

Transiente Modellierung koaxialer Spulensysteme unter Berücksichtigung nichtlinearer Materialeigenschaften

Von der Fakultät für Elektrotechnik und Informationstechnik
der Technischen Universität Dortmund genehmigte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades

Doktor der Ingenieurwissenschaften

von

Dipl.-Ing. Radu-Marian Cernat

Dortmund 2013

Tag der mündlichen Prüfung: 20. März 2013
Erstgutachter: Prof. Dr.-Ing. Dirk Peier
Zweitgutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Stefan Kulig

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 2002 bis 2007 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hochspannungstechnik und EMV der Universität Dortmund und in den Jahren 2007 bis 2012 begleitend zu meiner Tätigkeit als Entwicklungsingenieur bei der Siemens AG im Bereich Hochspannung des Schaltwerks Berlin.

Herrn Professor Peier danke ich sehr herzlich für das entgegengebrachte Vertrauen, die Betreuung meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl und die fachliche und persönliche Unterstützung. Außerdem möchte ich mich für die zahlreichen Diskussionen und Anregungen bedanken, die zur erfolgreichen Durchführung meiner Promotion erheblich beigetragen haben.

Herrn Professor Kulig danke ich für die aufmerksame Durchsicht meiner Arbeit und die Übernahme des Korreferats.

Für die grundlegenden fachlichen Diskussionen und die Durchsicht meiner Entwürfe bedanke ich mich bei Herrn Dr. Tycho Weißgerber und Dr. Ralf Merte, die mich während jeder Phase dieser Arbeit begleitet haben.

Den Mitarbeitern des Lehrstuhls und den Studenten, die an den Untersuchungen mitgewirkt haben, sowie den Arbeitskollegen von der Siemens AG danke ich für die angenehme Zusammenarbeit und die besondere Hilfsbereitschaft, ohne die meine Arbeit in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.

Mein besonderer Dank gilt meinen Freunden, die mir während der gesamten Zeit hilfreich zur Seite standen und stets für den nötigen Ausgleich gesorgt haben.

Berlin, Mai 2013

Übersicht

Finite Elemente Berechnungen sind aufgrund der Entwicklung leistungsfähiger Rechner im letzten Jahrzehnt zu einem unabdinglichen Werkzeug der Produktentwicklung geworden. Durch ihren Einsatz kann gezielt eine optimale Lösung ermittelt werden, indem ungeeignete Varianten in einem frühen Entwicklungsstadium ausgeschlossen werden, um somit die Anzahl der Prototypen und der durchzuführenden Versuche zu reduzieren. Komplexe Vorgänge können gekoppelt berechnet werden und dadurch die gegenseitige Beeinflussung elektrischer, magnetischer, thermischer oder strukturmechanischer Prozesse analysiert werden.

In dieser Arbeit wird die Durchführbarkeit der Berechnungen mit finiten Elementen am Anwendungsfall koaxialer Spulensysteme unter Berücksichtigung der derzeitigen technischen Möglichkeiten dargestellt. Analysiert werden die elektrische und magnetische Feldverteilung im transienten Fall und deren gegenseitige Beeinflussung. Die Behandlung aller konstruktiven Details in einer dreidimensionalen Feldberechnung ist nach heutigem technischem Stand mit vertretbaren Mitteln nicht in einem akzeptablen Zeitrahmen realisierbar. Entsprechend wird auf eine Ersatzgeometrie zurückgegriffen, die eine zweidimensionale axialsymmetrische Berechnung ermöglicht. Eingangsgrößen der Berechnung sind die Grundgeometrie der untersuchten Anordnung und die Materialparameter der eingesetzten Werkstoffe.

Die Feldgrößen werden mittels einer transienten gekoppelten elektrischen und magnetischen Feldberechnung unter Berücksichtigung der nichtlinearen Materialeigenschaften ermittelt. Die Klemmengrößen des Spulensystems werden durch Integration aus den Feldgrößen bestimmt. Parasitäre Elemente, wie zum Beispiel die Streuinduktivität oder die Wicklungskapazität, sowie die auftretenden Verluste werden von der Berechnung ortsauflösend erfasst. Dadurch werden Ausgleichsvorgänge innerhalb des Spulensystems realitätsstreu nachgebildet, wodurch eine potentielle punktuelle Überbeanspruchung der eingesetzten Werkstoffe erkennbar wird.

Für die magnetischen und elektrischen Materialparameter wird ein an die Bedürfnisse der Feldberechnung angepasstes Werkstoffmodell hergeleitet. Die Verluste und die im magnetischen bzw. elektrischen Feld gespeicherte Energie werden getrennt behandelt. Für die Verluste wird im betrachteten Werkstoff über einen Widerstandsbelag ein ohmscher Stromfluss eingeleitet, wodurch Wirkleistung umgesetzt wird. Bei den magnetischen Werkstoffen handelt es sich dabei um Wirbelströme, so dass über die Frequenzabhängigkeit der induzierten Spannung die modellierten Verluste ebenfalls frequenzabhängig sind. Die gespeicherte Energie wird über eine feldstärkenabhängige Permeabilitäts- bzw. Permittivitätszahl modelliert und bildet das nichtlineare Werkstoffverhalten ab.

Die Einsatzfähigkeit des vorgestellten Modells wird am Beispiel eines Zündtransformators und eines Hubmagneten nachgewiesen. Der Zündtransformator stellt durch seine kompakte Bauweise, den Impulsbetrieb und die erzeugte Hochspannung hohe Ansprüche an die Auslegung des magnetischen Kreises und an die Isolationskoordination, und ist somit der ideale Versuchsträger für die Validierung des Simulationsmodells. Der Hubmagnet erweitert das Anwendungsgebiet der Modellierung durch die Betrachtung der magnetischen Kraftwirkung in einer beweglichen Anordnung um einen weiteren Aspekt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	9
1 Entwicklung eines elektromagnetischen Simulationsmodells für axialsymmetrische Spulenordnungen.....	11
1.1 Implementierung funktionspezifischer Merkmale	12
1.1.1 Einfluss der Relaxationszeit dielektrischer Werkstoffe auf die elektrische Potentialverteilung eines Mehrschichtdielektrikums.....	12
1.1.2 Auswirkung der Querbelastrung auf den räumlichen Potentialaufbau einer gestreckten Leiterstruktur.....	17
1.1.3 Betrachtung der nichtlinearen Potentialverteilung unter Berücksichtigung der Induktion.....	18
1.2 Aufstellen des Differentialgleichungssystems für die gekoppelte magnetische und elektrische Feldberechnung.....	20
1.2.1 Allgemeine Form der elektromagnetischen Feldgleichung.....	20
1.2.2 Magnetische und elektrische Feldgleichungen axialsymmetrischer Anordnungen.....	22
1.2.3 Modellierung der Symmetrieabweichungen zylindrischer Drahtwicklungen	26
1.2.4 Beeinflussung der Feldverteilung durch Grenzflächen	28
1.3 Berechnung der magnetischen und elektrischen Feldverteilung mit der Methode der finiten Elemente	30
1.3.1 Formulierung der Feldgleichungen in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten	30
1.3.2 Schwache Form des Differentialgleichungssystems	33
1.3.3 Diskretisierung des Feldraumes und numerische Approximation der Lösung.....	35
2 Vergleichende Beschreibung nichtlinearer magnetischer und elektrischer Materialien.....	41
2.1 Magnetische und elektrische Polarisierung.....	41
2.1.1 Physikalische Grundlagen	42
2.1.2 Technische Beschreibung.....	44
2.1.3 Messtechnische Erfassung charakteristischer Werkstoffeigenschaften.....	50
2.2 Mathematische Modellierung nichtlinearer Werkstoffe	55
2.2.1 Beschreibung des Vorgangs der Energiespeicherung	59
2.2.2 Nachbildung der geometrieabhängigen magnetischen Umpolarisierungsverluste.....	62

3	Modellierung komplexer Betriebsmittel am Beispiel eines Stabzündtransformators	71
3.1	Implementierung eines Hochfrequenz-Modells für Spulen	72
3.1.1	Theoretische Betrachtung der Wicklungskapazität	73
3.1.2	Auslegung der Modellparameter unter Berücksichtigung unterschiedlicher Wicklungsschemata.....	76
3.1.3	Messtechnische Verifikation des Frequenzverhaltens der Spule	78
3.2	Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften magnetischer Werkstoffe	80
3.2.1	Einfluss der Kerngeometrien auf die Feld- und Klemmengrößen einer Spule.....	80
3.2.2	Verschiebung der Magnetisierungskennlinie durch den Einsatz von Permanentmagneten	82
3.3	Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von Halbleiterelementen	84
3.3.1	Parametrisierung der Kennlinien von Dioden und Zenerdioden	84
3.3.2	Mathematische Beschreibung des Schaltverhaltens von IGBTs	87
3.4	Messtechnische Validierung des Simulationsmodells für Stabzündtransformatoren.....	89
3.4.1	Simulation eines belasteten Zündtransformators.....	89
3.4.2	Aufbau zur Messung der inneren elektrischen Feldverteilung	93
3.4.3	Gegenüberstellung der simulierten und gemessenen Größen.....	96
4	Die Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes am Beispiel eines Hubmagneten	99
4.1	Prinzipieller Aufbau eines Hubmagneten.....	99
4.2	Mechanische Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes	100
4.3	Simulationsmodell eines Hubmagneten	106
	Zusammenfassung und Ausblick	111
	Literaturverzeichnis	115

Einleitung

In den Produktentstehungsprozess fließen neben technischen Anforderungen vermehrt wirtschaftliche, umwelttechnische und rechtliche Faktoren ein, die die Komplexität eines Entwicklungsauftrages erhöhen und somit eine Etablierung methodischer, zielgerichteter Entwicklungsverfahren einfordern [26]. Eine hohe Flexibilität durch reduzierte Produktzykluszeiten, angemessene Entwicklungskosten und einen konkurrenzfähigen Preis des Endproduktes sind der Schlüssel zum Erfolg und eine Voraussetzung, um sich auf dem globalen Markt zu behaupten. Aus umwelttechnischer Sicht wird ein sparsamer Umgang mit den verfügbaren Ressourcen vorgeschrieben. Durch den Einsatz moderner Simulationsverfahren kann die Anzahl der benötigten Prototypen reduziert und gleichzeitig ein optimales, gewichtsreduziertes Design erreicht werden, wodurch wertvolle Rohstoffe erhalten bleiben. Rechtlich gesehen muss das Produkt die gesetzlichen Anforderungen bezüglich Gewährleistung und Produkthaftung erfüllen, so dass Aspekte der Lebensdauerprognose in einem frühen Entwicklungsstadium berücksichtigt werden müssen. Der Entwicklungsingenieur steht somit vor der komplexen Aufgabe, in kürzester Zeit ein funktionsfähiges Produkt auf den Markt zu bringen, das preiswert ist, zuverlässig funktioniert, die Umwelt möglichst wenig belastet und die Lebensdauererwartung erfüllt.

Eine komplexe Produktentwicklung ist ohne den Einsatz von Simulations- und Optimierungsverfahren nicht denkbar. Im Mittelpunkt des Entwicklungsprozesses steht das CAD-Modell, das einen ersten Eindruck über das zukünftige Produkt liefert und den Ausgangspunkt für numerische Simulationen darstellt [20]. Strukturmechanische Berechnungen können mit gängigen kommerziellen CAD-Programmen direkt durchgeführt werden, so dass mechanische Schwachstellen oder Materialverschwendung schon in einer frühen Projektierungsphase visualisiert werden können. Für elektromagnetische, strömungsmechanische, thermische oder reaktionskinetische Berechnungen stehen spezialisierte Simulationsprogramme zur Verfügung, die die Geometriedaten aus dem CAD-Modell beziehen und den Benutzer mit standardisierten Modellierungsansätzen unterstützen. Darüber hinaus liefern die vordefinierten Modelle im Spezialfall oftmals unplausible Ergebnisse, so dass Expertenwissen gefragt ist, um anwendungsspezifische Modellanpassungen und Materialmodelle in der Simulationsumgebung zu implementieren.

Die mathematische Grundlage für die Modellierung elektrotechnischer Geräte und Anlagen wird durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben. Neben der Wechselwirkung zwischen dem elektrischen und dem magnetischen Feld beschreibt Maxwell in [42] die Energieübertragung durch die elektromagnetischen Wellen und die mechanische Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes. Die Maxwell'schen Gleichungen können in Differential- oder Integralform formuliert werden und begründen somit zugleich die Feld- und die Netzwerkberechnung. Die analytische Berechnung der elektromagnetischen Feldverteilung ist nur eingeschränkt unter Ausnutzung von Symmetriebedingungen der untersuchten Anordnung möglich. Hierzu wird ein auf die Elektrodenanordnung abgestimmtes Koordinatensystem angewendet, das eine Separation der Variablen der Feldgleichungen zulässt [56]. Die Anwendung konformer Abbildungen und die Methode der Spiegelung ermöglichen einen erweiterten Einsatzbereich, heben jedoch die Einschränkungen nicht vollständig auf. Die Bestimmung der Feldverteilung beliebiger geometrischer Anordnungen bleibt der numerischen Feldberechnung vorbehalten [35].

Die Ersatzschaltbildmethode setzt die prinzipielle Feldverteilung der einzelnen elektrotechnischen Betriebsmittel als bekannt voraus. Zur funktionellen Beschreibung der einzelnen Komponenten wird auf die Klemmengrößen zurückgegriffen. Die Umrechnung zwi-

schen Klemmen- und Feldgrößen erfolgt durch die Integration der Maxwell'schen Gleichungen anhand der angenommenen Feldverteilung. Das Ersatzschaltbild modelliert hiermit nur die primären Merkmale der elektrotechnischen Komponenten und stellt somit eine Vereinfachung dar, deren wesentlicher Vorteil in einer deutlich einfacheren mathematischen Handhabung liegt. Zur Verbesserung der Genauigkeit werden parasitäre Effekte berücksichtigt, die die Komplexität des Ersatzschaltbildes erhöhen [33]. Die parasitären Elemente modellieren hierbei die Abweichungen zwischen der angenommenen Feldverteilung und der Realität. Für die Bestimmung der parasitären Elemente ist entsprechend eine komplexe Feldanalyse erforderlich.

Für die räumliche Untersuchung der Feldverteilung, wie es zum Beispiel bei langen Leitungen erforderlich ist, werden Kettenleiter eingesetzt. Hierdurch wird der Feldraum in diskrete Bereiche unterteilt, die jeweils durch ein Kettenglied modelliert werden, das sich periodisch wiederholt. Praktische Bedeutung erlangt die Methode auch bei der Bestimmung der transienten Potentialverteilung einer Hochspannungswicklung. Hierzu werden die Kapazitäten zwischen den Windungen, die Kapazitäten der einzelnen Windungen zur Umgebung und die Gegeninduktivität zwischen den Windungen im Ersatzschaltbild berücksichtigt [62]. Im Falle von Transformatoren, die konstruktiv bedingt mindestens zwei Wicklungen besitzen, ergeben sich wesentlich unübersichtlichere Kettenleiter [32].

Einen Kompromiss zwischen der Feld- und der Netzwerkberechnung stellt die Aufteilung der Modellierung in ein Ersatzschaltbild und eine numerische Feldberechnung dar [31]. Hierzu wird in einer zweidimensionalen Feldberechnung das magnetische Feld einer rotierenden elektrischen Drehfeldmaschine unter Berücksichtigung der Wirbelstromverteilung betrachtet. Die Ströme in der Rotor- und der Statorwicklung werden in Abhängigkeit von der parasitären Wicklungskapazität und der externen Beschaltung der Maschine durch ein übergeordnetes Netzwerk berechnet. Durch diese Methode ist es möglich das magnetische Feld einer elektrischen Maschine unter realen Lastbedingungen mit einem vertretbaren Maß an Rechenaufwand zu simulieren.

Durch die Entwicklung der Rechenleistung in den letzten Jahren hat sich die numerische Feldberechnung zu einer Alternative für die Netzwerkberechnung bei der Modellierung elektrotechnischer Produkte etabliert. Während die Ersatzschaltbildelemente nur schwer aus den Entwurfsdaten direkt ableitbar sind, benötigt die Feldberechnung ausschließlich Geometrie- und Materialparameter als Eingangsgrößen. Die von der Netzwerkberechnung aufwändig erfassbaren parasitären Effekte fallen in der Feldberechnung aufgrund der präzisen Nachbildung der Feldlinien als Nebenprodukt ab. Im Folgenden werden die Vorzüge der numerischen Feldanalyse gegenüber der Ersatzschaltbildmethode am Beispiel koaxialer Spulenordnungen aufgezeigt. Dabei werden das magnetische und das elektrische Feld, sowie die mechanische Kraftwirkung auf den magnetischen Kreis, gekoppelt im Zeitschrittverfahren berechnet. Die Simulation berücksichtigt die Nichtlinearität des magnetischen Kreises anhand eines an die Anforderungen der numerischen Berechnung angepassten, kennlinienbasierten Materialmodells. Auf die Berechnung der dielektrischen Feldbelastung der Hochspannungswicklungen sowie der mechanischen Kraftbeanspruchung im magnetischen Kreis wird besonderes Augenmerk gerichtet.

1 Entwicklung eines elektromagnetischen Simulationsmodells für axialsymmetrische Spulenanordnungen

Axialsymmetrische Spulenanordnungen sind Kernkomponenten in einer Vielzahl elektrotechnischer Betriebsmittel wie zum Beispiel Transformatoren mit coaxialen Wicklungen, Drosseln, Luftspulen oder Hubmagneten. In Bild 1.1 werden exemplarisch Schliffbilder eines Zündtransformators in der Pencilcoil-Bauform und eines Hubmagneten dargestellt. Der coaxiale Aufbau der Wicklungen und des magnetischen Kreises ist als gemeinsames Merkmal erkennbar.



Bild 1.1: Schliffbild eines Zündtransformators und eines Hubmagneten

In der vorliegenden Arbeit wird die Symmetrie der Anordnung ausgenutzt und eine Modellierung in Zylinderkoordinaten vorgestellt. Dieses ermöglicht die Lösung des aufgestellten Gleichungssystems mit einer zweidimensionalen Feldberechnung. Anordnungen, die von der Axialsymmetrie abweichen, wie zum Beispiel Spulen mit rechteckigem Querschnitt, werden von diesem Verfahren indirekt abgedeckt, indem sie anhand eines äquivalenten Geometriemodells berechnet werden.

Die Feldberechnung wird gegenüber der Ersatzschaltbildmethode bei der Simulation der Spulenanordnungen bevorzugt, da als Eingangsdaten der Berechnung direkt die Geometrie- und Materialparameter eingesetzt werden können und somit die parasitären Elemente automatisch berücksichtigt werden. Für ausgewählte Konfigurationen sind zwar Formeln für die konzentrierten Elemente bekannt [21, 29], diese berücksichtigen jedoch nicht die parasitären Elemente, wie zum Beispiel Streukapazitäten und -induktivitäten. Für die Gegeninduktivität sind Ausdrücke lediglich für eine begrenzte Anzahl von Anordnungen angegeben.

Im Falle eines Betriebsmittels mit Eisenkern werden an das Isolationssystem besondere Anforderungen gestellt. Funktionsbedingt ist das Spulensystem entlang des Kerns angeordnet, wobei ein kleiner Abstand zwischen Spule und Kern erforderlich ist, um den Streufluss zu minimieren. Andererseits muss die Spannung, die sich entlang der Spule aufbaut, gegenüber dem elektrisch leitfähigen magnetischen Kreis isoliert werden. Besonders bei Hochspannungswicklungen treten in diesem Bereich hohe elektrische Feldstärken auf. Zusätzlich zu der hohen elektrischen Belastung bewirken konstruktive Details wie die hohe Windungszahl und der relativ dünne Drahtquerschnitt eine nicht vernachlässigbare kapazitive Belastung der Hochspannungswicklung, die zu einem nichtlinearen Potential-

abbau entlang der Spule führt [17]. Des Weiteren treten im Isolationssystem an den Grenzflächen des Mehrschichtdielektrikums, wie zum Beispiel bei der Spulenkörper-Gießharz Isolation eines Zündtransformators, Feldüberhöhungen auf.

Um Funktions- und Belastungsdaten in einem frühen Entwicklungsstadium zu erhalten, ist eine gekoppelte elektrische und magnetische Modellierung des Spulensystems erforderlich. Die transiente Feldberechnung liefert die zeitliche Entwicklung des elektromagnetischen Feldes und somit auch die Klemmen- und internen Belastungsgrößen der Anordnung. Eine Berücksichtigung der externen Beschaltung und der Umgebung ist ebenfalls möglich.

Eine Betrachtung der vorgestellten Detailfragen des Isolationssystems erfolgt in Kapitel 1.1 anhand einzelner abstrahierter Grundstrukturen. Anschließend werden diese Ansätze in Kapitel 1.2 zum gekoppelten Modell der Spulenordnung zusammengefasst. Kapitel 1.3 stellt ein geeignetes numerisches Berechnungsverfahren vor.

1.1 Implementierung funktionspezifischer Merkmale

Der Verlauf des elektrischen Feldes einer Windung in der Umgebung des Eisenkerns wird anhand des vereinfachten Modells eines gestreckten Leiters über einer leitfähigen Ebene qualitativ untersucht. Dabei wird berücksichtigt, dass die Isolation der Windung gegenüber dem Kern, bzw. des Leiters gegenüber der Ebene, aus einem Mehrschichtdielektrikum besteht. Die Feldverteilung in einer Ebene senkrecht zum Leiter sowie die nichtlineare Potentialverteilung entlang des Leiters werden betrachtet. Der Einfluss der magnetischen Induktion auf die Potentialverteilung wird berücksichtigt und die Schwingfähigkeit der Anordnung untersucht.

1.1.1 Einfluss der Relaxationszeit dielektrischer Werkstoffe auf die elektrische Potentialverteilung eines Mehrschichtdielektrikums

Generell sind die elektrische Feldverteilung und der elektrische Stromfluss eng miteinander verknüpft. Um das elektrische Feld zu bestimmen, ist es daher ausreichend, den elektrischen Stromfluss der untersuchten Anordnung zu betrachten. Dieser setzt sich in einem beliebigen Medium aus der Leitungsstromdichte

$$\vec{J}_L = \sigma \vec{E} \quad (1.1)$$

und der Verschiebungsstromdichte

$$\vec{J}_V = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.2)$$

zusammen, wobei σ die Konduktivität und ε die Permittivität bezeichnen. Für jeden Punkt des betrachteten Raumes gilt die Kontinuitätsgleichung [52]

$$\operatorname{div}(\vec{J}_{tot}) = \operatorname{div}\left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = 0. \quad (1.3)$$

Dabei ist die totale Stromdichte \vec{J}_{tot} die Summe aus Leitungs- und Verschiebungsstromdichte. Die Kontinuitätsgleichung, auch Ladungserhaltungsgesetz genannt, besagt, dass elektrische Ladungen nicht erzeugt oder vernichtet werden können. Somit werden Ionisierungs- und Rekombinationsprozesse von dieser Betrachtung nicht berücksichtigt.

Die totale Stromdichte beschreibt den Stromfluss durch die Anordnung eindeutig und hierdurch auch die Wechselwirkung mit der äußeren Beschaltung und der Umgebung. Für die resultierende Stromstärke ist der geschlossene Kreis ausschlaggebend, so dass innere und äußere Belastungsgrößen gleichermaßen ins Gewicht fallen. In den meisten Fällen ist es hinreichend, die externe Beschaltung als Ersatzspannungs- oder -stromquelle zu modellieren. Schnittstellengrößen des Modells sind dabei Strom und Spannung an den Anschlussklemmen.

Bei zeitlich unveränderlichen Betriebsparametern strebt die Anordnung einen stationären Zustand an, in dem die Verschiebungsströme abgeklungen sind. Das elektrische Feld wird ausschließlich vom Leitungsstrom bestimmt und als Strömungsfeld bezeichnet [38]. Eine Änderung der Klemmengrößen bewirkt erneute Ausgleichsvorgänge innerhalb der Anordnung. Die Überlagerung von Leitungs- und Verschiebungsstrom während dieser Vorgänge wird im Folgenden anhand einer homogenen Anordnung unter Vernachlässigung der frequenzabhängigen Polarisationserscheinungen untersucht [36].

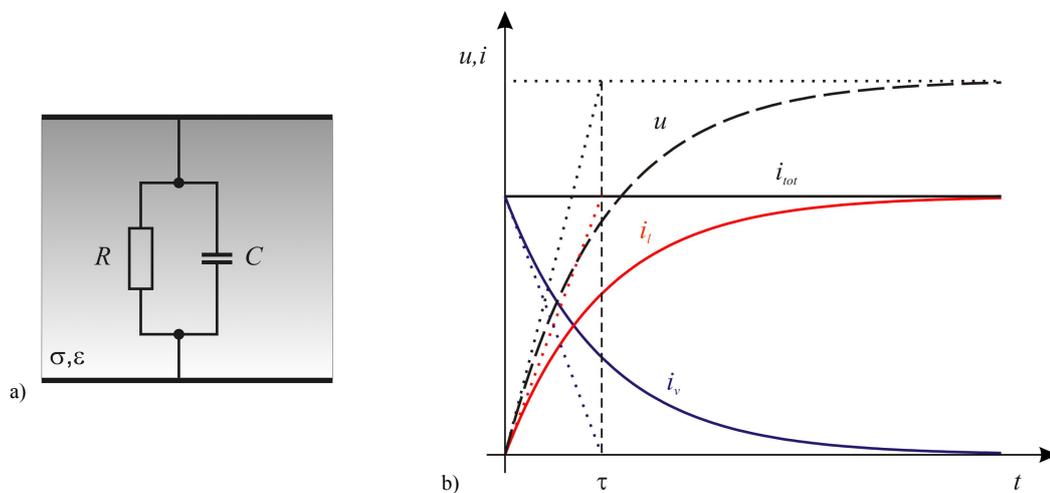


Bild 1.2: Zeitliches Verhalten eines Einschichtdielektrikums bei Belastung mit einem Stromsprung

In Bild 1.2 a) ist die stationäre elektrische Feldverteilung eines Plattenkondensators mit Einschichtdielektrikum dargestellt. Die eingezeichneten konzentrierten Elemente dienen zur Veranschaulichung des Leitungs- und des Verschiebungsstromflusses. Der eingesetzte Werkstoff wird durch seine Konduktivität σ und Permittivität ε beschrieben. Aufgrund des kapazitiven Charakters der Anordnung kann sich die Spannung an den Klemmen nicht sprunghaft ändern. Demzufolge bewirkt eine Zustandsänderung einen Stromsprung, begrenzt ausschließlich von der äußeren Beschaltung. Mit anwachsender Spannung an den Klemmen der Anordnung baut sich der Einfluss der Anordnung auf den Stromverlauf auf.

In erster Näherung wird für die Belastung der Anordnung ein idealer Stromsprung angenommen. So gilt für jeden Punkt des Mediums eine konstante totale Stromdichte

$$\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \text{konst.} \quad (1.4)$$

Die Bedingung (1.4) stellt eine triviale Lösung für Gleichung (1.3) dar.

Für den Verlauf der elektrischen Feldstärke \vec{E} ergibt sich nach (1.4) ein exponentieller Anstieg mit der Zeitkonstante

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad (1.5)$$

die als Relaxationszeit des Mediums bezeichnet wird [38]. Diesem funktionellen Zusammenhang folgen auch die Klemmenspannung sowie der Leitungs- und der Verschiebungsstrom (Bild 1.2 b). Die Klemmenspannung ergibt sich aus der Integration der elektrischen Feldstärke auf einem beliebigen Pfad zwischen den beiden Anschlussklemmen der Anordnung:

$$u = \int \vec{E} d\vec{l}. \quad (1.6)$$

Der Leitungsstrom

$$i_l = \iint \sigma \vec{E} d\vec{A} \quad (1.7)$$

und der Verschiebungsstrom

$$i_v = \iint \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{A} \quad (1.8)$$

werden durch Integration der Stromdichte über den Querschnitt der Anordnung bestimmt. Aufgrund der angenommenen Homogenität kann eine beliebige Integrationsfläche gewählt werden, die die Anordnung so in zwei Teile trennt, dass jeder Bereich je eine Anschlussklemme einschließt.

Während unmittelbar nach der Zustandsänderung der Verschiebungsstrom dominant ist, erfolgt der elektrische Stromfluss im stationären Zustand ausschließlich über den Leitungsmechanismus. Der Übergang von Verschiebung zu Leitung ist materialabhängig und wird von der Relaxationszeit beschrieben.

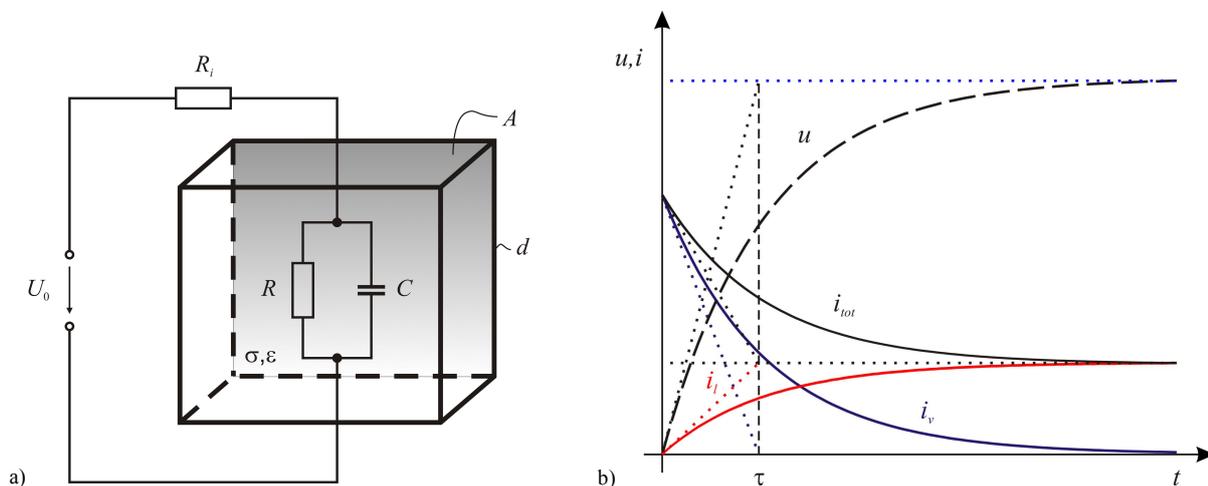


Bild 1.3: Zeitliches Verhalten eines Einschichtdielektrikums bei Belastung mit einem Spannungssprung

Wird der Einfluss der externen Beschaltung gemäß Bild 1.3 a) mit berücksichtigt, so gilt für die Klemmengrößen der Anordnung

$$U_0 = R_i i + u. \quad (1.9)$$

Die Voraussetzung eines homogenen Mediums bedingt ein homogenes elektrisches Feld mit einer normalen Ausbreitungsrichtung gegenüber den Anschlussflächen. Unter diesen Umständen kann die Integralform der Klemmengrößen vereinfacht werden und es ergibt sich für die Klemmenspannung

$$u = \int \vec{E} d\vec{l} = E_n d, \quad (1.10)$$

beziehungsweise für den Klemmenstrom

$$i = \iint \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{A} = \left(\sigma E_n + \varepsilon \frac{\partial E_n}{\partial t} \right) A. \quad (1.11)$$

Zusammengefasst gilt die Differentialgleichung der elektrischen Feldstärke:

$$U_0 = (R_i \sigma A + d) E_n + R_i \varepsilon A \frac{\partial E_n}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Die Lösung dieser Gleichung entspricht ebenfalls einem exponentiellen Verhalten, die Zeitkonstante wird jedoch nicht nur von der Relaxationszeit des eingesetzten Materials bestimmt, sondern auch von den Geometrieparametern und der äußeren Beschaltung:

$$E_n = \frac{U_0}{R_i \sigma A + d} \left(1 - e^{-\frac{R_i \sigma A + d}{R_i \varepsilon A} t} \right). \quad (1.13)$$

Die zeitlichen Verläufe der Klemmengrößen folgen ebenfalls einem exponentiellen Verlauf (Bild 1.3 b). Die stationären Endwerte von Klemmenspannung und -strom werden von der Leitfähigkeit des eingesetzten Materials, den geometrischen Abmessungen und dem Innenwiderstand der Quelle bestimmt. Der Anfangswert des Verschiebungsstromes ist der Kurzschlussstrom der verwendeten Energiequelle.

Im Falle eines Mehrschichtdielektrikums treten neben den beschriebenen Aufladevorgängen zusätzlich langsamere innere Ausgleichsvorgänge auf. Aufgrund der niedrigen Leitfähigkeit des Dielektrikums und des verhältnismäßig kleinen inneren Widerstands der speisenden Energiequelle, unterscheiden sich die Zeitkonstanten dieser beiden Vorgänge um mehrere Größenordnungen. Somit können diese Vorgänge entkoppelt betrachtet werden und zwischen den Kurz- und Langzeitverhalten der Anordnung unterschieden werden.

Das Kurzzeitverhalten entspricht dem Aufladen der Kapazität der Anordnung und folgt dem in Bild 1.3 b) beschriebenen Verlauf. Unter Vernachlässigung der Leitfähigkeit des Dielektrikums gilt für die Zeitkonstante des Aufladevorganges

$$\tau_k = \frac{R_i \varepsilon A}{d}. \quad (1.14)$$

Die Kapazitäten der einzelnen Schichten werden mit gleicher Ladungsmenge geladen und bestimmen somit die Potentialverteilung auf den Grenzflächen unmittelbar nach dem Beenden des Aufladevorganges. Im stationären Zustand wird die Potentialverteilung der Grenzflächen ausschließlich von den Leitfähigkeiten der einzelnen Schichten bestimmt. Diese beiden Potentialverteilungen stimmen überein, wenn die Relaxationszeiten der einzelnen Schichten gleich sind.

Das Langzeitverhalten beschreibt die Ladungsverschiebungen innerhalb des Mehrschichtdielektrikums, die zum Erreichen des stationären Zustandes führen. Für jede Grenzfläche

gilt die Bedingung, dass die Normalkomponente der totalen Stromdichte auf beiden Seiten gleich ist:

$$\sigma_1 E_{n1} + \varepsilon_1 \frac{\partial E_{n1}}{\partial t} = \sigma_2 E_{n2} + \varepsilon_2 \frac{\partial E_{n2}}{\partial t}, \quad (1.15)$$

mit der Randbedingung

$$U_0 = E_{n1} d_1 + E_{n2} d_2. \quad (1.16)$$

Die Zeitkonstante des Langzeitverhaltens hängt somit von den Material- und Geometrie- parametern der Anordnung ab:

$$\tau_l = \frac{\varepsilon_1 d_2 + \varepsilon_2 d_1}{\sigma_1 d_2 + \sigma_2 d_1}. \quad (1.17)$$

Der Verlauf des elektrischen Feldes eines gestreckten Leiters über einer leitenden Fläche wird anhand des im Bild 1.4 a) skizzierten Schnittbildes untersucht. Für das Isolationssystem wird ein Mehrschichtdielektrikum mit der Grenzschicht auf einer Äquipotentialfläche angenommen. Der zeitliche Verlauf des Potentials der Grenzschicht ist in Bild 1.4 b) in Abhängigkeit des Verhältnisses der zwei Relaxationszeiten dargestellt. Im Falle unterschiedlicher Relaxationszeiten tritt im trägeren Medium eine Feldüberhöhung gegenüber dem stationären Zustand auf. Diese Feldüberhöhung ist bei der Wahl der eingesetzten Materialien hinsichtlich der erforderlichen Isolationsfestigkeit zu berücksichtigen.

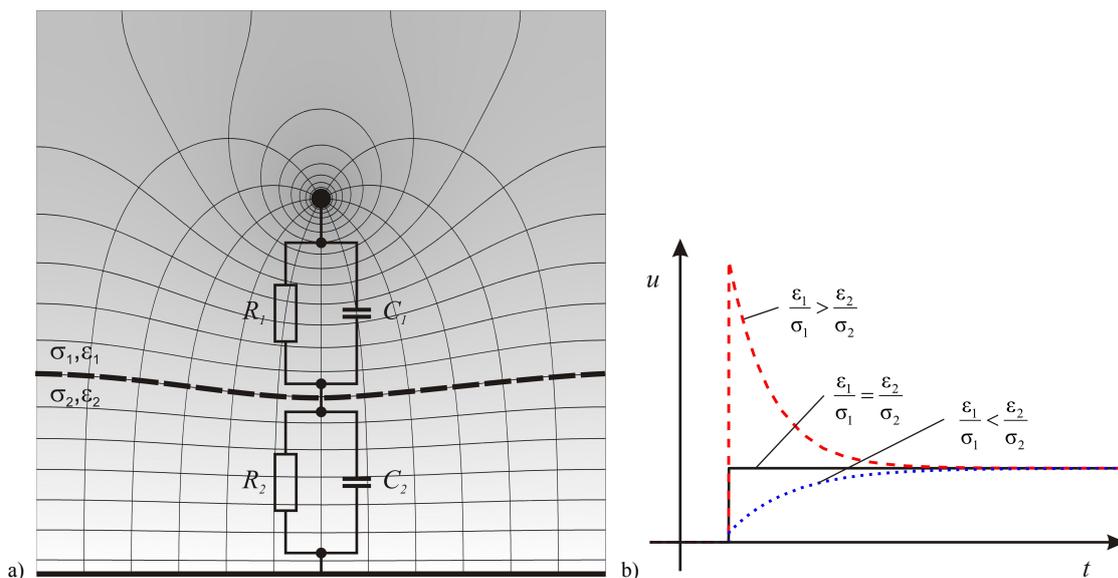


Bild 1.4: Verlauf des elektrischen Feldes an der Grenzschicht zweier Materialien

Im stationären Zustand stellt sich eine konstante Leitungsstromdichte im Isolationssystem ein. An der Grenzfläche wird eine elektrische Ladung gespeichert, deren Flächendichte von der Normalkomponente der Leitungsstromdichte J_n und den Relaxationszeiten der eingesetzten Materialien abhängt:

$$\frac{\partial Q}{\partial A} = J_n \left(\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \right). \quad (1.18)$$

1.1.2 Auswirkung der Querbelastung auf den räumlichen Potentialaufbau einer gestreckten Leiterstruktur

Räumlich gestreckte Leiterstrukturen weisen begleitend zu den vorgestellten Querbelastungen einen nichtlinearen Potentialaufbau in Längsrichtung auf. Im Falle von Hochspannungswicklungen ist dieser Effekt besonders ausgeprägt. Der relativ dünne Drahtdurchmesser und die hohe Windungszahl verursachen einen verhältnismäßig hohen Längswiderstandsbelag. Aufgrund der hohen Querfeldbelastung ist die Amplitude des Verschiebungsstroms vergleichbar mit der des Längsstromes. Dadurch wird eine Verzögerung der Leitungsvorgänge entlang des Leiters hervorgerufen. Eine qualitative Untersuchung dieses Effektes erfolgt anhand der Anordnung aus Bild 1.5. Ein elektrischer Leiter, charakterisiert durch seinen Widerstandsbelag, ist über einer leitfähigen Ebene positioniert und mit dieser kapazitiv gekoppelt. Die dielektrischen Verluste haben einen vernachlässigbaren Einfluss auf die Potentialverteilung in Längsrichtung der Leitung.

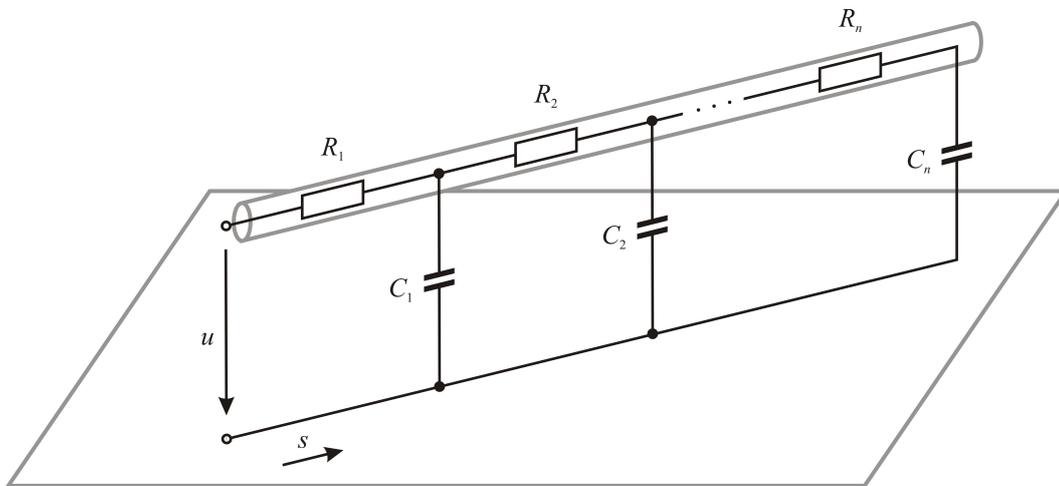


Bild 1.5: Modell zur Untersuchung des nichtlinearen Potentialaufbaues

Die beschriebene Anordnung wird mit einem Spannungssprung belastet. Die Stromlinien schließen sich über der verteilten Kapazität des Isolationssystems und führen zu einer progressiven Aufladung der Leitung. Die zeitliche Entwicklung des Leitungspotentials ist in Bild 1.6 a) dargestellt. Der untersuchte Fall weist eine erhöhte Längsfeldbelastung am einspeisenden Ende auf (Bild 1.6 b), wodurch die Windungsisolierung der Spule gefährdet werden kann.

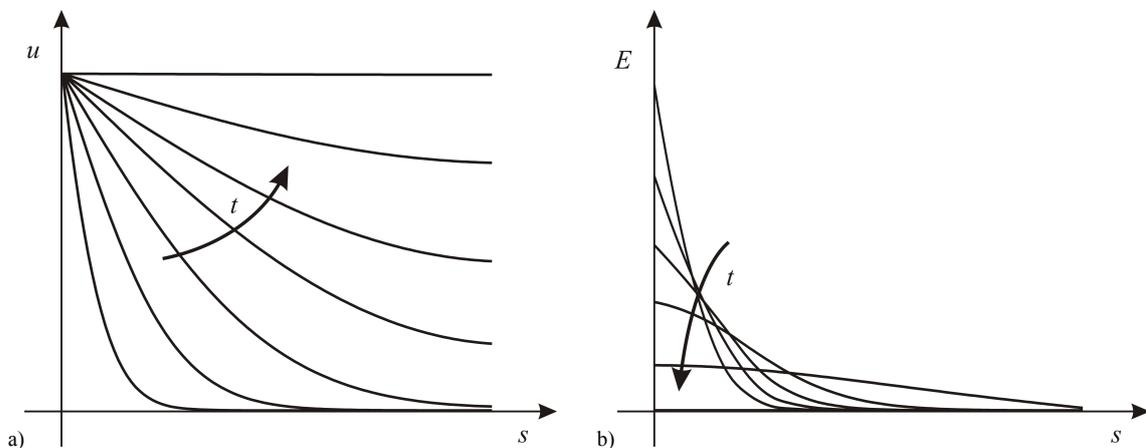


Bild 1.6: Zeitlicher Verlauf a) des nichtlinearen Potentialaufbaues und b) der elektrischen Längsfeldbelastung

1.1.3 Betrachtung der nichtlinearen Potentialverteilung unter Berücksichtigung der Induktion

Simultan mit dem Stromfluss wird im Umfeld des Strompfades ein Magnetfeld aufgebaut. Eine Änderung dieses Magnetfeldes führt aufgrund der Induktion zum Aufbau eines elektrischen Rotationsfeldes und somit zu einer Rückkopplung auf den erzeugenden Stromfluss [48]. Dieser Einfluss wird anhand eines geschlossenen Strompfades durch eine Leiterschleife untersucht (Bild 1.7 a).

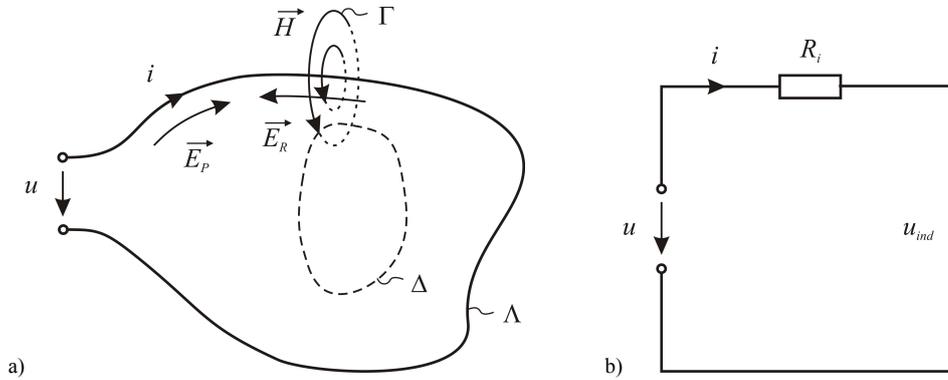


Bild 1.7: Superposition des elektrischen Potential- und Rotationsfeldes:
a) Feldgrößen; b) Ersatzschaltbild.

An den Klemmen der Anordnung wird eine beliebige Potentialdifferenz u angenommen, die dem Linienintegral des Potentialfeldes entspricht:

$$u = \int_{\Lambda} \vec{E}_p d\vec{l} . \quad (1.19)$$

Die Auswertung dieses Integrals ist unabhängig vom gewählten Integrationsweg. Der Kurvenverlauf Λ wird zur Betrachtung der Überlagerung mit dem Rotationsfeld gewählt.

In der betrachteten Leiterschleife stellt sich der Strom i ein, wodurch ein Magnetfeld erzeugt wird. Die Beziehung zwischen erzeugendem Strom und magnetischer Feldstärke wird von dem Durchflutungsgesetz beschrieben:

$$i = \iint_{\Gamma} \vec{J} d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{l} . \quad (1.20)$$

Im Falle transients Vorgänge führt ein veränderlicher Stromfluss zu einem veränderlichen Magnetfeld, das seinerseits ein elektrisches Rotationsfeld aufbaut. Gemäß dem Induktionsgesetz gilt

$$\iint_{\Delta} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} = - \oint_{\Delta} \vec{E}_R d\vec{l} \neq 0 . \quad (1.21)$$

Das Integral des Rotationsfeldes ist abhängig vom gewählten Integrationsweg und entlang eines geschlossenen Pfades, in Bild 1.7 a) exemplarisch durch die Schleife Δ dargestellt, verschieden von Null.

Das den Stromfluss bestimmende Strömungsfeld setzt sich aus der Überlagerung des Potential- und des Rotationsfeldes zusammen:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma (\vec{E}_p - \vec{E}_R) . \quad (1.22)$$

Hiermit gilt für den ohmschen Spannungsabfall entlang des Strompfades

$$u_R = \int_{\Lambda} \vec{E} d\vec{l} = Ri. \quad (1.23)$$

Der Anteil des Rotationsfeldes wird zur induzierten Spannung zusammengefasst:

$$u_{ind} = \int_{\Lambda} \vec{E}_R d\vec{l}. \quad (1.24)$$

Somit ergibt sich für den betrachteten Stromkreis die Gleichung

$$u = Ri + u_{ind}, \quad (1.25)$$

die dem Ersatzschaltbild aus Bild 1.7 b) entspricht. Die induzierte Spannung stellt somit einen Korrekturfaktor zwischen dem ohmschen Spannungsabfall und der Potentialdifferenz entlang eines vorgegebenen Integrationsweges dar.

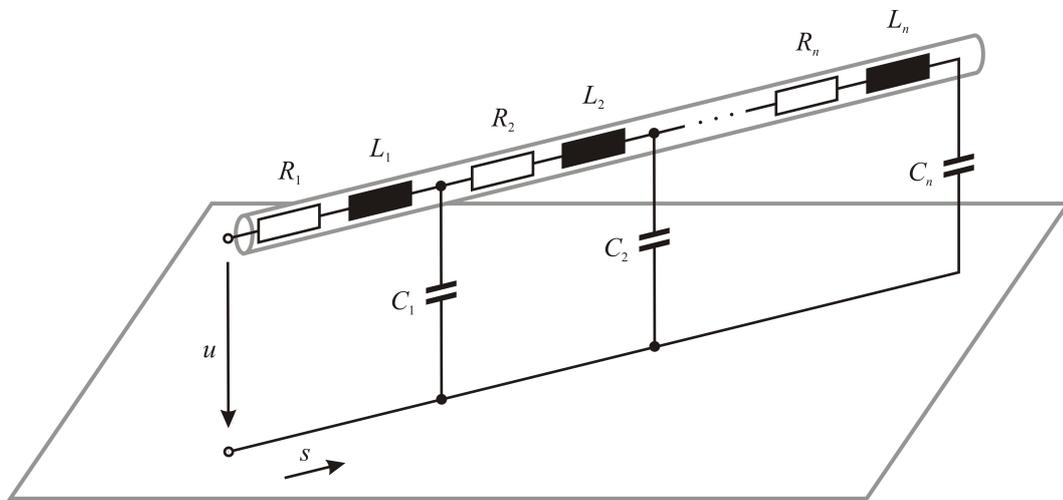


Bild 1.8: Berücksichtigung der Längsinduktivität des gestreckten Leiters

Jeder Strompfad, sei er von einem Leitungs- oder Verschiebungsstrom beschrieben, verursacht ein Magnetfeld und bei einer Änderung der Stromstärke auch ein elektrisches Rotationsfeld. Im Falle einer Spule ist das magnetische Feld, und somit auch das elektrische Rotationsfeld, verursacht durch den leitungsgebundenen Stromfluss, dominant (siehe Kapitel 1.2). Für einen gestreckten Leiter ist im vorherigen Abschnitt gezeigt worden, dass der Verschiebungsstrom während der Ausgleichsvorgänge gleiche Größenordnungen wie der Leitungsstrom erreichen kann. Durch die Anordnung zu einer Spule überlagern sich die Wirkungen der Leitungsströme der einzelnen Windungen und überblenden das magnetische Feld des Verschiebungsstromes. Entsprechend wird bei der vorgestellten Modellierung nur die Längsinduktivität berücksichtigt. Die Querkapazität wird über Längswiderstand und -induktivität aufgeladen (Bild 1.8).

Die Längsinduktivität bewirkt ein Aufladen der Querkapazität über den stationären Endwert hinaus, so dass sich ein Schwingverhalten ausbildet. Entlang der Leitung entstehen Wanderwellen, wodurch weitere lokale Felderhöhungen der Längs- und Querfeldstärke verursacht werden (Bild 1.9).

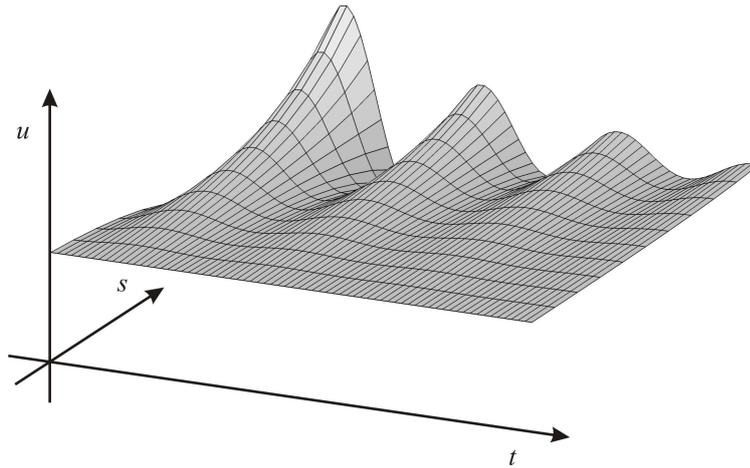


Bild 1.9: Zeitlich und örtlich aufgelöste Potentialverteilung entlang der Leitung

Im Gegensatz zum Potentialfeld übt das Rotationsfeld eine Rückwirkung auf den erzeugenden Stromfluss aus, so dass für die Berechnung ein geschlossener Lösungsansatz erforderlich ist. Damit ist eine gekoppelte Betrachtung des Rotations- und Potentialfeldes im transienten Fall zwingend erforderlich.

1.2 Aufstellen des Differentialgleichungssystems für die gekoppelte magnetische und elektrische Feldberechnung

Ausgehend von den Maxwell'schen Feldgleichungen [1] wird die Differentialgleichung des elektromagnetischen Feldes hergeleitet. Als unabhängige Größen werden das elektrische Potential und das magnetische Vektorpotential eingeführt. Die allgemeine Feldgleichung gilt als Ausgangspunkt für die Gleichungen des magnetischen und elektrischen Feldes axialsymmetrischer Anordnungen. Symmetrieabweichungen im Bereich der Wicklungen werden vom zweidimensionalen Modell gesondert berücksichtigt. Randbedingungen ergänzen die erhaltenen Gleichungen zu einem bestimmten Differentialgleichungssystem.

1.2.1 Allgemeine Form der elektromagnetischen Feldgleichung

Die dritte Maxwell'sche Feldgleichung beschreibt die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0. \quad (1.26)$$

Somit existiert ein Vektorfeld \vec{A}_m , magnetisches Vektorpotential genannt, mit der Eigenschaft [50]

$$\operatorname{rot} \vec{A}_m = \vec{B}. \quad (1.27)$$

Entsprechend der zweiten Maxwell'schen Feldgleichung ist das elektrische Feld \vec{E} mit der zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte gekoppelt:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.28)$$

Das elektrische Feld kann im Allgemeinen nur einen Potential- und einen Rotationsanteil besitzen, wobei durch (1.28) nur der Rotationsanteil definiert wird. Aus (1.27) und (1.28) folgt

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \right) = 0. \quad (1.29)$$

Der Summe $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t}$ liegt somit ein Potentialfeld zugrunde. Hiermit existiert ein Skalarfeld V , elektrisches Potential genannt, das folgendermaßen definiert wird:

$$\text{grad} V = -\vec{E} - \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t}. \quad (1.30)$$

Der Rotationsanteil des elektrischen Feldes und die zeitlichen Ableitung des magnetischen Vektorpotentials sind betragsmäßig gleich und heben sich gegenseitig auf. Jedoch sind die Potentialanteile beider Felder unbestimmt, weil durch (1.27) lediglich der Rotationsanteil des magnetischen Vektorpotentials definiert wird. Um die eingeführten Feldgrößen eindeutig zu bestimmen, wird eine zusätzliche Bedingung für den Potentialanteil des magnetischen Vektorpotentials benötigt. Anwendungsspezifisch wird hierfür entweder die Coulomb- oder die Lorentz-Konvention benutzt.

Die Verknüpfung zwischen magnetischem Feld und elektrischem Stromfluss wird von der ersten Maxwellschen Feldgleichung beschrieben:

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J}_{\text{tot}} = \sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_0. \quad (1.31)$$

Hierbei setzt sich die totale Stromdichte aus der Leitungs-, der Verschiebungs- und einer eingepprägten Stromdichte \vec{J}_0 zusammen. Aus (1.31) ergibt sich unter Berücksichtigung von (1.27) und der Materialgleichung magnetischer Werkstoffe

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.32)$$

der Ausdruck des magnetischen Vektorpotentials als Funktion der elektrischen Größen:

$$\text{rot} \left(\text{rot} \vec{A}_m \right) = \mu \sigma \vec{E} + \mu \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \vec{J}_0. \quad (1.33)$$

Durch Auflösen der doppelten Rotation und Berücksichtigung von (1.30) ergibt sich

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\text{div} \vec{A}_m \right) - \Delta \vec{A}_m &= \\ &= -\mu \sigma \left(\text{grad} V + \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \right) - \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\text{grad} V + \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \right) + \mu \vec{J}_0. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Daraus folgt die Differentialgleichung des elektromagnetischen Feldes mit der eingepprägten Stromdichte als Quellgröße:

$$\Delta \vec{A}_m - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_m}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = \text{grad} \left(\text{div} \vec{A}_m + \mu \sigma V + \mu \varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} \right) - \mu \vec{J}_0. \quad (1.35)$$

Die erhaltene Differentialgleichung ist jedoch aufgrund des unbekanntem Potentialanteils des magnetischen Vektorpotentials unbestimmt.

Die Coulomb-Konvention definiert das magnetische Vektorpotential als ein reines Rotationsfeld [35]:

$$\operatorname{div} \vec{A}_m = 0. \quad (1.36)$$

Somit stimmt der Potentialanteil des elektrischen Feldes mit dem elektrostatischen Feld überein.

Die Lorentz-Konvention wählt den Potentialanteil des magnetischen Vektorpotentials so, dass der Klammerausdruck aus (1.35) zu Null wird [3]:

$$\operatorname{div} \vec{A}_m = -\mu\sigma V - \mu\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t}. \quad (1.37)$$

Somit vereinfacht sich (1.35) zu

$$\Delta \vec{A}_m - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_m}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = -\mu \vec{J}_0. \quad (1.38)$$

Aus der zeitlichen Ableitung der Lorentz-Bedingung

$$\operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} = -\mu\sigma \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \quad (1.39)$$

unter Berücksichtigung der Divergenz der Definition des elektrischen Potentials

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} V) = -\operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} \quad (1.40)$$

und der vierten Maxwellschen Feldgleichung

$$\varepsilon \operatorname{div} \vec{E} = \rho_0 \quad (1.41)$$

ergibt sich eine zu (1.38) äquivalente Gleichung für das elektrische Potential:

$$\Delta V - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\rho_0}{\varepsilon}. \quad (1.42)$$

Die Gleichungen (1.38) und (1.42) sind die Wellengleichungen des elektromagnetischen Feldes. Hierbei sind die eingeprägte Stromdichte \vec{J}_0 und die Raumladungsdichte ρ_0 die Quellen der elektromagnetischen Wellen.

Die Coulomb- und die Lorentz-Konvention sind zwei äquivalente Beschreibungen der elektromagnetischen Feldgleichung. Die Ergebnisse beider Methoden können ineinander umgerechnet werden. Aufgrund mathematischer Vorteile wird anwendungsspezifisch eine der Methoden bevorzugt.

1.2.2 Magnetische und elektrische Feldgleichungen axialsymmetrischer Anordnungen

Kennzeichnend für den Aufbau zylindrischer Spulenordnungen ist das in Bild 1.10 dargestellte Strukturbild. Die zylinderförmige Wicklung ist konzentrisch zur Symmetrieachse

angeordnet und von einem Isolationssystem umgeben, das auch die mechanische Stabilität der Anordnung sicherstellt. Der magnetische Kreis, in offener oder geschlossener Bauweise ausgeführt, füllt den inneren Bereich der Wicklung aus. Die Anzahl und die Anordnung der Wicklungen zueinander sind anwendungsspezifisch, wobei Transformatoren meist zwei konzentrische Wicklungen besitzen. Bild 1.10 verdeutlichen die charakteristischen Merkmale der dargestellten Struktur.

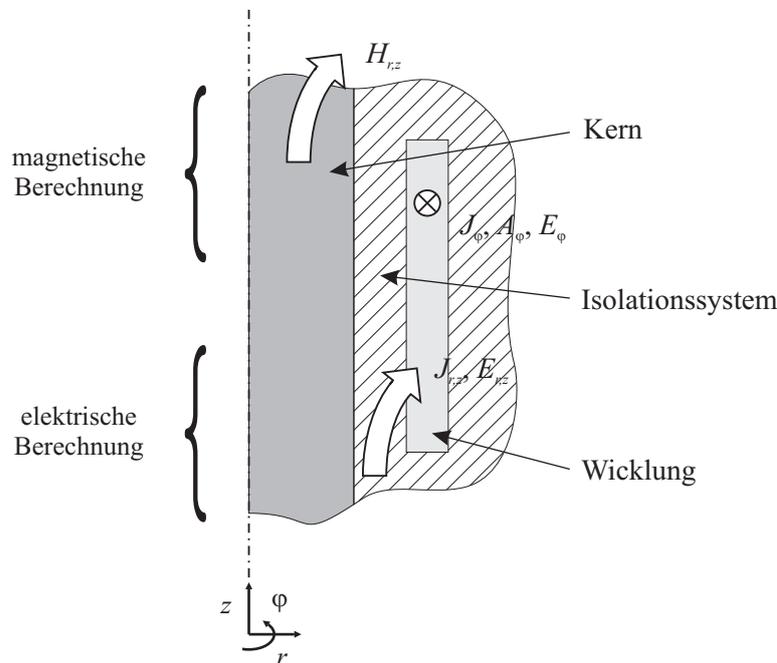


Bild 1.10: Schematischer Aufbau axialsymmetrischer Spulenanordnungen und deren relevante Feldgrößen

Eine naturgetreue Nachbildung konstruktiver Details, wie zum Beispiel der einzelnen Windungen oder des geblechten Kerns, setzt eine dreidimensionale Berechnung voraus und wird wegen des hohen Rechenaufwandes nicht durchgeführt. Zur Abhilfe wird aufgrund der Symmetrie der Anordnung ein zweidimensionales Modell des Spulensystems aufgestellt. Hierbei werden die Symmetrieabweichungen von der Geometrie nicht erfasst, jedoch über angepasste Materialeigenschaften im Modell implementiert. Die Symmetriebedingung vereinfacht das Differentialgleichungssystem erheblich, indem alle Ableitungen in azimuthaler Richtung entfallen.

Grundsätzlich verlaufen die magnetischen Feldlinien senkrecht zum verursachenden Strompfad und liegen aufgrund des Vorschubs der Wicklung leicht geneigt zur r,z -Ebene. Im Falle von Hochspannungswicklungen, bedingt durch den relativ dünnen Drahtdurchmesser bei gleichzeitiger hoher Windungsanzahl, ist der Vorschub so gering, dass die azimuthale Komponente des magnetischen Feldes vernachlässigt werden kann:

$$H_{\phi} = 0. \quad (1.43)$$

Für das magnetische Vektorpotential gilt anhand der Definition (1.27) unter Berücksichtigung der Bedingungen (1.32) und (1.43) und durch das Wegfallen der Ableitungen in azimuthaler Richtung

$$\text{rot } \vec{A}_m = -\frac{\partial A_{\phi}}{\partial z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_{\phi})}{\partial r} \vec{e}_z = \frac{1}{\mu} (H_r \vec{e}_r + H_z \vec{e}_z). \quad (1.44)$$

Damit ist das magnetische Feld nur von der azimuthalen Komponente des Vektorpotentials abhängig. Aufgrund der Distributivität der Rotation bezüglich der Addition gilt für die beiden anderen Komponenten des Vektorpotentials

$$\text{rot}(A_r \vec{e}_r + A_z \vec{e}_z) = 0. \quad (1.45)$$

Somit sind die radiale und die axiale Komponente des Vektorpotentials wirbelfrei. Für die eindeutige Definition des magnetischen Vektorpotentials wird die Coulomb-Konvention (1.36) benutzt, wodurch die Quellenfreiheit des Vektorpotentials festgelegt wird. Aus (1.45) und (1.36) folgt, dass das magnetische Vektorpotential in radialer und axialer Richtung konstant sein muss. Für die Modellierung wird die triviale Lösung gewählt:

$$\vec{A}_m = A_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \text{und} \quad A_{r,z} = 0. \quad (1.46)$$

Damit ergibt sich das magnetische Vektorpotential als ein reines Rotationsfeld. Gleichzeitig führt (1.43) dazu, dass nur die azimuthale Komponente des Stromes das magnetische Feld beeinflusst:

$$\text{rot} \vec{H} = \left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\varphi = J_\varphi \vec{e}_\varphi. \quad (1.47)$$

Die azimuthale Komponente der Stromdichte ist gemäß (1.31) und (1.30) folgendermaßen definiert:

$$J_\varphi = -\sigma \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi \partial t} - \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial t^2} + J_{0\varphi}. \quad (1.48)$$

Die Beiträge des Potentialfeldes V entfallen, da aufgrund der Axialsymmetrie die azimuthalen Ableitungen entfallen. Der dritte Term, bestimmt durch die zeitliche Ableitung des magnetischen Vektorpotentials, entspricht der induzierten Stromdichte. In massiven, leitenden Strukturen steht dieser Term für die induzierten Wirbelströme und deren Verteilung. Für Frequenzen, bei denen die Skineindringtiefe kleiner als die geometrischen Abmessungen ist, haben Wirbelströme eine Schirmwirkung, indem sie das magnetische Feld im Inneren des Werkstoffes kompensieren. Dadurch hat die Wirbelstromverteilung auf das Verhalten des magnetischen Kreises im Frequenzbereich einen beträchtlichen Einfluss, worauf bei der Implementierung der angepassten Materialeigenschaften eines geblechten Kerns näher eingegangen wird. Für den Bereich der Wicklung stellt die induzierte Stromdichte eine Rückkopplung der Änderung der eingepprägten Stromdichte dar. Der vierte Term der Gleichung, abhängig von der zweiten zeitlichen Ableitung des Vektorpotentials, entspricht den von der Spule abgelösten Wellen. Aufgrund des betrachteten Frequenzbereiches und des kompakten Aufbaus der Anordnung werden die Wellenvorgänge bei der Modellierung nicht betrachtet. Die eingepprägte Stromdichte $J_{0\varphi}$ tritt nur im Bereich der Wicklung auf und bildet den Stromfluss nach, der von der an den Anschlussklemmen der Spule anliegenden Potentialdifferenz verursacht wird. Die eingepprägte Stromdichte ergibt sich aus der Berechnung des elektrischen Feldes, die die Rückkopplung der induzierten Stromdichte berücksichtigt. Somit vereinfacht sich der Ausdruck der azimuthalen Komponente der Stromdichte zu

$$J_\varphi = -\sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} + J_{0\varphi}. \quad (1.49)$$

Die Bedingungen (1.46) und (1.49) ergeben zusammen mit (1.35) die Differentialgleichung des magnetischen Vektorpotentials für axialsymmetrische Anordnungen

$$\Delta \vec{A}_m = \left(\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} \right) \vec{e}_\varphi = \left(\mu \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} - \mu J_{0\varphi} \right) \vec{e}_\varphi. \quad (1.50)$$

Dies ist die grundlegende Gleichung für die Berechnung der magnetischen Feldverteilung zylindrischer Spulenanordnungen. Eingangsgröße der Berechnung ist die eingeprägte Stromdichte im Bereich der Wicklung. Aufgrund der Rückkopplung zwischen der induzierten und der eingepprägten Stromdichte bildet (1.50) zusammen mit der Differentialgleichung des elektrischen Feldes ein Gleichungssystem, zu dessen Lösung eine magnetisch-elektrisch gekoppelte Feldberechnung benötigt wird. Die Kopplung beruht auf der Verknüpfung der einzelnen Feldkomponenten durch die geometrischen Verhältnisse der Spule.

Das vorgestellte Modell berücksichtigt aufgrund der vorausgesetzten Axialsymmetrie ausschließlich die radiale und die axiale Komponente des elektrischen Potentialfeldes. Die azimutale Komponente wird durch die Vernachlässigung aller azimutalen Ableitungen ausgeschlossen. In einer realen Anordnung tritt eine solche Komponente nur innerhalb der Wicklung auf, so dass für diesen Bereich eine Anpassung der Differentialgleichungen an die realen Bedingungen erforderlich ist. Die Besonderheiten bei der Modellierung der Spulen werden im nächsten Kapitel behandelt.

Die Berechnung des elektrischen Feldes basiert auf der Kontinuitätsgleichung, die aus (1.31) durch Divergenzbildung folgt:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \left(\sigma \vec{E} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \vec{J}_0 \right) = 0. \quad (1.51)$$

Die elektrische Feldstärke wird als Funktion des elektrischen Potentials und des magnetischen Vektorpotentials gemäß (1.30) ausgedrückt:

$$\operatorname{div} \left(-\sigma \operatorname{grad} V - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} V) - \sigma \frac{\partial \vec{A}_m}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{A}_m}{\partial t^2} + \vec{J}_0 \right) = 0. \quad (1.52)$$

Unter Berücksichtigung der azimutalen Ausrichtung des magnetischen Vektorpotentials und der Homogenität der Anordnung in dieser Richtung folgt aus der Coulomb-Konvention, dass der Beitrag des magnetischen Vektorpotentials zur Kontinuitätsgleichung verschwindet. Die eingeprägte Stromdichte \vec{J}_0 tritt nur im Bereich der Wicklung auf und dient zur Nachbildung der Kopplung mit dem magnetischen Feld, die im nächsten Kapitel näher beschrieben wird. Das elektrische Feld ist in seiner radialen und axialen Ausbreitung ausschließlich vom elektrischen Potential bestimmt:

$$\operatorname{div} \left(-\sigma \operatorname{grad} V - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} V) + \vec{J}_0 \right) = 0. \quad (1.53)$$

Aus dem magnetischen Vektorpotential ergibt sich ausschließlich die azimutale Komponente des elektrischen Feldes als Folge der elektromagnetischen Induktion. Somit werden bis auf den Bereich der Wicklung das elektrische und das magnetische Feld entkoppelt betrachtet. Das elektrische Potential und das magnetische Vektorpotential gelten als Zustandsgrößen der Modellierung.

1.2.3 Modellierung der Symmetrieabweichungen zylindrischer Drahtwicklungen

Innerhalb des Bereiches der Drahtwicklung ist die Leiterführung ausschlaggebend für den Verlauf des elektrischen Feldes. Im Inneren des Leiters verursacht der Stromfluss ein parallel zum Leiter gerichtetes elektrisches Strömungsfeld. Diesem ist das elektrische Rotationsfeld, verursacht durch magnetische Induktion, überlagert. Das resultierende Feld bewirkt an den Klemmen der Spule eine messbare Potentialdifferenz. Hiermit liegt an der Isolation benachbarter Windungen die Windungsspannung an, wodurch ein elektrisches Verschiebungsfeld in Vorzugsrichtung der Spule aufgebaut wird. Die Modellierung der Spule setzt die Berücksichtigung der gegenseitigen Beeinflussung dieser Effekte voraus.

Das hier vorgestellte Spulenmodell ist in der realitätstreuen Nachbildung der Stromdichtenverteilung begründet. Der Windungsstrom zählt zu den Zustandsgrößen des Modells und realisiert die Kopplung der magnetischen und elektrischen Feldberechnung. Die Stromdichteverteilung einer Zylinderspule ist in Bild 1.11 schematisch dargestellt.

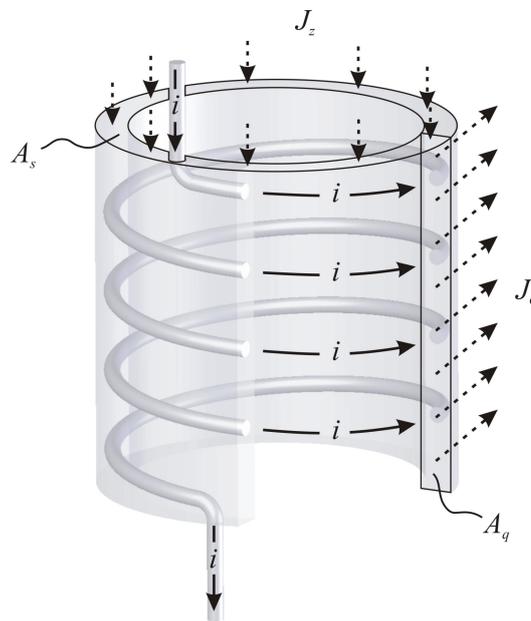


Bild 1.11: Stromdichteverteilung einer Zylinderspule (Prinzipbild)

Unterschieden wird zwischen der azimuthalen und der axialen Stromdichte, J_φ bzw. J_z . Die azimuthale Stromdichte ergibt sich aus dem Stromfluss durch den Querschnitt der Wicklung A_q unter Beachtung der Verkettung der einzelnen Windungen:

$$J_\varphi = \frac{ni}{A_q}. \quad (1.54)$$

Die azimuthale Stromdichte wird aus dem resultierenden Spulenstrom berechnet und berücksichtigt die Selbstinduktion der Spule. Diese fließt als Eingangsgröße in die magnetische Berechnung ein. Für (1.50) ergibt sich im Bereich der Wicklung

$$\Delta \vec{A}_m = -\mu J_\varphi \vec{e}_\varphi = -\mu \frac{ni}{A_q} \vec{e}_\varphi. \quad (1.55)$$

Die Vorgabe einer konstanten Gesamtstromdichte für den Wicklungsbereich ist erforderlich, um gleiche Stromstärken in allen Windungen nachzubilden. Die Berücksichtigung der Selbstinduktion der Spule im Rahmen der magnetischen Feldberechnung würde, auf-

grund der Modellierung der Spule durch einen zusammenhängenden Bereich, zu unterschiedlichen induzierten Strömen in den einzelnen Windungen durch den Skineneffekt führen. Die Selbstinduktion der Spule fließt in die elektrische Feldberechnung als eingepreiste Windungsspannung ein.

Die axiale Stromdichte wird vom Leitungsstrom zwischen den Anschlussklemmen der Spule verursacht und ist Bestandteil der elektrischen Berechnung:

$$J_z = \frac{i}{A_s}. \quad (1.56)$$

Der Wicklungsvorschub verursacht zwischen der azimuthalen und der axialen Stromdichtekomponente eine gegenseitige Abhängigkeit:

$$J_z = \frac{A_q}{n A_s} J_\varphi = k J_\varphi. \quad (1.57)$$

Die Kopplung zwischen der magnetischen und der elektrischen Berechnung erfolgt anhand der induzierten Stromdichte gemäß (1.57).

Bild 1.12 verdeutlicht anhand eines Netzwerkmodells die Implementierung der elektrischen Berechnung. Das Ersatzschaltbild entspricht der Anordnung aus Bild 1.10. Der magnetische Kern befindet sich auf schwebendem Potential und ist kapazitiv an die Wicklung angekoppelt. Elektrisch gesehen stellt der Kern aufgrund seiner hohen Leitfähigkeit einen Kurzschluss dar. Die einzelnen Windungen werden durch ihren Drahtwiderstand, die gegenseitige Koppelkapazität und die induzierte Spannung modelliert. Das daraus resultierende Kettensersatzschaltbild gibt die nichtlineare kapazitive Querbelastung und die ortsabhängige induzierte Spannung wieder.

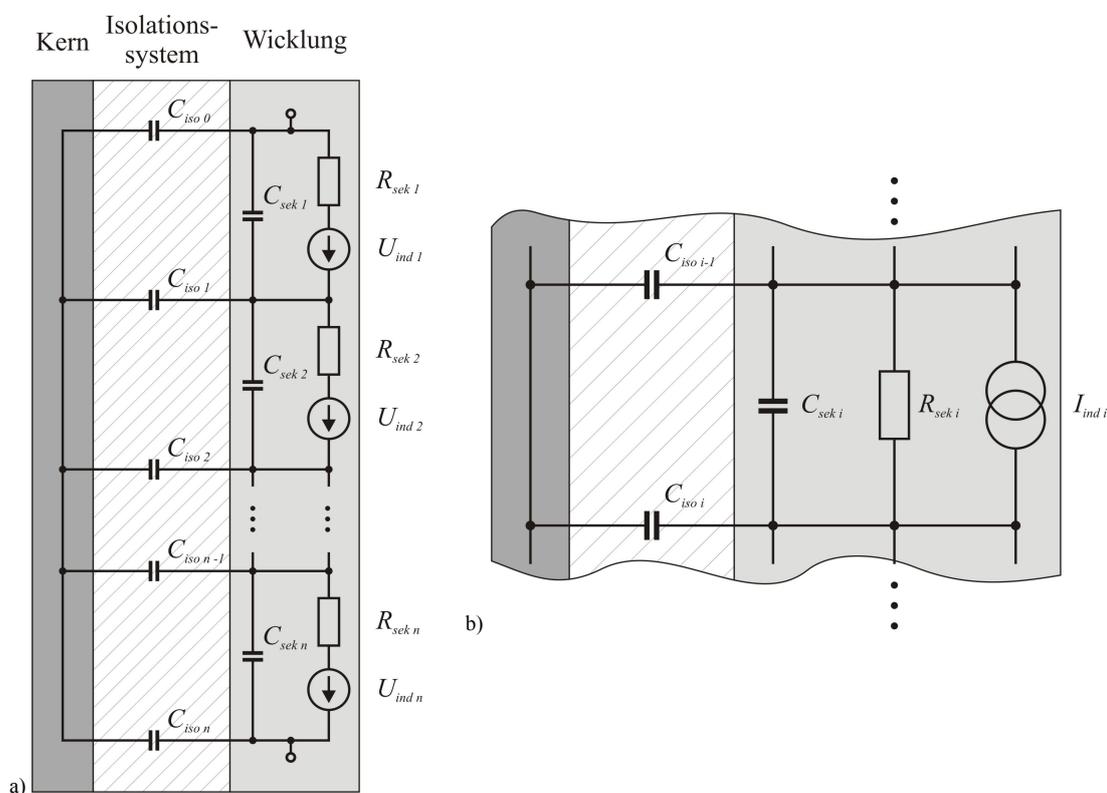


Bild 1.12: Modellierung der Induktion in einer Wicklung:
a) Methode der Ersatzspannungsquelle; b) Methode der Ersatzstromquelle

Zur Implementierung in der elektrischen Berechnung wird die Wicklungsspannung gemäß dem Mayer-Norton-Theorem [52] in eine Stromquelle umgewandelt (Bild 1.12 b). Die induzierte Stromstärke wird gemäß (1.57) in die r,z Ebene projiziert. Damit ergibt sich aus (1.53) die Gleichung des elektrischen Feldes für den Bereich der Wicklung:

$$\operatorname{div}\left(-\sigma \operatorname{grad} V - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{grad} V) + k \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \vec{e}_z\right) = 0. \quad (1.58)$$

Gleichungen (1.55) und (1.58) ermöglichen die Feldberechnung der Spule in Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung der Abweichungen von der Axialsymmetrie. Gleichzeitig bilden sie die Kopplung der magnetischen und elektrischen Berechnung.

1.2.4 Beeinflussung der Feldverteilung durch Grenzflächen

Das vorgestellte Modell benutzt eine Ersatzgeometrie gebildet aus einzelnen Bereichen. Für diese Bereiche wird Homogenität vorausgesetzt, so dass die vorgestellten Gleichungen der magnetischen und elektrischen Berechnung gültig sind. Für die Beschreibung der Vorgänge an den Grenzschichten werden zusätzliche Randbedingungen benötigt. Gleichzeitig werden die Randbedingungen verwendet um funktionswichtige Komponenten nachzubilden, die aufgrund ihrer Größe keinen Einfluss auf die Feldverteilung haben und sich somit nicht in der Ersatzgeometrie wieder finden [44]. Ein Beispiel dafür sind die Verbindungsleitungen, die die einzelnen Komponenten miteinander vernetzen, jedoch gegenüber dem verketteten magnetischen Feld der Spule eine untergeordnete Wirkung zeigen. Im elektrischen Feld zeigen sie aufgrund ihrer kleinen Oberfläche eine schwache kapazitive Kopplung zu den anderen Elementen auf und wirken sich daher nicht auf die Feldverteilung der Anordnung aus.

Für die magnetische Berechnung gilt die Kontinuitätsbedingung an allen inneren Grenzflächen. Die einzige Ausnahme stellt die Symmetrieachse dar, an der, bedingt durch die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, zusätzlich keine Querkomponente vorkommen kann. Für die äußeren Grenzflächen wird das Vektorpotential vorgegeben, da die magnetische Feldgleichung das Vektorpotential bis auf eine Konstante definiert. Bevorzugt wird das Vektorpotential auf der äußeren Grenzfläche zu Null gesetzt. Durch die Vorgabe des Vektorpotentials auf den gesamten äußeren Rand wird sichergestellt, dass keine magnetische Feldlinie diesen Rand schneidet. Um eine Feldverzerrung zu vermeiden, muss die Grenze des betrachteten Raumes weit genug von den stromführenden Komponenten oder entlang einer Feldlinie gewählt werden.

Die Kontinuitätsbedingung postuliert die Erhaltung der tangentialen Komponente der magnetischen Feldstärke an jeder Grenzfläche unter der Voraussetzung, dass kein Oberflächenstrombelag \vec{J}_s auftritt [50]. Für den dreidimensionalen Raum gilt in vektorieller Schreibweise

$$\vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s, \quad (1.59)$$

wobei \vec{n} die Normale zur Grenzfläche ist und die angrenzenden Bereiche mit 1 und 2 indiziert werden.

Für die Symmetrieachse gilt zusätzlich, dass die radiale Komponente der magnetischen Feldstärke und die Ableitung der axialen Komponente in radialer Richtung Null sein müssen:

$$H_r = 0 \text{ und } \frac{\partial H_z}{\partial r} = 0. \quad (1.60)$$

Diese Bedingungen zusammen mit (1.44) ergeben für die radiale und azimutale Ableitung des magnetischen Vektorpotentials an der Symmetrieachse

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{A_\varphi}{r} \right) = 0 \text{ und } \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.61)$$

Im Allgemeinen gilt bei der elektrischen Berechnung die Kontinuität des Stromflusses an allen inneren Grenzflächen. Dieses bedeutet, dass die Gesamtstromdichte auf beiden Seiten der Grenzfläche gleich ist. Werden Ladungen auf der Grenzfläche gespeichert, so verändern sich die Verschiebungs- und die Leitungsstromdichte, jedoch ohne die Gesamtstromdichte zu beeinflussen (siehe Kapitel 1.1.1). Abweichend von der Kontinuitätsbedingung kann der Wert des elektrischen Potentials oder die örtliche Ableitung des elektrischen Potentials an der Grenzfläche definiert werden.

Wird für eine innere Grenzfläche der Wert des elektrischen Potentials vorgegeben, so entspricht dies einer an der Grenzfläche angeschlossenen idealen Spannungsquelle. Die Gesamtstromdichte ist auf beiden Seiten der Grenzfläche nicht mehr gleich und die zufließende Stromdichte J_{ext} über die gesamte Grenzfläche errechnet sich zu

$$J_{ext} = \sigma_1 \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_1 - \sigma_2 \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_2, \quad (1.62)$$

wobei die angrenzenden Bereiche mit 1 und 2 indiziert werden. Die Stromrichtung wird auf die Richtung der Normalen zur Grenzfläche bezogen und ist somit von der Definition der Geometrieparameter abhängig.

Wird für eine innere Grenzfläche der Wert der zufließenden Stromdichte vorgegeben, so entspricht dies einer an der Grenzfläche angeschlossenen idealen Stromquelle. Die örtliche Ableitung des Vektorpotentials wird aus der zufließenden Stromdichte gemäß (1.62) berechnet. Die Potentialverteilung an der Grenzfläche gehört zu den Freiheitsgraden der Berechnung. Eine Verknüpfung beider Bedingungen ermöglicht die Nachbildung realer Quellen gemäß dem Thevenin-Helmholtz Theorem [38]. Eine reale Spannungsquelle kann nachgebildet werden indem das elektrische Potential der Grenzfläche als Funktion des zufließenden Stromes bestimmt wird. Für eine reale Stromquelle wird die zufließende Stromdichte als Funktion des elektrischen Potentials der Grenzfläche vorgegeben.

Für die äußeren Grenzen des Modells muss grundsätzlich der Wert des elektrischen Potentials oder dessen örtliche Ableitung definiert werden. Eine besondere Bedeutung hat die Bedingung

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0. \quad (1.63)$$

Hiermit wird jeder Stromfluss über die Grenzfläche unterbunden, wodurch die Oberfläche eines idealen Isolators modelliert wird. Die arithmetische Summe aller durch die Grenzflächen zufließenden Ströme ist aufgrund des Ladungserhaltungsgesetzes zu jedem Zeitpunkt Null. Die Wahl der Randbedingungen muss physikalisch sinnvoll sein und darf diese Bedingung nicht verletzen. Dadurch wird die Anzahl der Freiheitsgrade des Gleichungssystems beeinflusst, so dass unter- oder überbestimmte Konfigurationen entstehen können.

Zwei oder mehrere Grenzflächen können miteinander verknüpft werden, um eine leitfähige elektrische Verbindung zwischen diesen Grenzflächen nachzubilden. Hierfür muss sichergestellt werden, dass die arithmetische Summe aller zufließenden Ströme Null ist und alle Grenzflächen auf dem gleichen elektrischen Potential liegen. An einer einzigen Grenzfläche wird die zufließende Stromdichte definiert, während an den anderen Grenzflächen das resultierende elektrische Potential der ersten Grenzfläche vorgegeben wird. Der zufließende Strom der ersten Grenzfläche errechnet sich aus den resultierenden zufließenden Stromdichten der anderen Grenzflächen. Somit werden dem Gleichungssystem genau so viele neue Freiheitsgrade wie Bedingungen hinzugefügt.

1.3 Berechnung der magnetischen und elektrischen Feldverteilung mit der Methode der finiten Elemente

Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist ein Verfahren zur numerischen Lösung nichtlinearer Differentialgleichungssysteme in mehrdimensionalen Räumen. Gegenüber der Methode der finiten Differenzen und der Momentenmethode stellt die FEM einen robusten Lösungsansatz für die Betrachtung komplexer Geometrien unter Berücksichtigung inhomogener, nichtlinearer Materialeigenschaften dar [59]. Der Vorteil dieser Methode besteht darin, eine Approximation der Lösung als Kombination linearer Basisfunktionen zu definieren. Somit kann die Lösung nicht nur an den Gittereckpunkten ausgewertet werden, sondern auch entlang deren Verbindungsstrecken. Durch die Ableitbarkeit der Basisfunktionen wird sichergestellt, dass auch die örtliche Ableitung der Lösung für das gesamte Gitternetz definiert ist. Hiermit ist es möglich, das aufgestellte Differentialgleichungssystem durch ein lineares Gleichungssystem anzunähern. Die Güte der Ergebnisse hängt von der Wahl der Diskretisierung des betrachteten Raumes und der verwendeten Basisfunktionen ab.

Die folgenden Unterkapitel behandeln die mathematischen Grundlagen der FEM anhand einer Differentialgleichung zweiter Ordnung in kartesischen Koordinaten. Die Koeffizienten dieser Gleichung werden über Koeffizientenvergleich aus den hergeleiteten Differentialgleichungen des magnetischen und elektrischen Feldes bestimmt. Anhand der schwachen Form der Differentialgleichung wird eine Approximation der Lösung entlang des Gitternetzes unter Berücksichtigung der zeitlichen Abhängigkeit definiert. Die Diskretisierung mit Basisfunktionen reduziert das Problem auf ein lineares Gleichungssystem mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden, das iterativ oder direkt gelöst werden kann.

1.3.1 Formulierung der Feldgleichungen in zweidimensionalen kartesischen Koordinaten

Als Ausgangspunkt der Berechnung mit der FEM wird eine Differentialgleichung zweiter Ordnung betrachtet, die in jedem Punkt des untersuchten Gebiets erfüllt werden muss. Die allgemeine Form dieser Gleichung, unter Berücksichtigung der theoretisch möglichen Einflussgrößen, lautet

$$\begin{aligned}
 - \operatorname{div}_{xy} \left(d_b \operatorname{grad}_{xy} \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{d}_a \frac{\partial u}{\partial t} + b \operatorname{grad}_{xy} u + \bar{\alpha} u - \bar{\gamma} \right) + \\
 + \bar{d}_\beta \cdot \operatorname{grad}_{xy} \frac{\partial u}{\partial t} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \bar{\beta} \cdot \operatorname{grad}_{xy} u + a u = g ,
 \end{aligned} \tag{1.64}$$

wobei die unabhängige Variable $u = u(x, y, t)$ ein zeitlich veränderliches, zweidimensionales Skalarfeld ist. Das vorgestellte Verfahren ist auch im dreidimensionalen Raum an-

wendbar, jedoch ist diese Erweiterung für die Berechnung coaxialer Spulensysteme nicht erforderlich. Der Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit liegt auf den Besonderheiten der axialsymmetrischen zweidimensionalen Feldberechnung.

Üblicherweise benutzen Softwareimplementierungen der FEM kartesische Koordinaten, so dass eine entsprechende Transformation der Differentialgleichung vorausgesetzt wird. Der Index xy wird in (1.64) benutzt um hervorzuheben, dass für die Operatoren Divergenz und Gradient die Formulierung in kartesischen Koordinaten vorausgesetzt wird. Für die Differentialgleichungen (1.50) und (1.53) muss somit eine Koordinatensubstitution durchgeführt werden, um die Rotationssymmetrie zu berücksichtigen:

$$r = x \text{ und } z = y. \quad (1.65)$$

Die Differentialgleichung der magnetischen Berechnung (1.50) ist auf der Symmetrieachse, bedingt durch die Division durch den Radius, nicht auswertbar. Abhilfe verschafft die Variablensubstitution

$$A_\varphi = rA'_\varphi. \quad (1.66)$$

Gleichung (1.50) wird somit zu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(x \frac{\partial A'_\varphi}{\partial x} + 2A'_\varphi \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(x \frac{\partial A'_\varphi}{\partial y} \right) = \mu\sigma x \frac{\partial A'_\varphi}{\partial t} - \mu J_{0\varphi}, \quad (1.67)$$

mit der unabhängigen Variablen $u = A'_\varphi$.

Ausgedrückt mit den Operatoren div_{xy} und $grad_{xy}$ ergibt sich für (1.67)

$$-div_{xy} \left(x grad_{xy} \frac{\partial A'_\varphi}{\partial t} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} A'_\varphi \right) + \mu\sigma x \frac{\partial A'_\varphi}{\partial t} = \mu J_{0\varphi}. \quad (1.68)$$

Die Koeffizienten dieser Differentialgleichung sind ortsabhängig, aber dadurch, dass die FEM die Gleichung nur an diskreten, im vorhinein eindeutig definierten Punkten auswertet, ist es ausreichend für das verwendete Gitternetz, einmalig die Koeffizienten zu bestimmen. So wie in Kapitel 1.2.3 näher erläutert, muss bei der Implementierung von (1.68) zwischen den Bereich der Wicklung und der restlichen Geometrie unterschieden werden. Für den Bereich der Wicklung entfällt die zeitliche Ableitung des magnetischen Vektorpotentials und die Stromdichte entspricht der aus der elektrischen Berechnung resultierenden Stromdichte. Außerhalb der Wicklung gilt $J_{0\varphi} = 0$. Durch Koeffizientenvergleich zwischen (1.64) und (1.68) ergeben sich die Koeffizienten der Differentialgleichung der magnetischen Berechnung in kartesischen Koordinaten:

$$d_b = x \text{ und } \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.69)$$

Für den Bereich der Wicklung gilt für den Quellterm unter Berücksichtigung von (1.57)

$$g = \mu \frac{J_z}{k} \text{ und } d_a = 0. \quad (1.70)$$

Außerhalb der Wicklung gilt

$$d_a = \mu \sigma x \text{ und } g = 0. \quad (1.71)$$

Die restlichen Koeffizienten aus (1.64) werden für die Implementierung der magnetischen Berechnung nicht benötigt und werden zu Null gesetzt.

Die Differentialgleichung der elektrischen Berechnung ergibt sich aus (1.53) durch die Anwendung der Substitution (1.65):

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left(-\sigma x \frac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon x \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial t} + x J_{0x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\sigma \frac{\partial V}{\partial y} - \varepsilon \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial t} + J_{0y} \right) = 0, \quad (1.72)$$

mit der unabhängigen Variablen $u = V$. Durch Multiplikation mit x und Anwendung der Operatoren div_{xy} und $grad_{xy}$ folgt aus (1.72)

$$div_{xy} \left(-\sigma x grad_{xy} V - \varepsilon x \frac{\partial}{\partial t} (grad_{xy} V) + x \vec{J}_0 \right) = 0. \quad (1.73)$$

Der Quellterm \vec{J}_0 bezeichnet die magnetische Induktion und ist nur im Bereich der Wicklung definiert (siehe Kapitel 1.2.3). Durch Koeffizientenvergleich zwischen (1.64) und (1.73) ergibt sich für die Koeffizienten der Differentialgleichung der elektrischen Berechnung in kartesischen Koordinaten

$$d_b = \varepsilon x \text{ und } b = \sigma x. \quad (1.74)$$

Für den Bereich der Wicklung ergibt sich zusätzlich aus (1.58) für den Quellterm

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma k x^2 \frac{\partial A'_\varphi}{\partial t} \end{pmatrix}. \quad (1.75)$$

Die übrigen Koeffizienten aus (1.64) sind für die elektrische Berechnung nicht von Bedeutung und demzufolge in diesem Fall gleich Null.

Die vorgestellten Differentialgleichungen beschreiben keine eindeutige Lösung für die magnetische und elektrische Feldverteilung. Um eine partikuläre Lösung finden zu können, sind zusätzliche Gleichungen, die den Feldverlauf an den Rändern des betrachteten Bereiches beschreiben, erforderlich. Dabei geben Dirichlet (essentielle) Randbedingungen den Wert der Lösung vor:

$$u = u_0, \quad (1.76)$$

während Neumann (natürliche) Randbedingungen den Wert der normalen Komponente der Flussdichte vorschreiben:

$$\vec{n} \cdot \left(d_b grad_{xy} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{d}_a \frac{\partial u}{\partial t} + b grad_{xy} u + \vec{\alpha} u - \vec{\gamma} \right) = h. \quad (1.77)$$

Für jeden Grenzflächenabschnitt müssen entweder essentielle oder natürliche Randbedingungen definiert werden. Die gleichzeitige Forderung von essentiellen und natürlichen Randbedingungen auf demselben Grenzflächenabschnitt führt zu einem überbestimmten Gleichungssystem. Des Weiteren wird der betrachtete Bereich mit Ω und sein Rand mit $\partial\Omega$ bezeichnet. Grenzflächen, die beidseitig von Ω umschlossen sind und für die Randbedingungen definiert sind, gehören zu $\partial\Omega$ dazu. Dieses trifft zum Beispiel für alle An-

schlussklemmen im Falle der Berechnung des elektrischen Potentials zu (siehe Kapitel 1.2.4).

Die erforderlichen Randbedingungen für die Berechnung coaxialer Spulenordnung sind in Kapitel 1.2.4 erläutert. Einen besonderen Fall stellen die Symmetriebedingungen des magnetischen Feldes (1.61) dar. Unter der Berücksichtigung der Variablensubstitution (1.66) wird (1.61) zu

$$r \frac{\partial^2 A'_\varphi}{\partial r^2} + 3 \frac{\partial A'_\varphi}{\partial r} = 0 \text{ bzw. } r \frac{\partial A'_\varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.78)$$

Diese Bedingung gilt ausschließlich für die Symmetrieachse, so dass $r=0$ erfüllt ist und die Richtung der r -Koordinate der Normalen entspricht. Somit ist (1.78) eine natürliche Randbedingung für das transformierte magnetische Vektorpotential A'_φ :

$$\frac{\partial A'_\varphi}{\partial n} = 0. \quad (1.79)$$

1.3.2 Schwache Form des Differentialgleichungssystems

Gleichung (1.64) wird als starke Form der Differentialgleichung bezeichnet. Dieses Kapitel stellt die Umformungsschritte vor, die für eine numerische Auswertung der Gleichung notwendig sind. Durch Anwendung der partiellen Ableitung wird die Ordnung der Differentialgleichung reduziert [58], womit die resultierende Formulierung als schwache Form bezeichnet wird.

Mit der Definition der Funktionen $\vec{\phi}(u)$ und $f(u)$,

$$\vec{\phi}(u) = d_b \text{ grad}_{xy} \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{d}_\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + b \text{ grad}_{xy} u + \vec{\alpha} u \text{ und} \quad (1.80a)$$

$$f(u) = \vec{d}_\beta \cdot \text{grad}_{xy} \frac{\partial u}{\partial t} + d_a \frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\beta} \cdot \text{grad}_{xy} u + a u, \quad (1.80b)$$

vereinfacht sich die Schreibweise der Gleichung (1.64) zu

$$- \text{div}_{xy} (\vec{\phi}(u) - \vec{\gamma}) + f(u) = g. \quad (1.81)$$

Eine wichtige Eigenschaft der Funktionen $\vec{\phi}(u)$ und $f(u)$ ist die Linearität. Für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\vec{\phi}(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 \vec{\phi}(u_1) + c_2 \vec{\phi}(u_2) \text{ und} \quad (1.82a)$$

$$f(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 f(u_1) + c_2 f(u_2). \quad (1.82b)$$

Diese Bedingung ist eine notwendige Voraussetzung für die folgende Darstellung der Lösung als eine Linearkombination von Basisfunktionen.

Durch die Multiplikation beider Seiten der Gleichung (1.81) mit einer beliebigen, stetig differenzierbaren Funktion v folgt

$$- v \text{ div}_{xy} (\vec{\phi}(u) - \vec{\gamma}) + v f(u) = v g. \quad (1.83)$$

Die Funktionen v werden Testfunktionen bezeichnet und ermöglichen die Umformung der Differentialgleichung nach den Regeln der partiellen Differentiation [59].

Durch Anwendung der Produktregel der Differentialrechnung

$$\operatorname{div}(v \bar{\Psi}) = \operatorname{grad} v \cdot \bar{\Psi} + v \operatorname{div} \bar{\Psi}, \quad (1.84)$$

resultiert für $\bar{\Psi} = \bar{\phi}(u) - \bar{\gamma}$ aus Gleichung (1.83)

$$\operatorname{grad}_{xy} v \cdot (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma}) - \operatorname{div}_{xy} (v (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma})) + v f(u) = v g. \quad (1.85)$$

Durch Integration auf Ω und anschließende Anwendung des Integralsatzes von Gauß für den zweidimensionalen Raum

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div}_{xy} \bar{\Psi} d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \bar{n} \cdot \bar{\Psi} ds, \quad (1.86)$$

folgt

$$\iint_{\Omega} \operatorname{grad}_{xy} v \cdot (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma}) d\Omega - \oint_{\partial\Omega} v \bar{n} \cdot (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma}) ds + \iint_{\Omega} v f(u) d\Omega = \iint_{\Omega} v g d\Omega. \quad (1.87)$$

Für die Auswertung des Umlaufintegrals auf $\partial\Omega$ wird die normale Komponente der Flussdichte $\bar{n} \cdot (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma})$ benötigt. Sie ist für Bereiche $\partial\Omega_1$, auf denen Neumann Randbedingungen (1.77) definiert sind, bekannt. Für die Randbereiche $\partial\Omega_2$ auf denen Dirichlet Bedingungen definiert sind, wird für die normale Komponente der Flussdichte eine zusätzliche Funktion $\lambda(x, y, t)$ eingeführt:

$$\iint_{\Omega} \operatorname{grad}_{xy} v \cdot (\bar{\phi}(u) - \bar{\gamma}) d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} v h ds - \int_{\partial\Omega_2} v \lambda ds + \iint_{\Omega} v f(u) d\Omega = \iint_{\Omega} v g d\Omega. \quad (1.88)$$

Die Funktion λ ist nur auf den Rändern definiert, auf denen essentielle Randbedingungen existieren, und wird als Lagrange Multiplikator bezeichnet [9]. Für die Berechnung gilt λ als zusätzliche unabhängige Variable. Für die numerische Auswertung verändert sich durch die Einführung des Lagrange Multiplikators die Anzahl der Unbekannten nicht, denn in jedem Punkt, in dem λ gesucht wird, ist u durch die Dirichlet Bedingung gegeben.

Die Gleichung (1.88) wird als schwache Form der Differentialgleichung (1.64) bezeichnet. Die schwache und die starke Form sind gleichwertig und lassen sich ineinander überführen. Die schwache Form bietet den Vorteil, dass die Ordnung der Differentialgleichung um eins reduziert wird und somit numerisch auswertbar ist. Jedoch muss hierfür die erste Ableitung der Testfunktionen v bekannt sein.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden folgende linearen Operatoren eingeführt:

$$\langle v, u \rangle = \iint_{\Omega} v u d\Omega \quad \text{und} \quad (1.89a)$$

$$|v, h| = \int_{\partial\Omega} v h ds. \quad (1.89b)$$

Hiermit kann die schwache Form (1.12) geschrieben werden als

$$\langle \operatorname{grad} v, \bar{\phi}(u) \rangle + \langle v, f(u) \rangle - |v, \lambda| = \langle \operatorname{grad} v, \bar{\gamma} \rangle + \langle v, g \rangle + |v, h|. \quad (1.90)$$

Somit ist u eine Lösung der Differentialgleichung (1.90), wenn u diese Gleichung in jedem beliebigen Punkt des untersuchten Bereiches Ω für beliebige Testfunktionen v erfüllt.

1.3.3 Diskretisierung des Feldraumes und numerische Approximation der Lösung

Die Lösung der Differentialgleichung (1.90) erfolgt nach dem Galerkin-Ansatz [40]. Hiernach wird u mit einer Linearkombination linearer Basisfunktionen approximiert und somit der Bereich Ω mit n Stützstellen diskretisiert. Für die Abbildung der Testfunktionen können die gleichen Basisfunktionen verwendet werden, wodurch die Differentialgleichung in ein System von n Gleichungen mit n Unbekannten umgewandelt wird. Die Anzahl der Freiheitsgrade wird auf einen endlichen Wert reduziert, wodurch ermöglicht wird, die Lösung in endlicher Zeit zu bestimmen.

Die Anzahl der Basisfunktionen entspricht der Anzahl der Stützstellen n . Jede Basisfunktion wird einer Stützstelle zugewiesen und so definiert, dass sie nur an der jeweiligen Stützstelle den Wert 1 annimmt und an den restlichen Stützstellen Null ist:

$$e_i(j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad (1.91)$$

wobei der Index i die Basisfunktionen und der Index j die Stützstellen zählt. Hiermit sind alle Basisfunktionen orthogonal zueinander.

Die Approximation der Lösung u ergibt sich zu

$$u = \sum_{i=1}^n u_i e_i, \quad (1.92)$$

wobei u_i dem Wert der Lösung u an der Stützstelle i entspricht.

Um eine gleichmäßige Verteilung der Stützstellen über den Bereich Ω sicherzustellen, wird dieser durch ein Gitter bestehend aus geometrischen Grundformen unterteilt (Bild 1.13 a). Als Gitterelemente werden bevorzugt Dreiecke verwendet, weil sie eine einfache Handhabung beliebiger Konturen der untersuchten Bereiche ermöglichen.

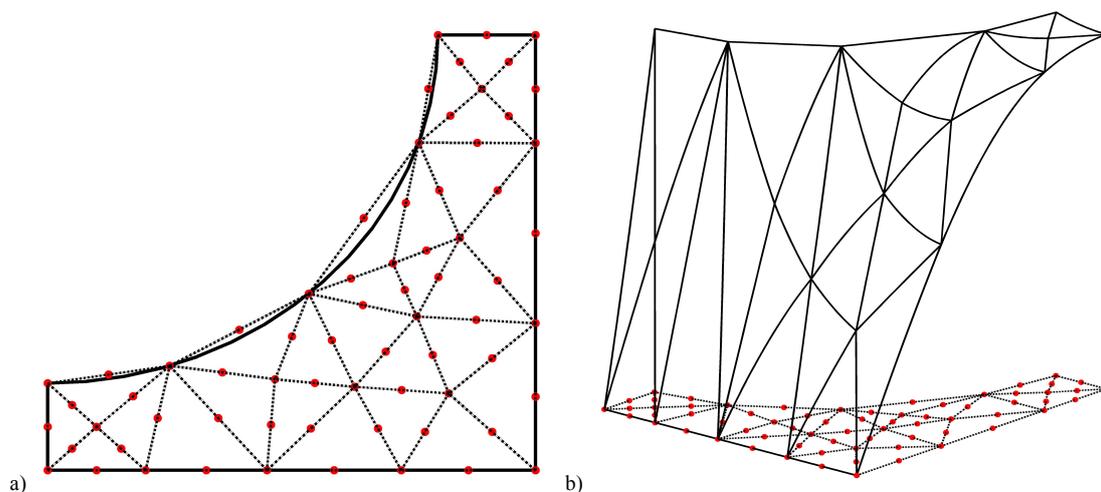


Bild 1.13: Diskretisierung des untersuchten Bereiches mit finiten Elementen:
a) Gitter mit Stützstellen; b) Interpolation der approximierten Lösung

Die FEM benötigt neben der Approximation der Lösung in den Gittereckpunkten auch die Approximation der Lösung entlang der Gitterkanten, um die örtlichen partiellen Ableitungen

gen der Lösung zu approximieren. Als Basisfunktion eignen sich beliebige eindimensionale Funktion, die (1.91) entsprechen und jeweils eine Gitterkante als Träger haben. Am häufigsten sind polynomiale Funktionen zweiten Grades verbreitet. Lineare Funktionen weisen einen geringen Implementierungsaufwand auf, benötigen jedoch eine feine Diskretisierung des Bereiches, um starken Variationen des Feldverlaufes folgen zu können. Funktionen höheren Grades weisen ein schwingungsfähiges Verhalten auf, das zur numerischen Instabilität der Lösung führen kann. Für polynomiale Funktionen gilt, dass die Anzahl der Freiheitsgrade um eins größer ist als der Grad der Funktion. Somit wird im Falle parabolischer Funktionen neben den beiden Enden einer Gitterkante eine zusätzliche Stützstelle benötigt, bevorzugt der Mittelpunkt der Gitterkanten (Bild 1.13 a). Für die Approximation der Lösung ergibt sich ein Drahtmodell gemäß Bild 1.13 b), mit den Gitterkanten als Träger. Werte für beliebige Punkte des untersuchten Bereiches Ω werden durch Interpolation bestimmt.

Die Basisfunktionen eignen sich um jeden beliebigen funktionellen Zusammenhang auf dem Bereich Ω zu approximieren. Somit sind sie auch für die Abbildung der Testfunktionen anwendbar:

$$v = \sum_{i=1}^n v_i e_i. \quad (1.93)$$

Unter Berücksichtigung von (1.93) wird (1.90) zu

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n v_i \langle \text{grad } e_i, \vec{\phi}(u) \rangle + \sum_{i=1}^n v_i \langle e_i, f(u) \rangle - \sum_{i=1}^n v_i |e_i, \lambda| = \\ = \sum_{i=1}^n v_i \langle \text{grad } e_i, \vec{\gamma} \rangle + \sum_{i=1}^n v_i \langle e_i, g \rangle + \sum_{i=1}^n v_i |e_i, h|. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Gemäß dem Galerkin-Ansatz muss Gleichung (1.94) für beliebige v_i erfüllt werden. Dieses ist nur dann der Fall, wenn

$$\langle \text{grad } e_i, \vec{\phi}(u) \rangle + \langle e_i, f(u) \rangle - |e_i, \lambda| = \langle \text{grad } e_i, \vec{\gamma} \rangle + \langle e_i, g \rangle + |e_i, h|. \quad (1.95)$$

Die Gleichung (1.95) kann numerisch gelöst werden. Hierfür wird jedoch der Gradient der Basisfunktionen benötigt. Im Folgenden wird dieser anhand der Definition der Basisfunktionen und der Position der Gittereckpunkte bestimmt.

Für eine Gitterkante mit den Stützstellen o , p und q ergibt sich die Approximation der Lösung zu

$$u(s) = u_o e_o(s) + u_p e_p(s) + u_q e_q(s). \quad (1.96)$$

Die allgemeine Form der Approximation der Lösung entlang der Gitterkante mit parabolischen Funktionen ist

$$u(s) = a s^2 + b s + c, \quad (1.97)$$

wobei $s \in (-1, 1)$ die normierte Weglänge bezeichnet, gemessen vom Mittelpunkt der Strecke aus. Die Definitionsformeln der Basisfunktionen errechnen sich aus den Lösungswerten an den drei Stützstellen: den Enden und dem Mittelpunkt der betrachteten Gitterkante. Diese Werte stellen die Freiheitsgrade der Berechnung dar:

$$u_o = u(s)|_{s=-1}, \quad u_p = u(s)|_{s=0}, \quad u_q = u(s)|_{s=1}. \quad (1.98)$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingungen (1.98) wird (1.97) zu

$$u(s) = u_o \frac{1}{2} s(s-1) + u_p (1-s^2) + u_q \frac{1}{2} s(s+1). \quad (1.99)$$

Durch Koeffizientenvergleich werden die Basisfunktionen zugehörig zu den drei Stützstellen ermittelt:

$$e_o(s) = \frac{1}{2} s(s-1), \quad e_p(s) = (1-s^2), \quad e_q(s) = \frac{1}{2} s(s+1). \quad (1.100)$$

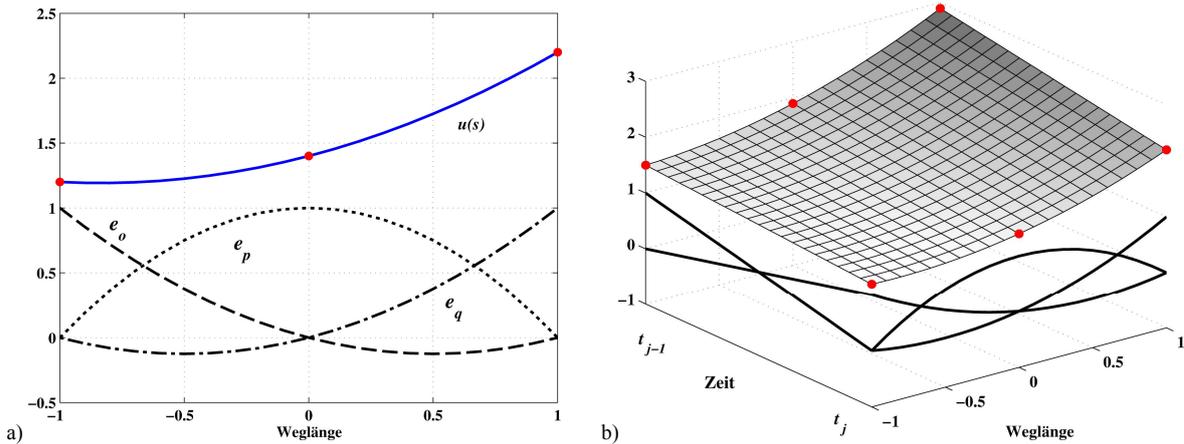


Bild 1.14: Approximation der Lösung entlang einer Gitterkante:

a) ortsabhängig; b) orts- und zeitabhängig

Bild 1.14 a) stellt die Zusammensetzung der approximierten Lösung anhand der Basisfunktionen entlang einer beliebigen Gitterkante grafisch dar. Analog werden für die Beschreibung des zeitlichen Verlaufes der Lösungswerte an den Stützstellen ebenfalls Basisfunktionen verwendet. Die Approximation der Lösung wird als ein Produkt der örtlichen und zeitlichen Abhängigkeit gebildet:

$$u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m u_{ij} e_i t_j. \quad (1.101)$$

Hierbei steht der Index i für die Stützstellen und der Index j für die Zeitschritte. Der zeitliche Verlauf der approximierten Lösung entlang einer Gitterkante wird in Bild 1.14 b) verdeutlicht. Zusätzlich zur Darstellung aus Bild 1.14 a) wird die Tiefe für die Zeitachse verwendet. Für den zeitlichen Verlauf werden in der Darstellung lineare Basisfunktionen verwendet.

Die Gitterkanten werden von der Position ihrer Endpunkte eindeutig beschrieben. Für die Gleichungen der Gitterkante als Funktion der Weglänge s gilt der lineare Zusammenhang

$$x(s) = x_o \frac{1-s}{2} + x_q \frac{1+s}{2} \quad \text{bzw.} \quad y(s) = y_o \frac{1-s}{2} + y_q \frac{1+s}{2}, \quad (1.102)$$

wobei (x_o, y_o) und (x_q, y_q) die Koordinaten der Endpunkte sind. Anhand (1.102) können die örtlichen Ableitungen der Lösung und der Basisfunktionen berechnet werden. Des Weiteren realisiert Gleichung (1.102) die örtliche Zuordnung der Gitterelemente und der

Lösungswerte. In Bild 1.15 wird die örtliche Zuordnung der Basisfunktionen für einen Gittereckpunkt und einen Kantenmittelpunkt dargestellt.

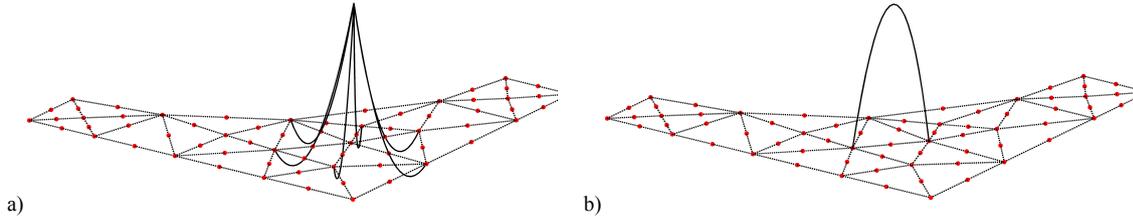


Bild 1.15: Örtliche Zuordnung der Basisfunktionen im untersuchten Bereich Ω
a) für einen Gittereckpunkt und b) einen Kantenmittelpunkt

Wird die Approximation der Lösung (1.101) in Gleichung (1.95) eingesetzt, ergibt sich unter Berücksichtigung der Bedingungen (1.82) die lineare Gleichung

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_{jk} \langle \text{grad } e_i, \vec{\phi}(e_j t_k) \rangle + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m u_{jk} \langle e_i, f(e_j t_k) \rangle - |e_i, \lambda| = \\ = \langle \text{grad } e_i, \vec{\gamma} \rangle + \langle e_i, g \rangle + |e_i, h|. \end{aligned} \quad (1.103)$$

Die Berechnung erfolgt für jeden Zeitschritt einzeln, so dass für einen bestimmten Zeitschritt die Lösungen der vorherigen Zeitschritte bekannt sind und in der Auswertung der zeitlichen Ableitung einfließen. Entsprechend können diese Glieder auf der rechten Seite geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n u_{jm} \langle \text{grad } e_i, \vec{\phi}(e_j t_m) \rangle + \sum_{j=1}^n u_{jm} \langle e_i, f(e_j t_m) \rangle - |e_i, \lambda| = \langle \text{grad } e_i, \vec{\gamma} \rangle + \\ + \langle e_i, g \rangle + |e_i, h| - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} u_{jk} \langle \text{grad } e_i, \vec{\phi}(e_j t_k) \rangle - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{m-1} u_{jk} \langle e_i, f(e_j t_k) \rangle. \end{aligned} \quad (1.104)$$

Somit wird für jeden beliebigen Zeitpunkt m ein System von n Gleichungen erstellt, das jeweils eine Gleichung für jedes $i = 1 \dots n$ aufweist. Hinzu kommen l Gleichungen für die Punkte des Randbereiches in denen Dirichlet Bedingungen (1.76) definiert sind. Die $n + l$ Unbekannten sind u_{jm} für $j = 1 \dots n$ und λ_i für $i = 1 \dots l$. Die iterative Berechnung ermöglicht die Anpassung der Schrittweite und des Grades der Basisfunktionen für die Zeitachse.

Die Auswertung der örtlichen Ableitungen ist unabhängig von den Freiheitsgraden der Berechnung. In Gleichung (1.104) und deren untergeordneten Gleichungen (1.80 a) und (1.80 b) wird nur der Gradient der Basisfunktionen ausgewertet. Dieser wird einmalig aus der Definitionsgleichung der Basisfunktionen (1.100) und der Abbildungsfunktion der Gitterelemente (1.102) ermittelt und behält seinen Wert für alle Zeitschritte der Berechnung.

Wie in diesem Kapitel gezeigt, überführt die Methode der finiten Elemente ein lineares Differentialgleichungssystem in ein lineares Gleichungssystem, das direkt lösbar ist. Hingegen ergibt ein nichtlineares Differentialgleichungssystem ein nichtlineares Gleichungssystem, bei dem die Systemmatrix selbst von der Lösung abhängig ist. Hierfür muss ein iteratives Lösungsverfahren angewendet werden. Kommerzielle Feldberechnungsprogramme stellen sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Fall eine Reihe von Berechnungsverfahren zur Verfügung. Grundsätzlich wird zwischen direkten und indirekten Verfahren unterschieden. Direkte Verfahren invertieren die Systemmatrix und berech-

nen die genaue Lösung, während indirekte Verfahren iterativ vorgehen und ähnlich einem Optimierungsverfahren den Gradienten abschätzen, um zu einer Lösung zu konvergieren. Dabei können große Systemmatrizen betrachtet werden. Für transiente Berechnungen sind direkte Verfahren vorteilhafter, um den Fehler aus den einzelnen Berechnungsschritten nicht aufzusummieren.

2 Vergleichende Beschreibung nichtlinearer magnetischer und elektrischer Materialien

Neben dem angepassten Gleichungssystem beeinflusst das eingesetzte Materialmodell gleichermaßen die Qualität der Feldberechnung. Die Behandlung des nichtlinearen Verhaltens der verwendeten magnetischen und elektrischen Werkstoffe zählt zu den Schwerpunkten dieser Arbeit. Grundsätzlich wird in der Literatur [25, 49, 51] zwischen mathematischer und physikalischer Modellierung unterschieden. Bei der mathematischen Modellierung wird ein funktionaler Zusammenhang gesucht, der die gemessenen Werkstoffeigenschaften am besten nachbildet. Für die Kalibrierung des Modells werden somit verhältnismäßig viele Messpunkte benötigt und die Gültigkeit der Modellierung über die Grenzen des von Messungen abgedeckten Bereiches hinaus ist nicht gegeben. Bei der physikalischen Modellierung wird ein für das Werkstoffverhalten physikalisch begründetes Gleichungssystem abgeleitet, das anhand von wenigen Messpunkten kalibriert wird. Physikalische Modelle weisen einen breiten Einsatzbereich auf, der über die Grenzen des Kalibrierbereiches hinausgeht.

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein Materialmodell vorgestellt, das auf bekannte Merkmale etablierter Modelle aufbaut und an die Anforderungen der Feldberechnung angepasst ist. Zu den gemeinsamen Merkmalen mit bereits bekannten Modellen zählen die getrennte Beschreibung des Vorgangs der Energiespeicherung und der auftretenden Verlustmechanismen, sowie die Kenngrößen zur Parametrisierung der Kommutierungskurve. Um die Rechenzeit zu optimieren, werden die unabhängigen Variablen der Feldberechnung als Eingangsgrößen des Materialmodells gewählt. Bei der Wahl der mathematischen Approximation der Materialeigenschaften wird auf die Robustheit des Modells ein besonderes Augenmerk gesetzt. Es werden stetig differenzierbare Funktionen eingesetzt, die über den gesamten Wertebereich der Eingangsgrößen definiert sind und plausible Ausgangsgrößen liefern. Vor allem in Betracht der Diskretisierungsfehler, die an Ecken und Kanten zu überhöhten Werten der Feldgrößen führen können, muss das Materialmodell für den Umgang mit unplausiblen Eingangswerten ausgelegt sein, um die Konvergenz der Feldberechnung zu gewährleisten.

In diesem Kapitel wird der Effekt der magnetischen und elektrischen Polarisierung und deren technischer Einsatz als Energiespeicher beschrieben. Die Transportverluste beim Speichern und Entnehmen der Energie aus dem Werkstoff werden untersucht. Ein messtechnisches Verfahren zur Qualifizierung der Werkstoffe wird vorgestellt. Es wird eine mathematische Modellierung der magnetischen und elektrischen Werkstoffeigenschaften unter Berücksichtigung der Nichtlinearität und der Umpolarisierungsverluste hergeleitet. Abschließend wird das Modell anhand einer vereinfachten Geometrie validiert.

2.1 Magnetische und elektrische Polarisierung

Das unterschiedliche Verhalten einzelner Materialien unter dem Einfluss magnetischer und elektrischer Felder findet eine physikalische Begründung in der atomaren Struktur der Materie. Grundlegend für diese Betrachtung ist das Schalenmodell des Atoms, wobei die Belegung der äußeren Schale der Elektronenhülle für die magnetischen und elektrischen Eigenschaften der einzelnen Werkstoffe ausschlaggebend ist. Aus Sicht der Elektrotechnik werden Materialien als Kontinuum betrachtet und die atomaren Vorgänge durch Feldgrößen abgebildet. Die abstrakten Größen Raumladungsdichte, Konduktivität, Permittivität und Permeabilität beschreiben die Wechselwirkung der Werkstoffe mit magnetischen

und elektrischen Feldern. Die Vorgänge auf atomarer Ebene stellen die Grundlagen einer physikalisch begründeten Modellierung des Werkstoffverhaltens dar.

2.1.1 Physikalische Grundlagen

Ursache der magnetischen Eigenschaften der Materialien sind die magnetischen Momente, hervorgerufen durch die Rotation der Elektronen um den Atomkern und um die eigene Achse. Diese Bewegungen stellen Elementarströme dar, die sich bei einem vollständig besetzten Orbital gegenseitig aufheben. Aus diesem Grund besitzen nur Atome mit einer unvollständig belegten äußeren Schale ein eigenes magnetisches Moment.

Elemente ohne eigenes magnetisches Moment werden als *diamagnetisch* bezeichnet. Die Veränderung des externen magnetischen Feldes führt aufgrund der Induktion zu einer Kraftwirkung auf die Elementarströme, wodurch das Gleichgewicht gestört wird. Diamagnetische Werkstoffe polarisieren in einem externen magnetischen Feld und schwächen dieses ab. Vertreter dieser Gruppe sind Kupfer, Silizium, Silber und Gold. Supraleiter verhalten sich wie ideale diamagnetische Werkstoffe, da sie das externe Magnetfeld als Folge des Meißner-Ochsenfeld-Effektes vollständig kompensieren [43].

Die elektrischen Eigenschaften der Materialien beruhen auf der Beweglichkeit der Elektronen. Unterschieden wird zwischen leitenden und polarisierbaren Werkstoffen. Ein elektrischer Leiter besitzt freie Elektronen, so dass ein externes elektrisches Feld einen Stromfluss hervorruft. In einem elektrischen Isolator sind alle Elektronen an ihren Atomen gebunden, so dass ein externes elektrisches Feld nur eine Verschiebung der Ladungsschwerpunkte verursachen kann. Hierbei polarisiert der Werkstoff und baut ein elektrisches Gegenfeld auf. Die elektrische Polarisation hat immer eine Feldschwächung zur Folge.

Werkstoffe, bei denen die Schwerpunkte der negativen und der positiven Ladungsträger der einzelnen Moleküle zusammenfallen, werden *dielektrisch* genannt. Ein externes elektrisches Feld verschiebt beide Schwerpunkte auseinander, so dass ein Gegenfeld aufgebaut wird. Diese Art der Polarisation wird als Verschiebungspolarisation bezeichnet, tritt bei Gasen wie zum Beispiel Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Kohlendioxid, Luft oder Argon auf, ist relativ schwach und nicht temperaturabhängig.

Atome mit nicht abgeschlossener Elektronenschale besitzen ein intrinsisches magnetisches Moment. Innerhalb des Materials haben diese Momente ohne externen Einfluss eine chaotische Ausrichtung, so dass ihre Wirkung in Summe kompensiert wird. Unter dem Einwirken eines äußeren magnetischen Feldes richten sich die Elementarmomente zu diesem parallel aus und verstärken es somit. Stoffe, die diesen Effekt aufweisen, werden als *paramagnetisch* bezeichnet. Beispiele hierfür sind Luft und Aluminium. Dem paramagnetischen Effekt wirken die Thermobewegung und der diamagnetische Effekt entgegen.

Im Falle der *parelektrischen* Stoffe fallen die Schwerpunkte der negativen und positiven Ladungsträger nicht zusammen, die einzelnen elektrischen Momente heben sich dennoch als Folge der thermischen Bewegung auf. Unter Einfluss eines externen elektrischen Feldes orientieren sich die elektrischen Dipole in Feldrichtung. Aufgrund der gegenwirkenden Thermobewegung ist die Orientierungspolarisation stark temperaturabhängig. Begleitend tritt Verschiebungspolarisation auf, deren Wirkung jedoch vernachlässigbar ist. Parelektische Stoffe sind Salz, Wasser und Glycerin.

Bei der hier vorgestellten Beschreibung der elektrischen Polarisation wird der Ladungstransport zwischen dem untersuchten Werkstoff und dessen Umgebung nicht betrachtet. Neben der Verschiebungs- und der Orientierungspolarisation hat auch die Elektrisierung

des Werkstoffes einen Beitrag an der elektrischen Feldverteilung im Inneren des Werkstoffes. Abhängig von der Gitterstruktur, den enthaltenen Fehlstellen und der Beschaffenheit der Oberfläche werden unter Einfluss eines äußeren elektrischen Feldes im Werkstoff Raumladungen gespeichert. Unter welchen Bedingungen Raumladungen entstehen bzw. wieder freigegeben werden, unterliegt komplexen energetischen Betrachtungen, auf die in dieser Arbeit nicht näher eingegangen wird. Im Rahmen vieler Betrachtungen wird die Raumladungsverteilung nicht einzeln behandelt, sondern der Polarisation zugeordnet. Elektrisierbare Stoffe sind Glas, Porzellan, Papier und Kunststoffe und werden in fast allen Isolationssystemen angetroffen. Für Lebensdaueranalysen spielt die Raumladungsverteilung innerhalb des Werkstoffes eine Schlüsselrolle [18].

Einen besonderen Fall stellen die **ferromagnetischen** Stoffe dar [52]. Ferromagnetismus ist eine Eigenschaft der kristallinen Struktur und setzt paramagnetische Atome voraus. Befinden sich die Gitterknoten in einer günstigen Lage zueinander, richten sich die Elementarmomente ohne Einfluss eines äußeren Feldes über makroskopische Bereiche parallel aus. Diese Bereiche spontaner Magnetisierung werden als Weißsche Bezirke bezeichnet. In Abwesenheit eines äußeren magnetischen Feldes sind die Weißschen Bezirke so zueinander gerichtet, dass sich ihre Magnetisierung gegenseitig aufhebt. Dieses entspricht einem günstigen energetischen Zustand, da sich die magnetischen Flüsse der einzelnen Bereiche innerhalb des Werkstoffes schließen. Der Übergang von einem Weißschen Bezirk zum nächsten verläuft stetig über einer Grenze endlicher Dicke, die als Bloch-Wand bezeichnet wird. Ein äußeres magnetisches Feld verursacht eine Verschiebung der Bloch-Wände und vergrößert die gleichsinnig zum Feld gerichteten Weißschen Bezirke zu Lasten der restlichen Bereiche. Für kleine Erregerfelder ist diese Verschiebung reversibel. Bei großen Feldstärken werden die Bloch-Wände über Fehlstellen und Fremdeinschlüsse hinweg verschoben. Dieses führt zu einer sprunghaften Änderung der Magnetisierung und dazu, dass bei Abnahme des Erregerfeldes sich ein anderer Gleichgewichtszustand einstellt. Aufgrund dieser inneren Wechselwirkungen wird eine vollständige Ausrichtung der magnetischen Elementarmomente bereits bei relativ schwachen magnetischen Feldern erreicht, was die technische Bedeutung dieser Werkstoffe ausmacht. Die ferromagnetische Ordnung besteht nur unterhalb einer materialspezifischen Temperatur, als Curie-Temperatur bezeichnet. Oberhalb dieser Temperatur weisen sie ein paramagnetisches Verhalten auf. Ferromagnetische Werkstoffe sind Eisen, Nickel und Kobalt und deren Legierungen.

Bei gewissen Gitterkonfigurationen orientieren sich die Elementarmomente schichtweise antiparallel [19]. Diese Werkstoffe werden als **antiferromagnetisch** bezeichnet. Vertreter dieser Gruppe sind Verbindungen wie zum Beispiel Eisenoxid, Nickeloxid und Eisenchlorid. Die erreichte Flussverstärkung ist relativ schwach, so dass ihnen keine technische Bedeutung zugesprochen wird. Einen Sonderfall stellen die **ferrimagnetischen** Werkstoffe dar, auch Ferrite genannt. Dabei sind die antiparallel gerichteten Elementardipole unterschiedlich stark und heben sich nicht vollständig auf. Hiermit weisen die ferrimagnetischen Stoffe ein ähnliches Verhalten wie die ferromagnetischen Stoffe auf. Ihre technische Bedeutung liegt in ihrer niedrigen elektrischen Leitfähigkeit, wodurch sie verlustarm in Hochfrequenzanordnungen eingesetzt werden können.

Stoffe, bei denen die Schwerpunkte der negativen und positiven Ladungsträger nicht zusammenfallen und bei denen die elektrischen Momente sich aufgrund innerer Kräfte über makroskopische Bereiche gleichsinnig ausrichten, werden **ferroelektrisch** genannt [54]. Die Namensgebung ist ausschließlich eine Analogie zu den ferromagnetischen Stoffen. Weder Eisen noch eisenhaltige Verbindungen sind ferroelektrische Stoffe. Die ferroelek-

trische Ordnung besteht nur unter einer materialspezifischen Temperatur, ebenfalls als Curie-Temperatur bezeichnet. Die Richtung der Polarisation ist in den einzelnen Bereichen unterschiedlich, so dass das resultierende Dipolmoment Null ist. In einem äußeren elektrischen Feld werden die zur Feldrichtung günstig orientierten Bereiche vergrößert. Ferroelektrische Werkstoffe sind Seignette-Salz und Bariumtitanat.

2.1.2 Technische Beschreibung

Die Aufzählung der einzelnen Werkstoffarten aus dem vorherigen Abschnitt gibt einen Einblick in die Vielfalt der physikalischen Prozesse, die der Polarisation der Werkstoffe zugrunde liegen. Für diese unterschiedlichen Mechanismen ist eine einheitliche Beschreibung notwendig, um das Verhalten der einzelnen Werkstoffe in technischen Systemen zu vergleichen und somit den passenden Werkstoff für die gewünschte Funktionalität zu wählen. Hierfür kann eine quantitative Beschreibung der Polarisation der Werkstoffe auf atomarer Ebene aufgrund des hohen Aufwandes nicht in Betracht gezogen werden.

Phänomenologisch bedingt wird eine materialspezifische Proportionalitätskonstante zwischen Polarisation und der erzeugenden Feldstärke definiert, die als Suszeptibilität χ bezeichnet wird [2]. Während die elektrische Polarisation das äußere elektrische Feld immer abschwächt, verstärkt die magnetische Polarisation, mit Ausnahme bei den diamagnetischen Stoffen, das äußere magnetische Feld in seiner Wirkung. Um diese zwei Verhaltensweisen mit dem gleichen mathematischen Formalismus zu beschreiben, werden die magnetische und die elektrische Suszeptibilität unterschiedlich definiert. Für die magnetische Suszeptibilität χ_m gilt

$$\chi_m = \frac{\vec{M}}{H}, \quad (2.1)$$

wobei \vec{M} die magnetische Polarisation, auch Magnetisierung genannt, das influenzierte magnetische Feld der Materialprobe ist. Für die elektrische Suszeptibilität χ_e gilt

$$\chi_e = \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0 \vec{E}}, \quad (2.2)$$

wobei die elektrische Polarisation \vec{P} ein elektrischer Fluss ist. Die physikalische Interpretation der elektrischen Polarisation wird weiter unten in diesem Kapitel behandelt.

In Bild 2.1 wird die Größenordnung der magnetischen Suszeptibilität für technisch relevante Werkstoffe vergleichend dargestellt. Um die Stärke der einzelnen Effekte besser zeigen zu können, ist die Abszisse unterbrochen und unterschiedlich skaliert. Der kleinstmögliche Wert der magnetischen Suszeptibilität beträgt -1 und entspricht einem ideal diamagnetischen Zustand, wie er bei Supraleitern anzutreffen ist. Der dia- und paramagnetische Effekt ist relativ schwach, so dass die Werte der magnetischen Suszeptibilität für diese Art von Werkstoffen nahe an der Nulllinie liegen. Die Werte der magnetischen Suszeptibilität ferro- und ferrimagnetischer Werkstoffe sind in logarithmischer Skalierung aufgetragen und erstrecken sich über mehrere Zehnerpotenzen.

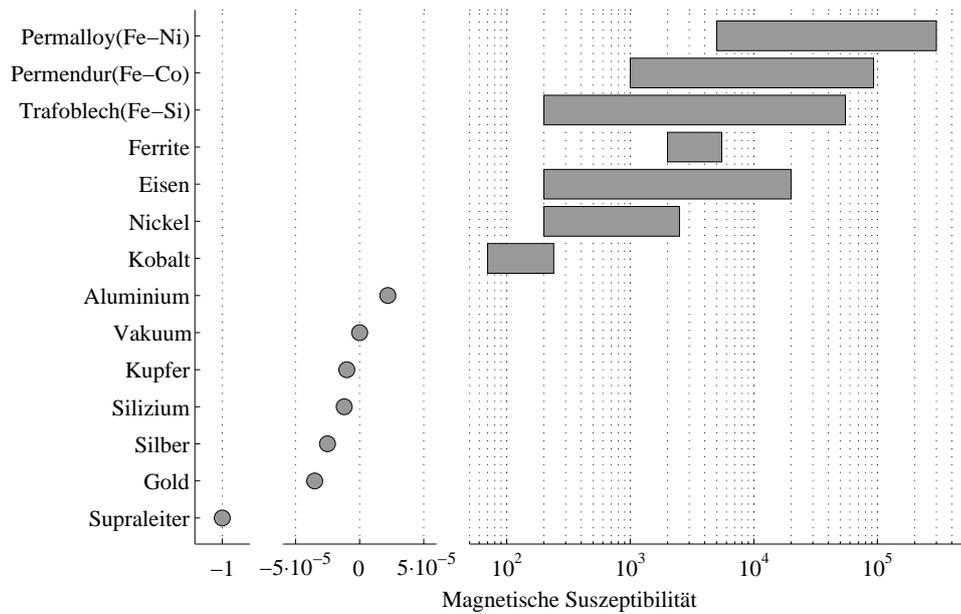


Bild 2.1: Qualitativer Größenvergleich der magnetischen Suszeptibilität ausgewählter Werkstoffe [12, 54]

Bild 2.2 stellt die elektrische Suszeptibilität ausgewählter technisch relevanter Werkstoffarten qualitativ gegenüber. Für den Bereich kleiner Suszeptibilitätswerte, die größtenteils im Falle der Verschiebungspolarisation bei Gasen auftreten, wird eine lineare Skalierung verwendet. Werkstoffe mit Orientierungspolarisation weisen eine um etwa drei Zehnerpotenzen stärkere Wirkung auf und sind in logarithmischer Skalierung dargestellt. Die höchsten Suszeptibilitätswerte werden bei den ferroelektrischen Werkstoffen verzeichnet.

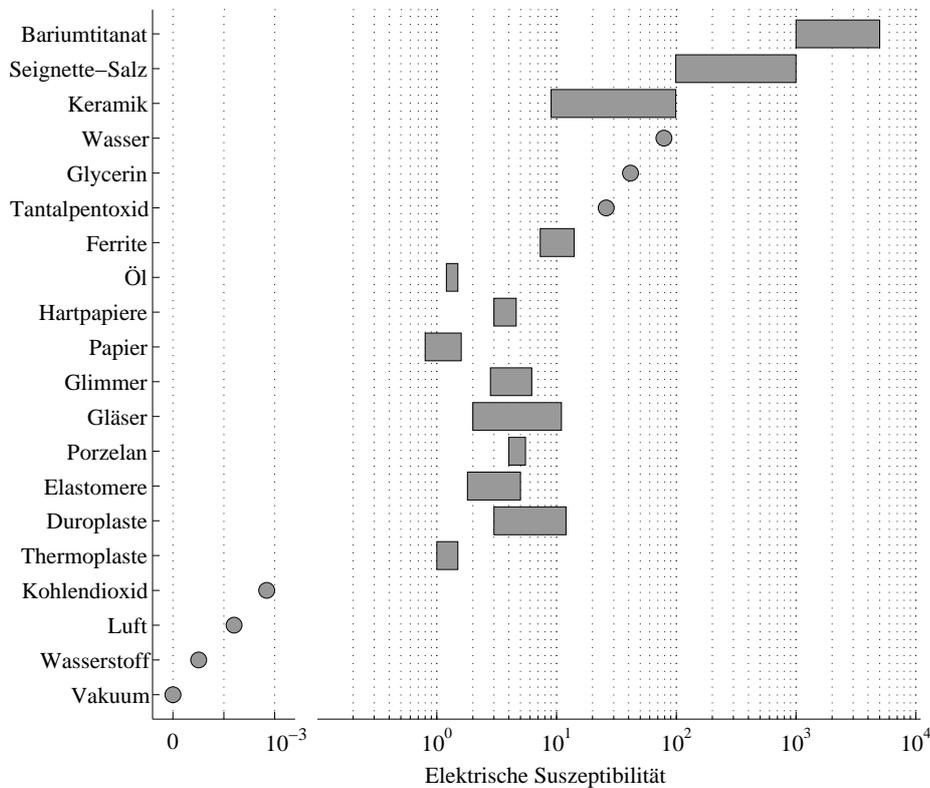


Bild 2.2: Qualitativer Größenvergleich der elektrischen Suszeptibilität ausgewählter Werkstoffe [36, 54]

Für den Zusammenhang zwischen Feldstärke und Flussdichte ergeben sich für das magnetische und das elektrische Feld analoge Beziehungen:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \quad (2.3)$$

bzw.

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0(1 + \chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}. \quad (2.4)$$

Die Permeabilitätszahl μ_r und die Permittivitätszahl ε_r sind ein Maß der Flussverstärkung eines magnetischen bzw. elektrischen Feldes. Hierbei handelt es sich um eine abstrakte Beschreibung ohne Berücksichtigung der physikalischen Vorgänge. Diese idealisierte Sichtweise zeigt sich in einigen Fällen als unzulänglich, wie zum Beispiel bei Permanentmagneten oder bei ferromagnetischen und ferroelektrischen Werkstoffen. Um diese Mängel zu umgehen, gibt es für diese Sonderfälle anwendungsspezifische Definitionen der Permeabilität und Permittivität [45]. Im Folgenden wird die praktische Relevanz der Permeabilität und Permittivität anhand beispielhafter Anordnungen gezeigt.

In einem **Ringkern** vom mittleren Radius r erzeugt eine vom Strom i durchflossene Spule mit n Windungen ein magnetisches Feld der Stärke

$$H = \frac{ni}{2\pi r}. \quad (2.5)$$

Das von außerhalb eingeprägte magnetische Feld ruft eine Magnetisierung des Ringkerns hervor. Die magnetischen Elementardipole orientieren sich in Richtung des äußeren Feldes, so dass sich die Elementarströme zu einem resultierenden Volumenstrom i_e konstruktiv überlagern. Die beschriebene Anordnung ist in Bild 2.3 skizziert.

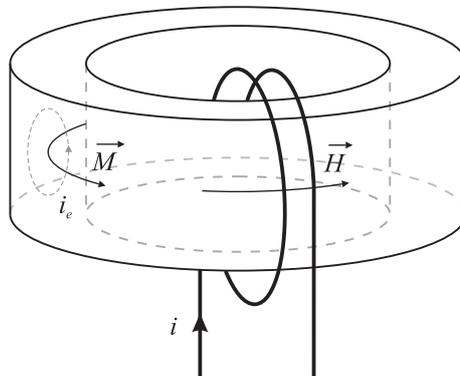


Bild 2.3: Magnetisierung eines Ringkerns

Der Elementarstrom ist dem Spulenstrom gleichgerichtet, so dass die Magnetisierung das magnetische Feld der Spule in ihrer Wirkung unterstützt. Das Durchflutungsgesetz unter Mitberücksichtigung des Elementarstroms lautet

$$ni + i_e = 2\pi r(H + M). \quad (2.6)$$

Die magnetische Feldstärke und die Magnetisierung sind Größen gleicher Natur und unterscheiden sich nur in der Art ihrer Quellgröße. Hierbei wird zwischen freien und gebundenen Strömen differenziert [43]. Freie Ströme fließen in Drähten, sind mit einem Amperemeter direkt messbar und sind Quellen der magnetischen Feldstärke. Die Elementarströme sind gebundene Ströme und Quellen der Magnetisierung. Sie sind nicht direkt

messbar, so dass die Magnetisierung nur durch ihre Wirkung auf den magnetischen Fluss qualifiziert werden kann. Die Permeabilitätszahl ist ein Maß der von der Magnetisierung verursachten Flussverstärkung. Die magnetische Flussdichte ergibt sich aus der Überlagerung des magnetischen Feldes der Spule und der Magnetisierung des Ringkerns zu

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\mu_r\vec{H} . \quad (2.7)$$

Eine Besonderheit des Ringkerns ist, dass die magnetische Feldstärke und die Magnetisierung über den gesamten Umlauf homogen verteilt sind. Hierdurch eignet sich der Ringkern für die messtechnische Bestimmung der intrinsischen magnetischen Werkstoffeigenschaften [4].

Bei den **Permanentmagneten** sind die magnetischen Elementarmomente in gleicher Richtung eingefroren, so dass sie ein eigenes Magnetfeld besitzen [13]. Die Elementarströme überlagern sich zu einem Volumenstrom i_e , der gemäß dem Durchflutungsgesetz mit der Magnetisierung verknüpft ist:

$$i_e = \oint \vec{M} d\vec{l} = \int \vec{M}_a d\vec{l}_a + \int \vec{M}_i d\vec{l}_i , \quad (2.8)$$

wobei mit M_a die Magnetisierung außerhalb des Permanentmagneten und mit M_i die Magnetisierung im Inneren des Permanentmagneten bezeichnet wird. In Bild 2.4 a) ist die Magnetisierung eines Permanentmagneten skizziert.

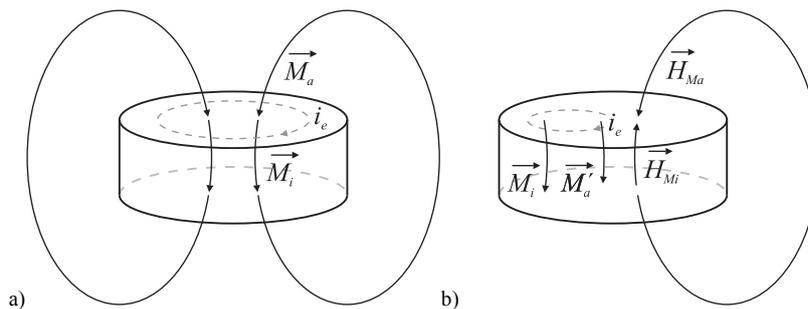


Bild 2.4: Magnetisches Feld eines Permanentmagneten:
a) physikalische Betrachtung; b) technische Betrachtung

Die Permanentmagnete besitzen keinen freien Strom, sollten also auch keine magnetische Feldstärke haben. Jedoch widerspricht das der Definition der Flussdichte im Vakuum:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} . \quad (2.9)$$

Gemäß (2.9) entspricht die äußere Magnetisierung des Permanentmagneten einer magnetischen Feldstärke. Die magnetische Feldstärke im Inneren des Permanentmagneten muss der äußeren Feldstärke entgegengesetzt gerichtet sein und die Umlaufintegrale im äußeren und inneren Feld müssen sich gegenseitig aufheben:

$$\vec{H}_{Ma} = \vec{M}_a \text{ und } \int \vec{H}_{Ma} d\vec{l}_a = -\int \vec{H}_{Mi} d\vec{l}_i . \quad (2.10)$$

Hierbei ist \vec{H}_{Mi} eine rechnerische Größe, die der Abbildung des äußeren Feldes im Inneren des Permanentmagneten entspricht. Ihr wirkt die Abbildung der äußeren Magnetisierung \vec{M}_a entgegen (Bild 2.4 b):

$$\vec{M}'_a = -\vec{H}_{Mi} . \quad (2.11)$$

Die einzige Komponente, die einen Beitrag zum magnetischen Fluss im Inneren des Permanentmagneten hat, ist die innere Magnetisierung \vec{M}_i .

Diese Darstellung beschreibt das gesamte magnetische Feld des Permanentmagneten durch eine äquivalente magnetische Feldstärke und reduziert die Magnetisierung auf das Innere des Permanentmagneten. Für den Volumenstrom gilt somit

$$i_e = \int (\vec{M}'_a + \vec{M}_i) d\vec{l}_i. \quad (2.12)$$

Die phänomenologische Beschreibung des Permanentmagneten berücksichtigt den Volumenstrom nicht. Als Quelle des Magnetfeldes wird die remanente Flussdichte \vec{B}_r angegeben:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} + \vec{B}_r. \quad (2.13)$$

Unter Berücksichtigung der Magnetisierung und der magnetischen Feldstärke im Inneren des Permanentmagneten,

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H}_i + \vec{M}_i + \vec{M}'_a), \quad (2.14)$$

gilt für die remanente Flussdichte

$$\vec{B}_r = \mu_0 (\vec{M}_i + \vec{M}'_a) \quad (2.15)$$

und für die Permeabilitätszahl des Permanentmagneten der theoretische Wert $\mu_r = 1$. Gleichung (2.15) beschreibt den Verlauf der Remanenz im Inneren des Permanentmagneten. Für viele praktische Fragestellungen wird jedoch von einem konstanten Wert der Remanenz über das gesamte Volumen des Permanentmagneten ausgegangen. Dies hat zur Folge, dass die angesetzte Permeabilitätszahl aufgrund der nicht berücksichtigten Feldverdrängung leicht vom theoretischen Wert abweicht.

Das magnetische Feld eines offenen magnetischen Kreises wird an einem magnetisierten **Stabkern** betrachtet. Befindet sich ein Stabkern aus weichmagnetischem Werkstoff im Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule, so orientieren sich die magnetischen Elementarmomente parallel zum angelegten Feld, und der Stab weist ein eigenes magnetisches Feld auf (Bild 2.5 a). Die Feldlinien des magnetisierten Stabkerns schließen sich durch die umgebende Luft analog zu einem Permanentmagneten. Der Stabkern verhält sich, solange der Stromfluss in der Spule besteht, wie ein Permanentmagnet. Das resultierende magnetische Feld entsteht durch die Überlagerung des Magnetfeldes der Spule und der Magnetisierung des Stabkerns [61].

Für die magnetische Flussdichte im Inneren und Äußeren des Stabkerns gilt

$$\vec{B}_i = \mu_0 (\vec{H}_i + \vec{M}_i) \text{ bzw. } \vec{B}_a = \mu_0 (\vec{H}_a + \vec{M}_a). \quad (2.16)$$

In Analogie mit dem Ringkern ist die Magnetisierung im Inneren des Stabkerns gemäß (2.7) mit der magnetischen Feldstärke verknüpft:

$$\vec{M}_i = (\mu_r - 1) \vec{H}_i. \quad (2.17)$$

Dem magnetisierten Stabkern wird ein eigenes magnetisches Feld zugeschrieben, das ähnlich dem magnetischen Feld eines Permanentmagneten in inneres und äußeres Feld zerlegt werden kann. Das resultierende Feldbild wird in Bild 2.5 b) skizziert. Zur Verdeutlichung

ist links die Magnetisierung des Stabkerns und rechts das magnetische Feld zusammengefasst. Hiernach ergeben sich für die magnetische Feldstärke in der Umgebung und im Inneren des Stabkerns folgende Formulierungen:

$$\vec{H}_L = \vec{H}_a + \vec{H}_{Ma} \text{ bzw. } \vec{H}_P = \vec{H}_i - \vec{H}_{Mi}. \quad (2.18)$$

Gemäß dieser Darstellung verursacht der Stabkern eine Verdrängung des magnetischen Feldes, wobei das äußere Feld verstärkt und das innere geschwächt wird.

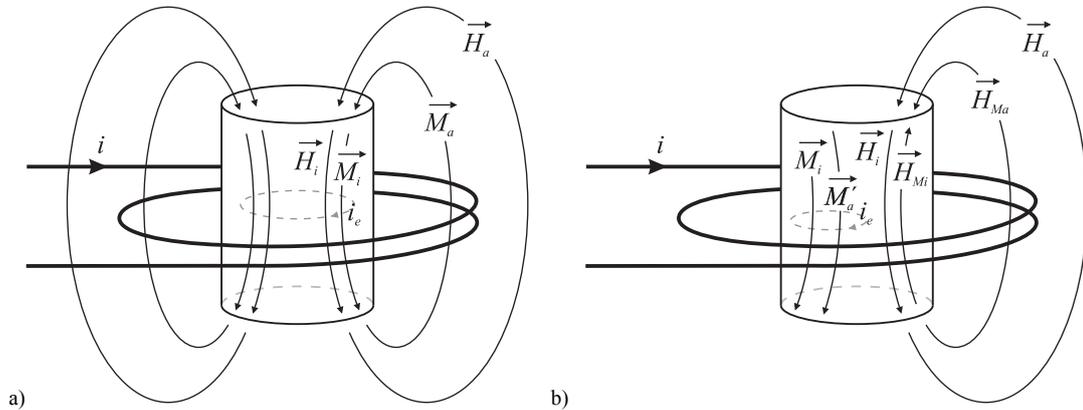


Bild 2.5: Magnetisches Feld eines magnetisierten Stabkerns:
a) physikalische Betrachtung; b) technische Betrachtung

Werden neben dem Spulenstrom ni auch die Elementarströme i_e betrachtet, ergibt sich für die Durchflutung des Stabkerns

$$ni + i_e = \int (\vec{H}_a + \vec{M}_a) d\vec{l}_a + \int (\vec{H}_i + \vec{M}_i) d\vec{l}_i. \quad (2.19)$$

Hierbei beträgt der Anteil des Spulenstromes

$$ni = \int \vec{H}_L d\vec{l}_a + \int \vec{H}_P d\vec{l}_i. \quad (2.20)$$

Aus den Gleichungen (2.19) und (2.20) ergibt sich, unter Berücksichtigung von (2.18), der Anteil der Elementarströme an der Durchflutung zu

$$i_e = \int (\vec{M}_i + \vec{M}_a) d\vec{l}_i. \quad (2.21)$$

Die Magnetisierung des Stabkerns hat in dieser Darstellung ausschließlich im Inneren des Stabkerns einen Anteil am resultierenden magnetischen Feld.

Die effektive Permeabilitätszahl der untersuchten Probe ergibt sich unter Berücksichtigung der Feldverdrängung zu

$$\mu_p = 1 + \frac{M_i + M_a}{H_i - H_{Mi}}. \quad (2.22)$$

Die Permeabilitätszahlen nach (2.17) und (2.22) sind zwei unterschiedliche Größen, die sich durch die unterschiedliche Zuordnung der Anteile des magnetischen Feldes zu ihren Quellgrößen ergeben. Die magnetische Flussdichte beschreibt das gesamte magnetische Feld in seiner Wirkung. Die magnetische Feldstärke entspricht dem Feldanteil, der von einem externen elektrischen Stromfluss verursacht wird, und beschreibt somit die Ursache des magnetischen Feldes. Die Magnetisierung gibt die Wechselwirkung des magnetischen Feldes mit dem Medium wieder, in dem es sich ausbreitet. Bei der Durchführung von

Feldberechnungen ist wichtig, dass das Berechnungsmodell und das Modell, das der Bestimmung der Permeabilitätszahl zugrunde liegt, zueinander passen.

Die elektrische Polarisation eines Mediums wird anhand eines **Plattenkondensators** beschrieben. Bild 2.6 a) stellt den geladenen Plattenkondensator ohne Dielektrikum schematisch dar. An den Klemmen des Kondensators liegt die Spannung u_0 an, wodurch zwischen den Kondensatorplatten ein elektrisches Feld der Stärke \vec{E}_0 aufgebaut wird.

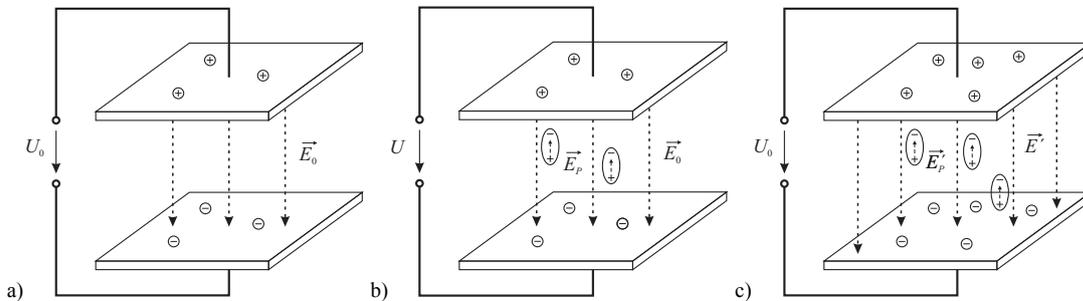


Bild 2.6: Elektrisches Feld eines Plattenkondensators: a) ohne Dielektrikum; b) Feldabschwächung durch polarisiertes Dielektrikum; c) Flussverstärkung bei konstanter Klemmenspannung

Befindet sich zwischen den Kondensatorplatten ein Dielektrikum (Bild 2.6 b), so polarisiert dieses und schwächt das äußere Feld ab. Wird die Ladung der Kondensatorplatten konstant gehalten, so verursacht die Polarisation des Dielektrikums ein Absinken der Klemmenspannung. Im Gegensatz zur magnetischen Polarisation, die das erzeugende Feld in seiner Wirkung verstärkt, schwächt die elektrische Polarisation das erzeugende Feld ab.

Wird die Spannung an den Klemmen des Kondensators konstant gehalten, so bewirkt die Polarisation des Dielektrikums eine Vergrößerung der Ladungsmenge auf den Kondensatorplatten (Bild 2.6 c). Hierbei wird der elektrische Fluss durch das Dielektrikum vergrößert. Unter diesen Randbedingungen bewirkt die elektrische Polarisation, analog zur magnetischen Polarisation, eine Flussverstärkung.

2.1.3 Messtechnische Erfassung charakteristischer Werkstoffeigenschaften

Ferromagnetische und ferroelektrische Werkstoffe finden aufgrund ihrer hohen Suszeptibilität eine Vielzahl von Anwendungen in der Elektrotechnik. Vor allem als Energiespeicherspeicher kommen sie in Übertragern bzw. Keramikkondensatoren zum Einsatz und ermöglichen eine kompakte Bauweise. Diese Werkstoffe weisen jedoch bedingt durch Sättigungseffekte eine nichtlineare Arbeitskennlinie auf, die ab einer materialspezifischen Grenzfeldstärke auftreten. Hierdurch wird der Anwendungsbereich der Werkstoffe vorgegeben. Für eine effiziente und ressourcenschonende Auslegung der Komponenten ist die messtechnische Erfassung der Materialeigenschaften erforderlich.

Für die magnetischen und elektrischen Feldgrößen sind nur indirekte Messverfahren bekannt. Bei den Materialuntersuchungen kommen physikalische Effekte wie zum Beispiel magnetische Induktion, Hall-Effekt, Faraday-Effekt oder Meißner-Ochsenfeld-Effekt für das magnetische und Influenz oder Pockels-Effekt für das elektrische Feld zur Anwendung. Eine normgerechte Messung der magnetischen Flussdichte beruht auf dem Prinzip der magnetischen Induktion durch Integration der gemessenen Spannung. Hierdurch ist es nicht möglich, den Gleichanteil der magnetischen Flussdichte zu messen, weswegen nur dynamische Magnetisierungsprozesse erfasst werden können. Sensoren, die auf dem Hall-Effekt beruhen, müssen im magnetischen Feld positioniert werden, wodurch nur der Ein-

satz in offenen magnetischen Kreisen möglich ist. Um ein homogenes magnetisches Feld in der Probe zu erhalten, wird bei der normgerechten Erfassung der magnetischen Materialeigenschaften ein geschlossener magnetischer Kreis bevorzugt. Messungen im offenen magnetischen Kreis sind nur an vereinfachten geometrischen Anordnungen möglich, die eine homogene Magnetisierung aufweisen und deren Entmagnetisierungsfaktoren bekannt sind. Der Entmagnetisierungsfaktor wird als Verhältnis zwischen der Feldabschwächung und der Polarisierung der Probe definiert [4]. Der Faraday-Effekt bietet den Vorteil einer potentialfreien Messung, ist jedoch nur bei hohen Feldstärken ausgeprägt. SQUID-Sensoren (superconducting quantum interference device) basieren auf dem Meißner-Ochsenfeld-Effekt und eignen sich zur Erfassung kleinster Änderungen des magnetischen Feldes. Die elektrische Feldstärke wird in den meisten Fällen über den von beeinflussten Ladungsträgern verursachten Spannungsabfall ermittelt. Der Pockels-Effekt kann nur im Falle hoher elektrischer Feldstärken gemessen werden.

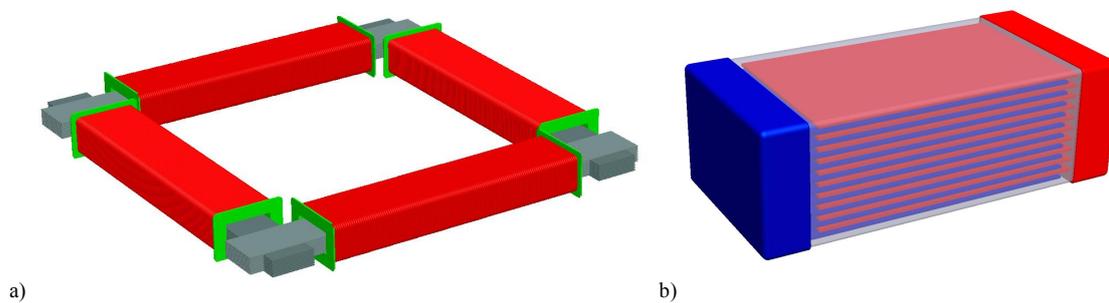


Bild 2.7: Versuchsanordnungen zur Bestimmung der magnetischen (a) und elektrischen (b) Materialeigenschaften: a) Epsteinrahmen; b) Mehrschichtkondensator

Für die Bestimmung der Materialeigenschaften kommen standardisierte Versuchsanordnungen zum Einsatz, die es ermöglichen, anhand der Klemmengrößen die einzelnen Feldgrößen zu berechnen. Bei diesem Verfahren wird die Homogenität der Probe vorausgesetzt. Die Abmaße der Probe müssen bekannt sein und der effektive Querschnitt muss über die Länge der Probe konstant gehalten werden. Die magnetischen Eigenschaften von Elektroblech werden im Epsteinrahmen (Bild 2.7 a) gemessen [5]. Hierbei handelt es sich um ein vierschenkliges Spulensystem, gebildet aus Erreger- und Messspulen, in dem streifenförmige Blechproben zu einem geschlossenen magnetischen Kreis gestapelt werden. An den Ecken überlappen sich die einzelnen Blechstreifen. Somit wird an dieser Stelle der Querschnitt vergrößert, wodurch der Streufluss minimiert wird.

Der in der Erregerspule fließende Strom erzeugt in der Blechprobe ein magnetisches Feld, dessen Feldstärke gemäß dem Durchflutungsgesetz (1.20) dem elektrischen Strom proportional ist:

$$H = \frac{n_1 i}{l_m}, \quad (2.23)$$

wobei n_1 die Windungszahl der Erregerspule und l_m die wirksame magnetische Weglänge ist.

Die induzierte Spannung ist gemäß dem Induktionsgesetz (1.21) proportional zur zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte. Dementsprechend ergibt sich für die magnetische Flussdichte in der Probe

$$B = -\frac{\int u_{ind} dt}{n_2 A}, \quad (2.24)$$

wobei n_2 die Windungszahl der Messspule und A die Querschnittsfläche der Probe ist.

Für die Bestimmung der induzierten Spannung wird die Messwicklung eingesetzt. In der Erregerwicklung wird durch den Stromfluss ein zusätzlicher ohmscher Spannungsabfall verursacht, so dass die Klemmenspannung nicht zur magnetischen Flussdichte proportional ist.

Mit dem gleichen Verfahren werden auch Ringkernproben aus gewickelten Bändern, geschnittene Blechringe oder Ringkerne aus massivem Material vermessen. Hierzu werden um die Ringprobe in unmittelbarer Nähe eine Messspule und eine überlagerte Erreger- spule gewickelt, so dass die Anordnung einem Ringkerntransformator entspricht.

Für die Erfassung der elektrischen Eigenschaften ferroelektrischer Stoffe kann ein analoges Verfahren eingesetzt werden. Hierzu entspricht der Messaufbau einem Mehrschichtkondensator (Bild 2.7 b). Die mehrschichtige Anordnung ermöglicht einen kleinen Abstand zwischen den einzelnen Elektroden, wodurch eine hohe Feldstärke erreicht wird. Des Weiteren summiert sich die Fläche der Kondensatorplatten in ihrer Wirkung, wodurch der Verschiebungsstrom in einen messbaren Bereich kommt.

Gemäß der Definition der elektrischen Potentialdifferenz (1.6) lässt sich elektrische Feldstärke anhand der Klemmenspannung bestimmen:

$$E = \frac{nu}{d_{ges}}, \quad (2.25)$$

wobei n die Anzahl der Schichten und d_{ges} die Gesamthöhe der Anordnung abzüglich der Dicke der Elektroden ist.

Die elektrische Flussdichte ergibt sich aus der Definition des Verschiebungsstromes (1.8) zu

$$D = -\frac{\int i dt}{n A}, \quad (2.26)$$

wobei A hier die Fläche der einzelnen Kondensatorplatten ist.

Die Messungen weisen eine Phasenverschiebung der zeitlichen Verläufe der Klemmengrößen auf. Im Falle eines ideal induktiven Verhaltens der ferromagnetischen Werkstoffe bzw. eines rein kapazitiven Verhaltens der ferroelektrischen Werkstoffe beträgt die Phasenverschiebung eine Viertelperiode. Zusätzlich sind induzierte Spannung und magnetische Flussdichte bzw. Verschiebungsstrom und elektrische Flussdichte ebenfalls um eine Viertelperiode phasenverschoben, so dass im idealen Fall die zeitlichen Verläufe der Feldstärken und Flussdichten ihrerseits in Phase liegen. Im realen Fall beträgt die Phasenverschiebung der Klemmengrößen aufgrund der auftretenden Verluste weniger als eine Viertelperiode. Dieses führt dazu, dass die Verläufe der Feldstärke und Flussdichten ebenfalls eine Phasenverschiebung bzw. die Magnetisierungs- und Polarisationsverläufe Hysterese aufweisen. Die von den Verläufen umspannte Fläche ist zu der Verlustleistung proportional. Bild 2.8 und 2.9 zeigen exemplarisch aufgenommene Magnetisierungsverläufe ferromagnetischer Stoffe bzw. Polarisationsverläufe ferroelektrischer Stoffe. Die beiden Werkstoffarten weisen ein ähnliches Verhalten auf.

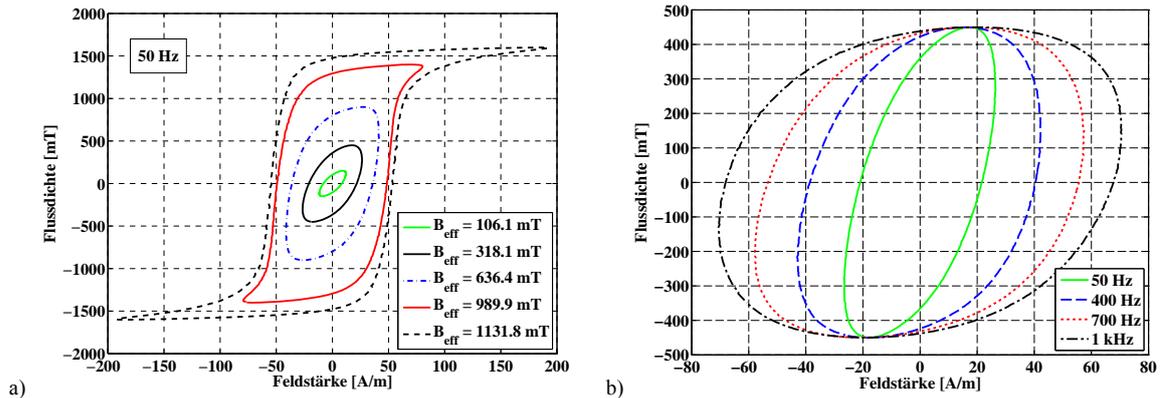


Bild 2.8: Exemplarische Magnetisierungsverläufe weichmagnetischer Werkstoffe (C165-35):
a) Amplitudenabhängigkeit; b) Frequenzabhängigkeit

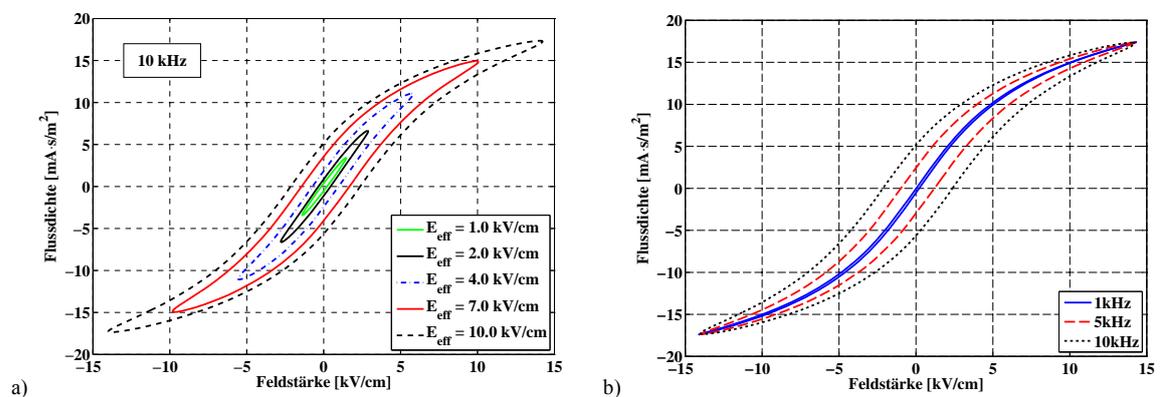


Bild 2.9: Exemplarische Polarisierungsverläufe ferroelektrischer Werkstoffe (Bariumtitanat):
a) Amplitudenabhängigkeit; b) Frequenzabhängigkeit

Dargestellt sind die Amplituden- und die Frequenzabhängigkeit der Werkstoffeigenschaften. Bei kleiner Auslenkung weisen die Werkstoffe ein lineares Verhalten auf, sichtbar in den elliptischen inneren Kurvenverläufen. Mit höher werdenden Amplituden prägen sich aufgrund des nichtlinearen Verhaltens schnabelförmige Sättigungsspitzen aus. Mit steigender Frequenz nehmen die Verluste zu und die Kurvenverläufe werden breiter.

Mit der Aufnahme der Hystereseschleifen werden die untersuchten Proben vollständig qualifiziert. Jedoch handelt es sich hierbei in erster Linie um die magnetischen und elektrischen Eigenschaften der Probe und nicht um die des Werkstoffes. Im Falle der Messung der magnetischen Eigenschaften werden in die Probe aufgrund ihrer Leitfähigkeit Wirbelströme induziert. Diese Verluste werden nicht quantitativ erfasst, sondern mit den Hystereseverlusten zusammengefasst. Die Wirbelstromverteilung wird von der Geometrie der Probe beeinflusst, so dass die erhaltenen Kurvenverläufe nur für gleiche Geometrien gültig sind. Im Falle der Messung der elektrischen Eigenschaften fließt durch die Probe aufgrund ihrer Restleitfähigkeit ein ohmscher Strom, der ebenfalls Verluste verursacht. Eine Trennung von den Polarisationsverlusten ist in diesem Fall ebenfalls nicht möglich. Somit haben die aufgeführten Verfahren, neben der vergleichenden Untersuchung der Werkstoffe, eine technische Bedeutung für Konfigurationen, die einen äquivalenten Aufbau mit der Messeinrichtung haben.

Die vorgestellte Prozedur zur Erfassung der magnetischen Eigenschaften benutzt einen geschlossenen magnetischen Kreis. Somit entspricht die erhaltene Permeabilitätszahl den

Definitionen (2.7) bzw. (2.17). Für offene magnetische Kreise muss der Entmagnetisierungsfaktor der Probe berücksichtigt werden.

Die bisher vorgestellten Messmethoden ermöglichen keine Messung des Gleichanteiles des magnetischen Flusses, wodurch sie sich nur für die Untersuchung dynamischer Vorgänge eignen. Jede Änderung des Magnetisierungszustandes wird von Übergangsverlusten begleitet, die mit erfasst werden und nicht als solche zugeordnet werden. Für die Aufnahme einer statischen Kennlinie ist es erforderlich, jeden Arbeitspunkt einzeln einzustellen und nach dem Erreichen des stationären Zustandes die Feldgrößen zu messen. Dieses ist mit einem SQUID-Suszeptometer möglich. Aufgrund des Meißner-Ochsenfeld-Effektes kann das SQUID auch Gleichfeldanteile messen [34].

Ein SQUID (Bild 2.10) besteht aus einem supraleitenden Kreis, der an zwei Stellen durch jeweils einen Josephson-Kontakt getrennt wird und mit zwei Anschlüssen versehen ist. In dem supraleitenden Kreis tritt als Folge des Meißner-Ochsenfeld-Effektes ein Strom auf, der das externe magnetische Feld vollständig kompensiert. Dieser Strom wird nicht nur bei supraleitenden Kreisen, die einem veränderlichen magnetischen Feld ausgesetzt wurden, nachgewiesen. Kreise, die im normalleitenden Zustand einem statischen magnetischen Feld ausgesetzt sind und in diesem Feld abgekühlt werden, weisen beim Erreichen des supraleitenden Zustandes ebenfalls einen Stromfluss auf, der das äußere Feld kompensiert. Dieser Stromfluss verursacht aufgrund des fehlenden Widerstandes des supraleitenden Kreises keinen Spannungsabfall und ist somit nicht direkt messbar. Zur Messung des Stromflusses sind zwei Josephson-Kontakte im supraleitenden Kreis integriert.

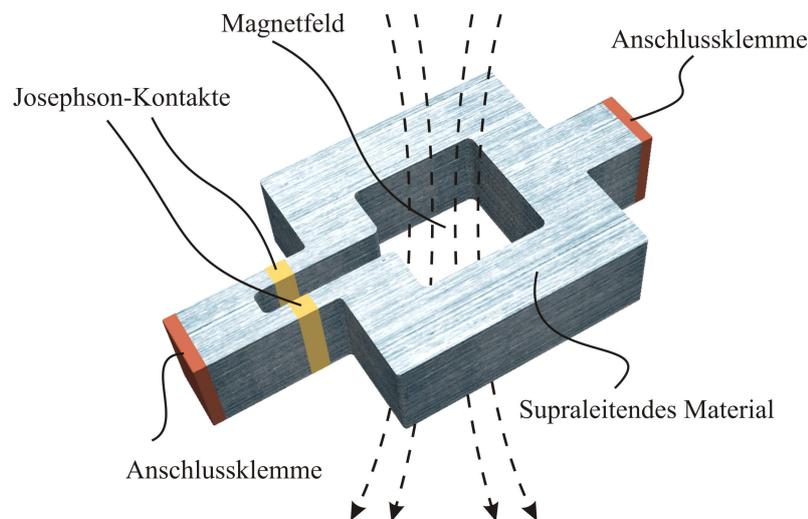


Bild 2.10: Schematische Darstellung eines SQUID Sensors

Ein Josephson-Kontakt besteht aus einer wenige Nanometer dicken normalleitenden Barriere, wodurch eine schwache Kopplung der Wellenfunktionen beider Supraleiter realisiert wird. Während sich im normalleitenden Zustand laut dem Pauliprinzip nicht mehr als zwei Elektronen im gleichen energetischen Zustand befinden können, werden im supraleitenden Zustand aus jeweils zwei Elektronen Cooper-Paare gebildet, die sich ihrerseits in einem Zustand gleicher Energie befinden. Bis zu einer kritischen Stromstärke können Cooper-Paare durch den Josephson-Kontakt durchtunneln, ohne einen Spannungsabfall zu verursachen. Ab der kritischen Stromstärke zerfallen die Cooper-Paare und die Einzel-Elektronen verursachen einen messbaren Spannungsabfall am Josephson-Kontakt. Beim SQUID wird über die Anschlussklemmen ein Bias-Strom eingespeist, um den Arbeitspunkt des Sensors einzustellen. Aus der gemessenen Spannung lässt sich der aktuelle magnetische Fluss ermitteln, der das SQUID durchströmt.

Das SQUID stellt nur den magnetischen Flussdetektor dar. Ein SQUID-Suszeptometer benötigt neben dem SQUID-Sensor eine Vorrichtung, die reproduzierbar ein magnetisches Feld erzeugen kann, um die untersuchte Probe zu erregen. Meist wird ein Spulensystem eingesetzt, das seinerseits mit dem SQUID-Sensor kalibriert wird. Die Kalibriermessungen erfolgen mit dem leeren Suszeptometer ohne Probe. Bei der Erstellung von Magnetisierungsverläufen wird die Flussdichte durch die Probe gegenüber der Feldstärke, die im gleichen Erregungszustand ohne Probe gemessen wurde, dargestellt. Somit wird der Entmagnetisierungsfaktor der Probe nicht berücksichtigt. Durch die kleinen Abmaße des Sensors kann sichergestellt werden, dass der Sensor während der Messung von einem homogenen magnetischen Feld durchströmt wird. Der SQUID-Suszeptometer wird hauptsächlich für die Untersuchung nanoskaliger magnetischer Strukturen eingesetzt, wobei die erreichte Auflösung ausreichend ist, um das Umklappen einzelner Spins beobachten zu können.

Bild 2.11 zeigt die Neukurve und die Gleichstrommagnetisierungskurve eines weichmagnetischen Werkstoffes, aufgenommen mit einem DC-SQUID-Suszeptometer. Die verwendete Probe besteht aus Blechstreifen mit einer Größe von wenigen Millimetern. Die Messung dient nicht als Ersatz der Untersuchungen im Epsteinrahmen, sondern, über die technischen Möglichkeiten des Epsteinrahmens hinaus, als eine Ergänzung dazu. Diese Methode bietet die Möglichkeit eine Gleichfeldmessung durchzuführen, ohne dass die Übertragungsverluste das Messergebnis beeinflussen. Die vorgestellte Messung eignet sich dadurch, dass die Probe nicht homogen magnetisiert wurde und der Entmagnetisierungsfaktor nicht bekannt ist, nur für eine qualitative Aussage. Anhand dieser Messung kann gezeigt werden, dass die Verluste in Zusammenhang mit dynamischen Vorgängen auftreten. Dieses ist ein wichtiger Hinweis für die Modellierung weichmagnetischer Werkstoffe, da sich hiermit eine Trennung zwischen der im Werkstoff gespeicherten Energie und der beim Übertragen zu Wärme umgesetzten Energie begründen lässt.

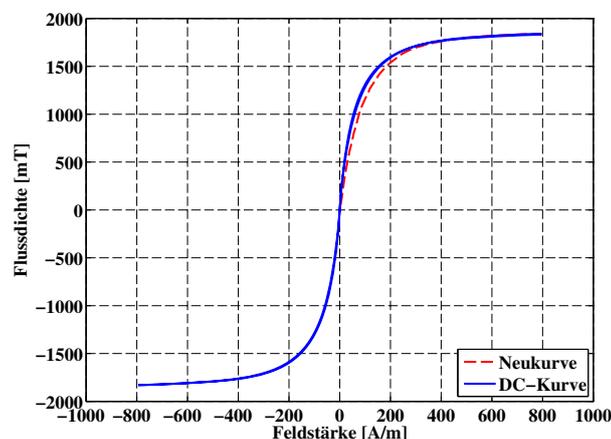


Bild 2.11: Exemplarische Magnetisierungsverläufe weichmagnetischer Werkstoffe, aufgenommen mit einem DC-SQUID-Suszeptometer¹

2.2 Mathematische Modellierung nichtlinearer Werkstoffe

Hysterese entsteht durch eine Überlagerung reversibler und irreversibler Vorgänge und ist ein typisches Merkmal verlustbehafteter Energiespeicher. Aufgrund der Verluste, die beim Einbringen der Energie in dem Speicher bzw. beim Freisetzen der Energie aus dem Speicher auftreten, unterscheiden sich eingebrachte, tatsächlich gespeicherte und freige-

¹ Messung durchgeführt mit der freundlichen Unterstützung von Frau Dr. Elena Lorena Salabas, Max-Planck-Institut für Kohlenforschung, Mülheim an der Ruhr

setzte Energie voneinander. In den meisten Fällen können nur die eingebrachte und die freigesetzte Energie gemessen werden, so dass das Zustandsdiagramm eine Fläche umspannt, die zu den Verlusten proportional ist.

Hysteresis tritt nicht nur bei magnetischen und elektrischen Werkstoffen auf, sondern ist in vielen Anwendungsbereichen vertreten. Somit sind für die Modellierung des Hystereseverlaufes eine Reihe von allgemeingültigen Methoden entwickelt worden, die größtenteils auf parametrisierbaren Kurvenverläufen beruhen, ohne physikalische Hintergründe zu berücksichtigen. Eine weitere Kategorie von Modellierungsverfahren basiert auf physikalisch begründeten Gleichungen, erreicht somit einen hohen Extrapolationsgrad, ist jedoch nur auf einzelnen Gebieten einsetzbar. Eine Auswahl der bekanntesten Hystereseemodelle wird im Folgenden dargestellt.

Eine weitere Besonderheit im Falle der magnetischen Werkstoffe ist die Handhabung der Verluste. Prinzipiell wird zwischen Wirbelstromverlusten und Ummagnetisierungsverlusten, auch als Nachwirkungsverluste bezeichnet, unterschieden. Die Wirbelstromverluste sind auf einen im magnetischen Werkstoff induzierten Stromfluss zurückzuführen und somit geometrieabhängig. Die Ummagnetisierungsverluste basieren auf Prozessen die sich auf der Strukturebene der Materie abspielen, wie zum Beispiel die Trägheit der umklappenden Dipole oder die Hemmung der Bloch-Wandbewegung durch Störstellen. Idealerweise sind nur die Ummagnetisierungsverluste Teil des Hysterese Modells, um somit die Geometrieunabhängigkeit der Materialdaten sicherzustellen. Hierfür müssen die Wirbelstromverluste gesondert modelliert werden und der Messdatensatz für die Kalibrierung des Modells um deren Anteil korrigiert werden.

Das **Rayleigh-Modell** [25, 57] ist eins der ersten mathematischen Hystereseemodelle und ist auf den linearen Bereich der Magnetisierung für kleine Auslenkungen beschränkt. Die magnetische Suszeptibilität wird als Polynomfunktion erster Ordnung in Abhängigkeit von der angelegten magnetischen Feldstärke definiert:

$$\mu(H) = \mu_{anf} + \eta H, \quad (2.27)$$

wobei μ_{anf} die Anfangspermeabilitätszahl und η die Rayleigh-Konstante ist. Die Magnetisierung weist einen linearen und einen quadratischen Anteil auf. Die auf- und absteigenden Zweige des Hystereseverlaufes werden durch getrennte Funktionen beschrieben, die sich lediglich im Vorzeichen des quadratischen Anteils unterscheiden:

$$B(H) = (\mu_{anf} + \eta H_1) H \pm \frac{\eta}{2} (H^2 - H_1^2), \quad (2.28)$$

mit H_1 als Spitzenwert der magnetischen Feldstärke. Das Rayleigh-Modell zeigt eine Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen für den Anfangsbereich der Magnetisierungskurve.

Das **Frölich-Modell** [25] gehört ebenfalls der Kategorie der analytischen Hystereseemodelle an, benutzt aber für den Ausdruck der Permeabilitätszahl als Funktion der magnetischen Feldstärke einen Polynom-Bruch:

$$\mu(H) = \frac{1}{\alpha + \beta |H|}, \quad (2.29)$$

wobei α und β die Parameter des Modells sind. Die Frölich-Gleichung selbst beschreibt einen hysteresefreien Verlauf, der Sättigungseffekte aufweist. Für die Beschreibung einer

vollständigen Magnetisierungskurve wird diese abschnittsweise durch verschobene Frölich-Kurven nachgebildet, wobei die Modellparameter für jeden Abschnitt einzeln ermittelt werden müssen. Das Frölich-Modell findet Einsatz bei der Parametrisierung gemessener Magnetisierungskurven.

Das **Preisach-Modell** [49, 55] verwendet eine Parallelschaltung von Hystereseoperatoren, deren Ausgänge gewichtet aufsummiert werden. Dadurch können Hystereseverläufe mit inneren Schleifen monofrequent nachgebildet werden. Die Bestimmung der Schwellenwerte der Hystereseoperatoren und der Gewichtungsfaktoren unterliegt statistischen Beschreibungen. Zur großen Verbreitung des Preisach-Modells haben die einfache Handhabung mit digitalen Rechnern sowie die Kombination mit modernen Verfahren wie Fuzzy-Logik und künstlichen neuronalen Netzen beigetragen. Heutzutage wird das Preisach-Modell mit seinen zahlreichen Erweiterungen in vielen Bereichen der Technik eingesetzt. Nachteilig ist jedoch die große Datenmenge, die zur Kalibrierung des Modells erforderlich ist.

Das **Hodgdon-Modell** [24] definiert die Abhängigkeit zwischen magnetischer Flussdichte und Feldstärke anhand einer Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dB}{dt} = \alpha \left| \frac{dH}{dt} \right| (f(H) - B) + \frac{dH}{dt} g(H), \quad (2.30)$$

wobei $f(H)$ eine ungerade und $g(H)$ eine gerade Funktion ist. Das Hodgdon-Modell setzt somit den Hystereseverlauf aus einem reversiblen und einem irreversiblen Anteil zusammen, die voneinander getrennt modelliert werden. Obwohl in erster Linie für monofrequente Erregung entworfen, wurde das Modell für die Wiedergabe frequenzabhängiger Magnetisierungsverläufe erweitert [25].

Das **Jiles-Atherton-Modell** [27, 28] ist ein dynamisches Hysteresemodell und wird aus der Energiebilanz des magnetisierten Werkstoffs hergeleitet. Die dem Werkstoff zugeführte Energie wird zum Teil im magnetischen Feld gespeichert, zum Teil irreversibel in Wärme umgewandelt. Für einen verlustfreien Werkstoff wird angenommen, dass der Verlauf der Magnetisierungskurve mit der statischen Magnetisierungskennlinie übereinstimmt. Die Verlustmechanismen werden anhand der Bewegung einer 180° Bloch-Wand modelliert. Es wird angenommen, dass die Verlustenergie einer infinitesimalen Verschiebung der Bloch-Wand proportional zur erfolgten Magnetisierungsänderung ist.

Das Jiles-Atherton-Modell definiert die im Material effektiv wirkende Feldstärke als Summe der angelegten magnetischen Feldstärke und eines Anteils der Magnetisierung:

$$H_e = H + \alpha M, \quad (2.31)$$

wobei α ein Modellparameter ist und aus Messungen ermittelt wird. Für die statische Magnetisierungskennlinie in Abhängigkeit der effektiven magnetischen Feldstärke wird die Langevin-Funktion angenommen:

$$M_{an}(H_e) = M_s \left(\coth\left(\frac{H_e}{a}\right) - \left(\frac{a}{H_e}\right) \right). \quad (2.32)$$

Die statische Magnetisierungskurve wird durch die Sättigungsmagnetisierung M_s und den Koeffizienten a beschrieben.

Das Modell beschreibt die Magnetisierung als eine Summe aus einem reversiblen und einem irreversiblen Anteil:

$$M = M_{rev} + M_{irr}. \quad (2.33)$$

Die differentielle Form der irreversiblen Magnetisierung ergibt sich aus der Energiebilanz

$$\frac{dM_{irr}}{dH} = \frac{M_{an}(H_e) - M_{irr}}{\delta k - \alpha(M_{an}(H_e) - M_{irr})}. \quad (2.34)$$

Hierbei ist k der Verlustkoeffizient und δ das Vorzeichen der Magnetisierungsänderung.

Die reversible Magnetisierung wird aus der Differenz der statischen und der irreversiblen Magnetisierung berechnet:

$$M_{rev} = c(M_{an}(H_e) - M_{irr}), \quad (2.35)$$

wobei c der reversible Koeffizient ist. Die Bestimmung der Modellparameter a , k , α und c erfolgt anhand ausgewählter Merkmale der Neukurve und des Hystereseverlaufes: Anfangsuszeptibilität, Sättigungsuszeptibilität, remanente Flussdichte, Koerzitivfeldstärke und differentielle Suszeptibilität im Remanenz- und Koerzitivpunkt.

Das Jiles-Atherton-Modell, ursprünglich auf monofrequente, sinusförmige Erregung beschränkt, ist ständig erweitert worden, so dass es derzeit für beliebige zeitveränderliche Magnetisierungsverläufe einsetzbar ist.

Künstliche neuronale Netze finden in der Hysteresemodellierung Anwendung bei der Anpassung von Modellparametern [7, 10], sowie als eigenständiges Black-Box-Modell [37, 46, 60]. Neuronale Netze berechnen die Ausgangsgröße als eine gewichtete nichtlineare Kombination der Eingangsgrößen. Vorherige Werte der Ein- und Ausgangsgrößen können ebenfalls als Eingangsgröße eingesetzt werden, wodurch Rückkopplungen und zeitliche Verzögerungselemente realisiert werden. Die Verzögerungselemente ermöglichen die Berücksichtigung der zeitlichen Ableitung der Eingangsgrößen. Hiermit stellen die neuronalen Netze eine geeignete Möglichkeit dar, komplexe Zusammenhänge nichtlinear zu interpolieren.

Die Gewichtungsfaktoren werden in einem Trainingsprozess anhand exemplarischer Testdatensätze ermittelt. Anschließend wird das neuronale Netz eingesetzt, um von den Testdatensätzen abweichende Verläufe zu modellieren. Hierbei interpoliert das neuronale Netz im angelernten Wertebereich. Der Erfolg des Verfahrens hängt von der geeigneten Wahl des Testdatensatzes und der Trainingsmethode ab. Die Trainingsdaten müssen den späteren Anwendungsbereich sinnvoll abdecken, um zu verhindern, dass das neuronale Netz mit nicht angelernten Situationen konfrontiert wird. Ein Übertrainieren des neuronalen Netzes führt dazu, dass das Netz so sehr auf die Trainingsdaten spezialisiert ist, dass es die Fähigkeit verliert im angelernten Wertebereich zu interpolieren.

Im Falle der weichmagnetischen Werkstoffe ist ein funktionaler Zusammenhang zwischen der magnetischen Feldstärke, der magnetischen Flussdichte und deren zeitlichen Ableitungen zu erkennen [14]. Hiermit ist eine wichtige Voraussetzung für die Modellierung der magnetischen Eigenschaften der Werkstoffe mit neuronalen Netzen erfüllt. Als Trainingsdatensätze eignen sich Magnetisierungsverläufe, die mit unterschiedlicher Änderungsgeschwindigkeit aufgenommen worden sind. Durch die Kombination aus Rückkopplung und Verzögerungselementen ist das Modell in der Lage, die Historie des Werkstoffes

zu berücksichtigen. Die Verzögerungselemente bilden die zeitliche Ableitung der Feldstärke und Flussdichte, so dass lediglich die Feldstärke Eingangsgröße des Netzes bzw. die Flussdichte die Ausgangsgröße ist. Eine Implementierung der neuronalen Netze mit der Flussdichte als Eingangsgröße und der Feldstärke als Ausgangsgröße ist ebenfalls möglich.

Eine Gemeinsamkeit der vorgestellten phänomenologischen Modelle ist die getrennte Betrachtung der gespeicherten Energie und der auftretenden Verluste. Sowohl beim Hodgdon-Modell als auch beim Jiles-Atherton-Modell werden der reversible und der irreversible Anteil des Magnetisierungsverlaufes gesondert modelliert. Aufgrund der Symmetrie der Materialkennlinie gegenüber dem Ursprung werden für die Nachbildung der gespeicherten Energie ungerade Funktionen eingesetzt. Die Verluste hingegen sind unabhängig von der Richtung des Energietransportes und werden somit mit geraden Funktionen modelliert.

Ein analoger Ansatz wird bei der Modellierung verlustbehafteter Induktivitäten mit weichmagnetischem Kern in der Netzwerkberechnung verfolgt [53]. Hier werden reale Spulen durch eine Parallelschaltung einer nichtlinearen Induktivität und eines ohmschen Widerstandes, der ebenfalls eine nichtlineare Charakteristik haben kann, modelliert. Die Induktivität bildet die gespeicherte Energie nach, während die Verluste in dem Widerstand umgesetzt werden. Hierbei entspricht die Induktivitätskennlinie der statischen Magnetisierung. Diese Art der Modellierung betrachtet die Spule mit Kern als einen Transformator. Der leitfähige Kern stellt dabei die kurzgeschlossene Sekundärwicklung des Transformators dar, die vollständig die Feldlinien umschließt und somit keine Streuung aufweist. Die Wirbelströme entsprechen einem Sekundärstrom, der sich transformiert im Primärkreis wiederfindet.

Basierend auf den oben vorgestellten Modellierungsansätzen wird im weiteren Verlauf dieses Kapitels ein auf die Anforderungen der Feldberechnung angepasstes Werkstoffmodell hergeleitet. Die Energiespeicherung und die auftretenden Verluste werden dabei getrennt betrachtet.

2.2.1 Beschreibung des Vorgangs der Energiespeicherung

In Anlehnung an das Netzwerkmodell der verlustbehafteten Induktivität beruht das hier vorgestellte Hysteresemodell auf einer strikten Trennung zwischen der gespeicherten Energie und den Verlusten. Für die gespeicherte Energie wird eine statische Kennlinie angenommen, analog zur statischen Magnetisierungskennlinie aus dem Jiles-Atherton-Modell. Die Verluste werden ausschließlich als Wirbelstromverluste modelliert. Die in der Feldberechnung eingesetzte Permeabilitätszahl widerspiegelt somit nur den Vorgang der Energiespeicherung, während die Verluste durch eine Anpassung der Konduktivität des Werkstoffes implementiert werden.

Aus dem Magnetisierungsverlauf ergeben sich als Kenngrößen des Energiespeichers die Kommutierungspunkte. Diese entsprechen dem Übergangspunkt zwischen Energieeintrag in den Werkstoff und Energieentnahme aus dem Werkstoff und sind durch ein Maximum der magnetischen Flussdichte gekennzeichnet [4]. Entsprechend dem Induktionsgesetz ist zu diesem Zeitpunkt die induzierte Spannung Null, so dass keine Verluste durch Wirbelströme auftreten. Die Kommutierungskurve wird anhand von Magnetisierungsverläufen mit unterschiedlichen Auslenkungen aufgenommen, als geometrischer Ort aller Punkte maximaler Flussdichte gebildet (Bild 2.12 a) und entspricht dem rein induktiven Anteil des Magnetisierungsverlaufes.

Bild 2.12 b) zeigt den geringen Einfluss der Frequenz des Magnetisierungsvorganges auf die Kommutierungskurve im untersuchten Bereich. Bedingt durch die erhöhte Leistungsaufnahme, können die Magnetisierungsverläufe für höhere Frequenzen nur mit reduzierter Auslenkung aufgenommen werden.

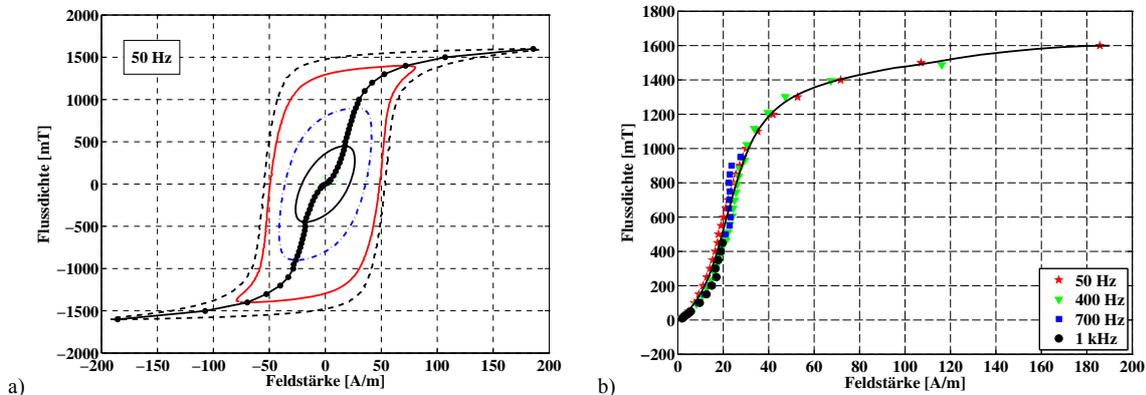


Bild 2.12: Exemplarische Kommutierungskurve weichmagnetischer Werkstoffe (C165-35):

a) Vergleich mit den Magnetisierungsverläufen; b) Frequenzeinfluss

In Bezug auf die Erregerfrequenz weist die Permeabilitätszahl ab einer werkstoffspezifischen Grenzfrequenz eine kontinuierliche Abnahme auf (Bild 2.13). Für die Kommutierungskurve äußert sich dies durch eine kontinuierliche Abflachung mit dem Überschreiten der Grenzfrequenz. Physikalisch wird diese Frequenzabhängigkeit auf einer Seite durch die Trägheit der Elementardipole erklärt, die dem sich schnell ändernden Erregerfeld nicht mehr folgen können, auf der anderen Seite durch den Skin-Effekt, wodurch die Wirbelströme an der Oberfläche verdrängt werden und somit verhindern, dass die Feldlinien ins Innere des Werkstoffes eindringen können. Für weichmagnetische Werkstoffe liegt die Grenzfrequenz im oberen kHz-Bereich, so dass für die in der Energietechnik relevanten Frequenzen die Permeabilitätszahl und die Kommutierungskurve als frequenzunabhängig angesehen werden können [12, 47].

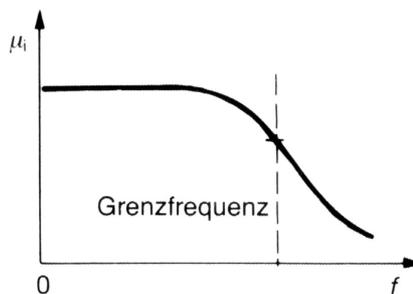


Bild 2.13: Frequenzabhängigkeit der Permeabilitätszahl [12]

Die Abhängigkeit der Permeabilitätszahl von der magnetischen Flussdichte bzw. Feldstärke wird in Bild 2.14 exemplarisch dargestellt. Die Verläufe sind bezogen auf die Ordinate symmetrisch und nur für positive Feldgrößen dargestellt. Für den feldfreien Zustand nimmt die Permeabilitätszahl einen von Null verschiedenen Wert an, Anfangspermeabilität genannt. Aufgrund der Symmetrie entspringt der Verlauf der Permeabilitätszahl in einem rechten Winkel zur Ordinate. Mit steigender Feldstärke nimmt die Permeabilitätszahl zu, bis sie im Wendepunkt der Kommutierungskurve ihr Maximum erreicht und dann bis auf die Vakuumpermeabilitätszahl fällt. Für hohe Feldstärken strebt der Verlauf somit asymptotisch gegen Eins.

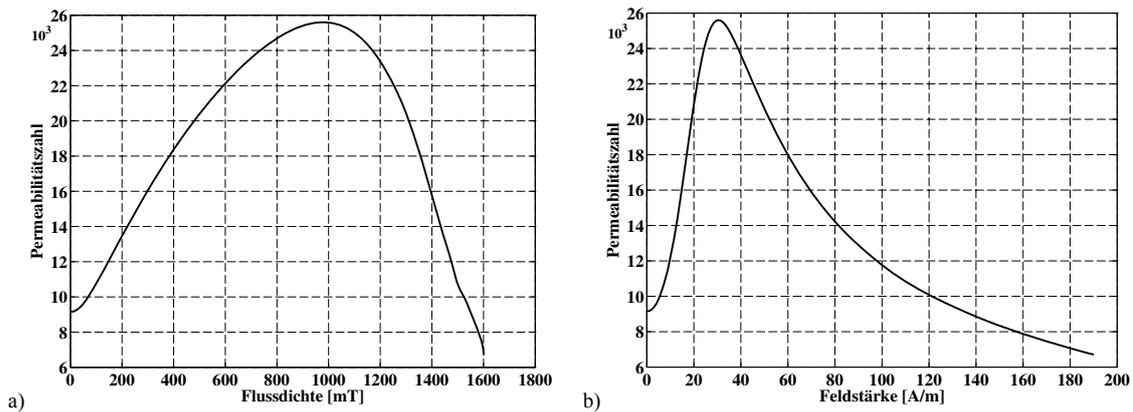


Bild 2.14: Permeabilitätszahl als Funktion der magnetischen Flussdichte a) bzw. Feldstärke b)

Für die Approximationsfunktion der Permeabilitätszahl ergeben sich somit die Bedingungen, dass sie für kleine Feldstärken asymptotisch gegen den Wert der Anfangspermeabilität strebt, ein Maximum aufweist und dann für hohe Feldstärken asymptotisch gegen Eins strebt. Zusätzlich sollen der Wert, bei dem das Maximum erreicht wird, sowie die Steilheit des ansteigenden und abfallenden Astes definierbar sein. Als Lösungsansatz wird das Produkt zweier *Smooth-Heaviside-Funktionen* gewählt. Eine Smooth-Heaviside-Funktion ist eine geglättete Sprungfunktion, die ableitbar und stetig ist:

$$h(x) = \frac{1}{1 + e^{a(x+x_0)}}. \quad (2.36)$$

Die Funktion nimmt Werte zwischen Eins und Null an. Der Übergang verläuft flach und wird über die Parameter a und x_0 eingestellt, wobei a die Steilheit und x_0 den Übergangspunkt bestimmt.

Die verwendete Approximationsfunktion der Permeabilitätszahl entspricht der Gleichung

$$\mu_r(B) = 1 + a \cdot \left(1 - \frac{b}{1 + e^{c \cdot \ln(B/1T + d)}} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 + e^{f \cdot (B/1T + g)}} \right), \quad (2.37)$$

wobei die Parameter a und b für die vertikale Skalierung der Funktion erforderlich sind und die Parameter c und d bzw. f und g jeweils die Steilheit und den Übergangspunkt des steigenden und fallenden Astes bestimmen. Bild 2.15 a) verdeutlicht, wie sich der Verlauf der Permeabilitätszahl (durchgezogene Linie) aus den zwei Smooth-Heaviside-Funktionen zusammensetzt. Die erste Funktion (gestrichelte Linie) ist gegenüber der Abszisse gespiegelt und nimmt Werte im Bereich $[1-b, 1]$ an. Zusätzlich wird durch Logarithmieren ihr Definitionsbereich auf $(0, \infty)$ abgebildet, um somit im Ursprung die Steigung Null zu erzwingen und die Symmetriebedingungen der Permeabilitätsfunktion einzuhalten. Die zweite Funktion (gepunktete Linie) wird so gewählt, dass sich die Übergangsbereiche beider Funktionen überschneiden. Die somit erhaltene Approximation ist stetig und differenzierbar und erfüllt die Voraussetzungen bezüglich der Robustheit, die die Feldberechnung stellt. Für beliebige Werte der Flussdichte liefert sie eine gültige Permeabilitätszahl, so dass auch Felderhöhungen an Ecken und Kanten kein Problem darstellen. Bild 2.15 b) zeigt den Verlauf der Ableitung der Approximationsfunktion in logarithmischer Darstellung. Die Ableitung entspringt im Ursprung und verläuft ab dem Erreichen der Sättigung auf der Nulllinie.

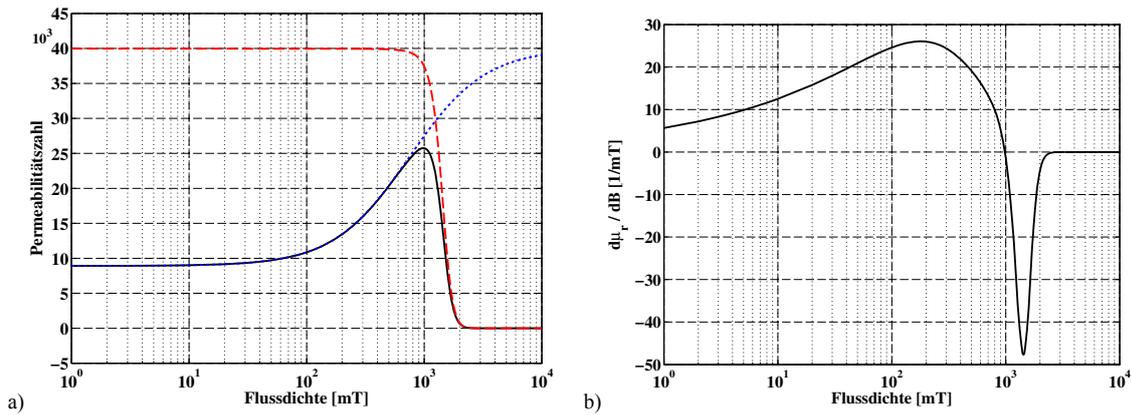


Bild 2.15: Approximation der nichtlinearen Permeabilitätszahl a) und ihre Ableitung b)

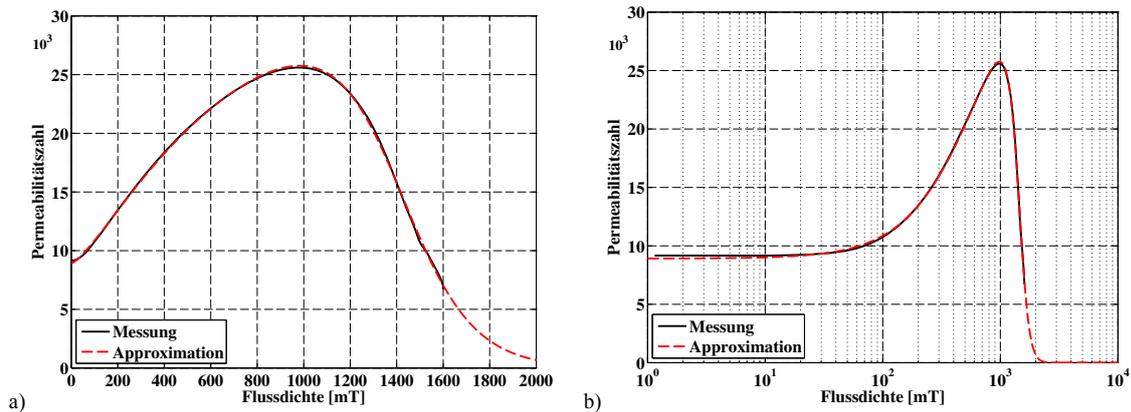


Bild 2.16: Vergleich zwischen gemessener Permeabilitätszahl und Approximation in a) linearer und b) logarithmischer Darstellung

Die Übereinstimmung der gemessenen Permeabilitätszahl mit deren Approximation ist in Bild 2.16 anhand eines weichmagnetischen Materials (C165-35) dargestellt. Die Flussdichte ist sowohl linear als auch logarithmisch skaliert, um auch den Anfangsbereich des Verlaufes detailreich darzustellen.

2.2.2 Nachbildung der geometrieabhängigen magnetischen Umpolarisierungsverluste

Im Allgemeinen werden die Verluste eines magnetischen Kreises nach ihrer Ursache in Ummagnetisierungs- und Wirbelstromverluste eingeteilt. Die Ummagnetisierungsverluste sind durch Vorgänge auf molekularer Ebene bedingt, während die Wirbelstromverluste aufgrund der Konduktivität der magnetischen Werkstoffe entstehen [23].

Die Ummagnetisierungsverluste beruhen in erster Linie auf Fehlstellen der Gitterstruktur, die eine Bewegung der Bloch-Wände verhindern [13]. Somit ist ein erhöhter Energieeintrag nötig, um eine Bloch-Wand über einer Fehlstelle zu verschieben. Das ansteigende Erregerfeld führt in diesem Fall nicht zu einer Zunahme der Magnetisierung des Werkstoffs, sondern zu einer Erhöhung der inneren Energie, wodurch Gitterschwingungen verursacht werden. Beim Erreichen einer kritischen, fehlstellspezifischen Energie kann die Magnetisierung dem angelegten Feld weiter folgen. Diese sprunghafte Änderung der Magnetisierung kann messtechnisch nachgewiesen werden und wird als Barkhausen-sprung bezeichnet. Die molekularen Schwingungen, die zu den Ummagnetisierungsverlusten führen, können zu einem Verluststrom zusammengefasst werden. Die Ummagnetisierungsverluste finden Anwendung bei der Entmagnetisierung von Werkstoffproben. Durch periodische Erregung mit immer kleiner werdender Amplitude kommen die Bloch-

Wände an energetisch immer schwächeren Fehlstellen zum Stillstand, bis die Restmagnetisierung des Werkstoffes vernachlässigbar ist.

Die Wirbelstromverluste sind eine Folge der im leitfähigen Kern induzierten Wirbelströme. Hierbei kommt zum Tragen, dass die messtechnische Erfassung weichmagnetischer Werkstoffe auf dem Funktionsprinzip des Transformators beruht. Die Geometrieabhängigkeit der Wirbelströme führt dazu, dass die gemessenen Verluste keine reine Werkstoffeigenschaft sind, sondern eine Eigenschaft des untersuchten Transformators. Der Messaufbau sieht zwei Wicklungen vor, die um den Probekörper gewickelt sind. In der Primärseite wird ein Strom eingeprägt, der anhand des Durchflutungsgesetzes mit dem angelegten magnetischen Feld verknüpft ist. In der Sekundärwicklung wird hochohmig die induzierte Spannung gemessen, um somit einen Stromfluss zu vermeiden, der sowohl die Spannungsmessung verfälschen als auch die Voraussetzung, dass der Primärstrom allein die magnetische Feldstärke beeinflusst, verletzen würde. Zusätzlich stellen jedoch die Wirbelströme in dem leitfähigen Kern eine weitere Transformatorwicklung dar, die im Kurzschluss betrieben wird. Diese entnimmt dem magnetischen Kreis Energie und beeinflusst somit den Primärstrom. Bei der Bestimmung der Werkstoffeigenschaften ist die magnetische Feldstärke mit dem Primärstrom verknüpft, so dass sich jede Änderung des Primärstromes im Verlauf der Feldstärke widerspiegelt. Werden vom gemessenen Primärstrom der Wirbelstrom und der Molekularstromanteil abgezogen, bleibt der Anteil der gespeicherten Energie übrig, der über die Kommutierungskurve mit der magnetischen Flussdichte verknüpft ist.

Die in dieser Arbeit vorgestellte Modellierung sieht vor, dass die Permeabilitätszahl ausschließlich die gespeicherte Energie beschreibt. Verluste werden nach dem transformatorischen Prinzip in einen ohmschen Stromfluss umgesetzt und durch die Konduktivität des Magnetkerns nachgebildet. In der Praxis werden magnetische Kerne geblecht ausgeführt, um die Wirbelstromverluste zu minimieren. Im Rahmen der Feldberechnung wird die Blechung, wegen der damit verbundenen Modellkomplexität, nicht berücksichtigt, so dass die magnetischen Kreise durch zusammenhängende Bereiche modelliert werden. Der Wert für die Konduktivität ist somit für die Simulation eine geometrieabhängig angepasste Größe, die so gewählt sein muss, dass in dem geblechten Kern und in der Simulation gleichgroße Verluste auftreten. Dieser Wert kann in der Feldberechnung nur anhand von Messungen angepasst werden.

Die Blechungsrichtung der Kerne entspricht der angelegten Feldrichtung. Das führt dazu, dass die äquivalente Konduktivität des magnetischen Kreises eine Richtungsabhängigkeit aufweist. Im Falle rotationssymmetrischer Spulenanordnungen lässt sich aufgrund der Orientierung des magnetischen Feldes die Vereinfachung treffen, dass die Wirbelströme ausschließlich in azimuthaler Richtung verlaufen.

Für die Betrachtung des Energieflusses im elektromagnetischen Feld wird im allgemeinen Fall der Poynting-Vektor verwendet:

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} . \quad (2.38)$$

Der Fluss des Poynting-Vektors durch die Hüllfläche ∂V des Volumens V entspricht der Summe der Änderung der innerhalb des Volumens im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherten Energie und der im Volumen umgesetzten Wärme:

$$-\oint_{\partial V} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \iiint_V E \frac{\partial D}{\partial t} dV + \iiint_V H \frac{\partial B}{\partial t} dV + \iiint_V \sigma E^2 dV . \quad (2.39)$$

Hierbei beträgt die im magnetischen Feld auf das Volumenelement bezogene, eingespeiste spezifische Energie

$$w_m = \int H \frac{\partial B}{\partial t} dt . \quad (2.40)$$

Zur Verdeutlichung der zeitlichen Entwicklung des Energieflusses im magnetischen Kreis sind in Bild 2.17 die zeitlichen Verläufe der magnetischen Feldstärke, der magnetischen Flussdichte, derer zeitlichen Ableitung, der spezifischen Leistungsdichte und der spezifischen Energie sowie die dazugehörige Hysteresekurve für lineares Werkstoffverhalten exemplarisch dargestellt. Aufgrund der auftretenden Verluste wird ein Phasenversatz zwischen magnetischer Feldstärke und Flussdichte verzeichnet, wobei die Flussdichte der Feldstärke nacheilt. Entsprechend wird der Nulldurchgang der zeitlichen Ableitung der Flussdichte nach dem Feldstärkenmaximum erreicht. Die spezifische Leistungsdichte weist bis zum Nulldurchgang der zeitlichen Ableitung der Flussdichte ein positives Vorzeichen auf und bleibt dann bis zum Nulldurchgang der Feldstärke negativ. Die Bereiche positiver Leistungsdichte sind mit durchgezogener Linie dargestellt, die Bereiche negativer Leistungsdichte mit gestrichelter Linie. Die im magnetischen Kreis eingespeiste Energie weist nach einer Periode einen von Null verschiedenen, positiven Wert auf, der der in Wärme umgesetzten Wirkleistung, entspricht. Bezogen auf die Hysteresekurve wird im Bereich zwischen Remanenzpunkt und Punkt maximaler Flussdichte Energie in den magnetischen Kreis eingespeist, während zwischen dem Punkt maximaler Flussdichte und dem Remanenzpunkt Energie aus dem magnetischen Kreis zurückgespeist wird.

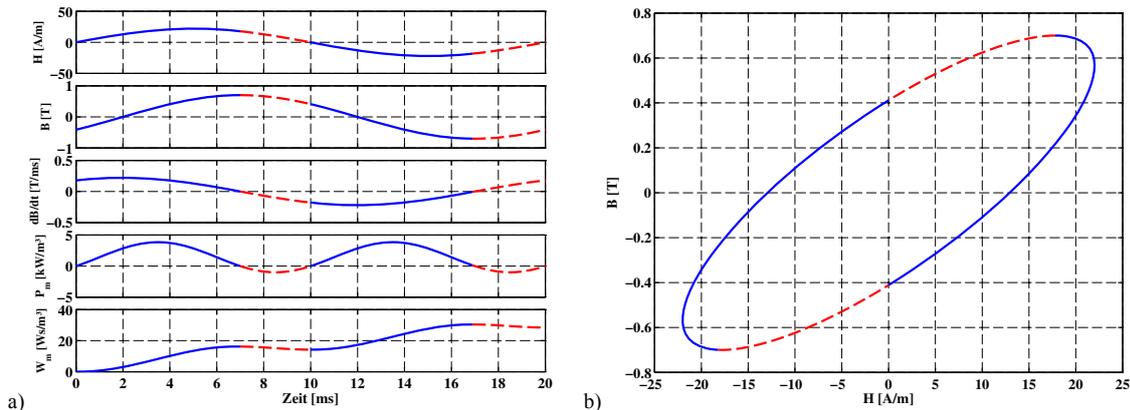


Bild 2.17: Zeitliche Darstellung des Energieflusses im magnetischen Kreis a) und dazugehörige Hysteresekurve b)

Unter Anwendung der Substitutionsregel für (2.40) ergibt sich für die innerhalb einer Periode eingespeiste spezifische magnetische Energie

$$w_m = \int_0^T H \frac{\partial B}{\partial t} dt = \int_{-B}^B H(B) dB + \int_B^{-B} H(B) dB . \quad (2.41)$$

Somit entspricht die während einer Periode umgesetzte, auf das Volumen bezogene, spezifische Wärme der von der Hysteresekurve umspannten Fläche.

Wie in Kapitel 2.2.1 gezeigt, wird durch den in dieser Arbeit gewählten Ansatz für die Modellierung der Permeabilität nur die Kommutierungskurve nachgebildet, so dass in diesem Fall die modellierte magnetische Feldstärke und die Flussdichte keinen Phasenversatz zueinander aufweisen. Für die Modellierung der magnetischen Verluste wird der letzte Term aus dem Poynting-Satz (2.39) verwendet, wobei für die elektrische Feldstärke die

induzierte Feldstärke eingesetzt wird. Die in einer Periode umgesetzte spezifische ohmsche Verlustleistung entspricht somit

$$w_W = \int_0^T \sigma E_{ind}^2 dt . \quad (2.42)$$

Die induzierte Feldstärke wird gemäß (1.28) aus der magnetischen Flussdichte abgeleitet:

$$\text{rot } \vec{E}_{ind} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} . \quad (2.43)$$

Für die Modellierung der magnetischen Verluste wird die elektrische Konduktivität σ aus (2.42) einschließlich der Oberflächenleitfähigkeit so bestimmt, dass (2.41) und (2.42) gleich sind. Um Gleichung (2.42) auswerten zu können, wird erst die Differentialgleichung (2.43) gelöst, was aufgrund der Rotation im allgemeinen Fall nur numerisch möglich ist. Die elektrische Konduktivität wird als konstant angenommen, was den einfachsten Ansatz darstellt, jedoch, wie im Folgenden an einer Ringkernprobe exemplarisch gezeigt wird, eine ausreichende Genauigkeit für die Modellierung der Verluste liefert.

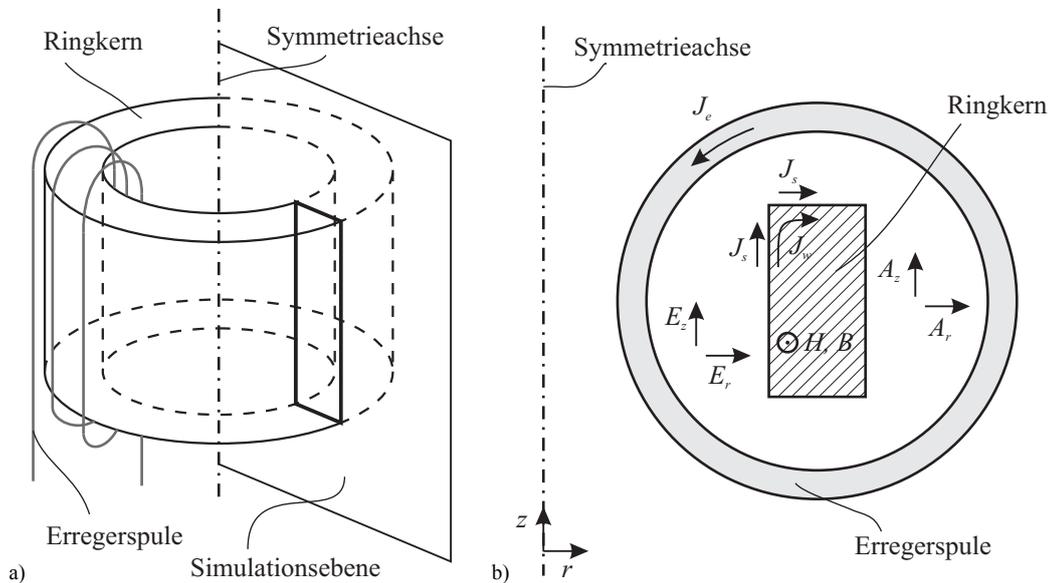


Bild 2.18: Schematische Darstellung der Ringkernprobe a) und der gewählten Simulationsebene mit den relevanten Feldgrößen b)

Für die Validierung des Hysterese-modells wird eine Ringkernprobe bevorzugt, da aufgrund ihrer Symmetrie eine annähernd homogene Verteilung des magnetischen Feldes erreicht wird und die magnetische Streuung vernachlässigbar ist. Somit ist die Ringkernprobe die ideale Konfiguration zur messtechnischen Erfassung der magnetischen Werkstoff-eigenschaften. Ein weiterer Vorteil der Ringkernprobe ergibt sich aus dem symmetrischen Aufbau, wodurch eine axialsymmetrische Simulation der Anordnung möglich ist. In Bild 2.18 a) ist die gewählte Anordnung schematisch dargestellt. Um einen Ringkern aus weichmagnetischem Werkstoff ist konzentrisch eine Erregerspule angeordnet. Die Simulationsebene verläuft senkrecht zur Umlaufrichtung des Ringkerns entlang der Symmetrieachse.

Die Simulationsebene und die relevanten Feldgrößen sind in Bild 2.18 b) dargestellt. Durch die Symmetrieannahme wird vorausgesetzt, dass der Strom keine azimutale Komponente hat, sondern in der r, z -Ebene konzentrisch um den Ringkern fließt. Entsprechend

hat das magnetische Feld ausschließlich eine azimutale Komponente und verläuft in Umlaufrichtung des Ringkerns. Als unabhängige Variable der Berechnung wird das magnetische Vektorpotential gewählt, das senkrecht zum magnetischen Feld gerichtet ist und keine azimutale Komponente hat. Die Differentialgleichung der Feldberechnung leitet sich aus der Differentialgleichung des elektromagnetischen Feldes (1.35) ab, die unter Berücksichtigung der Axialsymmetrie und der Definition der Rotation in Zylinderkoordinaten als ein System von zwei Gleichungen geschrieben werden kann:

$$\sigma \frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \right) = J_{er} \quad \text{und} \quad (2.44a)$$

$$\sigma \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \right) = J_{ez}. \quad (2.44b)$$

Dabei stellt jeweils der erste Term auf der linken Seite der Gleichung die Wirbelstromdichte dar, wodurch die Verluste im magnetischen Kreis modelliert werden. Ebenfalls auf der linken Seite steht die Durchflutung des magnetischen Kreises, wobei μ_r eine Funktion der magnetischen Flussdichte ist und die Kommutierungskurve nachbildet. Auf der rechten Seite der Gleichung steht die in der Erregerspule eingeprägte Stromdichte als Quellterm der Berechnung.

Zusätzlich wird für den Potentialanteil des magnetischen Vektorpotentials die Coulomb-Konvention (1.36) angenommen:

$$\frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \quad (2.45)$$

Für die eingeprägte Stromdichte ergibt sich aus der Bedingung, dass der Stromfluss in der torusförmigen Strombahn in jedem Punkt des Querschnittes gleich ist,

$$J_{er} = -\frac{I}{2\pi r d} \frac{z - z_0}{\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad \text{und} \quad (2.46a)$$

$$J_{ez} = \frac{I}{2\pi r d} \frac{r - r_0}{\sqrt{(r - r_0)^2 + (z - z_0)^2}}, \quad (2.46b)$$

wobei I die eingeprägte Stromstärke, d die im Modell angenommene Dicke der Strombahn und r_0, z_0 der Mittelpunkt der Anordnung ist.

Die magnetische Flussdichte und die elektrische Feldstärke werden direkt aus dem magnetischen Vektorpotential bestimmt:

$$B_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \quad E_r = \frac{\partial A_r}{\partial t} \quad \text{bzw.} \quad E_z = \frac{\partial A_z}{\partial t}. \quad (2.47)$$

Um die Verluste zu minimieren, werden magnetische Kreise in der Regel geblecht ausgeführt. Dieses trägt zu einer Reduktion der Wirbelströme bei und verhindert die Verdrängung des magnetischen Feldes aus dem Werkstoff aufgrund der sich ergebenden Eindringtiefe des Feldes. Die Eindringtiefe des elektromagnetischen Feldes beträgt

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_0 \mu_r \sigma}}, \quad (2.48)$$

so dass aufgrund der hohen Permeabilität weichmagnetischer Werkstoffe auch bei tiefen Frequenzen wie zum Beispiel 50 Hz eine Eindringtiefe von wenigen mm erreicht wird.

In der Simulation wird der magnetische Kreis als ein zusammenhängender Bereich unter Vernachlässigung der Blechung modelliert. Die äquivalente Konduktivität des magnetischen Kreises ist in der Regel niedriger als die Konduktivität des eingesetzten Werkstoffes, wodurch die Eindringtiefe in der Simulation höher ist, jedoch ist dieses nicht ausreichend, um eine Konzentration des magnetischen Flusses an der Oberfläche des magnetischen Kreises zu verhindern. Dieses widerspricht der Annahme, die der Gleichung (2.24) zugrunde liegt, dass das magnetische Feld gleichmäßig über den Querschnitt des Werkstoffes verteilt ist. Um keine unerlaubte Feldverdrängung hervorzurufen, wird zusätzlich eine Oberflächenstromdichte \vec{J}_s definiert, die ebenfalls von der induzierten Feldstärke \vec{E}_{ind} abhängt und den Verluststrom außerhalb der Probe nachbildet. Die Wirbelstromdichte \vec{J}_w wird verwendet, um die Frequenzabhängigkeit der Permeabilität (siehe Bild 2.13) abzubilden. Entsprechend muss die äquivalente Konduktivität des magnetischen Kreises so gewählt werden, dass die Feldverdrängung bei der gleichen Frequenz wie im geblechten Kreis eintritt.

Der simulierte Hystereseverlauf entsteht durch Überlagerung des reversiblen und des irreversiblen Anteils des magnetischen Feldes. Analog zum Netzwerkmodell einer realen Spule werden die magnetischen Feldstärken des Energiespeichers und der Verlustmechanismen miteinander addiert. Der Vorgang wird in Bild 2.19 sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Fall beschrieben. Die dargestellten Ergebnisse sind durch eine Feldberechnung ermittelt worden, wobei die Klemmengrößen durch Integration der Stromdichten bzw. der elektrischen Feldstärke berechnet worden sind.

In Bild 2.19 a) ist der zeitliche Verlauf der Klemmengrößen der Ringkernanordnung für den linearen Fall dargestellt. Die Zeitachse entspricht drei Perioden, wobei der Einschwingvorgang mit dargestellt wird, so dass alle Verläufe im Ursprung beginnen und einen abklingenden Gleichanteil aufweisen. Die induzierte Spannung entspricht der Ableitung der magnetischen Flussdichte (dargestellt in Bild 2.19 c) und eilt dieser um 90° voraus. Der ohmsche Stromanteil ist über den Eisenverlustwiderstand mit der induzierten Spannung verknüpft und somit mit dieser in Phase. Der induktive Stromanteil ist zum magnetischen Fluss proportional und somit mit der magnetischen Flussdichte in Phase. Der Gesamtstrom entspricht der Summe des ohmschen und des induktiven Anteils. Die magnetische Feldstärke verhält sich proportional zum Stromfluss gemäß Gleichung (2.23). Somit entspricht die magnetische Feldstärke des Energiespeichers dem induktiven Strom und die magnetische Feldstärke der Umpolarisierungsverluste dem ohmschen Strom. Die resultierende magnetische Feldstärke ist mit dem Gesamtstrom in Phase und somit der magnetischen Flussdichte voreilend. Der Hystereseverlauf (Bild 2.19 e) setzt sich aus der magnetischen Flussdichte und der resultierenden Feldstärke zusammen. In dem Diagramm wurde auch die Kennlinie des Energiespeichers eingetragen. Die Schnittpunkte der Energiespeicherkennlinie mit dem Hystereseverlauf entsprechen dem Punkt, an dem der Energiefluss seine Richtung ändert. Bis zum Schnittpunkt wird Energie im magnetischen Kreis gespeichert, ab dem Schnittpunkt wird die im magnetischen Kreis gespeicherte Energie verbraucht.

Im nichtlinearen Fall (Bild 2.19 b, d und f) ist der Verlauf der magnetischen Flussdichte stark verzerrt, wodurch auch der Verlauf der induzierten Spannung ein nichtlineares Verhalten aufweist. Der ohmsche Strom entspricht dem Verlauf der induzierten Spannung. Der induktive Strom ist über der Kennlinie des Energiespeichers mit dem magnetischen

Fluss gekoppelt, so dass auf diesem Stromverlauf Sättigungsspitzen auftreten. Durch die abnehmende Permeabilität bei höheren Flussdichten sinkt auch die Induktivität der Anordnung, so dass der induktive Strom überproportional ansteigt. Die magnetische Feldstärke ergibt sich aus dem Stromverlauf auf analoge Art und Weise wie im linearen Fall.

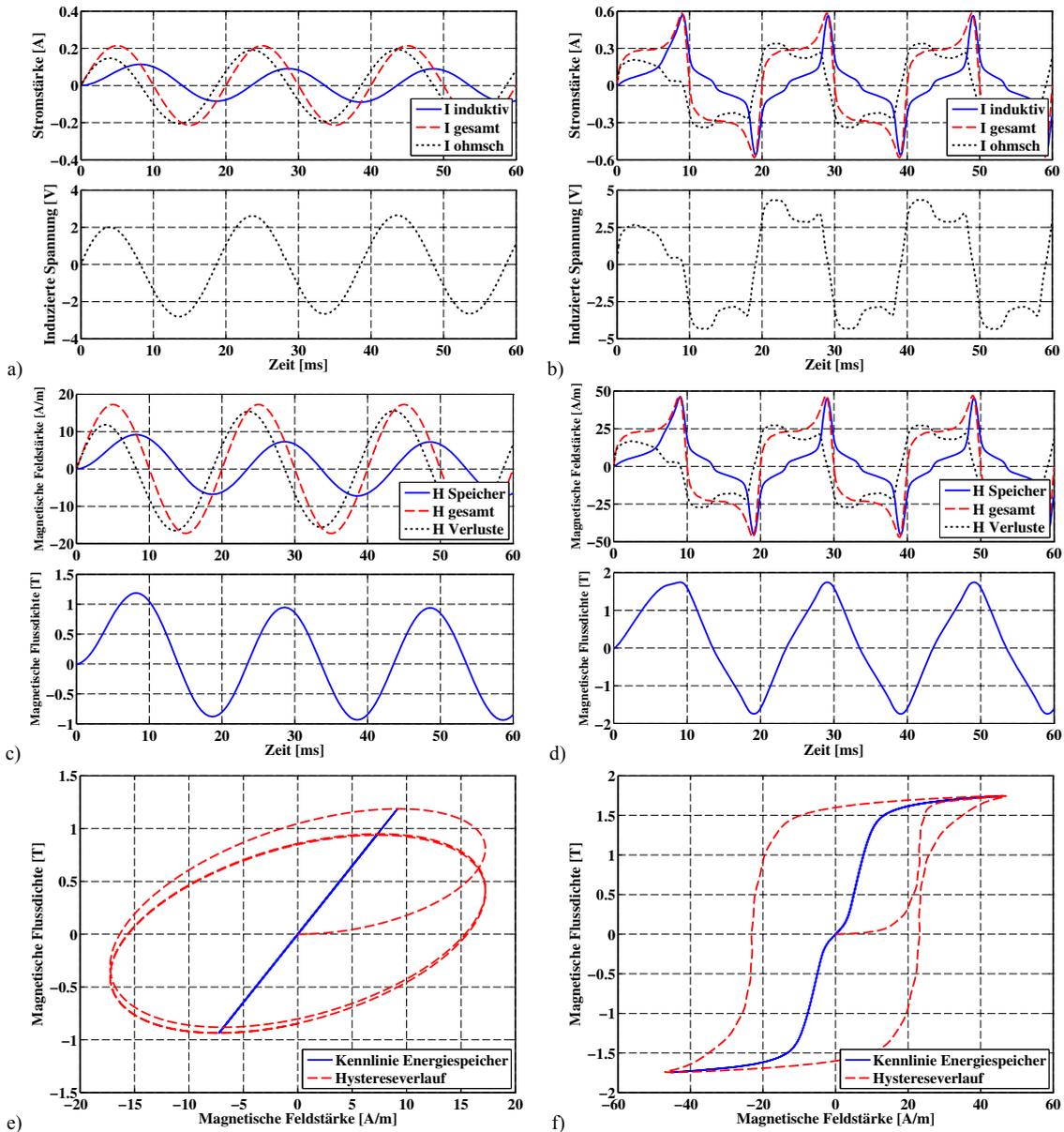


Bild 2.19: Überlagerung des reversiblen und des irreversiblen Anteils zur Hysteresekurve für den linearen und den nichtlinearen Fall: a) und b) zeitlicher Verlauf der Klemmengrößen; c) und d) zeitlicher Verlauf der Feldgrößen; e) und f) Hysteresekurven

Bild 2.20 zeigt gemessene und simulierte Magnetisierungsverläufe einer Ringkernprobe im Vergleich. Dargestellt sind Magnetisierungsverläufe mit einer Grundfrequenz von 50, 60, 100 und 200 Hz. Aufgrund der begrenzt zur Verfügung stehenden Leistung des verwendeten Messsystems nimmt mit steigender Frequenz die Amplitude der gemessenen Verläufe ab. Messungen mit höheren Frequenzen sind mit dem vorhandenen Messsystem nur im quasilinearen Bereich möglich und somit für die Modellierung des nichtlinearen Werkstoffverhaltens nicht mehr von Interesse. Die Simulationsergebnisse zeigen eine Übereinstimmung zu den gemessenen Verläufen, so dass die hier vorgestellte Modellierung zur Berechnung verlustbehafteter nichtlinearer magnetischer Kreise geeignet ist. Die

Ursachen der Abweichungen zwischen Messung und Simulation werden im Folgenden erläutert.

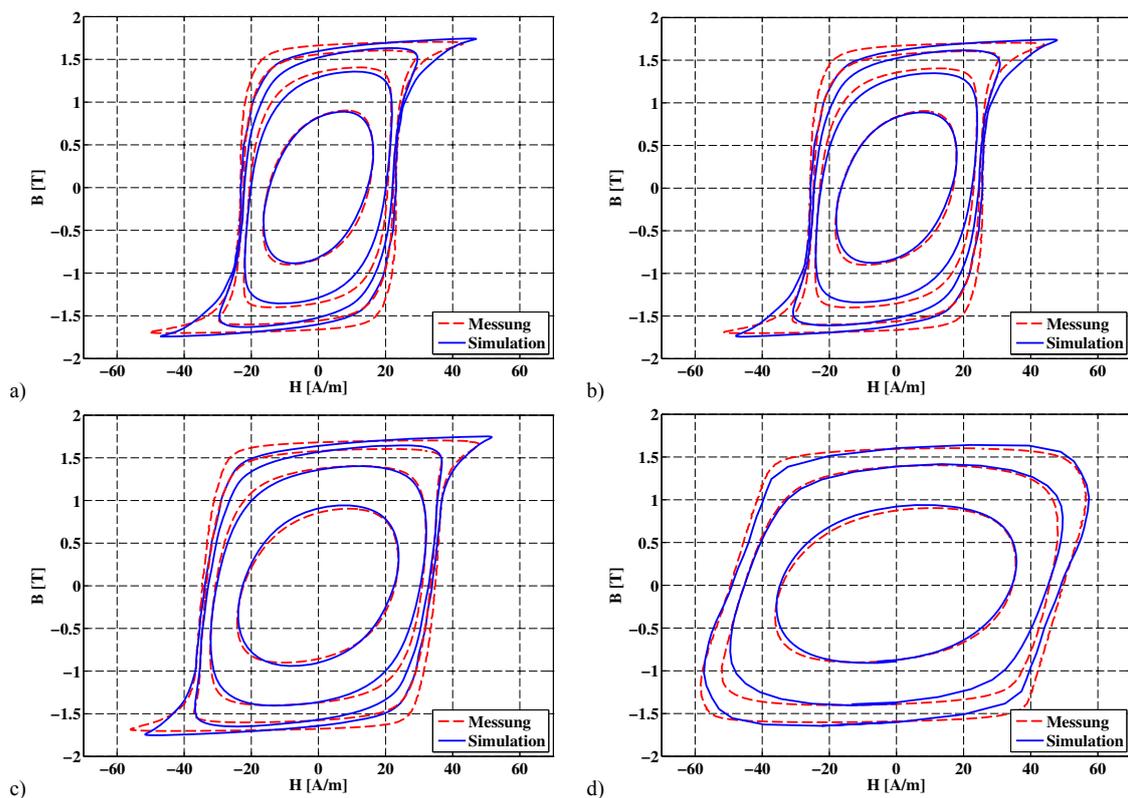


Bild 2.20: Vergleich der gemessenen und simulierten Magnetisierungsverläufe der Ringkernprobe für unterschiedliche Frequenzen:
a) 50 Hz, b) 60 Hz, c) 100 Hz und d) 200 Hz

Die Norm schreibt vor, dass bei der messtechnischen Erfassung der magnetischen Materialeigenschaften ein sinusförmiger magnetischer Fluss eingestellt wird [5]. Somit verwenden moderne mikroprozessorgesteuerte Hysteresegraphen einen Regelkreis, der den Erregerstrom so einstellt, dass die induzierte Spannung sinusförmig ist. In der hier vorgestellten Feldberechnung ist diese Möglichkeit nicht implementiert, so dass lediglich der aus der Messung erhaltene Erregerstrom in die Simulation eingespeist werden kann. Damit weicht der Verlauf der magnetischen Flussdichte in der Simulation von dem idealen sinusförmigen Verlauf, so wie er während der Messung erreicht worden ist, ab.

Des Weiteren sind die gemessenen Hystereseverläufe nicht perfekt symmetrisch. Obwohl die Probe vor jeder Messung entmagnetisiert wird, verbleibt ein geringer Gleichanteil, der dazu führt, dass die Probe unterschiedlich weit in der positiven und negativen Richtung ausgelenkt wird. Die simulierten Daten sind perfekt symmetrisch, so dass beim Vergleich der Ergebnisse eine leichte Verschiebung der beiden Kurven zueinander im Kauf genommen werden muss.

Die mit den oben getroffenen Annahmen modellierten Verluste sind von der induzierten Spannung quadratisch abhängig und weisen somit eine quadratische Abhängigkeit von der Frequenz des Erregerfeldes auf. Die erreichte Genauigkeit ist für den Fall, dass die Wirbelstromverluste gegenüber den Ummagnetisierungsverlusten dominant sind, ausreichend. Dieses ist für energietechnische Anwendungen der Regelfall, so dass das Modell die Grundfrequenz und die auftretenden Oberschwingungen abdeckt.

3 Modellierung komplexer Betriebsmittel am Beispiel eines Stabzündtransformators

Hochspannungszündtransformatoren zählen zu den Kernkomponenten moderner Verbrennungsmotoren und -kraftwerke. Aktuelle Fahrzeuge sind mit zylinderselektiver Zündung ausgerüstet, so dass für jeden Zylinder ein Zündtransformator benötigt wird. Dieser ist im Kerzenschacht direkt über der Zündkerze positioniert, um so die Übertragungsverluste zu minimieren, und stellt die benötigte Hochspannung sowie eine ausreichende Funkenenergie zur Verfügung, um die sichere Entflammung in jedem Arbeitspunkt des Motors einzuleiten. Aus diesem Einsatzort ergeben sich in mehrfacher Hinsicht extreme Ansprüche an die Transformatorauslegung: knapp bemessenes Bauvolumen mit einer für Transformatoren ungünstigen schlanken Bauform, schnelle Änderung der Umgebungstemperatur, vor allem im Winter, und hohe Beschleunigungen in Folge der Motorvibrationen. Besondere Aufmerksamkeit muss dabei der Auslegung des Isolationssystems gewidmet werden, da bei den engen geometrischen Verhältnissen die Grenzen der elektrischen Belastbarkeit erreicht werden. Eine Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldverteilung ist für den Entwickler ein wichtiges Werkzeug bei der Erkennung von Schwachstellen und der Bekämpfung ihrer Ursachen sowie beim Erreichen der optimalen Ausnutzung der eingesetzten Werkstoffe.

Die Stabkernbauweise des Zündtransformators wird maßgeblich durch die Abmessungen des Kerzenschachtes der Verbrennungsmotoren vorgegeben. Der prinzipielle Aufbau eines Stabzündtransformators wird in Bild 3.1 gezeigt.

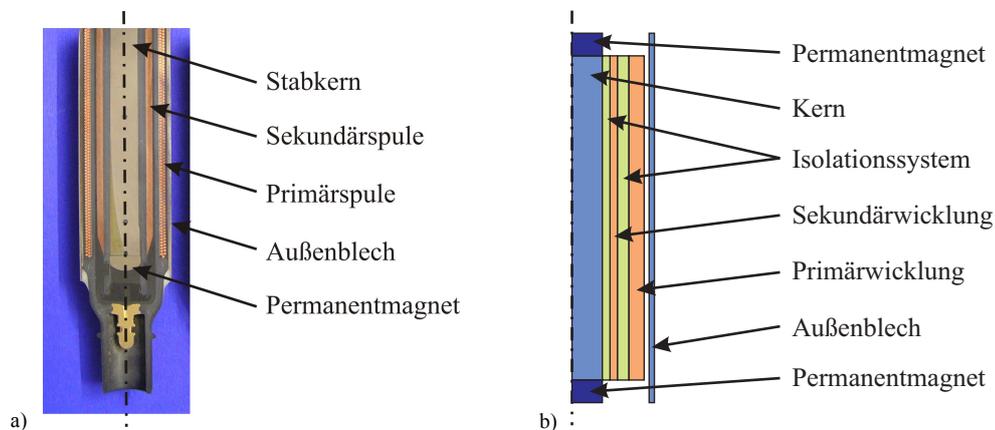


Bild 3.1: Aufbau eines Stabzündtransformators: a) Schnittbild; b) Prinzipschema

Die Sekundär- und die Primärwicklung sind koaxial um den Stabkern angeordnet. Durch dessen zentrale Lage wird das magnetische Feld im Inneren des Transformators gebündelt, so dass eine gute Kopplung zwischen Primär- und Sekundärseite realisiert wird. Das obere Ende der Sekundärspule liegt auf Massenpotential, während das untere Ende mit der Zündkerze verbunden ist. Im Normalbetrieb wird an der Primärspule ein Spannungssprung angelegt, wodurch sich ein Stromfluss in der Spule einstellt und Energie im magnetischen Kreis gespeichert wird. Durch das Abschalten des Primärstromes wird der magnetische Kreis entladen, wobei sowohl in der Sekundär- als auch in der Primärspule, ihrer Windungszahl entsprechend, eine hohe Spannung induziert wird. Die Induktivität treibt den Primärstrom weiter, solange die Zündkerze nicht gezündet hat und somit der Stromfluss sekundärseitig kommutieren kann. Aufgrund der primärseitigen Energierückspeisung bis zum Zündzeitpunkt beeinflusst das Schaltelement wesentlich den Verlauf der induzierten Spannung. Als Schaltelemente haben sich Halbleiterschalter (IGBTs) durchgesetzt, die

mit dem Zündtransformator eine funktionelle Einheit bilden und oft im Isolationssystem des Transformators mit vergossen werden. Die Isolation der Sekundärspule gegenüber dem Stabkern und der Primärspule erfolgt über ein mehrschichtiges Isolationssystem gebildet aus dem thermoplastischen Spulenträger und dem duroplastischen Verguss. Der Stabkern ist mit der Sekundärspule ausschließlich kapazitiv gekoppelt und nimmt somit ein mittleres Potential an. Das Außenblech fungiert als Rückschluss für das magnetische Feld und als mechanischer Schutz. Bedingt durch die schlanke Bauform ist ein geschlossener magnetischer Kreis aus Isolationsgründen nicht denkbar. An beiden Enden des Stabkerns sind Permanentmagnete positioniert, die den Arbeitspunkt des magnetischen Kreises festlegen.

Die hohe Windungszahl und der kleine Drahtquerschnitt der Sekundärwicklung führen dazu, dass die Kapazität der Spule einen bei Hochspannungstransformatoren üblichen hohen Wert aufweist. Hierdurch liegt die Eigenfrequenz der Spule im kHz-Bereich und die erzeugte Schwingspannung überlagert sich additiv mit dem erzeugten Hochspannungsimpuls. Um diese Vorgänge richtig wiedergeben zu können, ist ein Hochfrequenz-Modell der Spulen erforderlich. Dessen theoretische Herleitung und messtechnische Verifikation werden im weiteren Verlauf dieses Kapitel erläutert. Anschließend wird die Implementierung des Simulationsmodells für den magnetischen Kreis vorgestellt und anhand der Variation von Geometrieparametern auf Plausibilität überprüft. Im nächsten Unterkapitel werden die nichtlinearen Kennlinien der Halbleiterelemente und deren Integration in die Feldberechnung beschrieben. Abschließend wird das erhaltene Gesamtmodell anhand von Messungen validiert.

3.1 Implementierung eines Hochfrequenz-Modells für Spulen

Im Rahmen der FEM-Modellierung werden Spulen durch einen zusammenhängenden Bereich nachgebildet, ohne konstruktive Details wie zum Beispiel die Lage der einzelnen Windungen zueinander zu berücksichtigen. Um die Funktionalität der Spule richtig wiederzugeben, werden unter Beachtung der realen Spulengeometrie angepasste Werte für die Materialparameter ermittelt. Aus Sicht der Netzwerktheorie wird die Spule durch Induktivität, inneren Widerstand und parasitäre Kapazität beschrieben. Diese Größen finden sich in der Feldberechnung in den Modellparametern des zusammenhängenden Bereichs wieder.

Die Induktivität der Spule wird in der vorgestellten Feldberechnung, wie in Kapitel 1.2.3 bereits erläutert, durch eine eingeprägte Stromquelle nachgebildet. So wird sichergestellt, dass über den gesamten Querschnitt der Spule eine konstante induzierte Stromdichte fließt. Dieses widerspiegelt die Tatsache, dass alle Windungen der Spule in Reihe geschaltet sind und unabhängig von ihrer Position in der Wicklung vom gleichen Strom durchflossen werden.

Der innere Widerstand der Spule wird durch die Konduktivität des Spulenbereiches definiert. Hierbei ergeben sich aus der geometrischen Struktur der Spule und der richtungsabhängigen Querschnitte und Weglängen des Simulationsbereiches unterschiedliche Werte für die einzelnen Komponenten der Konduktivität. Grundsätzlich wird für jede Stromkomponente der Spulenabschnitt bestimmt, den sie durchströmt, und somit jeder Richtung anteilig ein innerer Widerstand zugewiesen. Die Konduktivität wird über die Definitionsgleichung des Widerstandes unter Berücksichtigung der äquivalenten Querschnitte und Weglängen für die jeweilige Stromflussrichtung ermittelt.

Die parasitäre Kapazität der Spule ergibt sich aus der kapazitiven Kopplung übereinander liegender Windungen. Abhängig vom verwendeten Wicklungsschema variiert die Anzahl der Windungen, die übereinander liegenden Windungen zwischengeschaltet sind, so dass sich unterschiedliche Ausnutzungsfaktoren für die Windungskapazität ergeben. Aufgrund der hohen Windungszahl haben Hochspannungsspulen eine verhältnismäßig hohe parasitäre Kapazität. Die parasitäre Kapazität wirkt senkrecht zur Drahtrichtung und weist somit nur eine axiale und eine radiale Komponente auf. Modelliert wird sie in der Feldberechnung durch eine äquivalente Permittivität für den Simulationsbereich. Die axiale Komponente der äquivalenten Permittivität beruht auf der Gleichung der Kapazität des Plattenkondensators, die radiale Komponente hingegen auf der des Zylinderkondensators.

3.1.1 Theoretische Betrachtung der Wicklungskapazität

Reale Spulen weisen nur bei niedrigen Frequenzen ein ausschließlich induktives Verhalten auf. Mit steigender Frequenz wächst die Impedanz des induktiven Anteils der Spule an, so dass der induktive Strom zunehmend gedrosselt wird. Hingegen nimmt dabei die Impedanz des kapazitiven Anteils ab und die kapazitive Kopplung der einzelnen Windungen zueinander wird im Stromfluss sichtbar. Diese Kapazität stellt mit der Induktivität der Spule einen Parallelschwingkreis dar, der die Eigenfrequenz der Spule bestimmt. In der Regel ist die Spulenkapazität nur in Anwendungen der Hochfrequenztechnik relevant, jedoch stellen Hochspannungsspulen aufgrund ihrer hohen Windungszahl einen Sonderfall dar. Durch ihre hohe Wicklungskapazität weisen Hochspannungsspulen eine verhältnismäßig niedrige Eigenfrequenz auf, so dass diese von transienten Vorgängen angeregt werden kann.

Die parasitäre Kapazität einer Spule wird durch die kapazitive Kopplung der einzelnen Windungen zueinander und der kapazitiven Kopplung der Spule zu ihrer Umgebung gebildet. In der Feldberechnung wird die Spule durch einen zusammenhängenden Bereich modelliert, der den äußeren Abmessungen der Spule entspricht, so dass die parasitäre Kapazität zu ihrer Umgebung richtig nachgebildet wird. Lediglich die Wicklungskapazität muss durch eine Anpassung der Permittivität modelliert werden.

Das elektrische Verschiebungsfeld innerhalb einer Spule bildet sich zwischen den einzelnen Windungen senkrecht zum Spulendraht aus. Somit leistet der Verschiebungsstrom keinen Anteil am magnetischen Feld der Spule. Für die Eigenkapazität der Spule wirken die Oberflächen des Spulendrahtes als Elektroden und das Isolationssystem der Spule als Dielektrikum. Der daraus resultierende Kondensator hat einen geringen Plattenabstand, bedingt durch die hohe Packungsdichte der Spule, und eine große Plattenoberfläche aufgrund der hohen Windungszahl und der daraus sich ergebende Gesamtlänge des Spulendrahtes. In der Feldberechnung wird die Eigenkapazität der Spule auf der gesamten Querschnittsfläche der Spule umgesetzt. Bezogen auf den gesamten Querschnitt der Spule, umspannen die Bereiche zwischen den Windungen eine kleinere Fläche. Somit muss in der Feldberechnung eine um ein Vielfaches höhere Permittivität eingesetzt werden, um den gleichen Kapazitätswert mit der Eigenkapazität der Spule zu erreichen.

Die Eigenkapazität der Spule wird aus der Energie, die im elektrischen Feld zwischen zwei Windungen gespeichert ist, ermittelt [41]. Dabei werden nur die Windungen benachbarter Lagen betrachtet. Zwischen den benachbarten Windungen einer Lage ist die Spannungsdifferenz so gering, dass die gespeicherte Energie vernachlässigbar ist. Zwischen Windungen nicht unmittelbar benachbarter Spulenlagen ist die Kapazität aufgrund des größeren Abstands so klein, dass die gespeicherte Energie ebenfalls vernachlässigt werden kann.

Die Energie, die zwischen zwei Windungen benachbarter Spulenlagen gespeichert ist, wird als Volumenintegral der elektrischen Energiedichte über den Zwischenbereich beider Windungen ausgedrückt:

$$W_{el} = \iiint \frac{1}{2} \varepsilon E^2 dV . \quad (3.1)$$

Die Eigenkapazität für das Windungspaar ergibt sich aus der gespeicherten Energie:

$$C = \frac{2W_{el}}{U^2} . \quad (3.2)$$

Für die Bestimmung der Eigenkapazität eines Windungspaares wird eine Feldberechnung für den Zwischenbereich der Windungen durchgeführt. Hierbei wird prinzipiell zwischen zwei Wicklungskonfigurationen unterschieden, die in Bild 3.2 schematisch dargestellt sind [33].

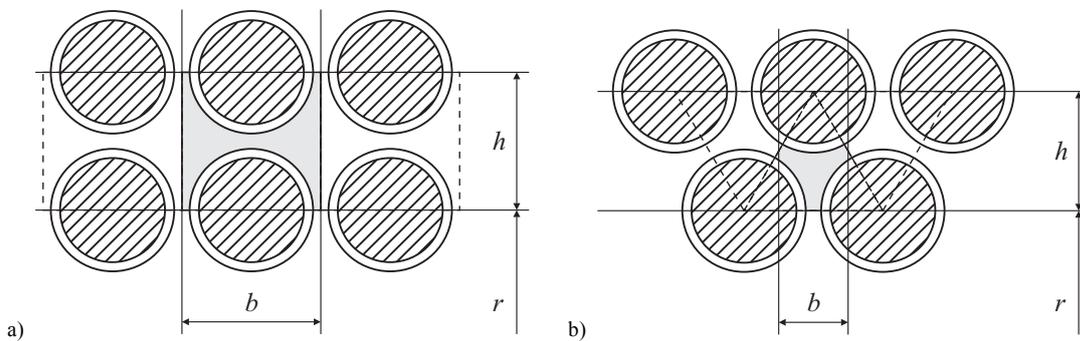


Bild 3.2: Wirksame Kapazität zwischen den Windungen einer Spule unter Berücksichtigung der Wicklungskonfiguration: a) Draht auf Draht; b) Draht auf Lücke

In der ersten Wicklungskonfiguration liegen die Windungen benachbarter Lagen übereinander (Bild 3.2 a), in der zweiten liegen die Windungen einer Lage über den Lücken der benachbarten Lage (Bild 3.2 b). In der Praxis ist keine klare Trennung zwischen beiden Konfigurationen möglich, da benachbarte Lagen einen unterschiedlichen Vorschub aufweisen und somit für einen Teil des Umfangs Draht auf Draht, für einen anderen Teil Draht auf Lücke liegt. Abhängig vom vorliegenden Fall wird anhand des verwendeten Wickelschemas eine der beiden Konfigurationen bevorzugt.

Für die Feldberechnung wird der Querschnitt der Spule in symmetrische Abschnitte unterteilt. Für die *Draht auf Draht* Konfiguration entspricht der gewählte Abschnitt einem Rechteck, das jeweils die Hälfte der benachbarten Windung beinhaltet. Bei der *Draht auf Lücke* Konfiguration entspricht der Simulationsbereich einem gleichseitigen Dreieck mit den Eckpunkten im Mittelpunkt dreier benachbarten Drähte. Für die beiden Drähte, die derselben Spulenlage angehören, wird hierbei angenommen, dass sie sich auf dem gleichen Potential befinden. Die in der Simulation angenommene Lücke zwischen den benachbarten Windungen ergibt sich aus der Packungsdichte der Spule als Differenz zwischen der Spulenlänge L_{sp} und der Anzahl der Windungen in einer Lage n_L multipliziert mit dem Drahtdurchmesser D :

$$\delta = \frac{L_{sp} - n_L D}{n_L - 1} . \quad (3.3)$$

Bild 3.3 zeigt die elektrischen Feldverläufe beider Konfigurationen. Dargestellt sind die elektrische Feldstärke als Graustufendarstellung und die Feldlinien.

Für die Bestimmung der äquivalenten Permittivität wird angenommen, dass die benachbarten Spulenlagen einen Plattenkondensator bilden, wobei die Elektroden durch die Mitte der Windungen verlaufen. Der Spulendurchmesser ist im Vergleich zum Drahtdurchmesser sehr groß, so dass die Krümmung der Anordnung vernachlässigt werden kann. Für die Tiefe des Plattenkondensators wird der Spulenumfang angenommen. Somit ergibt sich die äquivalente Permittivität für ein Windungspaar zu

$$\varepsilon_r = \frac{2 W_{el}}{\varepsilon_0 U^2} \frac{h}{2\pi r b}. \quad (3.4)$$

Für typische Hochspannungsspulen ist die äquivalente Permittivität eines Windungspaares ca. dreimal so hoch wie die Permittivität der eingesetzten Materialien.

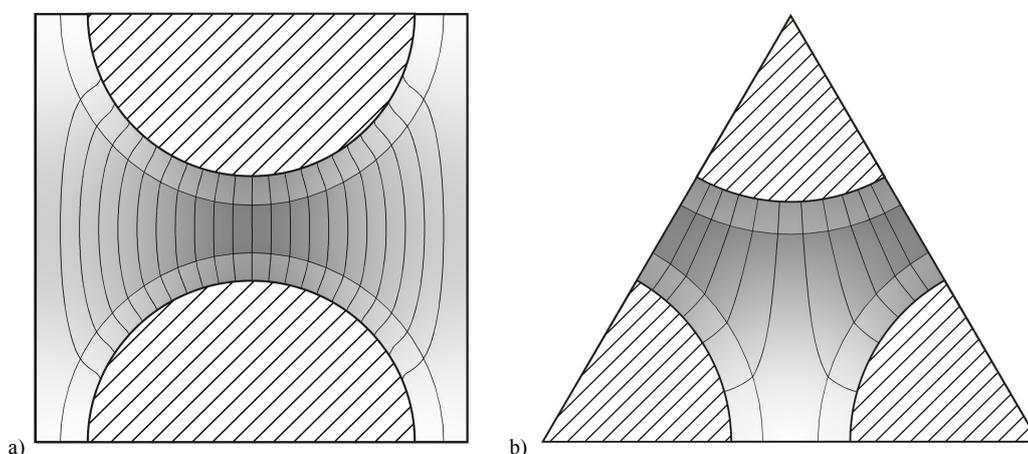


Bild 3.3: Verteilung des elektrischen Feldes zwischen den Windungen:
a) Draht auf Draht; b) Draht auf Lücke

Aufgrund der gleichmäßigen Spannungsverteilung innerhalb einer Spule werden die einzelnen Windungskapazitäten zweier Spulenlagen unterschiedlich aufgeladen [63]. Für die Windungsspannung einer Spule gilt

$$U_w = \frac{U}{2n_L - 1}, \quad (3.5)$$

wobei U die Spannung zwischen den benachbarten Lagen und n_L die Anzahl der Windungen einer Lage ist. Für die Spannung zwischen zwei gegenüber liegenden Windungen zweier Lagen ergibt sich die Folge

$$U \frac{1}{2n_L - 1}, U \frac{3}{2n_L - 1}, \dots, U \frac{2n_L - 1}{2n_L - 1}. \quad (3.6)$$

Hiermit gilt die elektrische Energie, die zwischen den beiden Spulenlagen gespeichert ist,

$$W_L = \frac{CU^2}{2} \sum_{i=1}^{2n_L-1} \left(\frac{i^2}{(2n_L-1)^2} \right) = \frac{CU^2}{2} \frac{n_L(2n_L+1)}{3(2n_L-1)} \approx \frac{CU^2}{2} \frac{n_L}{3}, \quad (3.7)$$

wobei C die Kapazität eines Windungspaares ist. Für die äquivalente Permittivität einer Spulenlage ergibt sich somit ein um den Faktor $n_L/3$ größerer Wert als der der äquivalen-

ten Permittivität einer Windung aus (3.4). Dieser Wert gilt auch für die gesamte Spule, weil die Reihenschaltung der einzelnen Lagenkapazitäten zur Gesamtkapazität der Spule durch die Geometrie des Simulationsmodells erfolgt.

Eine wichtige Erkenntnis aus Gleichung (3.7) ist, dass die Kapazität einer Spule zur Anzahl der Windungen einer Lage proportional ist. Hieraus ergeben sich Maßnahmen, die zur Reduktion der Wicklungskapazität führen. Die Unterteilung der Wicklung in mehrere Kammern reduziert die Anzahl der Wicklungen pro Lage und somit auch die Wicklungskapazität. Eine weitere Möglichkeit stellt die Pilgerschrittwicklung dar, indem die einzelnen Lagen in einem Winkel zur Symmetrieachse aufgebaut werden und somit die Anzahl der Windungen pro Lage reduziert wird.

3.1.2 Auslegung der Modellparameter unter Berücksichtigung unterschiedlicher Wicklungsschemata

Die wichtigen Parameter des in dieser Arbeit vorgestellten Spulenmodells sind die Konduktivität und die Permittivität des Wicklungsbereiches, sowie der Ausdruck für die Kopplung zwischen der magnetischen und der elektrischen Berechnung. Wie in Kapitel 1 gezeigt, sind das magnetische Feld in axialer und radialer Ausrichtung und der Stromfluss in azimuthaler Richtung Teil der magnetischen Berechnung, während das elektrische Feld und der Stromfluss in axialer und radialer Richtung Teil der elektrischen Berechnung sind. Die Kopplung zwischen der magnetischen und elektrischen Berechnung besteht darin, dass der Spulenstrom in beiden Berechnungen der gleiche ist. Im Folgenden wird gezeigt, in welcher Beziehung die Modellparameter zu den Spulen- und Geometrieparametern stehen. Zusätzlich fließt die Art, in der die Spule gewickelt ist, in den Modellparameter mit ein.

In der Feldberechnung wird die Wicklung durch einen zusammenhängenden Bereich modelliert, so dass der Spannungsaufbau innerhalb der einzelnen Wicklungslagen nicht wiedergegeben werden kann. Integral betrachtet ist der Spannungsaufbau innerhalb einer Wicklungslage vernachlässigbar, denn durch den gegenläufigen Vorschub benachbarter Wicklungslagen hebt sich deren Wirkung gegenseitig auf. Die Feldberechnung bildet nur den Spannungsaufbau zwischen den Wicklungslagen nach, so dass sich abhängig von der Wickelart der Spule eine Vorzugsrichtung für den Spannungsaufbau ergibt. Im Regelfall ist der Wicklungsbereich rechteckig, so dass von einer radialen oder axialen Vorzugsrichtung ausgegangen werden kann. In Bild 3.4 sind jeweils ein Beispiel einer Wicklung mit axialer bzw. radialer Vorzugsrichtung dargestellt. Bild 3.4 a) stellt schematisch eine Pilgerschrittwicklung dar. Diese ist die technische Realisierung einer Spule mit axialer Vorzugsrichtung. Die Spulenlagen bilden einen Winkel zur Mittelachse, so dass die Wicklungslagen, die von außen nach innen gewickelt werden, auf den vorherigen Wicklungslagen aufliegen. In Bild 3.4 b) ist eine Kammerwicklung dargestellt. Hierbei handelt es sich um eine Spule mit radialer Vorzugsrichtung. Die Wicklungslagen verlaufen parallel zur Mittelachse und alle Kammern werden von innen nach außen bewickelt. Im Hinblick auf die Eigenkapazität der Wicklung entspricht die Pilgerschrittwicklung dem *Draht auf Draht* Muster, während die Kammerwicklung das *Draht auf Lücke* Schema verfolgt.

Die Konduktivität des Wicklungsbereiches wird unter Berücksichtigung der geometrischen Verhältnisse aus dem Spulenwiderstand bestimmt. Hierbei wird zwischen der Konduktivität in azimuthaler Richtung, die in die magnetische Berechnung einfließt, und der Konduktivität in radialer und axialer Richtung, die in die elektrische Berechnung einfließt, unterschieden. Im Folgenden wird die Länge der Wicklung in axialer Richtung mit h_{sp} be-

zeichnet, die Dicke der Wicklung in radialer Richtung mit b_{sp} und der mittlere Radius des Wicklungsbereiches mit r_{sp} .

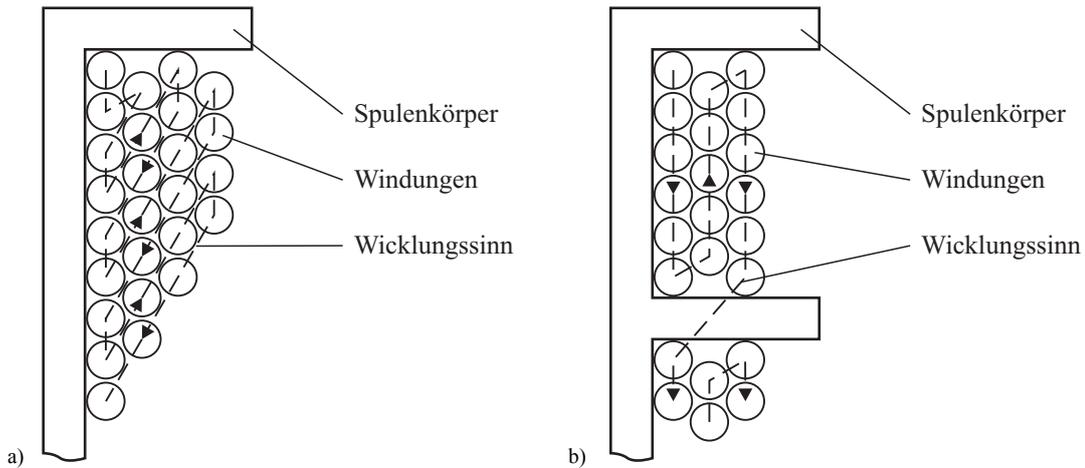


Bild 3.4: Wicklungsschema für Pilgerschritt- a) und Kammerwicklungen b)

Für eine Spule mit n Windungen gilt für den Stromfluss und die Umlaufspannung in azimuthaler Richtung

$$I_{\varphi} = n I_{sp} \quad \text{bzw.} \quad U_{\varphi} = \frac{U_{sp}}{n}, \quad (3.8)$$

wobei I_{sp} und U_{sp} der Strom und die Spannung an den Klemmen der Spule sind. Der azimuthale Widerstand des Wicklungsbereichs steht somit zum inneren Widerstand der Spule in folgender Beziehung:

$$R_{\varphi} = \frac{U_{\varphi}}{I_{\varphi}} = \frac{1}{n^2} \frac{U_{sp}}{I_{sp}} = \frac{R_{sp}}{n^2}. \quad (3.9)$$

Hiermit ergibt sich für die azimuthale Konduktivität des Wicklungsbereiches

$$\sigma_{\varphi} = \frac{n^2}{R_{sp}} \frac{2\pi r_{sp}}{b_{sp} h_{sp}}, \quad (3.10)$$

wobei $2\pi r_{sp}$ die Länge der Strombahn in azimuthaler Richtung und $b_{sp} h_{sp}$ die dazugehörige Querschnittsfläche sind. Gleichung (3.10) gilt sowohl für Pilgerschrittwicklungen als auch für Kammerwicklungen, wobei bei Kammerwicklungen die Konduktivität für jede Kammer einzeln berechnet wird.

Die Konduktivität in axialer und radialer Richtung unterscheidet sich bei Pilgerschritt- und Kammerwicklungen. In Pilgerschrittwicklungen stellt sich ein Stromfluss in axialer Richtung ein, so dass die Länge der Strombahn der Wicklungshöhe h_{sp} entspricht und der Querschnitt der Strombahn $2\pi r_{sp} b_{sp}$ beträgt. Für die Konduktivität ergibt sich der Ausdruck

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{R_{sp}} \frac{h_{sp}}{2\pi r_{sp} b_{sp}}. \quad (3.11)$$

In Kammerwicklungen fließt der Strom in radialer Richtung. Die Anordnung entspricht zwei koaxialen Zylinderelektroden, zwischen denen sich ein leitfähiges Medium befindet. Für die Konduktivität einer Kammerwicklung gilt

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{R_{sp}} \frac{1}{2\pi h_{sp}} \ln \left(\frac{r_{sp} + b_{sp}/2}{r_{sp} - b_{sp}/2} \right). \quad (3.12)$$

Wie im vorherigen Unterkapitel gezeigt, wird die Eigenkapazität der Spule über die Permittivität des Wicklungsbereiches modelliert. Der Verschiebungsstrom fließt ebenfalls zwischen den Anschlussklemmen der Spule und somit in gleicher Richtung wie der Spulenstrom. In Pilgerschrittwicklungen hat der Verschiebungsstrom eine axiale Ausrichtung. Der Wicklungsbereich entspricht einem Plattenkondensator mit den Stirnflächen als Elektrode und der Spulenhöhe als Elektrodenabstand. Für die Permittivitätszahl einer Pilgerschrittwicklung gilt

$$\varepsilon_r = \frac{C}{\varepsilon_0} \frac{h_{sp}}{2\pi r_{sp} b_{sp}}. \quad (3.13)$$

In Kammerwicklungen hat der Verschiebungsstrom eine radiale Ausrichtung. Der Wicklungsbereich stellt einen Zylinderkondensator dar mit der inneren und äußeren Mantelfläche als Elektroden und der Wicklungsbreite als Elektrodenabstand. Die Permittivitätszahl einer Kammerwicklung beträgt

$$\varepsilon_r = \frac{C}{\varepsilon_0} \frac{1}{2\pi h_{sp}} \ln \left(\frac{r_{sp} + b_{sp}/2}{r_{sp} - b_{sp}/2} \right). \quad (3.14)$$

Die Induktivität der Spule wird über die Koppelkonstante der magnetischen und elektrischen Berechnung (1.57) berücksichtigt. Diese Konstante stellt die Beziehung zwischen der azimuthalen und der axialen Komponente bei Pilgerschrittwicklungen bzw. der radialen Komponente bei Kammerwicklungen dar und stellt sicher, dass der Spulenstrom in beiden Berechnungen gleich ist. Wie in Kapitel 1 gezeigt, ist die Koppelkonstante gleich dem Verhältnis der Durchströmungsfläche der azimuthalen Stromdichte aus der magnetischen Berechnung und der Durchströmungsfläche des Spulenstromes in der elektrischen Berechnung. Die Koppelkonstante für Pilgerschrittwicklungen beträgt

$$k = \frac{h_{sp}}{n 2\pi r_{sp}}. \quad (3.15)$$

Analog gilt für Kammerwicklungen

$$k = \frac{b_{sp}}{n 2\pi r}, \quad (3.16)$$

wobei diesmal im Nenner nicht der mittlere Spulenradius, sondern die Koordinate in radialer Richtung r steht. Dieses liegt darin begründet, dass der Strom durch jeden Querschnitt der Spule gleich ist, jedoch der Querschnitt vom Radius abhängig ist. Entsprechend nimmt die Stromdichte in radialer Richtung indirekt proportional zum Radius ab.

3.1.3 Messtechnische Verifikation des Frequenzverhaltens der Spule

Die Validierung des Hochfrequenz-Modells für Spulen erfolgt anhand der Sekundärwicklung eines Hochspannungszündtransformators. Die Sekundärwicklung zählt zu den Kern-

komponenten des Zündtransformators, so dass ihre folgerichtige Modellierung entscheidend für die Güte des Gesamtmodells des Transformators ist. Vor allem in der Hinsicht, dass die Sekundärspule maßgeblich das Schwingverhalten des Transformators bestimmt, ist eine gesonderte Betrachtung des Spulenmodells sinnvoll. Aus messtechnischer Sicht bietet die Sekundärwicklung den Vorteil, dass aufgrund ihrer hohen Eigenkapazität die Eigenfrequenz leicht nachweisbar ist und somit die gesamte Funktionalität des Modells überprüft werden kann.

Der Frequenzgang der Spule wird mit einem kommerziellen RLC-Meter durch eine Vierpunktmessung aufgenommen. Hierfür wird eine serienmäßige Sekundärwicklung aus der Produktion entnommen, um sicherzustellen, dass sie mit der Wicklung des untersuchten Transformators identisch ist. Die Messung erfolgt in Luft, wobei sich keine Störkörper in der näheren Umgebung der Wicklung befinden. Die Messleitungen fungieren als Halterung für die Wicklung und sind möglichst nahe der Wicklungsachse geführt, um Feldverzerrungen zu minimieren. Aufgenommen werden die Impedanz und die Phase für unterschiedliche Frequenzen im Bereich von 100 Hz bis 10 MHz. Dabei sind die Messpunkte auf der Frequenzachse logarithmisch verteilt.

Der prinzipielle Ablauf der Simulation wird in Bild 3.5 veranschaulicht. Ausgehend von den Abmessungen der Sekundärwicklung wird ein rotationssymmetrisches, zweidimensionales Geometriemodell erstellt (Bild 3.5 a). Die Werte der Materialparameter werden anhand der in Kapitel 3.1.2 beschriebenen Vorgehensweise ermittelt. Eingangsgröße der transienten, magnetisch und elektrisch gekoppelten Simulation ist die Klemmenspannung der Spule, die als monofrequente sinusförmige Schwingung vorgegeben wird. Das magnetische und das elektrische Feld werden iterativ im Zeitschrittverfahren berechnet. Bild 3.5 b) und c) zeigen exemplarisch den Verlauf des magnetischen Feldes und der Feldlinien bzw. des elektrischen Feldes und der Äquipotentiallinien an einem gegebenen Zeitpunkt. Der Klemmenstrom wird durch Integration der Stromdichte entlang des oberen Randes der Spule berechnet. Die Amplitude und die Phase der Impedanz werden aus den zeitlichen Verläufen der Klemmengrößen bestimmt.

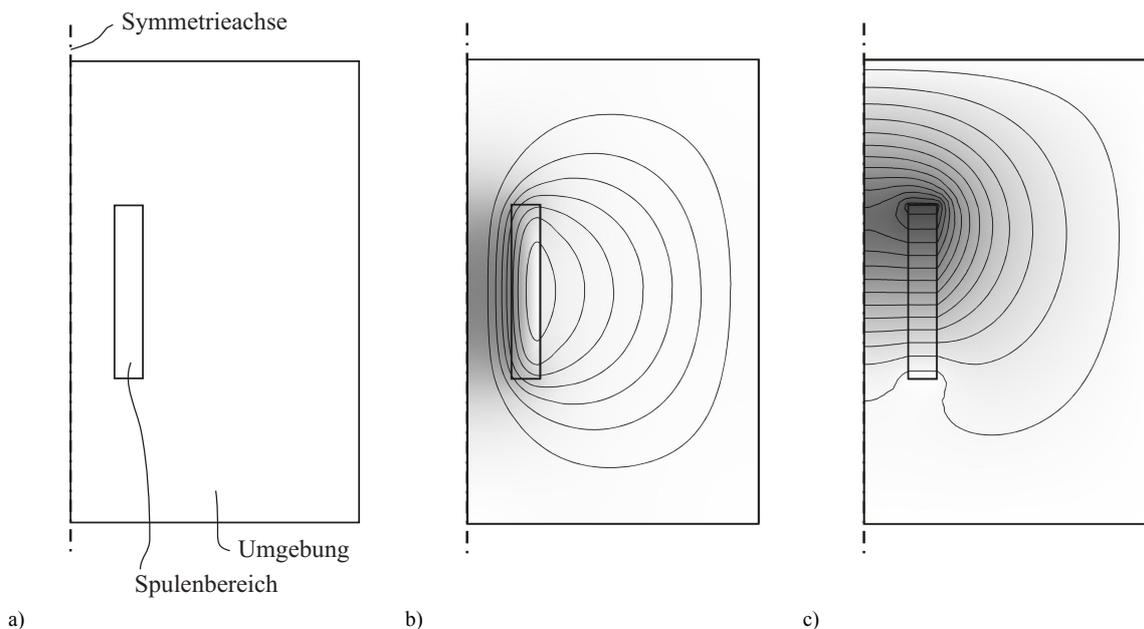


Bild 3.5: Prinzipieller Ablauf der elektromagnetischen Feldberechnung realer Spulen:
a) Geometriemodell, b) magnetische Feldverteilung und c) elektrische Potentialverteilung

Aufgrund der transienten Simulation wird die Impedanz nur für diskrete Frequenzwerte bestimmt. Bild 3.6 zeigt den Vergleich zwischen der gemessenen und simulierten frequenzabhängigen Impedanz der Wicklung. Die simulierten Frequenzen sind logarithmisch verteilt, wobei im Bereich der Resonanzfrequenz die Anzahl der Stützpunkte erhöht wird, um die Güte des Modells besser beurteilen zu können. Messung und Simulation liegen dicht beieinander, wodurch sich das vorgestellte Simulationsmodell als eine wirklichkeitsnahe Betrachtungsweise der Realität erwiesen hat.

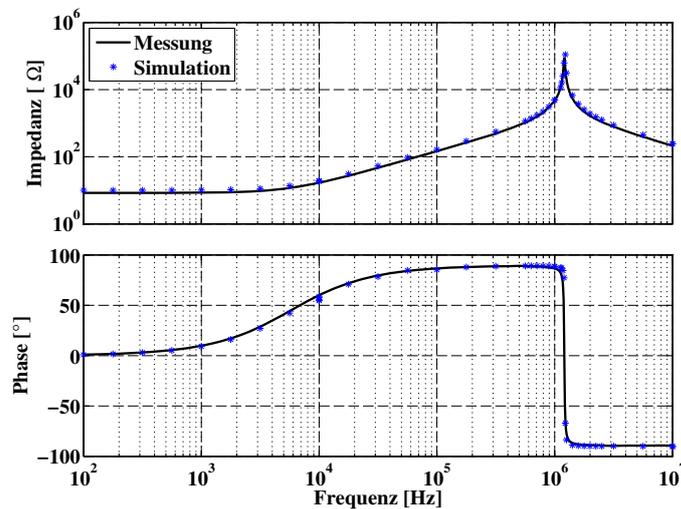


Bild 3.6: Amplituden- und Phasengang der Impedanz einer realen Spule

3.2 Berücksichtigung der nichtlinearen Eigenschaften magnetischer Werkstoffe

Einen Schwerpunkt des in dieser Arbeit vorgestellten Verfahrens zur Modellierung elektromagnetischer Betriebsmittel stellen die nichtlinearen magnetischen Materialeigenschaften dar. Während im Kapitel 3.1 das Modell für Hochspannungswicklungen als Luftspule vorgestellt und anhand von Messungen verifiziert wird, befasst sich das folgende Kapitel mit der Modellierung einer Spule mit Eisenkern. Untersucht werden vereinfachte Konfigurationen, bestehend aus einer Erregerspule mit konzentrischem Stabkern als Vorstufe für das Gesamtmodell eines Zündtransformators. Dabei werden die Kernlänge und die Vorspannung des magnetischen Kreises mittels Permanentmagneten variiert und die Simulationsergebnisse mit den Messungen verglichen.

Für die Messungen wird ein Kerntester verwendet, eine Vorrichtung, die den untersuchten Stabkern innerhalb einer Wicklung zentriert und somit reproduzierbare Bedingungen für die untersuchten Konfigurationen ermöglicht. Die Messungen können mit beliebiger Erregung durchgeführt werden, jedoch wird im vorliegenden Fall der Impulsbetrieb gewählt, um eine Vergleichbarkeit mit der realen Belastung eines Zündtransformators zu haben.

3.2.1 Einfluss der Kerngeometrien auf die Feld- und Klemmengrößen einer Spule

Die in Kapitel 2.2 dargestellten Modellparameter nichtlinearer magnetischer Werkstoffe basieren auf normgerechten Messungen im Epsteinrahmen. Obwohl die dazu benötigten Blechstreifen und die untersuchten Stabkerne aus der gleichen Blechcharge stammen, weisen sie leicht unterschiedliche Magnetisierungskennlinien auf. Der Hauptunterschied liegt darin, dass die einzelnen Bleche, aus denen der Stabkern zusammengesetzt wird, viel schmaler als die Epsteinproben sind. Somit ist beim Stabkern der Anteil an Randmaterial höher, das vom Schneidvorgang in seinen magnetischen Eigenschaften beeinträchtigt ist. Des Weiteren sind die Bleche der Stabkerne aneinander gepresst und stirnseitig mit je einer Schweißnaht miteinander verbunden. Somit haben die Epsteinprobe und die Stab-

kerne unterschiedliche Herstellungsprozesse durchlaufen und weisen unterschiedliche Vorgeschichten auf, was dazu führt, dass auch ihr Magnetisierungsverhalten unterschiedlich ist. Aufgrund der Geometrieabhängigkeit und der Beeinflussung der magnetischen Eigenschaften durch die Bearbeitungsschritte bedarf es einer Feinanpassung der Magnetisierungskennlinie für jede modellierte Anordnung.

Im allgemeinen Fall ist es bei der Anpassung der Magnetisierungskennlinie ausreichend, den äquivalenten Querschnitt der Probe auf den realen Querschnitt zu beziehen. Aufgrund der erwähnten Randeffekte breitet sich das magnetische Feld nicht über den gesamten Querschnitt der Probe gleichmäßig aus. Eine Lösung des Problems sieht vor, den Querschnitt des Stabkerns in der Simulation zu reduzieren und so praktisch die Randbereiche bei der Berechnung nicht zu berücksichtigen. Jedoch hat dieses auch Auswirkungen auf die elektrische Berechnung, da sich dadurch auch die parasitäre Kapazität der Wicklung zum Kern ändert. Der hier verfolgte Lösungsansatz ist eine Anpassung der Magnetisierungskennlinie, so dass der magnetische Fluss durch den Stabkern richtig nachgebildet wird. Aus der äquivalenten Querschnittsfläche und der magnetischen Flussdichte wird der tatsächliche Fluss bestimmt, der dann auf den realen Querschnitt bezogen wird. Dieses entspricht einer Stauchung der Magnetisierungskennlinie in vertikaler Richtung um das Verhältnis zwischen realem und äquivalentem Querschnitt. Die in diesem Kapitel vorgestellten Simulationen verifizieren die Anpassung der Magnetisierungskennlinie für den Stabkern. Hierbei wird gezeigt, dass nach erfolgter Querschnittsanpassung die Variation der Länge des Kerns vom Modell richtig nachgebildet wird.

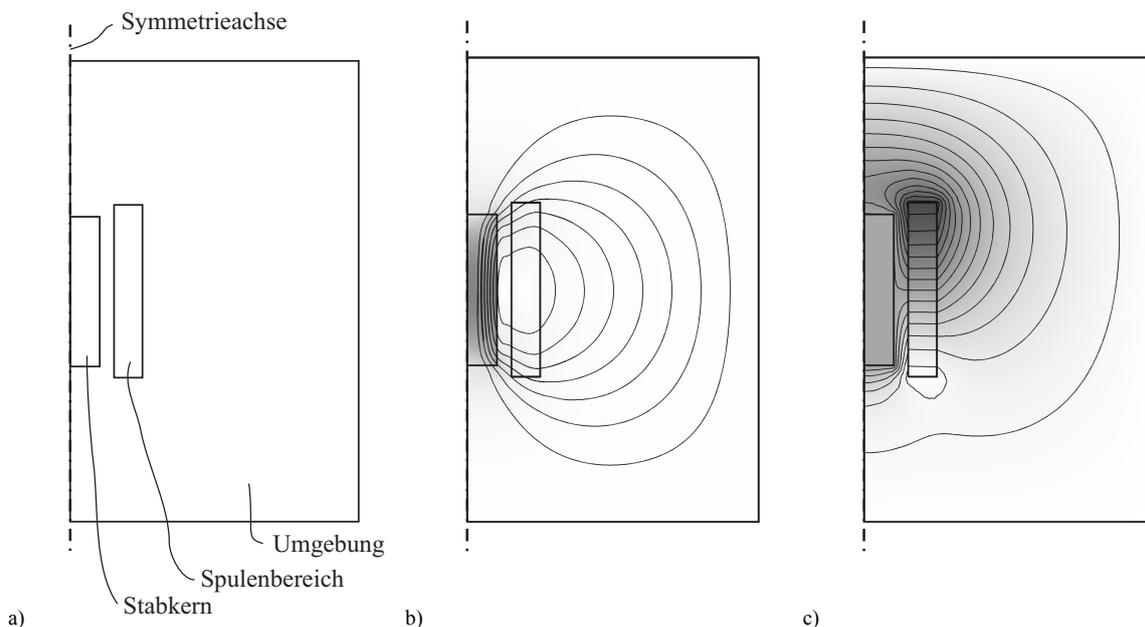


Bild 3.7: Geometriemodell a), magnetische Feldverteilung b) und elektrische Potentialverteilung c) einer realen Spule mit Stabkern

In Bild 3.7 sind das Simulationsmodell der Spule mit Eisenkern und die prinzipiellen Verläufe des magnetischen und elektrischen Feldes dargestellt. Das verwendete Geometriemodell entspricht dem Geometriemodell der realen Spule (Bild 3.5 a), das um einen zur Symmetrieachse konzentrischen Stabkern ergänzt wurde. Der magnetische Fluss wird im Inneren des Kerns konzentriert (Bild 3.7 b), was eine Verschiebung der magnetischen Feldlinien im Vergleich zur Luftspule (Bild 3.5 b) hervorruft. Das elektrische Potential und die Äquipotentiallinien sind in Bild 3.7 c) dargestellt. Die Potentialverteilung wird durch den leitfähigen Kern maßgeblich verändert. Der Kern ist mit der Spule ausschließ-

lich kapazitiv gekoppelt und nimmt im Idealfall das mittlere Potential der Spule an. Die höchste Feldbelastung wird am oberen und unteren Ende des Bereiches zwischen Spule und Kern erreicht. Im Falle des Stabkernzündtransformators treten zusätzliche parasitäre Kapazitäten auf, was zu einem nichtlinearen Potentialaufbau entlang der Sekundärspule und einer Verschiebung des Kernpotentials führt, wodurch das Isolationssystem einer höheren Belastung ausgesetzt wird.

Vorgestellt werden die Simulationsergebnisse von vier Versuchsanordnungen, bezeichnet mit den Großbuchstaben A bis D. Dabei haben die Stabkerne A und B eine unterschiedliche Länge und die Versuchsanordnungen C und D entsprechen dem Stabkern B mit zusätzlichen Permanentmagneten. Die Länge des Kerns A gleicht der Gesamtlänge des Kerns B mit Permanentmagneten. In Bild 3.8 ist ein Vergleich der Klemmengrößen für die Kerne A und B dargestellt.

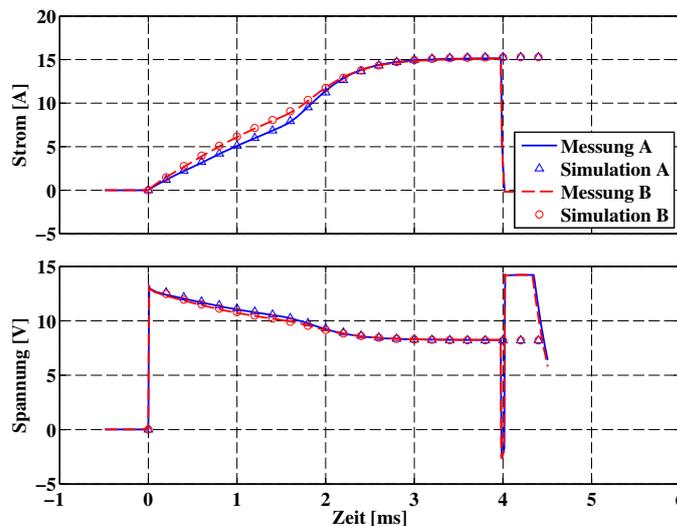


Bild 3.8: Einfluss der Kernlänge auf den Strom- und Spannungsverlauf einer Spule

Die Simulationen zeigen den Aufladevorgang der Spule bis zum Erreichen der ohmschen Sättigung. Bei den Messungen hingegen musste der Strom abgeschaltet werden, um eine Zerstörung der Spule zu vermeiden. Die Simulationsergebnisse sind kontinuierliche zeitliche Verläufe, jedoch als Punktfolge dargestellt, um den Vergleich mit der Messung zu erleichtern. Bis zur Stromabschaltung stimmen die simulierten und die gemessenen Verläufe miteinander überein. Der Stabkern A hat durch seine größere Länge eine höhere Induktivität, was sich in einem flacheren Stromanstieg auswirkt.

3.2.2 Verschiebung der Magnetisierungskennlinie durch den Einsatz von Permanentmagneten

Die Magnetisierungskennlinie eines impulsbetriebenen magnetischen Kreises weist erst einen linearen Bereich auf, in dem der Stromfluss einem exponentialen Verlauf folgt. Mit dem Auftreten von Sättigungseffekten geht die Aufladekennlinie in den nichtlinearen Bereich über, der durch einen überproportionalen Stromanstieg gekennzeichnet wird (Bild 3.8). Der zweckmäßige Einsatz eines Zündtransformators beschränkt sich auf den linearen Bereich, da im nichtlinearen Bereich der erhöhte Stromfluss keinen zusätzlichen Energiebeitrag im Zündfunken bringt.

Aufgrund der gleich bleibenden Polarität der Zündimpulse weist der magnetische Kreis eines Zündtransformators Remanenzeffekte auf. Somit verringert sich der lineare Arbeitsbereich des magnetischen Kreises und Sättigungseffekte treten schon bei kleineren Strö-

men auf. Um dieses zu verhindern werden im magnetischen Kreis Permanentmagnete integriert, die eine magnetische Vorspannung des Kreises gegensinnig zu der Impulsbelastung erzeugen. Somit vergrößern sich der lineare Bereich der Aufladekennlinie und gleichzeitig auch die im magnetischen Kreis gespeicherte Energie.

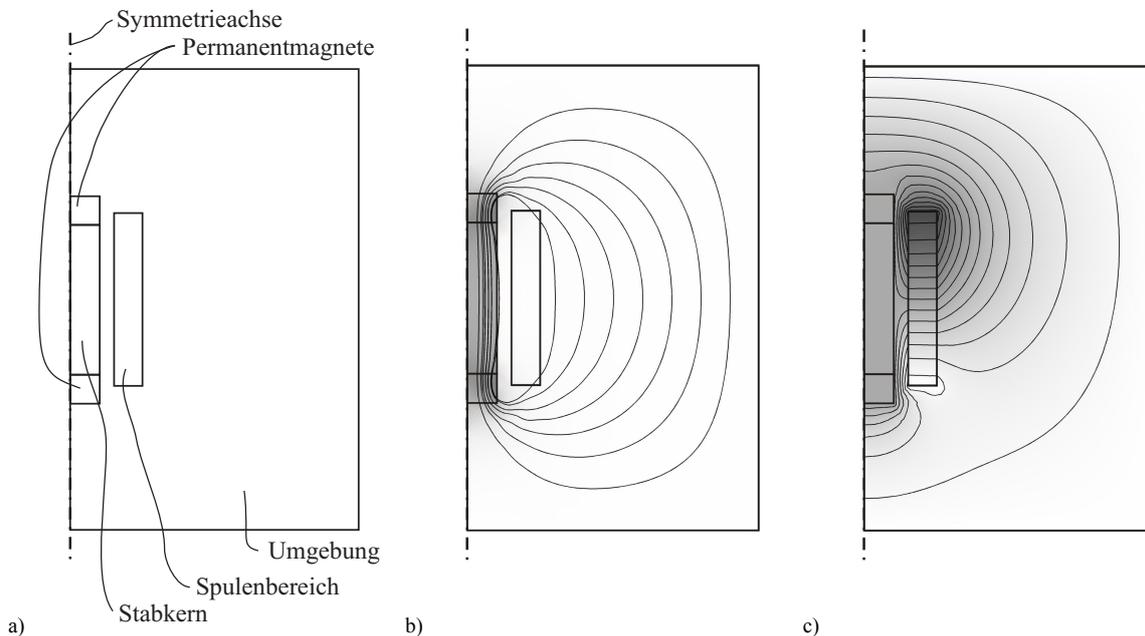


Bild 3.9: Vorspannung des magnetischen Kreises durch Permanentmagnete:

- a) Geometriemodell; b) Verlauf des magnetischen Feldes mit Feldlinien;
- c) elektrische Potentialverteilung mit Äquipotentiallinien

Bild 3.9 zeigt die Simulation einer Spule mit Eisenkern und Permanentmagneten. Das Geometriemodell der Spule mit Stabkern (Bild 3.7 a) ist mit zwei Permanentmagneten ergänzt worden, die an beiden Enden des Stabkerns positioniert sind. Die Permanentmagneten bündeln den magnetischen Fluss an den Enden des Stabkerns (Bild 3.9 b), so dass eine gleichmäßige Ausnutzung des Eisenkerns erreicht wird. Bei einem Stabzündtransformator führt dies zu einer Verringerung des Streuflusses und somit zu einer verbesserten Kopplung zwischen Primär- und Sekundärseite. Die Permanentmagnete und der Stabkern sind miteinander elektrisch verbunden, so dass sie das gleiche Potential annehmen (Bild 3.9 c).

Die Klemmengrößen der magnetischen Kreise B, C und D sind in Bild 3.10 vergleichend dargestellt. Dabei sind nur die magnetischen Kreise C und D mit Permanentmagneten unterschiedlich vorgespannt, während der magnetische Kreis B keine Permanentmagnete besitzt. Der Anfangswert der Induktivität der verschiedenen magnetischen Kreise ist durch den Einsatz der Permanentmagnete unverändert geblieben, so dass der Stromverlauf im linearen Bereich unverändert bleibt. Im Fall C ist die magnetische Vorspannung der Impulsbelastung gleichgerichtet, so dass die Sättigungseffekte früher auftreten. Im Fall D hingegen ist die magnetische Vorspannung der Impulsbelastung gegengerichtet und der Arbeitspunkt des magnetischen Kreises weiter in den linearen Bereich der Magnetisierungskennlinie verschoben. Die Simulationsergebnisse stimmen mit den gemessenen Klemmengrößen überein.

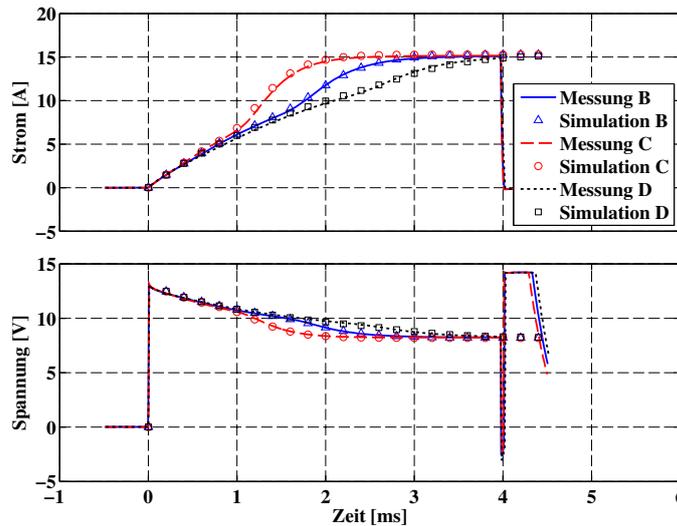


Bild 3.10: Einfluss der magnetischen Vorspannung des Eisenkreises auf die Klemmengrößen einer Spule

3.3 Modellierung des nichtlinearen Verhaltens von Halbleiterelementen

Das Funktionsprinzip eines Zündtransformators beruht auf der schnellen Abschaltung eines magnetischen Energiespeichers. Bei der erzwungenen Rückspeisung der Energie aus dem magnetischen Kreis wird eine hohe Spannung an den Klemmen des Transformators induziert, die zur Entflammung des Kraftstoff-Luft-Gemisches eingesetzt wird. Dabei spielt das verwendete Schaltelement eine zentrale Rolle und ist in erster Linie für die Höhe und Form des erzeugten Spannungsimpulses verantwortlich. In modernen Zündtransformatoren kommen IGBTs als Schaltelement sowie andere Halbleiterelemente wie Freilauf-, Zener- oder Suppressordioden als Schutzelemente zum Einsatz. Eine Integration dieser Elemente in der Feldberechnung ist für die korrekte Modellierung des Zündtransformators zwingend notwendig.

Die allgemein verbreitete Modellierung von Halbleiterelementen verwendet stromabhängige Spannungskennlinien, die das nichtlineare Verhalten der Bauteile wiedergeben. Solche Kennlinien lassen sich jedoch nur umständlich in die Feldberechnung integrieren und können die Stabilität der Simulation beeinträchtigen. Als Lösung wird die Modellierung der Halbleiterkennlinien als stromabhängiger Leitwert vorgeschlagen. Dieses bietet die Möglichkeit, die Halbleiterelemente als eigenständige Bereiche in das Simulationsmodell zu integrieren, deren Konduktivität direkt aus der Leitwertkennlinie bestimmt werden kann:

$$\sigma(i) = G(i) \frac{h}{A}, \quad (3.17)$$

wobei h die Höhe und A die Querschnittsfläche des Bereiches sind. Grundlegend gilt, dass der Leitwert immer einen positiven, endlichen und von Null verschiedenen Wert annimmt und eine stetige und differenzierbare Funktion des Stromes ist.

3.3.1 Parametrisierung der Kennlinien von Dioden und Zenerdioden

Zündtransformatoren haben im Sekundärkreis eine Hochspannungsdiode zur Unterdrückung des Einschaltfrühimpulses integriert, der beim Einschalten des Primärkreises in der Sekundärwicklung induziert wird. Würde die Zündkerze zu diesem Zeitpunkt zünden, wäre der Zündtransformator während der Aufladephase sekundärseitig kurzgeschlossen

und somit die Aufladung des magnetischen Kreises nicht möglich. Die Hochspannungsdiode im Sekundärkreis übernimmt die Spannung des Einschaltimpulses und verhindert einen sekundärseitigen Stromfluss während der Aufladephase. Die Berücksichtigung dieser Diode im Simulationsmodell ist für die korrekte Nachbildung des Aufladevorganges des Zündtransformators erforderlich.

Dioden sind Halbleiterelemente, die den Strom nur in einer Richtung leiten. In Sperrrichtung weisen sie einen hohen, endlichen Widerstandswert auf, während sich in Durchlassrichtung eine stromabhängige Durchlassspannung einstellt. Der Leitwert der Diode kann durch eine abschnittsweise definierte Funktion angenähert werden:

$$G_D(i) = \begin{cases} a_2 e^{a_1 i} + a_0, & i \leq i_0 \\ \frac{b_2 i^2 + b_1 i + b_0}{c_1 i + c_0}, & i > i_0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Für Ströme kleiner als der Grenzwert i_0 wird ein exponentieller Abfall des Leitwerts bis zum Wert a_0 angenommen, der dem stationären Leitwert in Sperrrichtung entspricht. In Durchlassrichtung wird der Leitwert durch einen Polynom-Bruch approximiert. Dieser hat eine Polstelle bei

$$i = \frac{c_0}{c_1} \quad (3.19)$$

und eine schräge Asymptote

$$\frac{b_2}{c_1} i + \frac{b_1}{c_1} \quad (3.20)$$

Der Grenzwert i_0 wird rechts von der Polstelle gewählt, so dass die Polstelle nicht im betrachteten Abschnitt liegt. Der Kehrwert der Steilheit der Asymptote entspricht der maximalen Spannung in Durchlassrichtung:

$$U_F = \frac{c_1}{b_2} \quad (3.21)$$

Die anderen Koeffizienten des Polynom-Bruchs werden durch die Methode des kleinsten quadratischen Fehlers anhand der gemessenen Kennlinie der Diode bestimmt. Die Koeffizienten des ersten Abschnitts ergeben sich aus der Bedingung, dass der Verlauf des Leitwerts stetig und differenzierbar ist. Die Ableitung des Leitwertes in Abhängigkeit vom Strom beträgt

$$\frac{dG_D}{di}(i) = \begin{cases} a_1 a_2 e^{a_1 i}, & i \leq i_0 \\ \frac{b_2 c_1 i^2 + 2b_2 c_0 i + b_1 c_0 - b_0 c_1}{(c_1 i + c_0)^2}, & i > i_0 \end{cases} \quad (3.22)$$

Aus der Bedingung, dass die Steilheit beider Abschnitte im Schnittpunkt gleich ist, ergibt sich

$$a_1 = \frac{dG_D}{di}(i_0) \frac{1}{G_D(i_0) - a_0} \quad (3.23)$$

Der Koeffizient a_2 resultiert aus der Bedingung, dass beide Abschnitte im Schnittpunkt den gleichen Wert annehmen:

$$a_2 = \frac{G_D(i_0) - a_0}{e^{a_1 i_0}}. \quad (3.24)$$

Somit basiert der rechte Abschnitt der Funktion auf Messwerten der Diodenkennlinie, während der linke Abschnitt der Funktion eine stetige Verlängerung der Diodenkennlinie ist, die gegen den stationären Wert des Leitwertes in Sperrichtung strebt. Bild 3.11 zeigt die Approximation einer Diodenkennlinie am Beispiel einer Hochspannungsdioden und die sich daraus ergebende Strom-Spannung-Charakteristik.

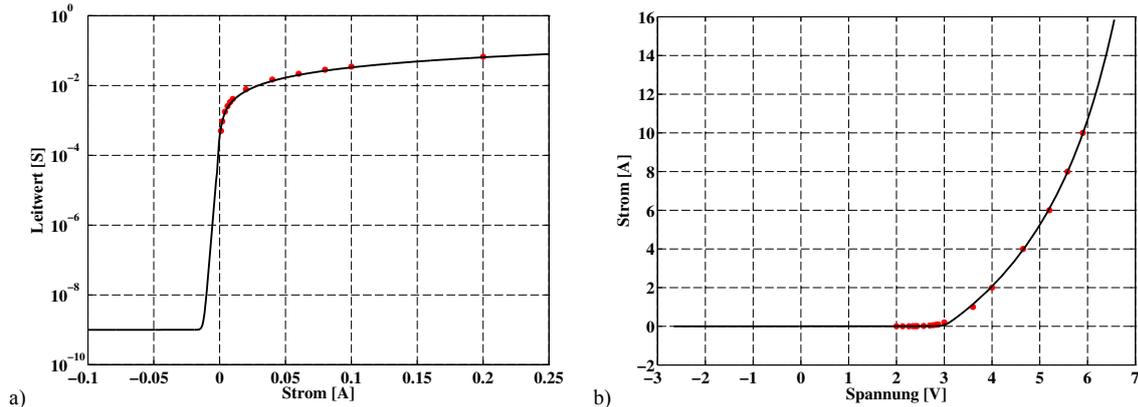


Bild 3.11: Kennlinie einer realen Diode: a) Approximation des Leitwertes;
b) Strom-Spannung-Charakteristik

Zenerdioden verhalten sich in Durchlassrichtung wie herkömmliche Dioden, nur in Sperrichtung werden sie ab der Zenerspannung niederohmig. Somit werden Zenerdioden in Sperrichtung als Referenzspannungsquellen oder zum Ableiten von Überspannungen eingesetzt. Die Kennlinie einer Zenerdiode entspricht für die Durchlassrichtung einer normalen Diode, während sie in der Sperrichtung einen zum Betrag des Stromes proportionalen Leitwert aufweist.

Als Überspannungsschutz werden zwei gegensinnig gepolte Zenerdioden in Reihe geschaltet. Somit werden Spannungen, die höher als die Zenerspannung sind, unabhängig von ihrer Polarität abgeleitet. Eine solche Schutzschaltung ist Bestandteil der elektronischen Schalter von Zündtransformatoren. Überschreitet die beim Ausschalten des Zündtransformators primärseitig induzierte Spannung die Ansprechspannung der Schutzschaltung, so wird diese leitfähig und beeinflusst somit die Form und Höhe des erzeugten Hochspannungsimpulses. Die Kennlinie der Überspannungsschutzschaltung stellt somit ein Teil des IGBT-Modells dar.

Die Kennlinie der Schutzschaltung ist in Bild 3.12 für unterschiedliche Zenerspannungen grafisch dargestellt.

Der Leitwert der Anordnung ist symmetrisch zur Ordinate und lässt sich als Funktion des Stromes in Abhängigkeit von der Zenerspannung U_Z und vom Leitwert im stromlosen Zustand G_0 ausdrücken:

$$G_Z(i) = G_0 + \frac{|i|}{U_Z}. \quad (3.25)$$

Somit ist sichergestellt, dass der Leitwert immer einen positiven, von Null verschiedenen Wert annimmt.

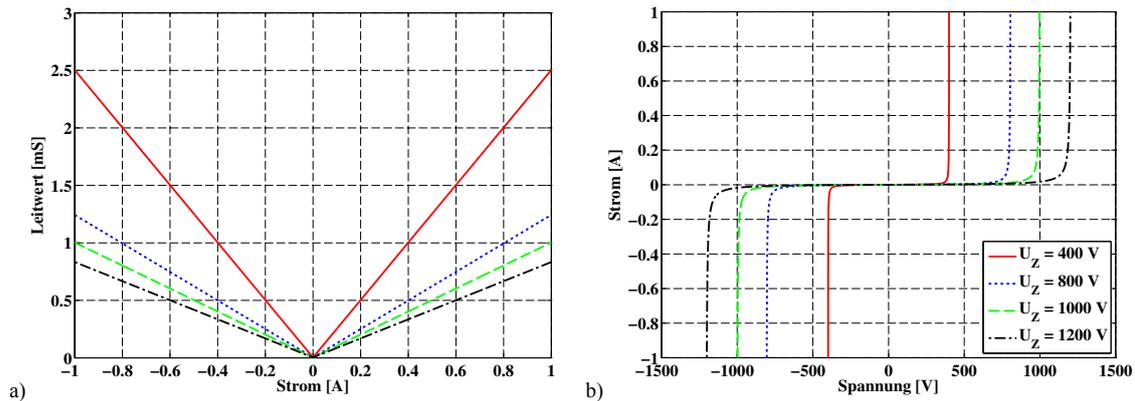


Bild 3.12: Kennlinie einer Überspannungsschutzschaltung mit Zenerdioden:
a) Approximation des Leitwertes; b) Strom-Spannung-Charakteristik

3.3.2 Mathematische Beschreibung des Schaltverhaltens von IGBTs

Als elektronische Schalter für Zündtransformatoren werden IGBTs eingesetzt. Diese bilden mit dem Zündtransformator eine funktionelle Einheit und werden oft im selben Gehäuse zusammen vergossen. Der IGBT übernimmt die Zuschaltung des Transformators und die Unterbrechung des Primärstromes zum Zündzeitpunkt. Der Spannungsabfall über die Kollektor-Emitter-Strecke beträgt im stromdurchflossenen Zustand einige Volt, so dass der IGBT einen erheblichen Einfluss auf die primärseitige Klemmenspannung des Zündtransformators während der Aufladephase hat. Mit der Unterbrechung des Primärstromes muss die im magnetischen Kreis gespeicherte Energie zurückgespeist werden. Der primärseitige Stromfluss wird gedrosselt, bleibt jedoch vorerst aufgrund der hohen induzierten Spannung erhalten. Erst nachdem die Zündkerze zündet, kann der Stromfluss sekundärseitig kommutieren und der IGBT den primärseitigen Strom löschen. Die Höhe und Steilheit des Hochspannungsimpulses hängt somit nicht nur von der im magnetischen Kreis gespeicherten Energie ab, sondern wird vom Schaltverhalten des IGBTs beeinflusst. Hierbei spielt die Schaltzeit des IGBTs eine wesentliche Rolle. Ausschlaggebend ist dabei die Zeit, in der die Gate-Kapazität geladen bzw. entladen wird. Um diese zu reduzieren werden speziell für diese Anwendung optimierte Treiberbausteine in den Steuergeräten der Zündtransformatoren eingesetzt. Zusammenfassend ergeben sich zwei wesentliche Anforderungen an das IGBT-Modell. In erster Linie muss die Schaltzeit des Moduls vom Modell genau wiedergegeben werden, um die Steilheit des abreißenden Stromes und somit die induzierte Spannung korrekt zu berechnen. Des Weiteren ist der innere Widerstand des IGBTs für die Berechnung des Aufladevorganges wichtig, denn er bestimmt den primärseitigen Spannungsabfall und somit letztendlich auch die im magnetischen Kreis gespeicherte Energie.

Der Leitwert des IGBTs wird durch eine abschnittsweise definierte Funktion angenähert:

$$G_T(i) = \begin{cases} (d_1 - d_2) e^i, & i \leq 0 \\ d_1 - d_2 e^{-d_3 i}, & i > 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Dabei wird angenommen, dass für hohe Ströme der Leitwert den stationären Endwert d_1 erreicht und im stromlosen Zustand den Wert $d_1 - d_2$ annimmt. Für Ströme in Durchflussrichtung wird ein exponentieller Verlauf des Leitwertes zwischen diesen beiden

Grenzwerten angenommen. Der Parameter d_3 wird dabei mit der Methode des kleinsten quadratischen Fehlers anhand der gemessenen Kennlinie bestimmt. Für die Sperrrichtung wird ein exponentieller Abfall des Leitwertes gegen Null angenommen. Dieser Abschnitt der Kennlinie hat keine technische Bedeutung, weil er unterhalb der Kennlinie der Schutzbeschaltung liegt und somit das Verhalten der Baugruppe nicht beeinflusst. Die Approximationen der Kennlinien handelsüblicher IGBTs sind in Bild 3.13 dargestellt.

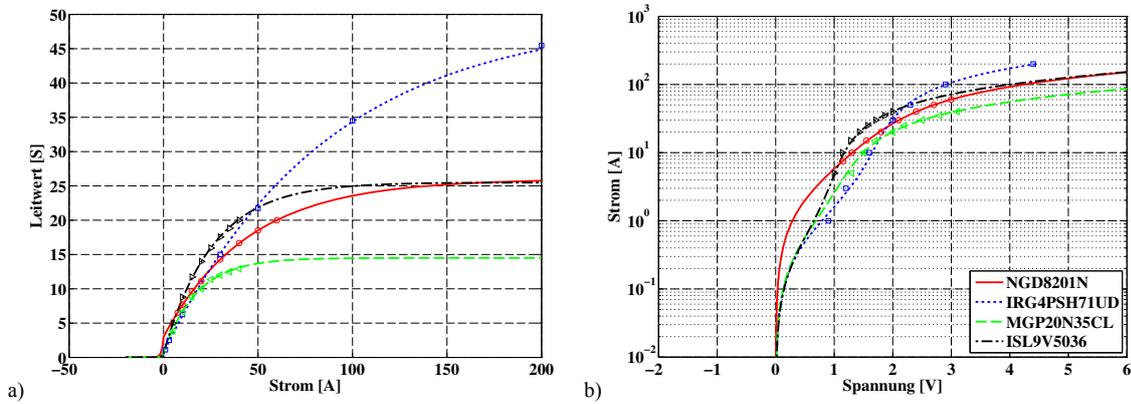


Bild 3.13: Kennlinien handelsüblicher IGBTs und deren Approximation:
a) Leitwert; b) Strom-Spannung-Charakteristik

Die Strom-Spannung-Charakteristik des IGBTs zeigt eine starke Abhängigkeit von der angelegten Steuerspannung zwischen Gate und Emitter. Dieses muss bei der Aufnahme der Transistor-Kennlinien berücksichtigt werden. Die in Bild 3.13 dargestellten Verläufe entsprechen einer Steuerspannung von 5 V.

Handelsübliche IGBTs haben neben dem eigentlichen Transistor eine Schutzschaltung zum Ableiten von Überspannungen parallel geschaltet. Somit setzt sich der Leitwert des IGBTs aus einer gewichteten Summe aus dem Leitwert des eigentlichen Transistors G_T und des Überspannungsschutzes G_Z zusammen:

$$G_{IGBT}(i) = G_T(i) f_{HS}(t - t_0, t_s) + G_Z(i). \quad (3.27)$$

Der Leitwert des Transistors im ausgeschalteten Zustand ist so klein, dass er gegenüber dem Leitwert des Überspannungsschutzes vernachlässigt werden kann. Um das Schalten zu simulieren, wird der Leitwert des Transistors mit einer Smooth-Heaviside-Funktion multipliziert, die den Wert 0 annimmt wenn der Transistor ausgeschaltet und den Wert 1 wenn der Transistor eingeschaltet ist. Im Übergangsbereich verläuft die Funktion stetig zwischen beiden Werten und wird durch ein Polynom höherer Ordnung nachgebildet:

$$f_{HS}(t, t_s) = \begin{cases} 0, & t < -t_s \\ \sum_{k=0}^n a_k t^k, & -t_s \leq t \leq t_s \\ 1, & t > t_s \end{cases}. \quad (3.28)$$

Die Schaltzeit beträgt somit das Doppelte der Zeitkonstante t_s .

In Bild 3.14 ist der Verlauf des Leitwertes eines IGBTs für die Ein- und Ausschaltung eines induktiven Kreises dargestellt. Der simulierte Verlauf beginnt unterhalb der IGBT-Kennlinie und schmiegt sich während des Einschaltvorganges an diese an. Während der Aufladephase der Induktivität folgt er der IGBT-Kennlinie, wobei der Strom weiter ansteigt. In der Ausschaltphase kommutiert der Stromfluss auf der Zenerdiode, wobei er

dabei seinen Wert nicht sprunghaft ändern kann. Die simulierte Leitfähigkeit nimmt den Wert der Zenerdioden-Kennlinie an und der Strom klingt ab. Für den weiteren Verlauf ist die Eigenkapazität des Transistors ausschlaggebend. Wird der Strom durch die Zenerdiode kleiner als der kapazitive Strom, wird eine gedämpfte Schwingung im Reihenschwingkreis angeregt, der aus der Eigenkapazität des Transistors und der angeschlossenen Induktivität gebildet wird. Der simulierte Leitwert entspricht für diesen Abschnitt dem Verlauf der Impedanz der Eigenkapazität.

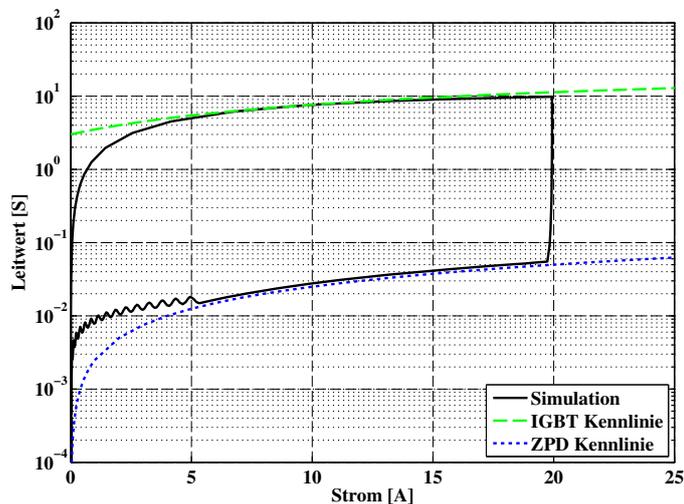


Bild 3.14: Verlauf des Leitwertes während eines simulierten Schaltzyklus

3.4 Messtechnische Validierung des Simulationsmodells für Stabzündtransformatoren

In den vorherigen Unterkapiteln werden die Kernkomponenten des Zündtransformators und deren Modellierung beschrieben sowie der messtechnische Nachweis der vorgestellten Modelle erbracht. Im Folgenden werden das Gesamtmodell des Zündtransformators und ein Verfahren zur Messung der inneren Potentialverteilung vorgestellt. Anhand der gemessenen inneren Größen und der Klemmengrößen wird die Gültigkeit des Modells überprüft.

Für die Messung der Kenngrößen von Zündtransformatoren ist vom Hersteller eine ohmsch-kapazitive Belastung des Transformators vorgeschrieben. In der Regel besteht der Laboraufbau aus einer Kerzenschachtnachbildung zur Aufnahme des Zündtransformators und einer Anordnung mit definierter Kapazität und integriertem ohmschen Spannungsteiler zur Messung der Sekundärspannung. Um die Vergleichbarkeit mit der Messung zu gewährleisten, wird im Simulationsmodell der komplette Versuchsaufbau berücksichtigt.

3.4.1 Simulation eines belasteten Zündtransformators

Das Simulationsmodell des im Versuchsaufbau integrierten Zündtransformators wird in Bild 3.15 vorgestellt. Der Zündtransformator besteht aus der Primär- und Sekundärwicklung, dem magnetischen Kreis, gebildet aus den beiden Permanentmagneten, dem Stabkern und dem Außenblech, und dem Isolationssystem der Sekundärwicklung. Ebenfalls zum Zündtransformator gehören die Ansteuerelektronik und das Anschlussstück.

Die Ansteuerelektronik ist auf einer Platine im Kopf des Zündtransformators untergebracht und stellt durch dessen Massefläche die obere Grenze des Gesamtsystems aus elektrischer Sicht dar. Als wichtigstes Bauteil der Ansteuerelektronik wird nur der IGBT in der Simulation berücksichtigt. Im Geometriemodell sind die Massenfläche und der

IGBT durch zwei scheibenförmige Bereiche abgebildet. Die freie Oberfläche des IGBTs ist über Randbedingungen mit dem unteren Ende der Sekundärwicklung verknüpft.

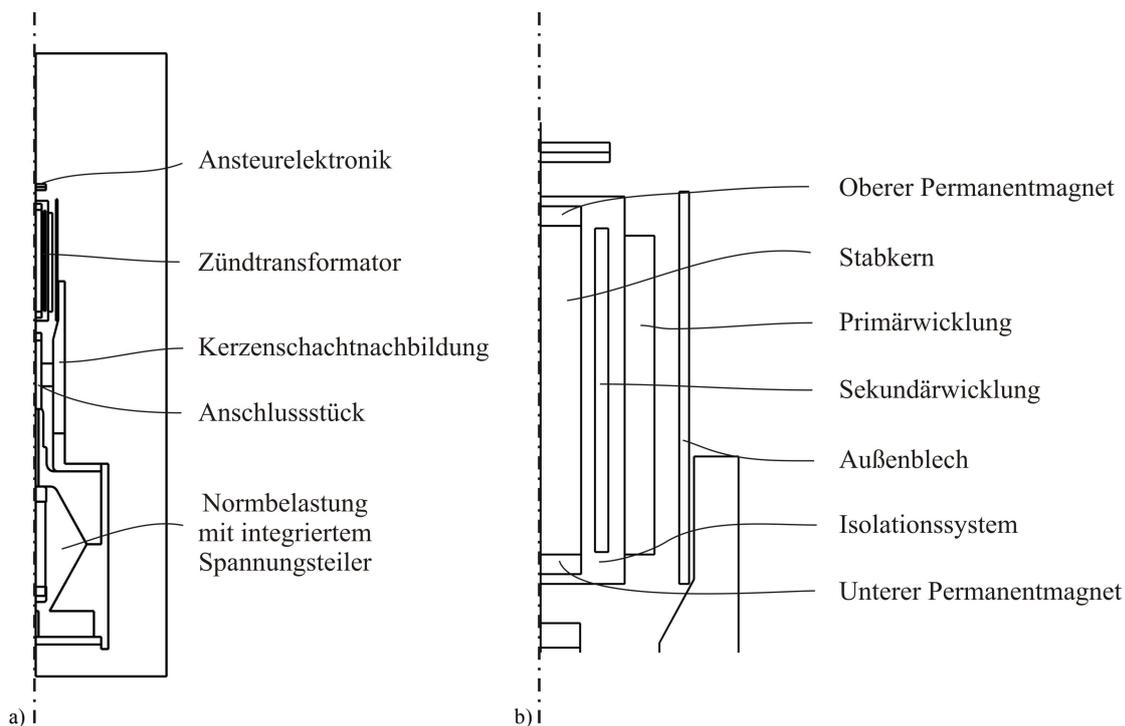


Bild 3.15: Geometriemodell des Versuchsaufbaus für Zündtransformatoren
a) Gesamtansicht; b) Detailansicht des Zündtransformators

Das Anschlussstück stellt die Verbindung des Zündtransformators zur Zündkerze dar. Im Anschlussstück sind die Hochspannungsdioden und ein Entstörwiderstand untergebracht, der die Aufgabe hat, die vom Zündfunken ausgehenden Störaussendungen zu dämpfen. Das Anschlussstück ist auf der Zündkerze montiert und bildet somit mit dem Kerzenschacht eine Kapazität, die zusätzlich zur Kerzenkapazität die sekundärseitige parasitäre kapazitive Belastung des Zündtransformators erhöht.

Die Kerzenschachtnachbildung simuliert die Einbaubedingungen des Zündtransformators im Zylinderkopf. Sie ist mit der Normlast mechanisch verbunden und trägt zur Stabilität des Versuchsaufbaus bei. Durch die lösbare Verbindung zwischen Normlast und Kerzenschachtnachbildung ist es möglich, diese auszutauschen und somit an die geometrische Verhältnisse des Motors, für den der Zündtransformator bestimmt ist, anzupassen.

Die Normlast stellt eine definierte ohmsch-kapazitive Belastung für den Zündtransformator dar. Kernelement der Normlast ist ein Hochspannungswiderstand, der den oberen Widerstand eines Spannungsteilers bildet. Der untere Widerstand wird mit Standardbauelementen realisiert. Die Normlast wird mit einer koaxialen Leitung an das Messdatenerfassungssystem angeschlossen, wobei der kegelförmige Hohlraum eine sprungfreie Aufweitung der Koaxialleitung darstellt und somit eine Wellenwiderstandanpassung realisiert.

Die magnetische Feldverteilung der Anordnung ist in Bild 3.16 dargestellt. Hohe magnetische Feldstärken können nur von der Primär- und Sekundärspule erzeugt werden und treten somit nur im Bereich des Zündtransformators auf. Der restliche Teil der Anordnung ist aus magnetischer Sicht vernachlässigbar. Lediglich in der Kerzenschachtnachbildung können durch ihre Nähe zum Zündtransformator Wirbelströme induziert werden, die die Feldverteilung beeinflussen.

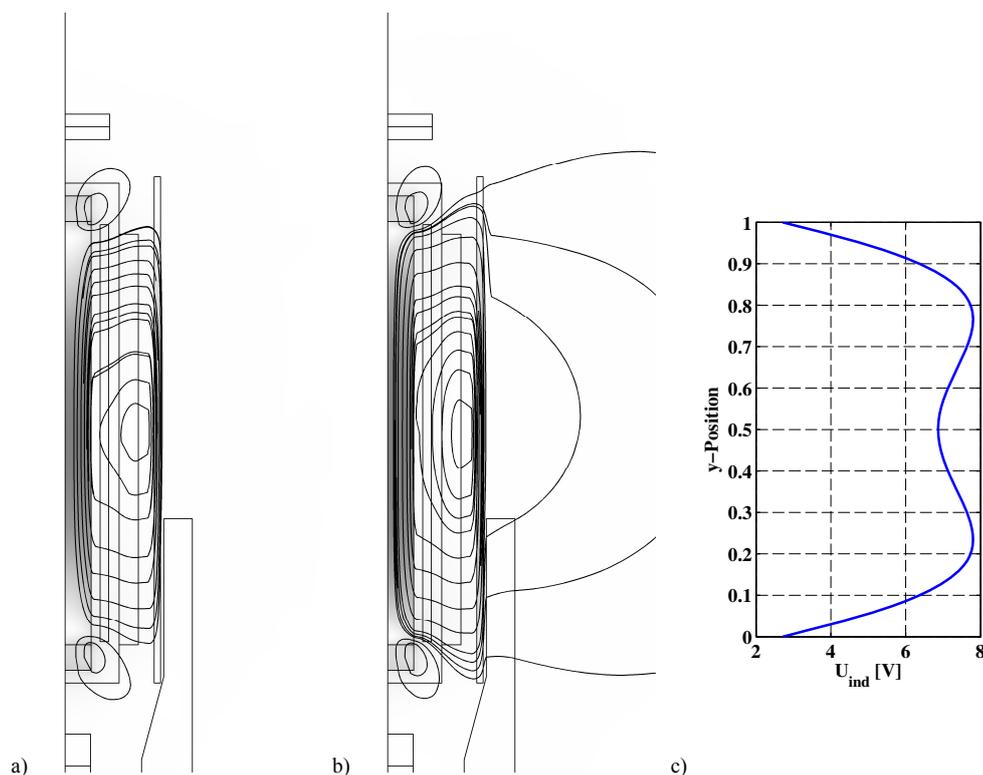


Bild 3.16: Magnetische Feldverteilung des Zündtransformators vor dem Auftreten magnetischer Sättigungseffekte a) und beim Erreichen der ohmschen Sättigung b) sowie den induzierten Spannungsbelag pro Windung in der Sekundärspule c)

Bild 3.16 a) zeigt die magnetische Feldverteilung für den linearen Bereich der Magnetisierungskurve, kurz bevor Sättigungseffekte im magnetischen Kreis auftreten. Der gesamte magnetische Fluss schließt sich über das Außenblech, wobei das magnetische Feld des Zündtransformators gegenüber der Umgebung abgeschirmt wird. Dieser Arbeitspunkt entspricht dem Ausschaltzeitpunkt bei Normalbetrieb.

Wird die Ladezeit des Zündtransformators vergrößert, steigt der Primärstrom weiterhin an und im magnetischen Kreis treten Sättigungseffekte auf. Dabei wird der magnetische Fluss aus dem Außenblech verdrängt und schließt sich über die Umgebung des Transformators (Bild 3.16 b). Das pulsierende magnetische Feld des Zündtransformators kann in diesem Fall Störspannungen in den benachbarten elektronischen Komponenten induzieren und somit die Betriebssicherheit des Fahrzeugs gefährden.

Eine ideale Auslegung des magnetischen Kreises des Zündtransformators sieht vor, dass für die gewünschte Ladezeit der magnetische Fluss über das Außenblech rückgeführt wird. Das vorgestellte Modell ermöglicht dem Entwickler die Visualisierung der Feldverteilung und erleichtert somit die Dimensionierung des magnetischen Kreises, wie hier am Beispiel des Außenbleches verdeutlicht.

Die Simulation zeigt, dass die Endbereiche des Stabkernes und des Außenbleches schwächer durchflutet sind als die Mittelbereiche. Somit gibt es Feldlinien, die nur den mittleren Teil der Wicklungen umschließen, so dass die in den einzelnen Windungen induzierte Spannung eine Ortsabhängigkeit aufweist. Der prinzipielle Verlauf der sekundärseitig induzierten Windungsspannungen ist in Bild 3.16 c) ortsaufgelöst dargestellt. Diese inhomogene Verteilung der induzierten Spannung, verstärkt durch die kapazitive Kopplung zwischen der Sekundärwicklung und dem Stabkern, führt zu einer nichtlinearen Potential-

verteilung entlang der Sekundärwicklung, wodurch das Isolationssystem des Zündtransformators ungleichmäßig belastet wird.

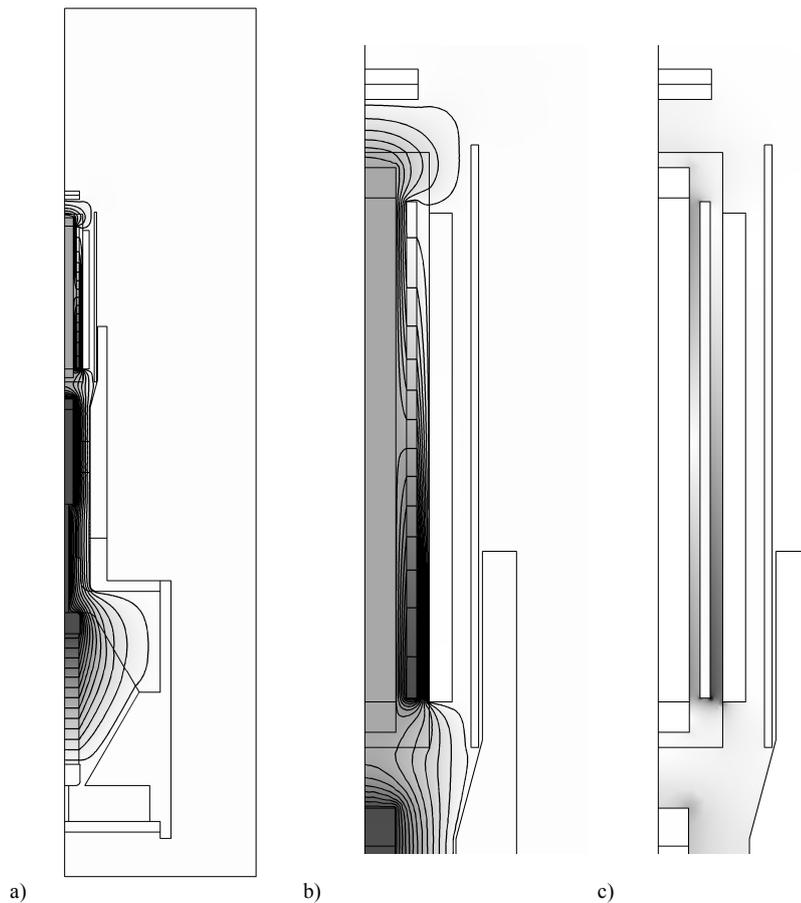


Bild 3.17: Elektrische Potentialverteilung zum Zeitpunkt des Zündimpulsscheitels
a) Gesamtansicht der Versuchsanordnung; b) Detailansicht des Zündtransformators;
c) Feldbelastung des Zündtransformators

Bild 3.17 zeigt die elektrische Feldverteilung des Versuchsaufbaus zum Zeitpunkt des Scheitels der Sekundärspannung. Nach oben ist die Anordnung durch die Massefläche der Ansteuerelektronik begrenzt, der Zündtransformator ist vom Außenblech umgeben und die Kerzenschachtnachbildung und die Normlast haben ein metallisches Gehäuse. Das elektrische Feld baut sich im Inneren der Anordnung auf und ist nach außen durch die metallische Kapselung des Aufbaues abgeschirmt.

Das obere Ende der Sekundärspule befindet sich auf Massenpotential, während die Hochspannung am unteren Ende abgegriffen wird. Die Primärspule ist mit einem Anschluss permanent mit dem Pluspol des Bordnetzes verbunden, während der zweite Anschluss gegen Masse über den IGBT geschaltet wird. Während der Ausschaltphase wird in der Primärspule ebenfalls eine Spannung induziert, die aber aufgrund der niedrigen Windungszahl der Spule gering ausfällt. Somit nimmt die Primärspule im Normalbetrieb ein niedriges Potential an, das die Potentialverteilung des Zündtransformators nicht wesentlich beeinflusst. Der Stabkern befindet sich auf schwebendem Potential und ist mit der Sekundärspule ausschließlich kapazitiv gekoppelt.

Die höchste Belastung des Isolationssystems wird am unteren Ende der Sekundärwicklung, zwischen Primär- und Sekundärwicklung, erreicht (Bild 3.17 c). Am unteren Ende

der Sekundärwicklung wird die höchste Spannung der Anordnung erreicht, während die Primärwicklung sich annähernd auf Massepotential befindet.

Aufgrund der kapazitiven Kopplung zwischen Sekundärwicklung und Stabkern wird das Potential des Kerns von der Spannungsverteilung entlang der Sekundärwicklung bestimmt. Idealerweise baut sich die Spannung entlang der Sekundärwicklung linear ab und der Kern nimmt das mittlere Potential der Spule an, so dass die Belastung der Isolation der Sekundärspule zum Kern auf beiden Endbereichen der Anordnung gleich aufgeteilt wird. Ist das nicht der Fall, kann zur gleichmäßigen Belastung des Isolationssystems eine passive Steuerung des Kernpotentials mit konzentrierten Elementen durchgeführt werden.

Die Ortsabhängigkeit der in der Sekundärwicklung induzierten Spannung sowie der Längskapazitätsbelag des Bereichs Kern-Sekundärwicklung und Sekundär-Primärwicklung bestimmen die Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung. Diese hat einen erheblichen Einfluss auf die Belastung des Isolationssystems und somit auf die Lebensdauer des Zündtransformators. Eine nichtlineare Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung führt zur Verschiebung des Kernpotentials und zur ungleichmäßigen Beanspruchung der Windungsisolations. Somit steigt die Wahrscheinlichkeit eines Durchschlags des Isolationssystems zwischen Kern und Sekundärspule, sowie eines sekundärseitigen Windungsschlusses.

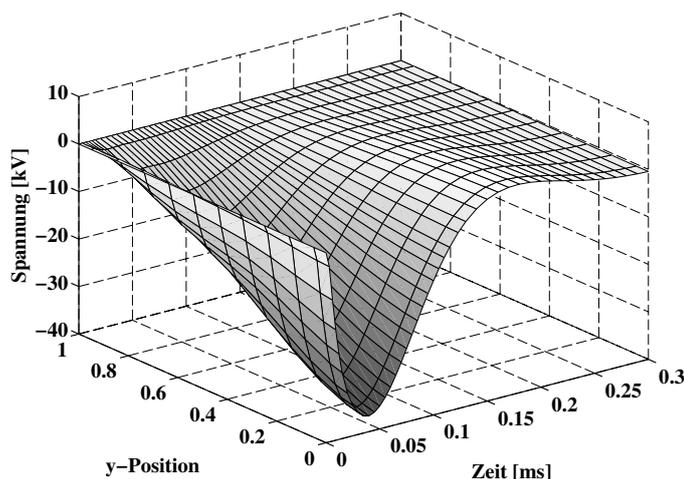


Bild 3.18: Simulierte Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung

Die Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung ist somit signifikant für die Feldbelastung des Transformators und gehört zu den Auslegungsmerkmalen eines Zündtransformators. Zur Bestimmung der Güte der Simulation wird ein Zündtransformator mit kapazitiven Feldsonden ausgestattet und die gemessene der simulierten Potentialverteilung gegenübergestellt. Der simulierte örtliche und zeitliche Verlauf der Potentialverteilung ist in Bild 3.18 dargestellt.

3.4.2 Aufbau zur Messung der inneren elektrischen Feldverteilung

Zur messtechnischen Erfassung der inneren elektrischen Feldbelastung eines Zündtransformators wird ein Prototyp mit kapazitiven Feldsonden aufgerüstet, die es ermöglichen, das Potential der Sekundärwicklung orts aufgelöst abzutasten [16]. Der vorgestellte Aufbau verfügt über zehn kapazitive Feldsonden, die über die Länge des Zündtransformators verteilt sind. Somit ist es möglich, den zeitlichen Verlauf des Potentials der Sekundärwicklung an zehn Stellen gleichzeitig zu messen.

Der prinzipielle Aufbau der Feldsonden ist in Bild 3.19 dargestellt. Die verwendeten Sensorelemente bestehen jeweils aus einer Ringelektrode, die den Mittelabgriff eines kapazitiven Spannungsteilers zwischen Sekundär- und Primärwicklung darstellt. Die Ringelektroden sind unmittelbar unterhalb der Primärwicklung positioniert und bilden zur Sekundärwicklung die Oberkapazitäten der Spannungsteiler. Zur Primärwicklung hin sind die Ringelektroden durch eine Metallfolie abgeschirmt, die sich auf Massepotential befindet. Die Unterkapazität des Spannungsteilers besteht aus der Kapazität zwischen Ringelektrode und Metallfolie, ergänzt durch parallel geschaltete Kondensatoren in SMD-Bauform. Durch die unmittelbare Nähe zur Primärwicklung haben die Sensorelemente keinen Einfluss auf die elektrische Feldverteilung des Zündtransformators und ermöglichen somit die rückwirkungsfreie Messung der Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung.

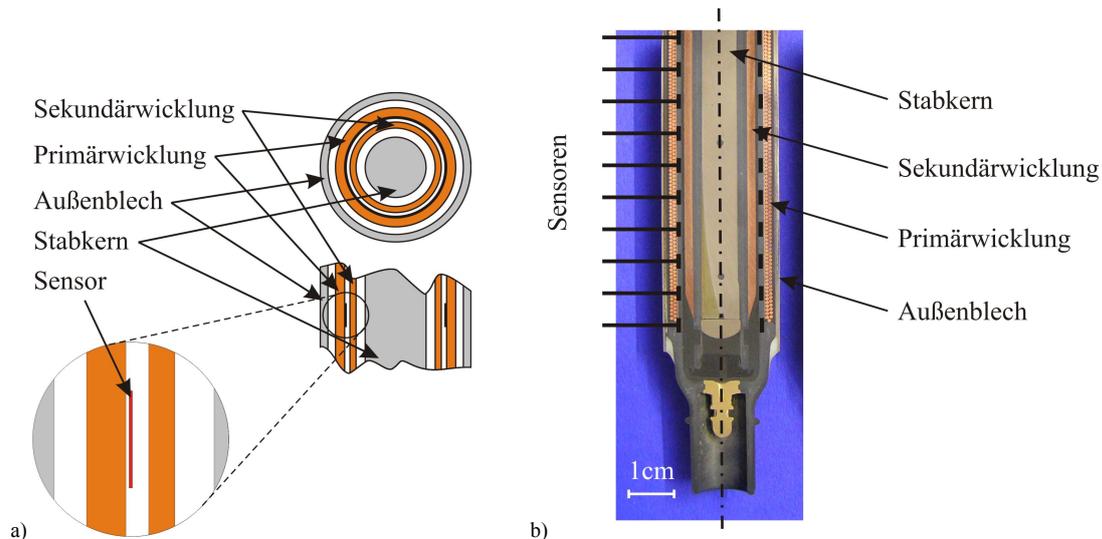


Bild 3.19: Aufbau zur Messung der inneren Potentialverteilung eines Zündtransformators
a) Prinzipskizze ; b) Position der Sensorelemente

Die Struktur der Ringelektroden wird auf eine kupferbeschichtete Kunststoffolie geätzt, die auf den Primärspulenkörper geklebt wird. Somit wird sichergestellt, dass die Geometrie der Sensorelemente und deren Position mit hoher Präzision eingehalten werden kann. Zwischen den einzelnen Ringelektroden befinden sich Masseleiterbahnen, um ein Übersprechen der benachbarten Sensoren zu verhindern. Die Abschirmung der Sensorelemente zur Primärwicklung besteht ebenfalls aus einer kupferbeschichteten Kunststoffolie, die mit dem Massepotential verbunden ist. Die Ringelektroden und die Abschirmung sind geschlitzt ausgeführt, um den Betrieb des Transformators nicht durch eine Kurzschlusswicklung zu beeinträchtigen.

Um Eigenresonanzen zu vermeiden, werden die Ringelektroden über einen Dämpfungswiderstand an der Unterkapazität des Spannungsteilers angeschlossen. Der Aufbau entspricht somit einem gedämpften kapazitiven Teiler. Die Spannungsteiler werden radial durch die Primärwicklung über einen in Reihe geschalteten Abschlusswiderstand kontaktiert.

Bild 3.20 zeigt einen mit der Messtechnik ausgestatten, unbewickelten Primärspulenkörper². Aufrecht stehend sind die Abschlusswiderstände zu erkennen, an denen die Messleitungen angeschlossen werden. Die Zusatzkondensatoren für die Unterkapazität sind zwi-

² M. Westecker: *Experimentelle Bestimmung der Potentialverteilung bei koaxialen Spulenarrangements im Impulsbetrieb*, Diplomarbeit, Universität Dortmund, Lehrstuhl für Hochspannungstechnik und EMV, 2005

schen den Abschlusswiderständen positioniert und an den jeweiligen Ringelektroden und den benachbarten Masseleiterbahnen kontaktiert.

Aufgrund des hohen Aufwandes in der Herstellung der Sensorelemente wird auf den Einsatz von Epoxydharz als Isolationsmittel verzichtet und stattdessen Isolieröl eingesetzt. Somit können Sekundärwicklung und Stabkern leicht ausgetauscht und der Einfluss unterschiedlicher Geometrien und Materialien auf die Feldverteilung des Zündtransformators untersucht werden. Das Isolieröl wird hierfür mit einer zum serienmäßig eingesetzten Epoxydharz annähernd gleichen Permittivitätszahl gewählt und die Sekundärwicklung unter Vakuum imprägniert.



Bild 3.20: Primärspulenkörper mit Sensorelementen bestückt

Die Größe der Oberkapazität und somit auch das Teilungsverhältnis der eingesetzten kapazitiven Spannungsteiler werden vom Abstand zwischen Sekundärwicklung und Ringelektrode beeinflusst. Demzufolge müssen die Sensorelemente für jede untersuchte Geometrie der Sekundärspule neu kalibriert und ein individuelles Übersetzungsverhältnis für jeden Sensor bestimmt werden. Hierzu wird eine an die äußere Kontur der Sekundärwicklung angepasste Metallelektrode angefertigt, die anstelle der Sekundärwicklung im Messaufbau eingesetzt und mit einer Impulsspannung aus einer externen Quelle beaufschlagt wird. Dabei werden die Signale der Sensorelemente und die angelegte Impulsspannung aufgenommen und somit die Übersetzungsverhältnisse bestimmt. Gleichzeitig wird ein Funktionstest des Messaufbaues durchgeführt.

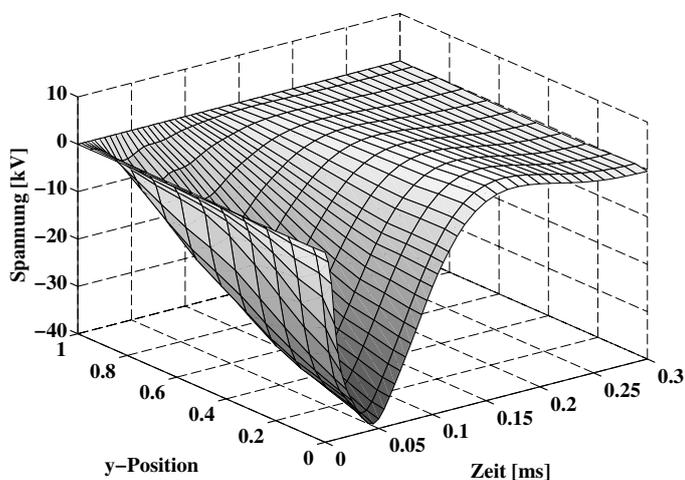


Bild 3.21: Gemessene Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung

Bild 3.21 zeigt den gemessenen Potentialverlauf entlang der Sekundärwicklung eines Zündtransformators für die ersten 300 μs nach dem Abschalten des Primärstromes. Der dargestellte Verlauf ist dem in Bild 3.18 vorgestellten simulierten Potentialverlauf ähnlich. Ein direkter Vergleich beider Verläufe wird in folgendem Unterkapitel vorgestellt.

3.4.3 Gegenüberstellung der simulierten und gemessenen Größen

Die Klemmengrößen sind die primären Messgrößen, nach denen Zündtransformatoren bewertet werden. Die elektrischen Anforderungen der Automobilhersteller beziehen sich in erster Linie auf die Primärstromaufnahme bei vorgegebener Ladezeit und den sekundärseitig induzierten Hochspannungsimpuls. Die Wahl dieser Größen hat den Vorteil, dass sie leicht messbar sind und die Interaktion mit dem Bordnetz sowie die Funktionalität des Zündtransformators quantifizieren.

Für den Zündtransformatorhersteller hingegen ist die innere Feldbelastung des Produktes ein wichtiger Hinweis über die Reserven und kritischen Bereiche des Produktes. Vor allem im Sinne eines umweltbewussten Umgangs mit den Ressourcen ist eine bestmögliche Ausnutzung der eingesetzten Materialien bei garantierter Funktionalität und Lebensdauer gefragt. Dabei bietet die Simulation des Zündtransformators die Möglichkeit, das Produkt besser zu verstehen und neue Wege in der Produktentwicklung zu gehen.

Die Gültigkeit des vorgestellten Simulationsmodells wird anhand der Übereinstimmung der gemessenen und simulierten Klemmengrößen sowie der sekundärseitigen Potentialverteilung validiert. Bild 3.22 zeigt den gemessenen und simulierten Verlauf des Primärstromes und der Sekundärspannung des untersuchten Zündtransformators. Der Stromverlauf gibt den linearen Magnetisierungsverlauf des magnetischen Kreises, das Auftreten der magnetischen Sättigungseffekte und das Eintreten der ohmschen Sättigung wieder. Der Verlauf der Sekundärspannung entspricht während der Aufladephase dem Verlauf des induktiven Spannungsabfalls und wird nach dem Ausschaltzeitpunkt vom Schwingverhalten der Sekundärwicklung bestimmt.

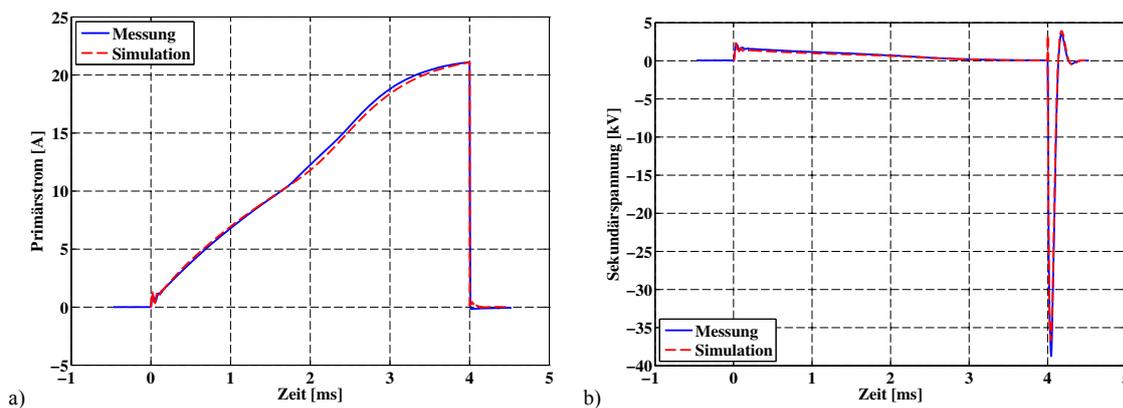


Bild 3.22: Vergleich der gemessenen und simulierten Klemmengrößen eines Zündtransformators

a) Primärstrom; b) Sekundärspannung

Die gemessene und simulierte Potentialverteilung entlang der Sekundärspule zum Zeitpunkt des Scheitels des Zündimpulses werden in Bild 2.23 gegenübergestellt. Die höchste Steilheit des Verlaufes, die der höchsten Feldbelastung für die Windungsisolierung entspricht, wird im Mittelbereich der Wicklung erreicht, als Folge der Abnahme der induzierten Spannung in den Endbereichen der Wicklung (Bild 3.16 c).

Die Übereinstimmung der gemessenen und simulierten Potentialverteilung dient als Nachweis für die korrekte Berechnung der Feldverteilung des Zündtransformators. Wie bereits gezeigt, ist das Potential der Primärwicklung dem Massepotential annähernd gleich, so dass die elektrische Feldstärke des Bereiches zwischen Sekundär- und Primärwicklung ausschließlich von der Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung bestimmt wird. Zusätzlich wird das Potential des Stabkernes, aufgrund der kapazitiven Kopplung zwischen Kern und Sekundärspule, ebenfalls von der Potentialverteilung entlang der Sekundärwicklung bestimmt. Somit ist diese auch für die elektrische Feldstärke des Bereiches zwischen Kern und Sekundärwicklung maßgebend. Stimmt die simulierte Potentialverteilung entlang der Sekundärspule mit den Messungen überein, so kann davon ausgegangen werden, dass die Feldverteilung des Zündtransformators von der Simulation richtig wiedergeben wird.

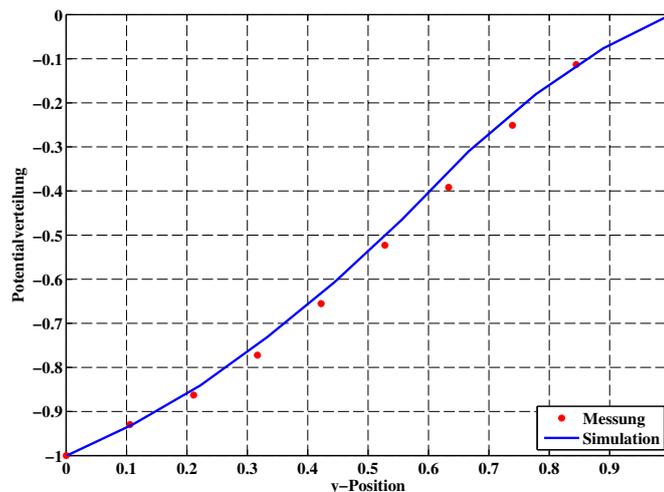


Bild 3.23: Gemessener und simulierter nichtlinearer Potentialabbau entlang der Sekundärwicklung

Das vorgestellte Modell liefert belastbare Simulationsergebnisse, so dass viele Entscheidungen im Entwicklungsprozess eines neuen Zündtransformators am Rechner getroffen werden können. Somit wird die Anzahl der Versuchsmuster, die für die Neuentwicklung benötigt werden, signifikant reduziert. Durch den Einsatz der Simulation lassen sich der Entwicklungsprozess zielorientiert gestalten, der Entwicklungszyklus beschleunigen und die Entwicklungskosten reduzieren. Zusätzlich kann am Modell die Robustheit des Produktes untersucht und daraus die Toleranzen des Herstellungsprozesses definiert werden. Vor allem für die umweltbewusst geforderte grenzwertige Auslastung der eingesetzten Materialien ermöglicht die Simulation die Berechnung vorhandener Reserven und die rechnerunterstützte Optimierung konstruktiver Details [15].

4 Die Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes am Beispiel eines Hubmagneten

In der Hochspannungsübertragungstechnik werden häufig Hubmagnete als Auslöser für die Verriegelungsmechanismen von Hochspannungsschaltern eingesetzt. Sie dienen zur Betätigung der Elektromagnetventile bei Hydraulikantrieben oder zur Auslösung der Verklüftung bei Federspeicherantrieben. Entscheidend bei der Dimensionierung der Hubmagnete für den Einsatz in Hochspannungsschaltanlagen sind die Reaktionszeit und die aufgenommene elektrische Leistung.

Um eine mechanische Überbeanspruchung der Netzkomponenten im Fehlerfall zu vermeiden, fordern die Netzbetreiber, dass die Hochspannungsleistungsschalter den Kurzschlussstrom innerhalb von zwei Perioden unterbrechen. Diese Zeit wird von Beginn des Stromflusses in der Auslöserspule bis zur erfolgreichen Stromlöschung in allen drei Phasen gemessen und hängt somit auch von der Reaktionszeit des Hubmagneten ab [6]. Gleichzeitig wird für die elektrische Leistungsaufnahme der Hubmagnete eine obere Grenze vorgeschrieben, die sich aus der Dimensionierung der Notstromversorgung der Umspannwerke ableitet.

Die Reaktionszeit des Hubmagneten hängt von dem Aufbau des magnetischen Kreises und der mechanischen Auslegung des Systems ab. Im Hinblick auf die mechanische Festigkeit wird der Anker in der Regel nicht geblecht sondern massiv ausgeführt. Die auftretenden Wirbelströme verzögern den Aufbau des magnetischen Feldes und führen somit zur Abschwächung der Kraftwirkung in der Anfangsphase der Bewegung. Diesem kann durch eine Übererregung der Spule entgegengewirkt werden, wodurch jedoch die aufgenommene Leistung steigt. Durch die von den Wirbelströmen verursachte Feldverdrängung treten im magnetischen Kreis schon in der Anfangsphase lokal hohe Flussdichten auf, so dass sich die magnetische Nichtlinearität auf die Zeitkonstante des Systems auswirkt. Die wichtigsten mechanischen Einflussfaktoren sind die Masse der bewegten Teile, die auftretenden Reibungskräfte und der Strömungswiderstand der verdrängten Luft. Um eine hohe Anfangsbeschleunigung zu erhalten, ist eine Optimierung der Magnetkraft-Hub-Kennlinie durch die konstruktive Gestaltung des Hubmagneten erforderlich [30]. Hierzu kann eine nichtlineare elektromagnetisch und magnetisch gekoppelte Feldberechnung eingesetzt werden, um die Funktionsweise des Hubmagneten detailliert zu beschreiben.

4.1 Prinzipieller Aufbau eines Hubmagneten

Der prinzipielle Aufbau eines Hubmagneten ist in Bild 4.1 dargestellt. Abgebildet ist ein Tauchanker-Hubmagnet, der aufgrund seiner einfachen Bauweise eine weite Verbreitung bei den Auslösern von Hochspannungsschaltern gefunden hat. Die Hauptkomponente des Hubmagneten ist die Spule, deren Windungszahl und Drahtstärke abhängig von der gewählten Nennspannung dimensioniert werden. Die Spule wird von dem Gehäuse umfasst, das gleichzeitig als magnetischer Rückschluss dient. Der Polkern und der Anker sind aus hochpermeablem Werkstoff gebaut und definieren den Luftspalt, der bei Betätigung des Hubmagneten verkleinert wird. Durch die Gestaltung des Polkern-Anker-Systems wird primär die Magnetkraft-Hub-Kennlinie beeinflusst. Der Deckel schließt den Hubmagneten ab und ist in den magnetischen Kreis integriert. Der Stößel überträgt die Kraftwirkung nach außen und besteht aus einem nichtmagnetisierbaren Werkstoff.

Im Normalbetrieb wird an den Klemmen der Spule eine Gleichspannung angelegt, wodurch ein magnetisches Feld im Hubmagneten aufgebaut wird. Die Stromaufnahme weist

einen exponentiellen Zuwachs auf, wird jedoch von der Induktivitätsänderung durch die Ankerbewegung und der Nichtlinearität der eingesetzten magnetischen Werkstoffe beeinflusst. Die Ankerbeschleunigung ist proportional zum Quadrat des Stromes und unmittelbar nach dem Zuschaltzeitpunkt vernachlässigbar klein. Eine Bewegung des Ankers wird erst verzeichnet, wenn der Spulenstrom einen kritischen Wert erreicht und die magnetische Kraft die Reibungskräfte überwindet. Diese Verzögerung wird durch die Erhöhung der Anfangsstromsteilheit verringert. Praktisch wird hierfür die Anfangsinduktivität verringert oder die Versorgungsspannung während der Beschleunigungsphase erhöht. Die Magnetkraft, die den Anker wegdrückt, wirkt als Gegenkraft auf die Windungen der Spule, so dass diese mechanisch stabilisiert werden müssen. Hierzu wird teilweise die gesamte Spule im Gehäuse vergossen oder umspritzt.

Bei Hochspannungsschaltern wird die Versorgungsspannung des Hubmagneten von einem Hilfskontakt abgeschaltet, der von der kinematischen Kette des Schalters betätigt wird. Somit wird sichergestellt, dass der Auslöser erst nach dem erfolgreichen Entriegeln der Verklüpfung abgeschaltet wird. Nach Betätigung wird der Hubmagnet durch eine Feder, die auch im Verklüpfungsblock integriert sein kann, in die Initialposition gebracht. Alternativ werden auch Permanentmagnete eingesetzt, um den Anker im stromlosen Fall in einer definierten Position zu halten.

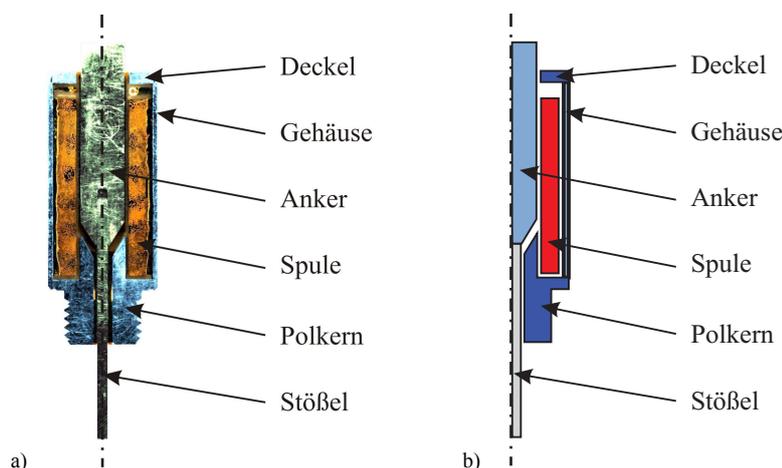


Bild 4.1: Aufbau eines Hubmagneten: a) Schnittbild; b) Simulationsmodell

4.2 Mechanische Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes

Die mechanische Kraftwirkung des elektromagnetischen Feldes ist eng mit dem Vorgang der Speicherung von Energie im magnetischen Feld verknüpft und beruht auf physikalischer Ebene auf der Kraftwirkung zwischen bewegten Ladungsträgern. Auf die Volumeneinheit dV , in der sich eine Raumladung der Dichte ρ befindet, die sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} durch ein magnetisches Feld der Flussdichte \vec{B} bewegt, wirkt die Lorentzkraft, definiert durch

$$\vec{F} = \iiint_V \rho (\vec{v} \times \vec{B}) dV = \iiint_V \vec{J} \times \vec{B} dV. \quad (4.1)$$

Bezogen auf die Volumeneinheit ergibt sich für die Kraftdichte

$$d\vec{F} = \vec{J} \times \vec{B} = (\text{rot } \vec{H}) \times \vec{B}. \quad (4.2)$$

Hiermit folgt, dass die magnetische Kraft von den Vektorfeldern der magnetischen Feldstärke und der magnetischen Flussdichte vollständig beschrieben wird. Die Kraftamplitude und -richtung können aus der Lösung des magnetischen Feldes direkt ermittelt werden.

Die Gleichung (4.2) sagt aus, dass auf einen stromdurchflossenen Raumbereich, gekennzeichnet durch eine von Null verschiedene Rotation der magnetischen Feldstärke, eine zur lokalen magnetischen Flussdichte proportionale Kraft wirkt. Dieser Effekt ist unabhängig von der Natur des Stromflusses, so dass sowohl freie Ströme als auch Elementarströme eine Kraftwirkung hervorrufen. Das verwendete Feldmodell bildet allerdings die Elementarströme nicht ab, sondern beschreibt nur deren Wirkung auf das äußere Feld über die Permeabilitätszahl der unterschiedlichen Werkstoffe (siehe Kapitel 2.1.2). Somit wird die Flussverstärkung und Feldverdrängung außerhalb des Werkstoffes naturgetreu abgebildet, jedoch werden gebundene Ströme und Magnetisierung innerhalb des Werkstoffes vom Modell nur über Umwege erfasst.

In der Feldbeschreibung fehlen zunächst die Quellterme für die Magnetisierung der Werkstoffe, so dass die Rotation der magnetischen Feldstärke innerhalb der magnetisierten Werkstoffe konstant den Wert Null annimmt. Dementsprechend ist es nicht möglich, die Kraftwirkung in magnetisch polarisierten Werkstoffen mit der Gleichung (4.2) direkt zu berechnen. Abhilfe verschafft die Beschreibung der differentiellen Lorentzkraft als Divergenz eines Tensorfeldes. Die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ermöglicht hiermit die Berechnung der magnetischen Kraftwirkung in einem beliebigen Raumbereich als geschlossenem Integral des Tensors über der Grenzfläche des betrachteten Bereiches [39]. Im Folgenden werden die mathematische Umformung der Kräftegleichung und die getroffenen Annahmen erläutert.

Ziel der mathematischen Umformung ist es, eine Gleichung für die magnetische Kraft zu finden, in der kein Kreuzprodukt bzw. Rotation vorkommt. Die Grundlage für die Umformung stellt die Rechenregel für den Gradienten des Skalarproduktes zweier Vektoren dar [8]:

$$\vec{\nabla}(\vec{H} \cdot \vec{B}) = (\vec{H} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{H} + \vec{H} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}). \quad (4.3)$$

Für eine weitere Vereinfachung der Gleichung (4.3) werden die Isotropie und die Linearität des betrachteten Mediums vorausgesetzt. Unter Annahme eines isotropen Mediums gilt

$$H_u B_v = H_u \mu H_v = B_u H_v, \quad (4.4)$$

wobei u und v für beliebige Raumrichtungen stehen. Wenn das Medium zusätzlich auch linear ist, kann diese Annahme auch auf die partiellen Ableitungen erweitert werden:

$$H_u \frac{\partial B_v}{\partial w} = H_u \frac{\partial \mu H_v}{\partial w} = \mu H_u \frac{\partial H_v}{\partial w} = B_u \frac{\partial H_v}{\partial w}, \quad (4.5)$$

wobei w für eine weitere Raumrichtung steht. Unter Berücksichtigung der Gleichungen (4.4) und (4.5) ergeben sich folgende Produktregeln:

$$(\vec{H} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{H} \quad \text{und} \quad \vec{H} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}). \quad (4.6)$$

Hiermit lässt sich aus Gleichung (4.3) ein Ausdruck für das Kreuzprodukt zwischen der magnetischen Flussdichte und der Rotation der magnetischen Feldstärke ableiten:

$$\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}(\vec{H} \cdot \vec{B}) - (\vec{H} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}. \quad (4.7)$$

Die Gleichung (4.7) stellt eine abgewandelte Form der Weber-Transformation dar. Um die einzelnen Komponenten der Kraftdichte als Divergenz eines Vektorfeldes ausdrücken zu können, wird Gleichung (4.2) mit dem Term $(\text{div} \vec{B}) \vec{H}$ einseitig erweitert. Dieses ist aufgrund der Quellenfreiheit des magnetischen Feldes, ausgedrückt durch Gleichung (1.26), möglich. Diese Erweiterung ist erforderlich, um die einzelnen Terme der Gleichung (4.7) zu partiellen Ableitungen des Produktes der Komponenten der magnetischen Flussdichte und der magnetischen Feldstärke zusammenzufassen. Für die magnetische Kraftdichte ergibt sich somit folgender Ausdruck:

$$d\vec{F} = (\text{div} \vec{B}) \vec{H} - \vec{B} \times (\text{rot} \vec{H}) = (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{H} + (\vec{H} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{H} \cdot \vec{B}). \quad (4.8)$$

Exemplarisch wird die Kraftdichte in x-Richtung ausformuliert:

$$\begin{aligned} dF_x &= \frac{\partial B_x}{\partial x} H_x + \frac{\partial B_y}{\partial y} H_x + \frac{\partial B_z}{\partial z} H_x + H_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial B_x}{\partial z} - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_x B_x + H_y B_y + H_z B_z) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (H_x B_x - H_y B_y - H_z B_z) + \frac{\partial}{\partial y} (H_x B_y) + \frac{\partial}{\partial z} (H_x B_z). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Die Gleichung (4.9) findet sich in der ersten Zeile des Tensors T wieder:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (H_x B_x - H_y B_y - H_z B_z) & & & \\ H_y B_x & & & \dots \\ H_z B_x & & & \\ & H_x B_y & & H_x B_z \\ \dots & \frac{1}{2} (H_y B_y - H_x B_x - H_z B_z) & & H_y B_z \\ & H_z B_y & & \frac{1}{2} (H_z B_z - H_x B_x - H_y B_y) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

auch als Maxwell'scher Spannungstensor bekannt. Die einzelnen Elemente des Tensors stellen mechanische Oberflächenspannungen dar [22]. Auf die Hauptdiagonalen sind die Zug- und Druckspannungen entlang der Richtungsachsen abgebildet, während die Nebendiagonalen die Scherspannungen beinhalten. Dimensionmäßig entspricht der Maxwell'sche Spannungstensor einer Energiedichte. Die Divergenz des Maxwell'schen Spannungstensors stellt die magnetische Kraftdichte dar:

$$d\vec{F} = \text{div} T = T \cdot \vec{\nabla}. \quad (4.11)$$

Die Divergenz eines Tensorfeldes ist ein Vektorfeld und wird formell als Multiplikation des Tensors mit dem Nabla-Operator, dargestellt als Spaltenvektor, definiert.

Die Kraft, die auf einen Raumbereich V wirkt, kann mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes als geschlossenes Integral über die Grenzfläche ∂V berechnet werden:

$$\vec{F} = \iiint_V d\vec{F} dv = \iiint_V \text{div} T dv = \oint_{\partial V} T \cdot d\vec{A}. \quad (4.12)$$

Das Skalarprodukt des Tensors mit der Normalen zur Oberfläche ist ein Vektor, dessen Komponenten die mechanische Spannung in jeder Raumrichtung repräsentieren:

$$\vec{t} = T \cdot \vec{n}. \quad (4.13)$$

Die einzelnen Komponenten berechnen sich als Skalarprodukt jeder Tensorzeile mit der Normalen:

$$\begin{aligned} t_x &= \frac{1}{2}(H_x B_x - H_y B_y - H_z B_z)n_x + H_x B_y n_y + H_x B_z n_z \\ t_y &= H_y B_x n_x + \frac{1}{2}(H_y B_y - H_x B_x - H_z B_z)n_y + H_y B_z n_z \\ t_z &= H_z B_x n_x + H_z B_y n_y + \frac{1}{2}(H_z B_z - H_x B_x - H_y B_y)n_z. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Für die Kraftberechnung muss für jede Raumrichtung ein getrenntes Integral gelöst werden.

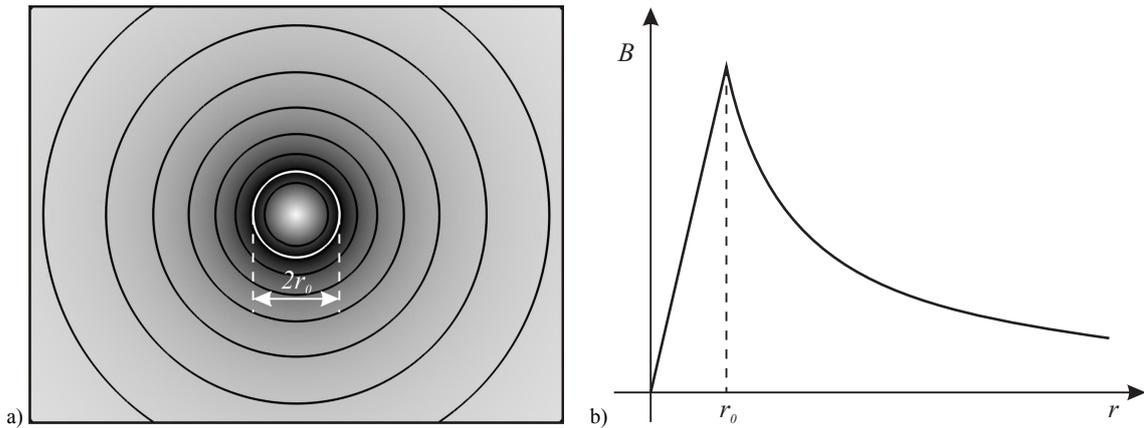


Bild 4.2: Magnetisches Feld eines stromdurchflossenen Leiters:
a) räumliche Verteilung; b) radiale Verteilung

Im Folgenden wird die Berechnung der magnetischen Kraft an drei vereinfachten Anordnungen exemplarisch erläutert. Als Erstes wird die Kraftwirkung innerhalb eines stromdurchflossenen Leiters im stationären Zustand untersucht. Über den Querschnitt des Leiters wird eine konstante Stromdichte angenommen. Die resultierende räumliche Verteilung des magnetischen Feldes wird in Bild 4.2 dargestellt. Im Inneren des Leiters nimmt die Flussdichte linear zur Entfernung zum Mittelpunkt zu, während sie in der Umgebung des Leiters mit dem Kehrwert der Entfernung abnimmt.

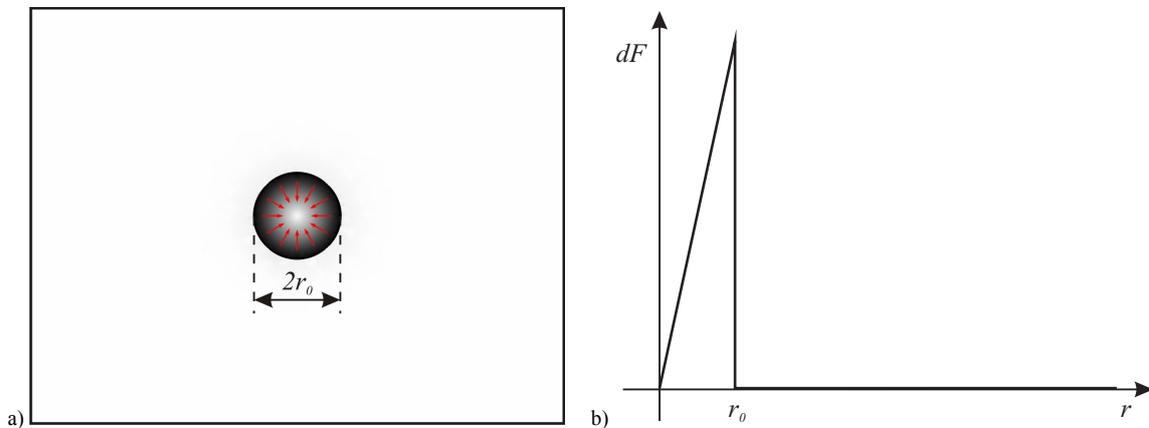


Bild 4.3: Magnetische Kraftdichte innerhalb eines stromdurchflossenen Leiters:
a) räumliche Verteilung; b) radiale Verteilung

Hiermit ergibt sich im Inneren des Leiters eine zum Mittelpunkt gerichtete Kraftwirkung, die aufgrund der konstanten Stromdichte dem Verlauf der magnetischen Flussdichte folgt (Bild 4.3). Diese Kraft tritt in jedem stromdurchflossenen Leiter auf und ist im Regelfall höher als die Kraft zwischen einzelnen Stromleitern, bedingt durch den im Vergleich zum Leiterabstand kleineren Leiterdurchmesser.

Im nächsten Fallbeispiel wird die Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern untersucht. Diese Anordnung ist für die Verifizierung der Kraftberechnung geeignet, da eine geschlossene mathematische Lösung vorliegt. Das Ampere ist über die Kraftwirkung zwischen zwei parallelen, unendlich langen, geraden Leitern definiert. Die Stromstärke in den Leitern beträgt 1 A, wenn bei einem Abstand von 1 m auf den Leitern eine spezifische Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N/m im Vakuum wirkt [38].

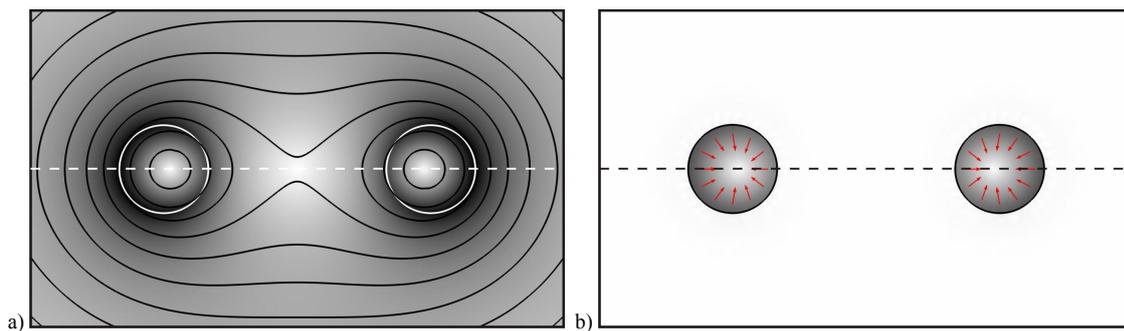


Bild 4.4: Räumliche Verteilung a) der magnetischen Flussdichte und b) der magnetischen Kraftdichte zwischen parallelen Leitern

In dem vorliegenden Beispiel sind die Ströme beider Leiter gleichgerichtet. Bild 4.4 a) zeigt die räumliche Verteilung der magnetischen Flussdichte dieser Anordnung. Entsprechend der Superposition der magnetischen Felder der einzelnen Leiter wird das Feld im Bereich zwischen den Leitern abgeschwächt, während sich im restlichen Feldraum die einzelnen Feldkomponenten konstruktiv überlagern. Die resultierende Kraftdichteverteilung ist in Bild 4.4 b) dargestellt. Die in den einzelnen Leitern wirkenden Kräfte sind, wie im vorherigen Beispiel, zum Mittelpunkt des Leiters gerichtet, jedoch ist die Resultierende über den Querschnitt des Leiters so gerichtet, dass sich beide Leiter anziehen. Die resultierende Kraftwirkung führt zu einer Verkürzung der Feldlinien.

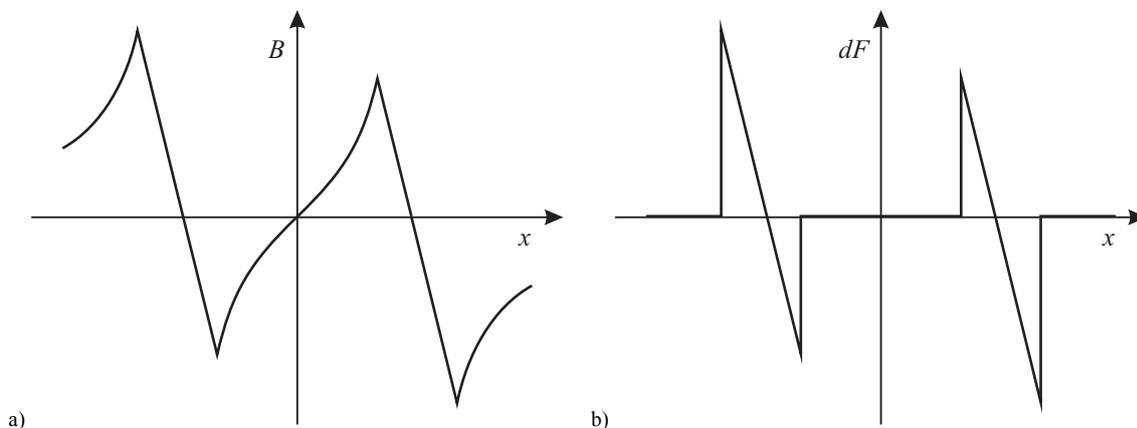


Bild 4.5: Magnetische Flussdichte a) und magnetische Kraftdichte b) zwischen parallelen Leitern entlang der Symmetrieachse

Bild 4.5 zeigt den Verlauf der Feldgrößen entlang der Symmetrieachse der Anordnung. Die gewählte Symmetrieachse ist in Bild 4.4 gestrichelt dargestellt. Der Verlauf der mag-

netischen Flussdichte entspricht prinzipiell dem Verlauf aus Bild 4.2 b), jedoch ist die Flussdichte am inneren Rand des Leiters deutlich geringer als am äußeren Rand. Dieses wirkt sich auch auf die Kraftverteilung entlang der Symmetrieachse (Bild 4.5 b) aus, so dass im Vergleich zur Kraftdichte eines einzelnen Leiters durch ein Gleichanteil eine Anziehungskraft zwischen den beiden Leiter entsteht.

Zur Bestimmung der spezifischen Anziehungskraft zwischen den Leitern wird die Kraftdichte über den Leiterquerschnitt integriert. Ein alternatives Berechnungsverfahren ist die Integration des Maxwell'schen Spannungstensors über einen beliebigen geschlossenen Verlauf um den Leiter. Exemplarisch ist in Bild 4.6 die Oberflächenspannung entlang eines kreisförmigen, eines quadratischen und eines elliptischen Umlaufs dargestellt. Mit einem feinmaschigen Netz beträgt die Abweichung der unterschiedlichen Berechnungsverfahren gegenüber dem analytisch bestimmten Wert weniger als 0,5 %.

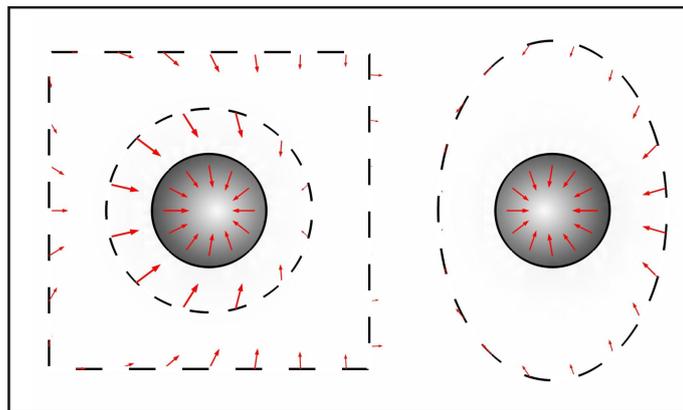


Bild 4.6: Magnetische Oberflächenspannung entlang unterschiedlicher Integrationswege

Abschließend wird die magnetische Kraftwirkung auf ein ferromagnetisches Werkstück betrachtet. Bild 4.7 a) zeigt die Verschiebung der magnetischen Feldlinien eines stromdurchflossenen Leiters durch einen Polschuh aus ferromagnetischem Werkstoff. Die Geometrie des Polschuhs wird so gewählt, dass die Feldlinien größtenteils senkrecht zu den Stirnflächen eindringen und parallel zur Längsachse verlaufen. Der Polschuh bündelt das magnetische Feld, so dass die Feldlinien in dem Bereich zwischen Leiter und Polschuh verlängert werden.

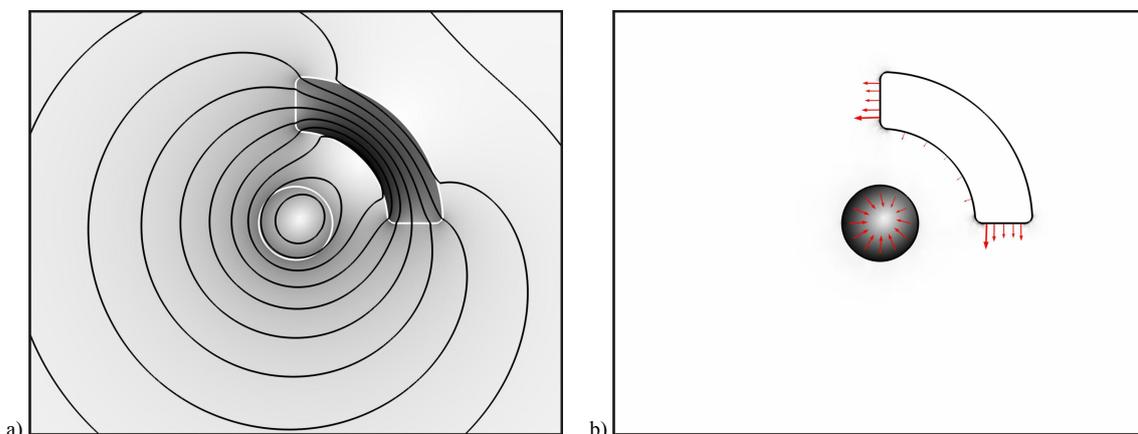


Bild 4.7: Beeinflussung der räumlichen Verteilung a) der magnetischen Flussdichte und b) der magnetischen Kraftdichte durch ein ferromagnetisches Werkstück

Die Kräfteverteilung im betrachteten Raum ist in Bild 4.7 b) dargestellt. Im Inneren des Leiters dominiert die Kraftdichte auf der dem Polschuh abgewandten Seite, wodurch sich

Leiter und Polschuh anziehen. Innerhalb des Polschuhes kann keine Kraftdichte berechnet werden. Bei der Abbildung der Magnetisierung des Werkstoffes über die Permeabilitätszahl werden die Vorgänge auf atomarer Ebene nicht betrachtet und die Elementarströme nicht modelliert, so dass die Rotation der Feldstärke im Werkstoff den Wert Null annimmt. Die Kraftwirkung auf dem Polschuh kann nur als Umlaufintegral der Oberflächenspannung berechnet werden. Die Oberflächenspannung konzentriert sich in den Bereichen, in denen die Feldlinien aus dem Werkstoff austreten, wirkt somit in Richtung der Feldlinien und versucht diese zu verkürzen.

Aufgrund der Annahmen aus Gleichung (4.4) und (4.5) gilt die vorgestellte Definition des Maxwell'schen Spannungstensors nur für ein isotropes, lineares Medium. Dieses muss bei der Wahl des Integrationsweges in Betracht gezogen werden, so dass vorzugsweise Integrationsverläufe gewählt werden, die sich über den Luftspalt der Anordnung schließen.

4.3 Simulationsmodell eines Hubmagneten

Im Vergleich zu einem Zündtransformator ist bei der Simulation eines Hubmagneten nur die Berechnung des magnetischen Feldes relevant. Die elektrische Feldstärke eines Hubmagneten ist so gering, dass die kapazitiven Verschiebungsströme vernachlässigt werden können, wodurch eine elektrische Feldberechnung nicht gerechtfertigt ist. Zusätzlich muss die Bewegungsgleichung des Ankers gelöst werden und die Position des Ankers während der magnetischen Berechnung iterativ angepasst werden. Hierfür kommt ein bewegliches Berechnungsgitter zum Einsatz.

Aus magnetischer Sicht entspricht der Normalbetrieb eines Hubmagneten dem Aufladevorgang eines Zündtransformators. Die Spule wird mit einem Spannungssprung angeregt, wobei der aufgenommene Strom einem exponentiellen Verlauf folgt. Nichtlinearitäten des magnetischen Kreises und zusätzlich Induktivitätsänderungen durch die Ankerbewegung sind im Stromverlauf sichtbar.

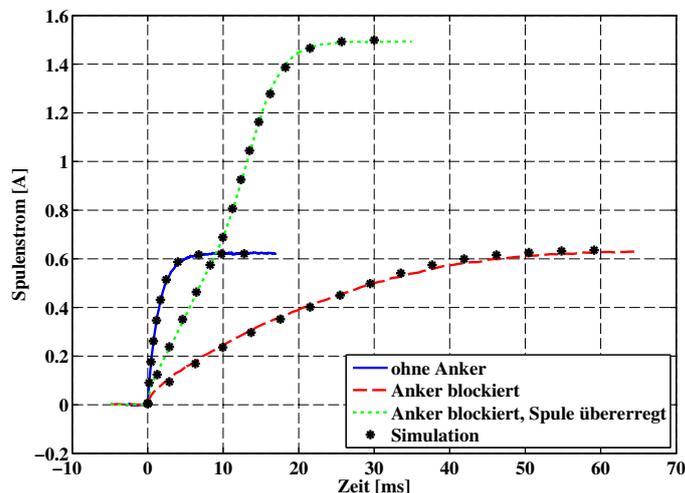


Bild 4.8: Vergleich des gemessenen und simulierten Spulenstroms eines Hubmagneten mit ausgebautem und mit feststehendem Anker

Zur Überprüfung der magnetischen Simulation wird vorerst auf die Betrachtung der Ankerbewegung verzichtet. Bild 4.8 zeigt den Stromverlauf des Hubmagneten mit ausgebautem und in der angezogenen Position festgesetztem Anker. Der untersuchte Hubmagnet weist bei Nennbetrieb keine Sättigungseffekte auf. Eine Verkürzung der Anzugszeit wird durch Übererregung erreicht. Hierbei wird die Klemmenspannung erhöht, wodurch auch

der Strom steiler ansteigt und einen höheren Endwert in kürzerer Zeit erreicht. Der Spulenstrom wird in diesem Fall von der Sättigung des magnetischen Kreises beeinflusst und hat einen ähnlichen nichtlinearen Verlauf wie der Primärstrom eines Zündtransformators (siehe Bild 3.22). Die gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation in den drei Betriebsfällen bestätigt das verwendete Materialmodell und die ermittelten Spulenparameter.

Eine weitere Kenngröße für den Hubmagneten ist die Magnetkraft-Hub-Kennlinie. Messtechnisch wird sie mit einem Kraftsensor ermittelt, indem der Anker des Hubmagneten bei Nennbestromung in verschiedenen Positionen gehalten wird. Für die gleichen Ankerpositionen wird die Lorentzkraft in einer statischen Simulation ermittelt. Der Vergleich zwischen dem gemessenen und dem simulierten Verlauf ist in Bild 4.9 dargestellt.

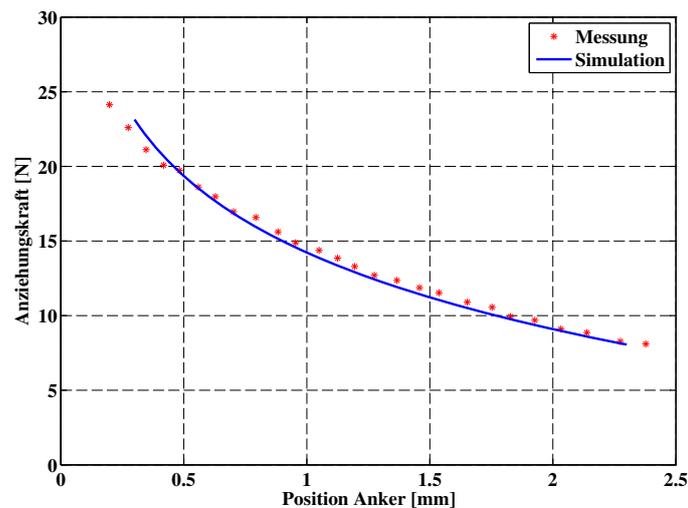


Bild 4.9: Gemessene und simulierte Magnetkraft-Hub-Kennlinie

Ausgehend von der ermittelten Magnetkraft-Hub-Kennlinie ist die Beschleunigung des Ankers von dem Spulenstrom und der aktuellen Ankerposition abhängig. Zusätzlich wird die Ankerbewegung von einer geschwindigkeitsabhängigen Dämpfungskraft beeinflusst. Die Beschleunigung des Ankers lässt sich aus dem Kräftegleichgewicht ermitteln:

$$m a = F_L - k v, \tag{4.15}$$

wobei F_L die Lorentzkraft, m die Masse aller bewegten Teile, k die Dämpfungskonstante, a die Beschleunigung und v die Geschwindigkeit des Ankers sind. Zur Bestimmung der aktuellen Ankerposition muss parallel zur magnetischen Berechnung folgendes Differentialgleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m}(F_L - k v) \\ \frac{dz}{dt} = v \end{cases} \tag{4.16}$$

Der Anker und der Stößel werden während der Simulation iterativ nachgeführt und das Berechnungsgitter wird für den Zeitschritt neu erstellt [11]. Um den Rechenaufwand zu minimieren wird der betrachtete Raum zwischen einem stationären und einem bewegten Bereich aufgeteilt. Zu dem bewegten Bereich gehören der Anker, der Luftspalt, der Stößel und jeweils ein Ausgleichsbereich am oberen Ende des Ankers und am unteren Ende des Stößels. Das stationäre und das bewegte Berechnungsgitter haben keinen gemeinsamen

Gitterpunkt. Die Kontinuität zwischen den beiden Bereichen wird über die Randbedingung an der gemeinsamen Grenze gewährleistet. Hier werden die unabhängigen Variablen durch Interpolation von der einen auf die andere Seite der Grenze übertragen. Zusätzlich wird überprüft, dass sich Anker und Polkern nicht durchdringen. Erreicht der Anker seinen Anschlag, wird die Bewegung im Modell ausgeschaltet.

Die magnetische Feldverteilung des Hubmagneten in zwei entscheidenden Zeitabschnitten der Bewegung ist in Bild 4.10 dargestellt.

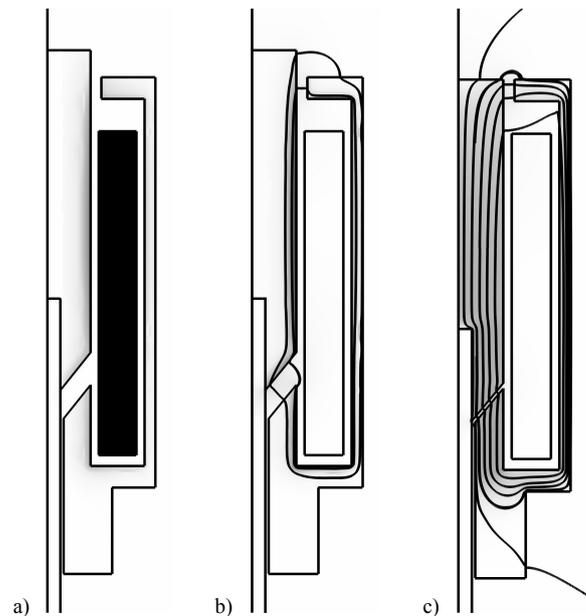


Bild 4.10: Dynamische magnetische Feldberechnung des Hubmagneten:
 a) Stromdichteverteilung in der Ausgangslage, b) dazugehörige Flussdichteverteilung
 und c) magnetische Flussdichteverteilung in der stationären Endlage

Bild 4.10 a) zeigt die Stromdichteverteilung unmittelbar nach der Betätigung des Hubmagneten, während sich dieser noch in der Ausgangslage befindet. Die dazugehörige Feldverteilung ist in Bild 4.10 b) dargestellt. In dem massiv ausgeführten magnetischen Kreis werden Wirbelströme induziert, die auf der zur Spule gewandten Seite am höchsten sind. Das magnetische Feld wird von diesen Wirbelströmen verdrängt und kann sich erstmal nur an der inneren Oberfläche des magnetischen Kreises ausbreiten. Hierdurch wird die Anfangsbeschleunigung des Ankers herabgesetzt und die Reaktion des Hubmagneten verzögert. Bild 4.10 c) zeigt die magnetische Flussdichteverteilung des Hubmagneten in der stationären Endlage. Der Anker ist gleichmäßig durchflutet und der Luftspalt auf ein Minimum zusammengedrückt. Konstruktiv wird vorgebeugt, dass sich Anker und Polkern berühren. Im entgegengesetzten Fall könnte die durch die remanente Flussdichte verursachte Lorentzkraft ausreichen, um den Hubmagneten nach dem Abschalten des Spulenstromes in der Endlage verharren zu lassen.

Bild 4.11 zeigt den Spulenstrom und den Wegverlauf des Hubmagneten während der Bewegung. Durch die Übererregung verkürzt sich die Reaktionszeit des Hubmagneten um 30 %. Nach dem Erreichen der Endlage kann die Haltekraft verringert werden, so dass eine Absenkung des Spulenstroms möglich ist. Zusätzlich wird dadurch auch eine thermische Überbeanspruchung der Spule vermieden.

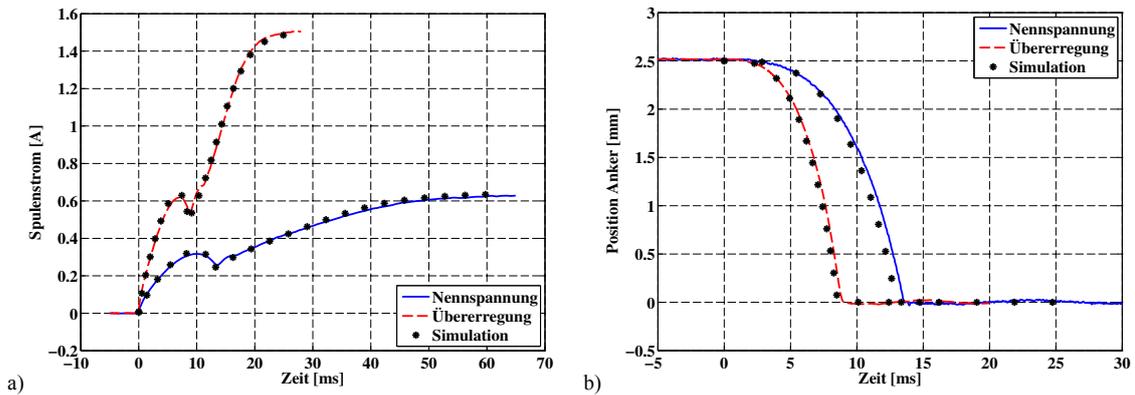


Bild 4.11: Messung und Simulation des a) Spulenstromes und b) Wegverlaufes eines Hubmagneten während seiner Betätigung

Eine verbreitete Schaltung zur Stromabsenkung bei Übererregung besteht aus einer Parallelschaltung eines Kondensators und eines Widerstandes, die in Reihe mit dem Hubmagneten geschaltet wird. Beim Einschalten ist der Kondensator entladen und die gesamte Spannung liegt an den Klemmen des Hubmagneten an. Der Ladestrom des Kondensators fließt über den Hubmagneten, während dieser die Endlage erreicht. Im stationären Zustand entspricht die Klemmenspannung des Kondensators dem Spannungsabfall über den Widerstand und der Spulenstrom wird vom Widerstand gedrosselt. Nach dem Abschalten entlädt sich der Kondensator über den Widerstand, so dass der Ausgangszustand erreicht wird.

Das vorgestellte Simulationsmodell eines Hubmagneten zeigt eine gute Übereinstimmung mit der Messung und stellt ein nützliches Hilfsmittel bei der anwendungsspezifischen Dimensionierung eines Hubmagneten dar. Dem Entwicklungsingenieur wird ein Werkzeug zur Verfügung gestellt, mit dem er den Einfluss konstruktiver Merkmale auf die Magnetkraft-Hub-Kennlinie untersuchen, den zeitlichen Aufbau des magnetischen Feldes visualisieren und dessen Auswirkung auf die Reaktionszeit und den Wegverlauf des Ankers abschätzen kann. Zusätzlich eignet sich das Simulationsmodell zur Auslegung der äußeren Beschaltung eines Hubmagneten.

Zusammenfassung und Ausblick

Die Leistungsfähigkeit kommerzieller Rechner eröffnet neue Wege für die Simulation elektrotechnischer Betriebsmittel und etabliert die numerischen Berechnungsverfahren als zuverlässiges Arbeitsmittel in der Produktentwicklung und -optimierung. Während in der jüngeren Vergangenheit Feldberechnungen lediglich bei der Untersuchung von Teilaspekten der Dimensionierung elektrotechnischer Bauteile, wie zum Beispiel die Auslegung magnetischer Kreise oder die dielektrische Isolationskoordination, und die Ersatzschaltbildmethode für die Untersuchung der Wirkungsweise des Produktes und dessen Interaktion mit der Peripherie zum Einsatz gekommen sind, kommt von Seiten der Industrie vermehrt die Anforderung, die Funktionalität komplexer Komponenten ausschließlich mit einer numerischen Feldberechnung zu analysieren. Somit wird eine direkte Verknüpfung der Geometrie- und Materialparameter mit den untersuchten Kenngrößen des Systems unter Berücksichtigung der parasitären Effekte realisiert.

Am Beispiel koaxialer Spulenordnungen werden in der vorliegenden Arbeit die Vorzüge der numerischen Feldberechnung gegenüber der Ersatzschaltbildmethode im Rahmen der Systemanalyse herausgearbeitet. Die Ersatzschaltbildmethode unterteilt den betrachteten Feldraum in weitgehend homogene Bereiche, die anhand von Klemmengrößen beschrieben werden können. Hervorgerufen durch die allgemeine Tendenz zur Produktminiarisierung nimmt der Homogenitätsgrad der Anordnungen ab, so dass die Unterteilung der Bereiche verfeinert werden muss und das Ersatzschaltbild die Form eines Kettenleiters annimmt. Durch die höhere Beanspruchung der eingesetzten Werkstoffe steigt der Einfluss parasitärer Elemente, so dass das Ersatzschaltbild mit zusätzlichen Streukapazitäten und -induktivitäten erweitert werden muss. Bedingt durch diese Vorgehensweise wird bei der Aufstellung des Ersatzschaltbildes der prinzipielle Feldverlauf der Anordnung festgelegt. Die numerische Feldberechnung hingegen modelliert die Feldverteilung der Anordnung ausschließlich anhand der Geometrie- und Materialparameter. Zusätzliche Annahmen sind nicht erforderlich, so dass auch die zeitliche Verschiebung der Feldlinien bei der Simulation berücksichtigt werden kann. Hiermit erreicht die Feldberechnung einen höheren Verallgemeinerungsgrad gegenüber der Ersatzschaltbildmethode. Die Klemmengrößen der Anordnung werden aus der berechneten Feldverteilung ermittelt, so dass ein direkter Vergleich mit Messwerten und Ergebnissen der Ersatzschaltbildmethode möglich ist. Die Eigenresonanzen des Systems werden anhand der zeitlichen Verteilung der im elektrischen und magnetischen Feld gespeicherten Energie untersucht. Zu den Schwächen der numerischen Feldberechnung zählt der auftretende Diskretisierungsfehler. Abhängig von dem gewählten Berechnungsgitter kann die berechnete von der realen Feldverteilung abweichen. Erfahrungswerte und adaptive Gittergenerierung helfen den Diskretisierungsfehler auf ein vertretbares Maß zu reduzieren. Zur Unterstützung der Umsetzung dieser Modellierungsmethode wird in der vorliegenden Arbeit ein Einblick in den Ablauf der numerischen Berechnung elektromagnetischer Felder gegeben.

Ein weiterer Aspekt bei der Modellierung elektrotechnischer Komponenten ist die Implementierung der Nichtlinearität der eingesetzten Materialien im Simulationsmodell. Im Rahmen der Ersatzschaltbildmethode können die nichtlinearen Materialeigenschaften ausschließlich als Funktion der Klemmengrößen einzelner Elemente ausgedrückt werden und wirken sich auf die zugehörigen Größen des jeweiligen Elements aus. In Wirklichkeit ist jedoch die Nichtlinearität im eingesetzten Werkstoff örtlich unterschiedlich stark ausgeprägt. Die von Streuflüssen verursachte inhomogene Feldverteilung führt dazu, dass Sättigungserscheinungen örtlich unterschiedlich stark auftreten und nur mit einer numerischen Feldberechnung realitätsgetreu nachgebildet werden können. Das in dieser Arbeit vorge-

stellte Materialmodell betrachtet, ausgehend von dem Ansatz von Jiles und Atherton, den reversiblen und den irreversiblen Anteil des Hystereseverlaufes getrennt voneinander. Für den reversiblen Anteil wird eine mathematische Approximation der Kommutierungskurve hergeleitet. Der irreversible Anteil stellt die in Wärme umgesetzten Verluste dar und wird durch einen ohmschen Stromfluss modelliert. Hierzu wird die Leitfähigkeit der betrachteten Bereiche angepasst, so dass Wirbelstromverluste im Falle des magnetischen Feldes bzw. dielektrische Verluste für das elektrische Feld den irreversiblen Anteil abbilden. Aufgrund der Frequenzabhängigkeit der induzierten Spannung bzw. des Verschiebungsstromes sind die modellierten Verluste ebenfalls frequenzabhängig. Um die Verdrängung der Wirbelströme durch den Skin-Effekt zu vermeiden, werden die Magnetisierungsverluste anteilig durch Oberflächenströme abgebildet, wodurch auch geblechte magnetische Kreise modelliert werden können. Die Gültigkeit des Modells für energietechnische Anwendungen wird am Beispiel eines Ringkerns demonstriert. Der Einsatz des vorgestellten Materialmodells für einen höheren Frequenzbereich ist prinzipiell möglich. Hierfür ist die messtechnische Überprüfung und eventuell eine Erweiterung der Modellierung der Verlustmechanismen erforderlich.

Die praktische Umsetzung des vorgestellten Simulationsverfahrens wird am Beispiel eines Zündtransformators und eines Hubmagneten vorgestellt. Der Zündtransformator vereint als Ergebnis der Produktminiaturisierung die Problematik einer hoch beanspruchten Isolation mit der Auslegung eines offenen, nichtlinearen magnetischen Kreises. Das magnetische Streufeld und die kapazitiven Verschiebungsströme bestimmen maßgeblich die Funktion des Zündtransformators, so dass nur eine gekoppelte Berechnung der elektrischen und magnetischen Feldverteilungen die inneren Belastungsgrößen mit hinreichender Genauigkeit beschreibt. Zur Bewertung des Simulationsmodells werden die Kernkomponenten des Zündtransformators zunächst einzeln untersucht. Für die Hochspannungswicklung wird ein Hochfrequenzmodell in Abhängigkeit des Wicklungsaufbaues hergeleitet und die Eigenfrequenz der Spule messtechnisch überprüft. Die Gültigkeit der vorgestellten Modellierung weichmagnetischer Werkstoffe auch für den Fall einer Impulsmagnetisierung wird anhand einer Parameterstudie am Stabkern belegt. Zur messtechnischen Erfassung der Potentialverteilung entlang der Hochspannungswicklung wird ein Zündtransformator mit kapazitiven Spannungssonden bestückt. Hierbei werden Leiterstreifen unterhalb der Primärwicklung positioniert und somit die kapazitive Kopplung zwischen Sekundär- und Primärwicklung in den Aufbau eines Spannungsteilers integriert. Die Unterkapazität wird mit konzentrierten Bauteilen realisiert. Der so modifizierte Zündtransformator besitzt uneingeschränkte Funktionalität, während die eingebaute Sensorik nahezu rückwirkungsfrei zur untersuchten Feldverteilung wirkt.

Der Hubmagnet erweitert den Anwendungsbereich der Simulation um die Kraftwirkung des magnetischen Feldes. Aufgrund der Analogie zwischen dem Magnetisierungsvorgang eines festsitzenden Hubmagneten und dem Aufladevorgang eines Zündtransformators kann das Simulationsmodell des Zündtransformators ohne Einschränkungen auf den Hubmagneten übertragen werden. Für die Simulation der Betätigung des Hubmagneten wird das Modell um die Bewegungsgleichung des Ankers erweitert und ein variables Bewegungsgitter eingesetzt. Die Ankerposition wird iterativ in jedem Berechnungsschritt korrigiert und das Berechnungsgitter an die neue Geometrie angepasst. Die erzielten Ergebnisse sind auf die Simulation des Transformators rückführbar und können für die Bestimmung der Wicklungskräfte verwendet werden. Die gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und den simulierten Verläufen bestätigt die Gültigkeit des vorgestellten Simulationsmodells.

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass die numerische Simulation den Verlauf des elektromagnetischen Feldes komplexer Anordnungen mit ausreichender Genauigkeit nachbilden kann. Das vorgestellte Modell kann bequem in einer Virtual-Prototyping-Umgebung integriert werden und so anhand von CAD-Daten die Funktionsweise künftiger Produkte prognostizieren. Anhand der berechneten Feldverläufe kann eine Zielfunktion definiert werden und eine optimale Auslegung der Geometrieparameter mit einem automatisierten Optimierungsverfahren gesucht werden. Gleichzeitig kann das Modell eingesetzt werden, um den Einfluss der Fertigungstoleranzen zu untersuchen und somit Fehlermöglichkeiten in der Serienproduktion vorzeitig zu beseitigen. Basierend auf den berechneten Feldverläufen können Eingangsgrößen für weitere Simulationsverfahren definiert werden, wie zum Beispiel die elektromagnetische Kraftwirkung für strukturmechanische Simulationen oder die ohmschen Verluste für Erwärmungsberechnungen. Die vorhandene Simulation kann somit zu einer Multiphysik-Simulation erweitert werden, um schließlich eine Abschätzung über die Alterung und die Einsatzdauer des Produktes abgeben zu können.

Literaturverzeichnis

- [1] DIN 1324: *Elektromagnetisches Feld*, Teil 1: *Zustandsgrößen*, 1988
- [2] DIN 1324: *Elektromagnetisches Feld*, Teil 2: *Materialgrößen*, 1988
- [3] DIN 1324: *Elektromagnetisches Feld*, Teil 3: *Elektromagnetische Wellen*, 1988
- [4] DIN 50460: *Bestimmung der magnetischen Eigenschaften von weichmagnetischen Werkstoffen*, 1988
- [5] EN 60404: *Magnetische Werkstoffe*, Teil 2: *Verfahren zur Bestimmung der magnetischen Eigenschaften von Elektroblech und -band mit Hilfe eines Epsteinrahmens*, 1998
- [6] IEC 62271: *High-voltage switchgear and controlgear*, Part 100: *Alternating-current circuit-breakers*, 2008
- [7] A. A. Adly, S. K. Adb-El-Hafiz: *Using Neural Networks in the Identification of Preisach-Type Hysteresis Models*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol 34, 1998
- [8] A. Angot: *Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'électrotechnique et des telecommunications*, Editura tehnică, Bukarest, 1966
- [9] D. P. Bertsekas: *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2008
- [10] M. Beuschel, F. Hangl, D. Schröder: *A General Approach for Hysteresis Modeling and Identification Using Neural Networks*, IEEE Conference on Neural Networks Proceedings, 1998
- [11] H. Biller: *Moving Meshes for Electromagnets*, Proceedings of the COMSOL Users Conference, Frankfurt, 2006
- [12] R. Boll: *Weichmagnetische Werkstoffe: Einführung in den Magnetismus, VAC-Werkstoffe und ihre Anwendung*, Vacuumschmelze-GmbH, Siemens AG, Berlin, 1990
- [13] S. Cedighian: *Die magnetischen Werkstoffe*, VDI-Verlag, Düsseldorf, 1971
- [14] R. Cernat, T. Nierobisch, D. Peier: *Modellierung ferromagnetischer Werkstoffe – Neuronale Netze modellieren magnetische Elemente*, Bulletin SEV/VSE, 2004
- [15] R. Cernat, C. Brinkmann, T. Weißgerber: *Einsatz von FEMLAB bei der Optimierung der Geometrie eines Hochspannungsimpulstransformators*, Proceedings of the COMSOL Users Conference, Frankfurt, 2005
- [16] R. Cernat, T. Weißgerber, D. Peier: *Simulation and Measurement of the Nonlinear Potential Distribution of High Voltage Pulse Transformers*, Proceedings of the Inter-

national Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment, Braşov, 2006

- [17] R. Cernat: *Electrical Stress inside High Voltage Coils at Internal and External Transient Excitation*, International Symposium on High Voltage Engineering (ISH), Ljubljana, 2007
- [18] J.-P. Crine: *A Molecular Model to Evaluate the Impact of Aging on Space Charges in Polymer Dielectrics*, IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation, 1997
- [19] B. D. Cullity: *Introduction to Magnetic Materials*, Addison-Wesley, London, 1972
- [20] A. Dimarogonas: *Machine Design – A CAD Approach*, Wiley Verlag, New York, 2001
- [21] R. Feldtkeller: *Theorie der Spulen und Übertrager*, Hirzel Verlag, Stuttgart, 1971
- [22] D. Gross, W. Hauger, P. Wriggers: *Technische Mechanik*, Band 4, Springer Verlag, Berlin, 2011
- [23] C. Heck: *Magnetische Werkstoffe und ihre technische Anwendung*, Hüthig Verlag, Heidelberg, 1967
- [24] M. Hodgdon: *Application of a Theory of Ferromagnetic Hysteresis*, IEEE Transactions on Magnetics, 1988
- [25] A. Ivanyi: *Hysteresis Models in Electromagnetic Computation*, Akademiai Kiado, Budapest, 1997
- [26] K. Januschek: *Systementwurf mechatronischer Systeme*, Springer Verlag, Berlin, 2010
- [27] D. C. Jiles, D. L. Atherton: *Theory of Ferromagnetic Hysteresis*, Journal of Applied Physics, Vol. 55, 1984
- [28] D. C. Jiles, J. B. Tholke: *Theory of Ferromagnetic Hysteresis: Determination of Model Parameters from Experimental Hysteresis Loops*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, 1989
- [29] P. Kalantarov, L. Țeitlin: *Calculul inductanțelor (Berechnung der Induktivitäten)*, Editura tehnică, Bukarest, 1958
- [30] E. Kallenbach et al.: *Elektromagnete*, Vieweg Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008
- [31] M. Klocke: *Zur Anwendung der numerischen Feldberechnung bei der Lösung spezieller Probleme der elektromagnetischen Energiewandlung*, Habilitationsschrift, Universität Dortmund, 2006

- [32] W. Knaack: *Spannungsverteilung bei Transformatorenwicklungen beim Auftreffen einer Stoßwelle mit besonderer Berücksichtigung der zweiten Wicklung*, Archiv für Elektrotechnik, Band 37, Springer Verlag, Berlin, 1943
- [33] J. Koch: *Berechnung der Kapazität von Spulen, insbesondere in Schalenkernen*, VALVO Berichte, Band XIV, Hamburg, 1968
- [34] V. Kose, F. Melchert: *Quantenmaße in der elektrischen Messtechnik*, VCH Verlag, Weinheim, 1991
- [35] A. Kost: *Numerische Methoden in der Berechnung elektromagnetischer Felder*, Springer Verlag, Berlin, 1994
- [36] A. Küchler: *Hochspannungstechnik*, Springer Verlag, Berlin, 2005
- [37] M. Kuczmann, A. Ivanyi, A. Bokor: *Neural Network Model of Hysteresis*, Proceedings of the International Conference on Optimization of Electrical and Electronic Equipment, Braşov, 2000
- [38] K. Küpfmüller: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*, Springer Verlag, Berlin, 1962
- [39] K. Küpfmüller: *Die magnetischen Feldkräfte an Eisenkörpern*, Archiv für Elektrotechnik, Band 50, Springer Verlag, Berlin, 1965
- [40] G. Lehner: *Elektromagnetische Feldtheorie*, Springer Verlag, Berlin, 2009
- [41] A. Massarini, M. K. Kazimierczuk, G. Grandi: *Lumped Parameter Model for Single- and Multiple-Layer Inductors*, 27th IEEE Power Electronics Specialists Conference, Baveno (Italien), 1996
- [42] J. C. Maxwell: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*, Philosophical Transactions, Band 155, London, 1865
- [43] D. Meschede (Hrsg.): *Gerthsen Physik*, Springer Verlag, Berlin, 2010
- [44] G. Meunier (Hrsg.): *The Finite Element Method for Electromagnetic Modeling*, ISTE Verlag, London, 2008
- [45] L. Michalowsky: *Magnettechnik, Grundlagen und Anwendungen*, Fachbuchverlag, Leipzig, 1993
- [46] A. Nafalski, B. Hoskins, A. Kundu, T. Doan: *The Use of Neural Networks in Describing Magnetisation Phenomena*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, Vol 160, 1996
- [47] T. Nakamura, T. Tsutaok, K. Hatakeyama: *Frequency Dispersion of Permeability in Ferrite Composite Materials*, Journal of Magnetism and Magnetic Materials, 1994

- [48] A. Nicolaide: *Bazele fizice ale Eletrotehnicii (Physikalische Grundlagen der Elektrotechnik)*, Editura Scrisul Românesc, Craiova, 1983
- [49] A. Nicolaide: *Magnetism and Magnetic Materials*, Transilvania University Press, Braşov, 2001
- [50] A. Nicolaide: *Electromagnetics – General Theory of the Electromagnetic Field*, Transilvania University Press, Braşov, 2002
- [51] F. Ossart, G. Meunier: *Comparison Between Various Hysteresis Models and Experimental Data*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 26, 1990
- [52] E. Philippow: *Grundlagen der Elektrotechnik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1967
- [53] E. Philippow: *Nichtlineare Elektrotechnik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1971
- [54] E. Philippow: *Taschenbuch der Elektrotechnik*, Carl Hanser Verlag, München, 1976
- [55] F. Preisach: *Über die magnetische Nachwirkung*, Zeitschrift für Physik, Springer Verlag, Berlin, 1935
- [56] H. Prinz: *Hochspannungsfelder*, Oldenbourg Verlag, München, 1969
- [57] J. W. S. Rayleigh: *On the Behaviour of Iron and Steel under the Operation of Feeble Magnetic Forces*, Philosophical Magazine 23, 1887
- [58] Y. Saad: *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2003
- [59] M. Sadiku: *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, Boca Raton, 2000
- [60] C. Serpico, C. Visone: *Magnetic Hysteresis Modeling via Feed-Forward Neural Networks*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 34, 1998
- [61] P. Tipler: *Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1994
- [62] K. W. Wagner: *Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen*, Archiv für Elektrotechnik, Band 6, Springer Verlag, Berlin, 1918
- [63] H. Zuhrt: *Einfache Näherungsformel für die Eigenkapazität mehrlagiger Spulen*, Elektrotechnische Zeitschrift, Berlin, 1934

Lebenslauf

Name: Radu-Marian Cernat

Geburtsdatum: 08. September 1978

Geburtsort: Kronstadt, Rumänien

Ausbildung:

1985 - 1997: „Johannes Honterus“ Lyzeum Kronstadt
Abschluss Abitur

1997 - 1999: „Transilvania“ Universität Kronstadt, Fakultät für Elektrotechnik
Fachrichtung Automatisierungstechnik und industrielle Informatik

1999 - 2002: Technische Universität „Carolo Wilhelmina“ Braunschweig
Studienfach Elektrotechnik, Abschluss Diplom

Berufstätigkeit:

2002 - 2007: Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Hochspannungs-
technik und EMV der Universität Dortmund

seit 2007: Entwicklungsingenieur bei der Siemens AG im Bereich Hochspan-
nung des Schaltwerks Berlin