Experimentelles Arbeiten

Einladen von Bibliotheken

```
> restart:
> with(student):
> with(Student[Calculus1]):
  infolevel[Calculus1] := 1:
> alias(Hinweis=Hint):
> alias(Regel=Rule):
> alias(`Identität`=identity):
> alias(`Multiplikation mit Konstante`=constantmultiple):
> alias(Summe=sum):
> alias(Subtraktion=difference):
> alias(Produkt=product):
> alias(Konstante=constant):
> alias(Potenz=power):
> alias(`zurücksetzten (revert)`=revert):
> alias(umschreiben=rewrite):
> alias(Substitution=change):
> alias(Partielle=parts):
> alias(Schrittweise=ShowSteps):
> alias(Verstanden=Understand):
> alias(`Parzialbrüche`=partialfractions):
> alias(ungetan=Undo):
> Verstanden(Int,sin,cos,exp,Potenz,`Identität`,Summe,`Multipli
  kation mit Konstante`,Konstante,Subtraktion);
```

Int = [sin, cos, exp, *Potenz*, *Identität*, *Summe*, *Multiplikation mit Konstante*, *Konstante*, *Subtraktion*]

Einfaches Experiment

Beispiel

Man integriere die folgende Funktion

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$$

Lösung

```
> Int(exp(sqrt(x)),x);
```

$$\int e^{(\sqrt{x})}\, dx$$

Zuerst führen wir die Substitution $t=\sqrt{x}$ durch.

```
> Regel[Substitution,t=sqrt(x)](%);
Creating problem #1

Applying substitution x = t^2, t = x^(1/2) with dx = 2*t*dt, dt = 1/2/x^(1/2
)*dx
```

$$\int e^{(\sqrt{x})}\,dx = 2\int e^t\,t\,dt$$

Man sieht von hier, daß die partielle Integration zum Ziel führt

```
> ungetan(%);
```

$$\int e^{(\sqrt{x})}\,dx$$

Jetzt setzen wir $t = e^{\sqrt{x}}$

```
> Regel[Substitution,t=exp(sqrt(x))](%);
Applying substitution x = ln(t)^2, t = exp(x^(1/2)) with dx = 2*ln(t)/t*dt,
dt = 1/2/x^(1/2)*exp(x^(1/2))*dx
```

$$\int e^{(\sqrt{x})}\,dx = 2\int \ln(t)\,dt$$

Auch in diesem Fall kann die Lösung mit Hilfe von partieller Integration beendet werden.

Beispiel

Man integriere die folgende Funktion

$$\int (e^x - 1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\,dx$$

Lösung

```
> Int(sqrt(exp(x)-1),x);
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

Hier kann drei verschiedene Substitution ausgeprobiert werden.

```
> Regel[Substitution,t=exp(x)](%);
Creating problem #2

Applying substitution x = ln(t), t = exp(x) with dx = 1/t*dt, dt = exp(x)*dx
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx = \int \frac{\sqrt{t-1}}{t}\,dt$$

```
> ungetan(%);
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

```
> Regel[Substitution,t=exp(x)-1](%);
Applying substitution x = ln(t+1), t = exp(x)-1 with dx = 1/(t+1)*dt, dt = e
xp(x)*dx
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int \frac{\sqrt{t}}{t+1}\, dt$$

```
> ungetan(%);
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx$$

```
> Regel[Substitution,t=sqrt(exp(x)-1)](%);
Applying substitution x = ln(1+t^2), t = (exp(x)-1)^(1/2) with dx = 2*t/(1+t
^2)*dt, dt = 1/2/(exp(x)-1)^(1/2)*exp(x)*dx
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\,t - 2 \int \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

In den ersten zwei Fällen soll soll noch eine zweite Substitution eingesetzt werden, die dritte Substitution führt zu einem Grundintegral:

```
> value(%);
Reverting substitution using t = (exp(x)-1)^(1/2)
```

$$\int \sqrt{e^x - 1}\, dx = 2\sqrt{e^x - 1} - 2\arctan(\sqrt{e^x - 1})$$

Zusammengesetztes Experiment

Grundfall

Man bestimme das folgende Integral

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$$

Lösung

Zuerst setzen wir die Folgende voraus

```
> assume(a>0):assume(x>0,x<a):
> Int(1/sqrt(a^2-x^2),x);
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim$$

Wir bitten um Hinweis

```
> Regeln:=Hinweis(%);
Creating problem #3

Hints:

1. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution x = a*sin(u).

2. Use the substitution -1+a^2/x^2 = u^2.

3. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution u = sqrt((a-x)/(a+x)).
```

$$Regeln := \left[Substitution, x\sim = a\sim \sin(u), u\right], \left[Substitution, -1 + \frac{a\sim^2}{x\sim^2} = u^2, u\right],$$
$$\left[Substitution, u = \sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}, u\right]$$

Wir bekamen drei verschiede Hinweise, und diese ergänzen mit zwei weiteren Substitutionsmöglichkeiten:

```
> Regeln:=Regeln,[Substitution,sqrt(a^2-x^2)/(a-x)=t],[Subst
  itution,(sqrt(a^2-x^2)+a)/x=t];
```

$$Regeln := \left[Substitution, x\sim = a\sim \sin(u), u\right], \left[Substitution, -1 + \frac{a\sim^2}{x\sim^2} = u^2, u\right],$$
$$\left[Substitution, u = \sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}, u\right], \left[Substitution, \frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{a\sim - x\sim} = t\right],$$
$$\left[Substitution, \frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim}{x\sim} = t\right]$$

Jetzt haben wir 5 Tips. Wir probieren nach einandem alle diese Möglichkeiten aus.

```
> Regel[Regeln[1]](Int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
Applying substitution x = a*sin(u), u = arcsin(x/a) with dx = a*cos(u)*d
u, du = 1/a/(1-x^2/a^2)^(1/2)*dx
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = u$$

```
> e1:=value(%);
Reverting substitution using u = arcsin(x/a)
```

$$e1 := \int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \arcsin\left(\frac{x\sim}{a\sim}\right)$$

```
> Regel[Regeln[2]](Int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
Creating problem #4

Applying substitution x = 1/(1+u^2)^(1/2)*a, u = (a^2-x^2)^(1/2)/x with
dx = -1/(1+u^2)^(3/2)*a*u*du, du = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-(a^2-x^2)^(1/2)/x
^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\int \frac{1}{1 + u^2}\, du$$

```
> e2:=value(%);
Reverting substitution using u = (a^2-x^2)^(1/2)/x
```

$$e2 := \int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{x\sim}\right)$$

```
> Regel[Regeln[3]](Int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
Creating problem #5

Applying substitution x = -a*(-1+u^2)/(1+u^2), u = ((a-x)/(a+x))^(1/2) w
```

```
ith dx = (-2*a*u/(1+u^2)+2*a*(-1+u^2)/(1+u^2)^2*u)*du, du = 1/2/((a-x)/(
a+x))^(1/2)*(-1/(a+x)-(a-x)/(a+x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -2 \int \frac{1}{1+u^2}\, du$$

```
> e3:=value(%);
Reverting substitution using u = ((a-x)/(a+x))^(1/2)
```

$$e3 := \int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -2\arctan\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}\right)$$

```
> Regel[Regeln[4]](Int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
Creating problem #6

Applying substitution x = a*(t^2-1)/(1+t^2), t = (a^2-x^2)^(1/2)/(a-x) w
ith dx = (2*t*a/(1+t^2)-2*a*(t^2-1)/(1+t^2)^2*t)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^
(1/2)/(a-x)*x+(a^2-x^2)^(1/2)/(a-x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = 2 \int \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

```
> e4:=value(%);
Reverting substitution using t = (a^2-x^2)^(1/2)/(a-x)
```

$$e4 := \int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{x\sim - a\sim}\right)$$

```
> Regel[Regeln[5]](Int(1/sqrt(a^2-x^2),x));
Creating problem #7

Applying substitution x = 2*t*a/(1+t^2), t = ((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x with
dx = (2*a/(1+t^2)-4*t^2*a/(1+t^2)^2)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-((a^2-
x^2)^(1/2)+a)/x^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -2 \int \frac{1}{1+t^2}\, dt$$

```
> e5:=value(%);
Reverting substitution using t = ((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x
```

$$e5 := \int \frac{1}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -2\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim}{x\sim}\right)$$

Wir erhielten für das Integral Ergebnisse in verschiedener Gestalt. Es kann aber leicht beweist werden, daß diese verschiedenen Ausdrücke können sich ineinander überführen lassen, wobei additive Konstanten in der Integrationskonstanten enthalten sein können.

```
> Resultate:=[seq(rhs(e||i),i=1..5)];
```

$$Resultate := \left[\arcsin\left(\frac{x\sim}{a\sim}\right), -\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{x\sim}\right), -2\arctan\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}\right),\right.$$

$$-2\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}{x\sim-a\sim}\right), -2\arctan\left(\frac{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}+a\sim}{x\sim}\right)\Bigg]$$

Wir differenzieren wir nämlich die verschiedenen Ausdrücke:

```
> map(t->simplify(diff(t,x)),Resultate);
```

$$\left[\frac{1}{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}, \frac{1}{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}, \frac{1}{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}, \frac{1}{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}, \frac{1}{\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}\right]$$

Ausblick

Man untersuche die folgende Integrale

$$\int \frac{1}{x^k\sqrt{a^2-x^2}}\,dx,$$

wo k positive ganze Zahl.

Lösung

```
> k:=1;
```

$$k := 1$$

```
> Int(1/(x^k*sqrt(a^2-x^2)),x);
```

$$\int \frac{1}{x\sim\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}\,dx\sim$$

```
> Regeln:=Hinweis(%);
Creating problem #8

Hints:

1. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution x = a*sin(u).

2. Use the substitution a^2-x^2 = u^2.

3. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution u = sqrt((a-x)/(a+x)).
```

$$Regeln := [\,Substitution, x\sim = a\sim \sin(u), u\,], [\,Substitution, a\sim^2 - x\sim^2 = u^2, u\,], \left[\,Substitution, u = \sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}, u\,\right]$$

```
> k:=2;
```

$$k := 2$$

```
> Int(1/(x^k*sqrt(a^2-x^2)),x);
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2-x\sim^2}}\,dx\sim$$

```
> Regeln:=Hinweis(%);
Creating problem #9
```

```
Hints:

1. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution x = a*sin(u).

2. Use the substitution -1+a^2/x^2 = u^2.

3. Integrals involving expressions of the form sqrt(a^2-x^2) can often b
e simplified using the substitution u = sqrt((a-x)/(a+x)).
```

$$Regeln := [Substitution, x\sim = a\sim \sin(u), u], \left[Substitution, -1+\frac{a\sim^2}{x\sim^2} = u^2, u\right], \left[Substitution, u = \sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}, u\right]$$

```
> Regeln:=Regeln,[Substitution,sqrt(a^2-x^2)/(a-x)=t],[Substitution,(sqrt(a^2-x^2)+a)/x=t];
```

$$Regeln := [Substitution, x\sim = a\sim \sin(u), u], \left[Substitution, -1+\frac{a\sim^2}{x\sim^2} = u^2, u\right], \left[Substitution, u = \sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}}, u\right], \left[Substitution, \frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{a\sim - x\sim} = t\right], \left[Substitution, \frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim}{x\sim} = t\right]$$

Mit einer for-Schleife können alle Substitutionen nacheinanderfolgend verwirklicht werden:

```
> for i to nops([Regeln]) do

  simplify(Regel[Regeln[i]](Int(1/(x^k*sqrt(a^2-x^2)),x)));
  od;
```

```
Applying substitution x = a*sin(u), u = arcsin(x/a) with dx = a*cos(u)*d
u, du = 1/a/(1-x^2/a^2)^(1/2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \frac{1}{a\sim^2} \int \frac{1}{\sin(u)^2}\, du$$

```
Creating problem #10

Applying substitution x = 1/(1+u^2)^(1/2)*a, u = (a^2-x^2)^(1/2)/x with
dx = -1/(1+u^2)^(3/2)*a*u*du, du = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-(a^2-x^2)^(1/2)/x
^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{u}{a\sim^2}$$

```
Creating problem #11

Applying substitution x = -a*(-1+u^2)/(1+u^2), u = ((a-x)/(a+x))^(1/2) w
ith dx = (-2*a*u/(1+u^2)+2*a*(-1+u^2)/(1+u^2)^2*u)*du, du = 1/2/((a-x)/(
a+x))^(1/2)*(-1/(a+x)-(a-x)/(a+x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\left(\frac{2}{a\sim^2} \int \frac{1+u^2}{1-2\,u^2+u^4}\, du\right)$$

```
Creating problem #12

Applying substitution x = a*(t^2-1)/(1+t^2), t = (a^2-x^2)^(1/2)/(a-x) w
ith dx = (2*t*a/(1+t^2)-2*a*(t^2-1)/(1+t^2)^2*t)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^
(1/2)/(a-x)*x+(a^2-x^2)^(1/2)/(a-x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \frac{2}{a\sim^2} \int \frac{1+t^2}{t^4-2\,t^2+1}\, dt$$

```
Creating problem #13

Applying substitution x = 2*t*a/(1+t^2), t = ((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x with
dx = (2*a/(1+t^2)-4*t^2*a/(1+t^2)^2)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-((a^2-
x^2)^(1/2)+a)/x^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{t^2-1}{2\,a\sim^2\,t}$$

Mit einer anderen for-Schleife können die Endergebnisse realisiert werden:

```
> for i to nops([Regeln]) do
   Regel[Regeln[i]](Int(1/(x^k*sqrt(a^2-x^2)),x));
   value(%);
   e||i:=rhs(%)
  od;
```

```
Creating problem #14

Applying substitution x = a*sin(u), u = arcsin(x/a) with dx = a*cos(u)*d
u, du = 1/a/(1-x^2/a^2)^(1/2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \frac{1}{a\sim^2} \int \csc(u)^2\, du$$

```
Reverting substitution using u = arcsin(x/a)
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{\sqrt{1-\frac{x\sim^2}{a\sim^2}}}{a\sim\, x\sim}$$

$$e1 := -\frac{\sqrt{1-\frac{x\sim^2}{a\sim^2}}}{a\sim\, x\sim}$$

```
Creating problem #15

Applying substitution x = 1/(1+u^2)^(1/2)*a, u = (a^2-x^2)^(1/2)/x with
dx = -1/(1+u^2)^(3/2)*a*u*du, du = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-(a^2-x^2)^(1/2)/x
^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{u}{a\sim^2}$$

```
Reverting substitution using u = (a^2-x^2)^(1/2)/x
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{a\sim^2\, x\sim}$$

$$e2 := -\frac{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{a\sim^2\, x\sim}$$

```
Creating problem #16

Applying substitution x = -a*(-1+u^2)/(1+u^2), u = ((a-x)/(a+x))^(1/2) w
ith dx = (-2*a*u/(1+u^2)+2*a*(-1+u^2)/(1+u^2)^2*u)*du, du = 1/2/((a-x)/(
a+x))^(1/2)*(-1/(a+x)-(a-x)/(a+x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \int \frac{-2 - 2\,u^2}{a\sim^2 - 2\,a\sim^2\,u^2 + a\sim^2\,u^4}\, du$$

```
Reverting substitution using u = ((a-x)/(a+x))^(1/2)
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \frac{2\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}} + 1\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}} - 1\right)}\right)}{a\sim^2}$$

$$e3 := \frac{2\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}} + 1\right)} + \frac{1}{2\left(\sqrt{\frac{a\sim - x\sim}{a\sim + x\sim}} - 1\right)}\right)}{a\sim^2}$$

```
Creating problem #17

Applying substitution x = a*(t^2-1)/(1+t^2), t = (a^2-x^2)^(1/2)/(a-x) w
ith dx = (2*t*a/(1+t^2)-2*a*(t^2-1)/(1+t^2)^2*t)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^
(1/2)/(a-x)*x+(a^2-x^2)^(1/2)/(a-x)^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \int \frac{2 + 2\,t^2}{a\sim^2\,t^4 - 2\,t^2\,a\sim^2 + a\sim^2}\, dt$$

```
Reverting substitution using t = (a^2-x^2)^(1/2)/(a-x)
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = \frac{2\,(x\sim - a\sim)\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - x\sim + a\sim\right)\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - a\sim + x\sim\right)a\sim^2}$$

$$e4 := \frac{2\,(x\sim - a\sim)\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}{\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - x\sim + a\sim\right)\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - a\sim + x\sim\right)a\sim^2}$$

```
Creating problem #18

Applying substitution x = 2*t*a/(1+t^2), t = ((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x with
```

```
dx = (2*a/(1+t^2)-4*t^2*a/(1+t^2)^2)*dt, dt = (-1/(a^2-x^2)^(1/2)-((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x^2)*dx
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{t}{2\,a\sim^2} + \frac{1}{2\,a\sim^2\,t}$$

```
Reverting substitution using t = ((a^2-x^2)^(1/2)+a)/x
```

$$\int \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}\, dx\sim = -\frac{a\sim^2 - x\sim^2 + \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}\; a\sim}{a\sim^2\, x\sim \left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim\right)}$$

$$e5 := -\frac{a\sim^2 - x\sim^2 + \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}\; a\sim}{a\sim^2\, x\sim \left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim\right)}$$

Man probiert mit **"simplify"** die Ergebnisse:

```
> for i to nops([Regeln]) do
   de||i:=simplify(diff(e||i,x),symbolic)
  od;
```

$$de1 := \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}$$

$$de2 := \frac{1}{x\sim^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}$$

$$de3 := \frac{4\,(a\sim + x\sim)^2}{\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - a\sim - x\sim\right)^2 \left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim + x\sim\right)^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}$$

$$de4 := \frac{4\,(a\sim^2 - 2\,a\sim\,x\sim + x\sim^2)}{\left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - x\sim + a\sim\right)^2 \left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} - a\sim + x\sim\right)^2 \sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}}$$

$$de5 := \frac{-x\sim^2 + 2\,a\sim^2 + 2\,\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}\; a\sim}{\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2}\; x\sim^2 \left(\sqrt{a\sim^2 - x\sim^2} + a\sim\right)^2}$$

In den letzten drei Fällen erhielten komplizierten, und von den ersten zwei verschiedene Ergebnisse. Gleichen wir diese mit Hilfe von Differenzierung miteinanden zusammen:

```
> for i from 3 to 5 do
   simplify(de||2-de||i,symbolic)
  od;
```

$$0$$
$$0$$
$$0$$

Sichtbar sind alle die Ableitungen gleich, so die Stammfunktionen unterscheiden sich von einander nur in additiven Konstanten.

Wenn das "System hat keinen Einfall"

Manchmal kann Maple keinen Hinweis geben, und das Integral kann unmittelbar auch nicht bestimmt werden. In diesen Fällen sollen zusätzliche spezielle Umformungen eingesetzt werden.

1. Beispiel

Man bestimme das folgende Integral

$$\int \frac{1+\mathbf{e}^{(-x)}}{1+x\,\mathbf{e}^{(-x)}}\,dx$$

Lösung

```
> x:='x':
> Int((1+exp(-x))/(1+x*exp(-x)),x);
```

$$\int \frac{1+\mathbf{e}^{(-x)}}{1+x\,\mathbf{e}^{(-x)}}\,dx$$

Wir warten neugirig, was für einen Rat gibt uns das System.

```
> Hinweis(%);
Creating problem #19
```

$$[\mathit{Substitution},\, u=-x,\, u]$$

```
> Regel[%](%%);
Applying substitution x = -u, u = -x with dx = -1*du, du = -1*dx
```

$$\int \frac{1+\mathbf{e}^{(-x)}}{1+x\,\mathbf{e}^{(-x)}}\,dx = \int \frac{1+\mathbf{e}^{u}}{-1+\mathbf{e}^{u}\,u}\,du$$

Damit sind wir nicht um vieles kluger, doch ersuchen um einen neueren Rat:

```
> Hinweis(%);
```

$$[\ ]$$

Das System kann nichts sagen!

```
> ungetan(%%);
```

$$\int \frac{1+\mathbf{e}^{(-x)}}{1+x\,\mathbf{e}^{(-x)}}\,dx$$

Versuchen wir $\mathbf{e}^{(-x)} = \frac{1}{\mathbf{e}^{x}}$ setzen!

```
> Regel[umschreiben,exp(-x)=1/exp(x)](%);
```

$$\int \frac{1+\mathbf{e}^{(-x)}}{1+x\,\mathbf{e}^{(-x)}}\,dx = \int \frac{\mathbf{e}^{x}+1}{\mathbf{e}^{x}+x}\,dx$$

Sofort sieht man, daß der Zähler eben die Ableitung des Nänners ist. Dafür ist die Substitution $t=\mathbf{e}^{x}+x$ zweckmäßig.

```
> Regel[Substitution,t=exp(x)+x](%);
Applying substitution x = -LambertW(exp(t))+t, t = exp(x)+x with dx = (-
```

```
LambertW(exp(t))/(1+LambertW(exp(t))+1)*dt, dt = (exp(x)+1)*dx
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \ln(t)$$

Wir haben jetzt schon ein Grundintegral:

```
> value(%);
Reverting substitution using t = exp(x)+x
```

$$\int \frac{1+e^{(-x)}}{1+x\,e^{(-x)}}\,dx = \ln(e^x + x)$$

2. Beispiel

Man bestimme das folgende Integral

$$\int \frac{\sin(4\,x)}{\sin(x)^8 + \cos(x)^8}\,dx$$

Lösung

```
> Int(sin(4*x)/(sin(x)^8+cos(x)^8),x);
```

$$\int \frac{\sin(4\,x)}{\sin(x)^8 + \cos(x)^8}\,dx$$

```
> Hinweis(%);
Creating problem #20
```

$$[\ ]$$

A Maple kann unmittelbar kein Hinweis geben, und das Integral kann nicht kaluliert werden

```
> Int(sin(4*x)/(sin(x)^8+cos(x)^8),x)=int(sin(4*x)/(sin(x)^8
  +cos(x)^8),x);
```

$$\int \frac{\sin(4\,x)}{\sin(x)^8 + \cos(x)^8}\,dx = -4\,\mathrm{Summe}\left(\_R\,\ln\left(\cos(x)^2 - \frac{160\,\_R^3}{3} + \frac{32\,\_R^2}{3} - 8\,\_R - \frac{7}{3}\right),\right.$$
$$\left.\_R = \mathrm{RootOf}(128\,\_Z^4 + 16\,\_Z^2 + 8\,\_Z + 1)\right) +$$
$$2\,\mathrm{Summe}\left(\_R\,\ln\left(\cos(x)^2 - 12\,\_R^3 - \frac{17\,\_R}{2} - \frac{1}{2}\right), \_R = \mathrm{RootOf}(64\,\_Z^4 + 48\,\_Z^2 + 1)\right)$$

Wir versuchen den Integrand in einen merh geeigneten Form aufzuschreiben. Dazu wird Befehl **combine** genutzt.

```
> Int(combine(sin(4*x)/(sin(x)^8+cos(x)^8)),x);
```

$$\int \frac{64\,\sin(4\,x)}{35 + \cos(8\,x) + 28\,\cos(4\,x)}\,dx$$

Wir haben einen ganz passenden Ausdruck bekommen. Die folgende zwei Dingen fällen uns ein. Einerseits

$$\cos(8\,x) = \cos(4\,x)^2 - \sin(4\,x)^2$$

Andrerseits

```
> Diff(cos(4*x),x)=diff(cos(4*x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\cos(4\,x) = -4\sin(4\,x)$$

Es scheint sich gut zu sein mit Substitutionen $\cos(4\,x) = t$ fortzusetzen:

```
> Regel[Substitution,cos(4*x)=t](%%);
Creating problem #21

Applying substitution x = 1/4*arccos(t), t = cos(4*x) with dx = -1/4/(1-t^2)^(1/2)*dt, dt = -4*sin(4*x)*dx
```

$$\int \frac{64\sin(4\,x)}{35+\cos(8\,x)+28\cos(4\,x)}\,dx = -8\int \frac{1}{17+t^2+14\,t}\,dt$$

Wir bekamen einen rationalen Bruch. Diese Funktionklasse, als wir wissen, ist in allen Fällen integrierbar. So darauf wollen wir hier nicht eingehen. Mit dem Befehl **value** kann das Endergebnis gegeben werden:

```
> value(%);
Reverting substitution using t = cos(4*x)
```

$$\int \frac{64\sin(4\,x)}{35+\cos(8\,x)+28\cos(4\,x)}\,dx = \sqrt{2}\,\operatorname{arctanh}\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(\cos(4\,x)+7)\right)$$

oder, mit Befehl **convert** kann das Ergebnis mit Logarithmusfunktion gegeben werden.

```
> convert(rhs(%),ln);
```

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(\cos(4\,x)+7)+1\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(\cos(4\,x)+7)\right)\right)$$

Zuletzt kommt Überprüfung des Ergebnisses mit Differenzierung

```
> diff(%,x);
```

$$\sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sin(4\,x)}{\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(\cos(4\,x)+7)+1}-\frac{1}{4}\frac{\sqrt{2}\sin(4\,x)}{1-\frac{1}{8}\sqrt{2}\,(\cos(4\,x)+7)}\right)$$

```
> d1:=simplify(%);
```

$$d1 := \frac{32\sin(4\,x)}{17+\cos(4\,x)^2+14\cos(4\,x)}$$

Die Ableitung soll mit dem Integrand übereinstimmen:

```
> d2:=64*sin(4*x)/(35+cos(8*x)+28*cos(4*x));
```

$$d2 := \frac{64\sin(4\,x)}{35+\cos(8\,x)+28\cos(4\,x)}$$

Wir substrahieren die zwei Ausdrücken, und vereinfachen das Ergebnis:

```
> simplify(d1-d2);
```

$$0$$

```
>
```

Integration von Ausdrücken der Form $\int \ln(x)^n \, dx$

Aufgabe

Wir sehen das Integral

$$\int \ln(x)^n \, dx,$$

wo n positive ganze Zahl
1. Stellen wir eine Rekursionsformel für Ausrechnung des Integrals auf.
2. Schreiben wir eine Maple-Prozedur für Realisierung der Rekursionsformel.
3. Vermuten wir die geschlossene Formel des Integrals.
4. Beweisen wir die Vermutung.

Lösung

1. Rekursionsformel

Benutzen wir die partielle Integration zur Berechnung des Integrals.

```
> restart:
> Int(ln(x)^n,x);
```

$$\int \ln(x)^n \, dx \tag{1}$$

```
> with(student):
> Int(ln(x)^n,x)=simplify(intparts(Int(ln(x)^n,x),ln(x)^n));
```

$$\int \ln(x)^n \, dx = \ln(x)^n x - n \left(\int \ln(x)^{n-1} \, dx \right) \tag{2}$$

Bezeichnet man das ursprüngliche Integral mit I_n, so aus dem Resultat lässt sich die folgende Rekursionsformel aufzuschreiben:

$$\boldsymbol{I_n = \ln(x)^n x - n\, I_{n-1}}$$

2. Maple-Prozedur

Die Rekursionsformel kann mit einem Maple-Verfahren folgendermaßen realisiert werden.:

```
> Intln_p:=proc(n::posint)
    if n=1 then RETURN(x*ln(x)-x) fi:
    ln(x)^n*x-n*Intln_p(n-1)
  end:
> Intln_p(4);
```

$$\ln(x)^4 x - 4 \ln(x)^3 x + 12 \ln(x)^2 x - 24 x \ln(x) + 24 x \tag{3}$$

```
> for n to 6 do
    Int(ln(x)^n,x)=factor(Intln_p(n))
  od;
```

$$\int \ln(x) \, dx = x \left(\ln(x) - 1 \right)$$

$$\int \ln(x)^2 \, dx = x \left(\ln(x)^2 - 2 \ln(x) + 2 \right)$$

$$\int \ln(x)^3\, dx = x\,(\ln(x)^3 - 3\ln(x)^2 + 6\ln(x) - 6)$$

$$\int \ln(x)^4\, dx = x\,(\ln(x)^4 - 4\ln(x)^3 + 12\ln(x)^2 - 24\ln(x) + 24)$$

$$\int \ln(x)^5\, dx = x\,(\ln(x)^5 - 5\ln(x)^4 + 20\ln(x)^3 - 60\ln(x)^2 + 120\ln(x) - 120)$$

$$\int \ln(x)^6\, dx = x\,(\ln(x)^6 - 6\ln(x)^5 + 30\ln(x)^4 - 120\ln(x)^3 + 360\ln(x)^2 - 720\ln(x) + 720) \qquad (4)$$

```
> n:='n':
```

Nach sorgfältigen Beobachtung der obigen Ergebnisse kann die folgende Vermutung formuliert werden:

3. Vermutung

```
> Int(ln(x)^n,x)=x*Sum((-1)^k*ln(x)^(n-k)*n!/(n-k)!,k=0..n);
```

$$\int \ln(x)^n\, dx = x\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \ln(x)^{n-k}\, n!}{(n-k)!}\right) \qquad (5)$$

Testen wir die Formel! Vergleichen wir die gewonnene Formel mit dem Ergebnis, das Maple unmittelbar gibt.

```
> n:='n':
> Formel:=sort(Sum(x*(-1)^k*ln(x)^(n-k)*n!/(n-k)!,k=0..n));
```

$$Formel := \sum_{k=0}^{n} \frac{x\,(-1)^k \ln(x)^{n-k}\, n!}{(n-k)!} \qquad (6)$$

Substrahieren wir die zwei Ergebnisse für die erste einige Werte

```
> seq(value(Formel)-int(ln(x)^n,x),n=1..10);
```

$$0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \qquad (7)$$

Wir bekamen in allen Fällen 0, so kann unser Formel korrekt sein! Jetzt aber machen wir uns an die Arbeit die Vermutung zu beweisen!

4. Beweis

Wir beweisen mit vollständiger Induktion:

Für $n = 1$ ist die Aussage schon vorher mit der Rekursionsformel bewiesen.

Setzen wir voraus, daß die Formel für eine beliebige n-Wert korrekt ist. Wir beweisen, daß auch für $n + 1$ bleibt die Formel gültig.

```
> n:='n':
```

Es soll beweist werden, daß

```
> I[n+1]=Sum((-1)^k*x*ln(x)^(n+1-k)*(n+1)!/(n+1-k)!,k=0..n+1);
```

$$I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x \ln(x)^{n+1-k}\,(n+1)!}{(n+1-k)!} \qquad (8)$$

Die Rekursionsfomel gibt für n+1

$$I_{n+1} = \ln(x)^{n+1} x - (n+1)\, I_n$$

Setzen wir hier

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{x\,(-1)^k \ln(x)^{n-k}\, n!}{(n-k)!}$$

in $I[n+1]$ ein, und speichern die neue Form in expression2, und die originale Form in expression1.

```
> expression2:=(ln(x)^(n+1)*x-(n+1)*Sum((-1)^k*x*ln(x)^(n-k)*n!/
  (n-k)!,k=0..n));
```

$$expression2 := \ln(x)^{n+1}\,x - (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x\,(-1)^k \ln(x)^{n-k}\, n!}{(n-k)!}\right) \qquad (9)$$

```
> expression1:=Sum((-1)^k*x*ln(x)^(n+1-k)*(n+1)!/(n+1-k)!,k=0..
  n+1);
```

$$expression1 := \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k\, x \ln(x)^{n+1-k}\,(n+1)!}{(n+1-k)!} \qquad (10)$$

Jetzt schreiben wir expression1 in die folgende form auf

```
> 'expression1'=sum((-1)^k*x*ln(x)^(n+1-k)*(n+1)!/(n+1-k)!,k=0..0)
  +Sum((-1)^k*x*ln(x)^(n+1-k)*(n+1)!/(n+1-k)!,k=1..n+1);
```

$$expression1 = \ln(x)^{n+1}\,x + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k\, x \ln(x)^{n+1-k}\,(n+1)!}{(n+1-k)!} \qquad (11)$$

```
> 'expression2'=expression2;
```

$$expression2 = \ln(x)^{n+1}\,x - (n+1)\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x\,(-1)^k \ln(x)^{n-k}\, n!}{(n-k)!}\right) \qquad (12)$$

Nach einer kurzen Überlegung sieht man, daß die letzte zwei Formeln sind die gleiche. Damit ist der Beweis fertig.