand $s'' := \max\{\|x - p\| \mid x \in \text{Ext}(H)\} < \infty$ von p zu allen Extrempunkten von H . Man setze nun $s := \max\{s', s''\}$. Dann gilt, dass alle für p voronoirelevanten Punkte in $B(p, 2s)$ liegen: Es ist klar, dass für einen voronoirelevanten Punkt $q \in \mathcal{P} \subset C(p) + p$, $q \notin \{p_1, \dots, p_k\}$, der Schnitt $\text{Hyp}_p(q) \cap H^\circ$ nicht leer ist und damit $H \cap H_p^-(q) \subsetneq H$ gilt. Angenommen q ist voronoirelevant, erfüllt also $H \cap H_p^-(q) \subsetneq H$, und es gilt $q \notin B(p, 2s)$, das heißt q hat zu p einen Abstand $d(q, p) > 2s$. Dann folgt, dass der Abstand $d(p + \frac{1}{2}(q - p), p) > s$ ist, also $p + \frac{1}{2}(q - p) \notin B(p, s)$ gilt. Da nach Konstruktion $H \cap (C(p) + p) \subset B(p, s)$ gilt und $\text{Hyp}_p(q)$ die eindeutig bestimmte Stützhyperebene (Tangente) an $B(p, \frac{1}{2}\|q - p\|)$ im Punkt $p + \frac{1}{2}(q - p)$ ist, folgt $\text{Hyp}_p(q) \cap B(p, s) = \emptyset$ also auch $\text{Hyp}_p(q) \cap (H \cap (C(p) + p)) = \emptyset$. Da $\text{Ext}(H) \subset (B(p, s) \cap H) \subset (H \cap H_p^-(q))$ gilt, folgt mit $d(p + \frac{1}{2}(q - p), p) > s$ zusätzlich $\text{Ext}(H) \subset \text{Ext}(H \cap H_p^-(q))$. Man betrachte zunächst den Fall,

dass H keine Gerade enthält. Dann ist der Darstellungssatz 1.2.18 von Klee anwendbar, und es folgt aus $H \cap H_p^-(q) \subsetneq H$

$$\begin{aligned} & \text{conv}(\text{Ext}(H) \cup \text{RExt}(H \cap H_p^-(q))) \\ \subset & \text{conv}(\text{Ext}(H \cap H_p^-(q)) \cup \text{RExt}(H \cap H_p^-(q))) = H \cap H_p^-(q) \\ \subsetneq & H = \text{conv}(\text{Ext}(H) \cup \text{RExt}(H)). \end{aligned}$$

Daher gibt es einen Strahl $S(y_0, w) \in \text{RExt}(H)$ mit $S(y_0, w) \notin \text{RExt}(H \cap H_p^-(q))$. Also folgt $w \in C_c(H)$ und $w \notin C_c(H \cap H_p^-(q))$, das heißt es gilt $C_c(H \cap H_p^-(q)) \subsetneq C_c(H)$. In dem Fall, dass in H eine Gerade enthalten ist, genügt es $H \cap \text{aff}(C(p) + p)$ zu betrachten, da Punkte $y \in \mathbb{R}^n \setminus \text{aff}(C(p) + p)$ offensichtlich nicht voronoirelevant sein können. Da aber gezeigt wurde, dass $H \cap (C(p) + p)$ beschränkt ist, kann $H \cap \text{aff}(C(p) + p)$ keine Gerade enthalten, so dass der Darstellungssatz von Klee stets anwendbar ist. Mit den Sätzen 1.1.20, 1.4.6 und 1.4.9 folgt nun $C_c(H)^* \subsetneq C_c(H \cap H_p^-(q))^*$. Da $C_c(H)^* = C(p) = \text{cone}(p_1 - p, \dots, p_k - p)$ und $C_c(H \cap H_p^-(q))^* = \text{cone}(p_1 - p, \dots, p_k - p, q - p)$ gilt, folgt $q \notin C(p) + p$ und damit $q \notin \mathcal{P}$. Dieses ist ein Widerspruch. Damit hat man gezeigt, dass alle voronoirelevanten Punkte in $B(p, 2s)$ enthalten sind. Da \mathcal{P} diskret ist, gilt $|B(p, 2s) \cap \mathcal{P}| < \infty$. Somit gibt es zu p nur endlich viele voronoirelevante Punkte und es folgt, dass $V(p)$ ein Polyeder ist. \square

Man beachte, dass in dem obigen Beweis die Abschätzung für die Menge der voronoirelevanten Punkte über die Kugel $B(p, 2s)$ in der Regel viel zu grob sein wird. Ähnlich wie im zweidimensionalen Fall sollte auch hier eine Abschätzung mittels der Kugel $B(p, 2s')$ möglich sein. Doch auch diese Abschätzung wird im Allgemeinen noch zu grob sein. Man kann nicht erwarten, dass ein Punkt $q \in \mathcal{P}$, der in dieser Kugel liegt, für p voronoirelevant wäre. Um jedoch zu zeigen, dass die Voronoizelle $V(p)$ ein Polyeder ist, genügt es, dass nur endlich viele Punkte voronoirelevant sein können.

Insgesamt hat man nun gesehen, dass die Voronoizelle eines Randpunktes genau dann ein Polyeder ist, wenn der Richtungskegel des Punktes endlich erzeugt ist. Erweitert man die Definition 3.4.1 des Richtungskegels auf innere Punkte $p \in \mathcal{P}^\circ$, so lässt sich diese Aussage mit dem Satz 3.2.8, der besagt, dass die Voronoizelle $V(p)$ eines Punktes $p \in \mathcal{P}$ genau dann ein Polytop ist, wenn $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt ist, in Verbindung bringen. Dazu überlege man sich kurz, dass $C(p) = \mathbb{R}^n$ genau dann gilt, wenn $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt ist: Es sei zunächst $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt. Dann gilt wegen $\text{conv}(\mathcal{P}) \subset C(p) + p$ auch $p \in (C(p) + p)^\circ$. Da p nach Definition des Richtungskegels eine Kegelspitze von $C(p) + p$ ist, folgt somit $C(p) + p = \mathbb{R}^n = C(p)$. Gilt andererseits $C(p) = \mathbb{R}^n$, so lässt sich jeder Punkt des \mathbb{R}^n als positive Linearkombination von Punkten aus $\mathcal{P} - p$ darstellen. Daher existieren Punkte $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, $k \leq 2n$, so dass $p \in \text{conv}(p_1, \dots, p_k)^\circ \subset \text{conv}(\mathcal{P})^\circ$ gilt. Also ist $p \in \mathcal{P}^\circ$ ein innerer Punkt.

Mittels dieser erweiterten Definition des Richtungskegels, die einem inneren Punkt $p \in \mathcal{P}^\circ$ den Richtungskegel $C(p) = \mathbb{R}^n$ zuordnet, lässt sich die oben bewiesene Äquivalenz, dass die Voronoizelle eines Punktes genau dann ein Polyeder ist, wenn der Richtungskegel des Punktes endlich erzeugt ist, auf alle Punkte einer diskreten Punktmenge \mathcal{P} anwenden. Der Richtungskegel $C(p) = \mathbb{R}^n$ eines inneren Punktes $p \in \mathcal{P}^\circ$ ist sicherlich immer endlich erzeugt. Damit erhält man die Aussage, dass die Voronoizelle eines inneren Punktes ein Polytop ist, die in Satz 3.2.8 gezeigt wurde, auch als Spezialfall von Satz 3.4.15. Denn ist $p \in \mathcal{P}^\circ$, so ist die Menge $H \cap (C(p) + p) = H$ im Beweis von Satz 3.4.15 ein Polytop und es folgt sofort, dass ein Punkt $q \in \mathcal{P}$ mit $d(p, q) > 2s$ nicht voronoirelevant sein kann. Also gibt es nur endlich viele für p voronoirelevante Punkte, und $V(p)$ ist als Teilmenge des Polytops H beschränkt, also insgesamt ein Polytop. Ein Vergleich mit dem Beweis von Satz 3.2.8 zeigt, dass dort mit ähnlichen Mitteln ein analoger Beweis geführt wurde. In beiden Beweisen sind der Übergang zu einer dualen Menge sowie die Abschätzung mittels einer Kugel die wesentlichen Bestandteile. Genauso lässt sich die ebenfalls in Satz 3.2.8 gezeigte Umkehrung, dass p ein innerer Punkt ist, wenn die Voronoizelle $V(p)$ ein Polytop ist, als Spezialfall des Beweises von Satz 3.4.9 auffassen. Ist $V(p)$ ein Polytop, so folgt $C_c(V(p)) = \{0\}$ und damit $C_c(V(p))^* = \mathbb{R}^n = C(p)$. Also ist p ein innerer Punkt. Auch hier ist in beiden Beweisen der Übergang zur dualen Menge der wesentliche Beweisschritt.

Um das Ziel dieser Arbeit, die gewünschte Charakterisierung, wann alle Voronoizellen einer diskreten Punktmenge Polyeder sind, in einem Satz formulieren zu können, sei für die Punktmenge, deren sämtliche Richtungskegel endlich erzeugt sind, eine eigene Bezeichnung eingeführt.

Definition 3.4.16 Es sei $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge. Gilt für alle Punkte $p \in \mathcal{P}$, dass der zugehörige Richtungskegel $C(p)$ endlich erzeugt ist, so wird die Menge \mathcal{P} *lokal endlich erzeugt* genannt.

Mit dieser Bezeichnung lässt sich nun das in den Sätzen 3.4.9 und 3.4.15 erzielte Ergebnis als Theorem zusammenfassen.

Satz 3.4.17 (2. Hauptsatz) Ist $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ eine diskrete Punktmenge, so sind genau dann alle Voronoizellen $V(p)$ für $p \in \mathcal{P}$ Polyeder, wenn \mathcal{P} lokal endlich erzeugt ist. \square

Eine einfache Folgerung des zweiten Hauptsatzes 3.4.17 ist, dass alle Voronoizellen einer endlichen Punktmenge Polyeder sind. Denn in diesem Fall sind offensichtlich alle Richtungskegel endlich erzeugt und man erhält sofort die Behauptung.

Damit hat man nun insgesamt die diskreten Punktmengen, deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind, und insbesondere auch die, deren Voronoi-diagramm nur aus Polytopen besteht, charakterisiert und die in der Vergangenheit betrachteten Fälle von endlichen Punktmengen, Gittern und (r, R) -Systemen als Spezialfälle der allgemeinen Theorie erhalten.

Kapitel 4

Ausblick

Abschließend soll noch einmal das bisher Erreichte zusammengefasst und weiterführende Fragestellungen aufgezeigt werden.

Nachdem in Abschnitt 2.1 mehrere kleine, aber praktische Sätze über konvexe Mengen, die Darstellbarkeit eines Punktes als Konvexkombination und den minimalen Abstand zwischen den Rändern zweier sich enthaltender konvexer Mengen gezeigt worden sind, wurde in Abschnitt 2.2 speziell auf die Randstruktur einer konvexen Menge eingegangen. Dabei standen nicht abgeschlossene, unbeschränkte konvexe Mengen im Mittelpunkt. Insbesondere wurde der Zusammenhang zwischen der Menge der Extrempunkte einer konvexen Menge und der Menge der Extrempunkte ihres Abschlusses betrachtet und gezeigt, dass die Extrempunkte des Abschlusses der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge bereits in der diskreten Punktmenge enthalten sein müssen. Weiterhin wurden die Zusammenhangskomponenten des nicht in der konvexen Menge enthaltenen Teils des Randes näher untersucht und ihre Gestalt umfassend beschrieben. Es wurde gezeigt, dass zu jedem Randpunkt der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge stets ein diesen Punkt enthaltendes Liniensegment positiver Länge im Rand der konvexen Hülle existiert. Jedoch ist die konvexe Hülle einer diskreten Punktmenge in beliebiger Dimension in der Regel nicht lokal polyedrisch.

Da sich die Dimension 2 in vielen Beispielen als Spezialfall darstellte, wurde auf die Betrachtung dieses Falles in Abschnitt 2.3 besonders eingegangen. Dabei zeigte sich, dass der Rand der konvexen Hülle einer diskreten Punktmenge in \mathbb{R}^2 stets stückweise linear ist, und sich jede uniform diskrete Punktmenge so zu einer neuen diskreten Punktmenge erweitern lässt, dass die konvexe Hülle der erweiterten Punktmenge die gleiche Gestalt hat wie der Abschluss der konvexen Hülle der Ausgangsmenge, aber zusätzlich bereits selbst abgeschlossen ist. Beim Beweis dieser Aussage wurden wesentliche Eigenschaften der Dimension 2 benutzt. Es bleibt daher noch zu untersuchen, ob sich eine vergleichbare Aussage auch in höheren Dimensionen zeigen lässt.

Frage 4.1 *Existiert zu jeder (uniform) diskreten Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ stets eine Erweiterung $\mathcal{P}' \subset \mathbb{R}^n$, die ebenfalls (uniform) diskret ist und $\text{conv}(\mathcal{P}') = \text{conv}(\mathcal{P})$ erfüllt?*

Unter Benutzung der oben genannten Ergebnisse des ersten Teils der Arbeit wurde dann im zweiten Teil näher auf die Voronoizellen diskreter Punktfolgen eingegangen. Dabei wurde in Abschnitt 3.1 ein kurzer Überblick über die bereits bekannten Aussagen, die sich auf endliche Punktfolgen, Gitter oder allgemeiner (r, R) -Systeme beziehen, gegeben. Dabei fiel auf, dass in allen diesen Fällen die Voronoizellen stets Polyeder oder sogar Polytope sind. In Abschnitt 3.2 wurde dann zunächst gezeigt, dass dieses für beliebige diskrete Punktfolgen in der Regel nicht gilt. Des Weiteren wurden verschiedene Ansätze, welche Bedingung eine diskrete Punktmenge erfüllen muss, damit alle Voronoizellen Polyeder sind, untersucht, und speziell der Zusammenhang der Polyedrizität der Voronoizellen mit der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge näher betrachtet. Es wurde gezeigt, dass die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle nicht zu einer Äquivalenzaussage führen kann, da es diskrete Punktfolgen gibt, deren konvexe Hüllen nicht abgeschlossen aber deren sämtliche Voronoizellen Polyeder sind. Dafür wurde im ersten Hauptsatz gezeigt, dass die Voronoizelle eines inneren Punktes der diskreten Punktmenge immer ein Polytop ist, was mit der bereits bekannten Theorie in Einklang steht und die in der Vergangenheit betrachteten Fälle als Spezialfälle enthält.

Um einen Hinweis über die Gültigkeit der anderen Richtung der in 3.2.7 vermuteten Äquivalenz, dass aus der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der diskreten Punktmenge folgt, dass alle Voronoizellen Polyeder sind, zu bekommen, hat man in Abschnitt 3.3 zunächst wieder den zweidimensionalen Fall betrachtet. In diesem Fall ließ sich die Gestalt der Voronoizelle eines Punktes in Abhängigkeit der diesen Punkt umgebenden Punkte genau beschreiben. Zusätzlich konnte gezeigt werden, dass die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle einer ebenen diskreten Punktmenge in der Tat die Polyedrizität aller Voronoizellen impliziert. Jedoch wurden auch hier wieder wesentliche Eigenschaften der Dimension 2 benutzt, so dass sich der dort angegebene Beweis nicht ohne weiteres auf eine höhere Dimension übertragen lässt. Ob eine vergleichbare Aussage auch in allgemeiner Dimension gilt, ist weiterhin offen.

Frage 4.2 *Gilt für eine diskrete Punktmenge $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$, deren konvexe Hülle abgeschlossen ist, stets, dass alle Voronoizellen der Punktmenge Polyeder sind?*

In Abschnitt 3.4 wurde der ursprüngliche Ansatz, eine Charakterisierung mittels der Abgeschlossenheit der konvexen Hülle der Punktmenge zu finden,

im Sinne einer lokalen Betrachtungsweise variiert. Dazu wurde der Begriff des Richtungskegels eines Randpunktes eingeführt und näher untersucht. Es konnte gezeigt werden, dass die Voronoizelle eines Randpunktes genau dann ein Polyeder ist, wenn der Richtungskegel des Punktes endlich erzeugt ist. Damit hat man als ein Hauptergebnis dieser Arbeit die gesuchte Äquivalenz gefunden: Die Voronoizellen einer diskreten Punktmenge sind genau dann alle Polyeder, wenn die Punktmenge lokal endlich erzeugt ist. Auch hier hat man wieder gesehen, dass sich dieses Ergebnis in die bereits bestehende Theorie einbetten lässt. Es ist allerdings noch offen, ob nicht auch die Abgeschlossenheit des Richtungskegels bereits ausreicht, damit die Voronoizelle des Punktes ein Polyeder ist. Würde dieses gelten, so erhielte man als direkte Folgerung, dass ein Richtungskegel genau dann abgeschlossen wäre, wenn er endlich erzeugt wäre. Es würde ebenfalls folgen, dass dann auch die Abgeschlossenheit der konvexen Hülle bereits implizieren würde, dass alle Voronoizellen Polyeder sind.

Frage 4.3 *Gilt für den Richtungskegel $C(p)$ eines Punktes $p \in \partial\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^n$ stets, dass $C(p)$ genau dann abgeschlossen ist, wenn $C(p)$ endlich erzeugt ist?*

Weitere sich anschließende Fragestellungen sind die folgenden: Liefert die Umformulierung der Problematik der Voronoizellen auf die duale Delone Pflasterung weitere Einblicke? Es ist klar, dass diese Sichtweise auf äquivalente Problemstellungen führen wird. Ein Ansatzpunkt wäre daher, auf die noch offenen Fragen Techniken aus der Theorie der Delone Pflasterungen anzuwenden. In der Literatur findet man oft mehrere verschiedene, nicht notwendig äquivalente Diskretheitsbegriffe (vgl. [Qua94]). Daher ist noch zu untersuchen, welche Aussagen sich bei der Verwendung eines anderen Diskretheitsbegriffs zeigen lassen und welche Abschwächungen möglich sind. Damit verbunden ist natürlich auch die Frage, inwieweit man analoge Ergebnisse für Punktmenge in anderen Räumen erhalten kann. Neben diesen geometrisch-topologischen Betrachtungsweisen ist auch noch ein algebraischer Ansatz denkbar. So ist noch zu untersuchen, welche Eigenschaften der Voronoizellen sich zeigen lassen, wenn man die Punktmenge als Orbit unter einer Gruppenoperation wählt. Außerdem ist noch zu prüfen, ob sich durch die Anwendung der hier bewiesenen Aussagen in anderen Gebieten neue Einsichten ergeben. So ist eine Anwendung dieser Ergebnisse in der Theorie der Quasikristalle, im Bereich der Optimierung, bei der Untersuchung von Pflasterungen und natürlich auch in der Theorie der Quantizer denkbar. Alle diese Fragestellungen bieten Möglichkeiten für zukünftige Forschungen.

Literaturverzeichnis

- [AgEr96] E. Agrell, T. Eriksson: *Lattice-Based Quantization, Part I*, Technical Report no. 17, Department of Information Theory, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1996.
- [Aure90] F. Aurenhammer: *A New Duality Result Concerning Voronoi Diagrams*, *Discrete Comput. Geom.* 5, 243–254, 1990.
- [Baa02] M. Baake: *A Guide to Mathematical Quasicrystals* in P. Häusler, M. Schreiber, J.-B. Suck: *Quasicrystals, An Introduction to Structure, Physical Properties and Applications*, Springer, 2002.
- [Barv02] A. Barvinok: *A Course in Convexity*, American Mathematical Society, 2002.
- [Berk02] L. D. Berkovitz: *Convexity and Optimization in \mathbb{R}^n* , John Wiley & Sons, 2002.
- [BMS97] V. Boltyanski, H. Martini, P. S. Soltan: *Excursions into Combinatorial Geometry*, Springer, 1997.
- [Bron83] A. Brøndsted: *An Introduction to Convex Polytopes*, Springer, 1983.
- [ConSlo99] J. H. Conway, N. J. A. Sloane: *Sphere Packings, Lattices and Groups*, Springer, 1999.
- [Engel86] P. Engel: *Geometric Crystallography*, Reidel, 1986.
- [GeG03] A. Gersho, R. M. Gray: *Vector Quantization and Signal Compression*, Kluwer, 2003.
- [GrNe98] R. M. Gray, D. L. Neuhoff: *Quantization*, *IEEE Trans. Inf. Th.*, Vol. 44, No. 6, Oct. 1998.
- [Grub07] P. M. Gruber: *Convex and Discrete Geometry*, Springer, 2007.
- [Grun03] B. Grünbaum: *Convex Polytopes*, Springer, 2003.

- [Hemke03] B. Hemkemeier: *Algorithmische Konstruktionen von Gittern*, Dissertation, Dortmund, 2003.
- [Klee59] V. Klee: *Some Characterizations of Convex Polyhedra*, Acta Math., 102, 1959.
- [Klei97] R. Klein: *Algorithmische Geometrie*, Addison-Wesley, 1997.
- [Koen93] K. Königsberger: *Analysis 2*, Springer, 1993.
- [Leich80] K. Leichtweiß: *Konvexe Mengen*, Springer, 1980.
- [NGL88] F. Nozicka, L. Grygarova, K. Lommatzsch: *Geometrie konvexer Mengen und konvexe Analysis*, Akademie-Verlag Berlin, 1988.
- [OBS92] A. Okabe, B. Boots, K. Sugihara: *Spatial Tessellations, Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, John Wiley & Sons, 1992.
- [Qua94] E. Quaisser: *Diskrete Geometrie*, Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [Rock70] R. T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [Schn93] R. Schneider: *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, 1993.
- [Sen95] M. Senechal: *Quasicrystals and Geometry*, Cambridge University Press, 1995.
- [Sen97] M. Senechal: *Crystals and Quasicrystals* in J. E. Goodman, J. O'Rourke: *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, CRC Press, 1997.
- [Span66] E. H. Spanier: *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, 1966.
- [StMe83] D. Stoyan, J. Mecke: *Stochastische Geometrie*, Akademie-Verlag Berlin, 1983.
- [Vor08] G. F. Voronoi: *Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques*, Journal für reine und angewandte Mathematik, 134, 1808.

Symbolverzeichnis

$\text{aff}(M)$	affine Hülle der Menge M , 13
arg min	Argument, das das Minimum annimmt, 7
$A(x_1, x_2)$	Bogen von x_1 zu x_2 , 27
$B(x, r)$	abgeschlossene Kugel um x mit Radius r , 11
$B^\circ(x, r)$	offene Kugel um x mit Radius r , 11
C^*	Polarkegel, 32
$C_c(K)$	charakteristischer Kegel der Menge K , 19
$C_c(K, x_0)$	charakteristischer Kegel der Menge K in x_0 , 18
$\text{cone}(M)$	konvexer Kegel der Menge M , 17
$\text{conv}(M)$	konvexe Hülle der Menge M , 14
$C(p)$	Richtungskegel von p , 108
$d(x, y)$	Abstand zwischen den Punkten x und y , 11
$d(x, M)$	Abstand zwischen dem Punkt x und der Menge M , 11
$d(M, N)$	Abstand zwischen den Mengen M und N , 11
$\dim M$	Dimension der Menge M , 14
\mathcal{D}_p	Menge der normierten Differenzvektoren, 88
$\text{Exp}(K)$	Menge der exponierten Punkte von K , 25
$\text{Ext}(K)$	Menge der Extrempunkte von K , 23
$G(L)$	Gitterquantizer-Konstante des Gitters L , 7
$G(Q)$	Quantizer-Konstante, 7
h_K	Stützfunktion der Menge K , 22
H^+, H^-	Halbräume, 20
$H_p^-(q)$	Halbraum zu $\text{Hyp}_p(q)$, 79
H_x^+, H_x^-	Halbräume zu Hyp_x , 20
$H^-(v)$	Halbraum zu $\text{Hyp}(v)$, 79
$H^+(v, \alpha), H^-(v, \alpha)$	durch v und α definierte Halbräume, 20, 79
$\{H_{p,i}^- \mid i \in I\}$	Menge der Halbräume in p , 110

Hyp	Hyperebene, 20
$\text{Hyp}_p(q)$	durch p, q definierte Hyperebene, 79
Hyp_x	Hyperebene durch den Punkt x , 20
$\text{Hyp}(v)$	Hyperebene orthogonal zu v durch $\frac{1}{2}v$, 79
$\text{Hyp}(v, \alpha)$	durch v und α definierte Hyperebene, 20, 79
$\{\text{Hyp}_{p,i} \mid i \in I\}$	Stützhyperebenen in p , 110
K	konvexe Menge, 13
\overline{M}	Abschluss der Menge M , 12
M°	Inneres der Menge M , 12
∂M	Rand der Menge M , 12
M^*	zu M polare Menge, 30
M^c	Komplement der Menge M , 11
$\min \mathcal{P}$	Minimalabstand der Punktmenge \mathcal{P} , 35
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$
\mathcal{P}	diskrete Punktmenge, 6, 35
\mathcal{P}°	Menge der inneren Punkte von \mathcal{P} , 45
$\partial \mathcal{P}$	Menge der Randpunkte von \mathcal{P} , 45
(Q, \mathcal{P})	Vektorquantizer, 6
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen (mit euklidischer Metrik)
$\text{relint } K$	relatives Inneres der Menge K , 13
$\text{RExt}(K)$	Menge der extremalen Strahlen von K , 24
$RP(K)$	Menge der regulären Punkte von K , 22
$\mathcal{R}^v(p)$	Indexmenge der für p voronoirelevanten Punkte, 81
$\mathcal{R}^r(p)$	Indexmenge der für p richtungsrelevanten Hyperebenen, 110
$S(x_0, v)$	Strahl in Richtung v mit Startpunkt x_0 , 17
$\mathcal{T}(K)$	Menge der zusammenhängenden Randstücke von K , 53
$\mathcal{T}^c(K)$	Menge der in K enthaltenen Randstücke aus $\mathcal{T}(K)$, 53
$\mathcal{T}^\complement(K)$	Menge der nicht zu K gehörenden Randstücke aus $\mathcal{T}(K)$, 53
$U(M, \varepsilon)$	ε -Umgebung der Menge M , 11
$V(L)$	Voronozelle des Gitters L , 7, 82
$V(p)$	Voronozelle von p , 7, 80
$\ x\ $	Norm des Punktes x , 11

$\langle x, y \rangle$	Skalarprodukt der Punkte x und y , 11
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen

Index

abgeschlossen, 11
Abschluss, 12
Abstand, 11
affin, 13
affine Hülle, 13
Austauschlemma, 37

beschränkt, 11
beschränkt polyedrisch, 66
Bipyramide, 29
Bogen, 27
Bolzano-Weierstrass, Satz von, 12

Caratheodory, Satz von, 15
charakteristischer Kegel, 18, 19

Darstellungssatz von Klee, 25
Delonemenge, 84
Differenzvektoren, 88
Dimension, 14
Dirichletzelle, 8
Dirichlet Pflasterung, 8
diskret, 35
dual, 30
DV-Zelle, 8

Eckpunkt, 25
Erweiterung, 75
Erweiterungssatz, 75
exponierter Punkt, 25
extremaler Strahl, 24
Extrempunkt, 23

- Facette, 23

- Gitter, 82
- Gitterquantizer, 7
- Gitterquantizer-Konstante, 7
- gleichmäßig ausgedehnt, 84

- Halbgerade, 17
- Halbordnung, 12
- Halbraum, 20
- Hauptsatz, erster 94
- zweiter 122
- hexagonales Gitter, 83
- Hyperebene, 20

- Inneres, 12
- innerer Punkt, 45
- isolierter Randpunkt, 89

- Kegel, 16
- Klee, Darstellungssatz von, 25
- kompakt, 12
- konvex, 13
- konvexe Hülle, 14
- konvexer Kegel, 17
- konvexer Körper, 13
- kritischer Punkt, 87

- Lemma von Zorn, 12
- lokal polyedrisch, 66
- lokal endlich erzeugt, 122

- Mannigfaltigkeit, 27
- maximales Randstück, 53
- Minimalabstand, 35
- Minkowski, Satz von, 24

- nächster Punkt, 28
- Norm, 11
- Normalenkegel, 32

- offen, 11

- polare Menge, 30

Polarkegel, 32
Polyeder, 29
Polytop, 29
Projektionskegel, 109
Pyramide, 29

Quantizer, 5
Quantizer-Konstante, 7
Quasikristall, 9

Rand, 12
Randpunkt, 45
Rang eines Gitters, 82
regulärer Punkt, 22
relativ dicht, 84
relatives Inneres, 13
Richtung, 88
Richtungskegel, 108
richtungsrelevant, 110
 (r, R) -System, 84

Schicht, 28
Seite, 23
Sekante, 70
Simplex, 29
Skalarprodukt, 11
Spitze eines Kegels, 16
Steinitz, Satz von, 15
Steinitz für Polytope, Satz, 40
Strahl, 17
Straszewicz, Satz von, 25
Strecke, 30
stückweise linear, 66
stützender Halbraum, 21
stützende Hyperebene, 21
Stützfunktion, 22
Stützkegel, 109

teilen, 20
Thiessen Polygon, 8
trennen, 21

uniform diskret, 35

Vektorquantizer, 6
verallgemeinertes Polyeder, 66
Voronoi, G.F., 83
voronoirelevant, 81
voronoirelevanter Vektor, 83
Voronoidiagramm, 7
Voronozelle, 6, 80
 eines Gitters, 82

Wand, 23
Wigner-Seitz Zelle, 8

Zorn, Lemma von, 12
zusammenhängend, 27