

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Mainz

Begriffsbildung mit tätigkeitstheoretischen Methoden

Angenommen unsere Mathematiklehramtsstudenten haben im Alltag weder die Gewohnheit noch die Notwendigkeit, Bedienungsanleitungen zu lesen. Angenommen, gute Fähigkeiten beim Mustererkennen und Jonglieren mit automatisiertem Faktenwissen garantierten ihnen in der Schule Erfolg, im speziellen in Mathematiktests (wir setzen hier ein outputorientiertes Bildungssystem voraus). Würden ihnen ihre Routinen und im Alltag funktionierende Erfolgsstrategien wie Versuch-Irrtum-Methoden und Musterübertragung auch in einem kanonischen Mathematiklehramtsstudium helfen?

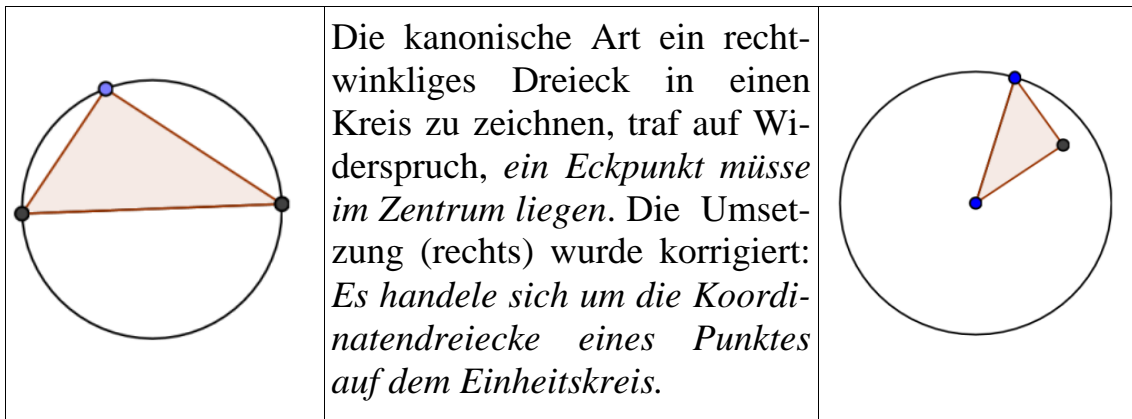
Wohl eher nicht. Mathematik- und Didaktikvorlesungen basieren auf konstruktivistischen Herangehensweisen und dem systematischen Aufbau von Wissen. In Veranstaltungen zur linearen Algebra stehen Klassifikationen im Vordergrund; die Differential- und Integralrechnung beschäftigt sich mit der Formalisierung und dem Beweis von Eigenschaften und Methoden. Wenn die den Klassifikationen zugrunde liegenden Fragen überhaupt untersucht werden, sind sie meistens das Resultat einer längeren Instruktion. In den meisten Veranstaltungen bekommt der Student Antworten in der Form von Merkmalslisten, die in kaum einem Zusammenhang mit den isolierten, an bildhafte und symbolische Vorstellungen gebundenen Konzepten der Schulzeit stehen.

Ein erster Ansatz von Antworten und Merkmalslisten zu Fragen zu kommen, besteht in der Suche nach Perspektivwechseln, die eine vorhandene Präsentation eines mathematischen Objekts in Frage stellen – z.B. durch die Nutzung im dialektischen Sinn gegensätzlicher Konzeptualisierungen und deren Dynamik.

1. Übung in dialektischen Gegensätzlichkeiten

Zur Vorbereitung sollten sich die Lehramtsstudenten anhand von Lehrbüchern einen Überblick über mögliche Darstellungen der Trigonometrie verschaffen. Auf meine Frage, welchen Begriff dieses Gebietes sie für wesentlich halten, kam als Antwort „die Sinusfunktion“, begleitet von einer wellenförmigen Bewegung der Hand. Die Zeichnung einer Kurve an der Tafel wurde mit *da müsse noch ein Koordinatensystem hin und 0 in 0* kommentiert. Das Zuordnungsargument aufgreifend erfolgte die Frage nach weiteren konkreten Werten der Sinusfunktion. Die Antwort lautete, *dass da noch ein Kreis mit einem rechtwinkligen Dreieck hinmüsse*. In diesem Fall wurde die bildhafte Vorstellung 'Kurve' mit der Vorstellung 'punktweise Zuordnung' konfrontiert. Letztere war mit der Berechnung der Werte mithilfe eines rechtwinkligen Dreiecks gekoppelt. Es erfolgte ein Wechsel von der

Darstellung des funktionalen Zusammenhangs in Koordinaten durch den Graphen zur Darstellung ohne Koordinaten.



Die angesprochenen Bilder geben u.a. Spielraum, eine Dynamik zwischen Äquivalenzklassen und Repräsentanten in der Ähnlichkeitsgeometrie oder zwischen Trigonometrie an Sehnen (wie auch historisch geschehen) und anderen möglichen Definitionen von Winkelfunktionen anzustoßen.

Ein anderes Beispiel für Perspektivwechsel bekommt man durch einen kognitiver Ansatz: den Wechsel zwischen prädikativen und funktionalen Konzepten (Schwank, 2003).

Um möglichst viele duale Perspektiven nutzen zu können, wählen wir einen tätigkeitstheoretischen Rahmen, den wir im folgenden Abschnitt erläutern. Im letzten Abschnitt geben wir Beispiele zum Perspektivwechsel zwischen Tätigkeiten, in denen mathematische Objekte als Untersuchungsgegenstände auftreten und Tätigkeiten, in denen sie vermittelnde Werkzeuge (Problemlösemethode) sind.

2. Zum theoretischen Rahmen

Die meisten Modellbildungen in der Lehr- und Lernforschung versuchen eine Integration zweier anscheinend gegensätzlicher Modelle: des kognitivistischen Modells und des konstruktivistischen durch die Fokussierung auf Lernumgebungen; einen Überblick findet man z.B. bei Reinmann-Rothmeier & Mandl (2006). Neue Modelle entstehen dabei durch die Betrachtung neuer Parameter, Relationen, Abhängigkeiten in oder zwischen den polarisierten und daraus entwickelten Modellen. Vom mathematischen Standpunkt ähnelt diese Theoriebildung der Untersuchung strukturierter Mengen und bewegt sich auf der Reflexionsebene der zu untersuchenden Objekte und ihrer charakteristischen Merkmale. Mit anderen Worten, wir befinden uns in der diskreten Welt der Algebra. Diese Herangehensweise bleibt trotz konstruktivistischer Ansätze statisch, da die Konstruktionen der Abläufe kausal durch Anfangszustände und Nebenbedingungen bestimmt sind. Beispiele von Modellen, die durch Integration neuer Parame-

ter und Elemente in die Lernumgebungen entstehen, sind selbstgesteuertes und kooperatives Lernen, problemorientiertes Lernen, Berücksichtigung von Grundvorstellungen, dialogisches Lernen. Beispiele integrierter Modelle, die vom kognitivistischen Standpunkt kommen, sind APOS und didaktisches Engineering.

Tätigkeitstheorie nimmt eher eine Perspektive ein, die man *topologisch* nennen könnte. Im Gegensatz zu konstruktivistischen Ansätzen wird nicht davon ausgegangen, dass man einen konkreten Ablauf rekonstruieren oder sogar voraussagen kann. Man geht davon aus, dass man sehr komplexe, gleichzeitig stattfindende, voneinander abhängige, kulturhistorisch bedingte und sich ständig in Entwicklung befindende Tätigkeiten eher durch die Prinzipien, welchen ihre Dynamik unterliegt, verstehen kann. In diesem Ansatz werden vielmehr Faktoren untersucht, die eine Dynamik begleiten oder unterstützen, als konkrete Entwicklungen nachvollzogen oder vorausgesagt. Durch diesen globalen Ansatz können topologische Ideen wie Abstand, Nähe, Übertragungen, Lokalisierung, Globalisierung, Erhaltungsgrößen sinnvoll interpretiert werden.

Ein mathematisches Konzept kann in einer Tätigkeit in zwei Positionen auftreten: als vermittelndes Werkzeug (Methode, Formel, ...) und als Untersuchungsgegenstand (Teil der mathematischen Sprache, mathematisches Objekt, Regel...). Die Dynamik dieser Dualität wird von Douady (2001) mithilfe didaktischen Engineerings genutzt, um Lernsequenzen zu entwickeln, die durch den Perspektivwechsel zwischen Methode (Werkzeug, Tool) und Objekt ein konzeptuelleres Verständnis algebraischer Begriffe anstreben und den Wechsel zwischen verschiedenen Konzepten erleichtern. Dualistische Prinzipien werden auch in anderen Ansätzen genutzt, um Entwicklung konstruktivistisch zu modellieren, wie das Drei-Welten-Modell von David Tall oder dialektische Dualitäten bei David Kolb.

3. Beispiele zum Perspektivwechsel

Um verschiedene Konzeptualisierungen vorhandener Vorstellungen eines mathematischen Objekts nutzen zu können, ist es nützlich, mögliche Entstehungsprozesse und damit verbundene Qualitäten mathematischer Bewusstheit zu untersuchen. Diese Herangehensweise wird am Beispiel der Variablensubstitution in Kaenders et al. (2011) skizziert.

Schließlich zeigen wir noch an einem Beispiel Möglichkeiten des Perspektivwechsels auf, die durch verschiedene Methoden, sowie den Wechsel von Objekt und Werkzeug beim Lösen von Aufgaben entstehen.

Gegeben ist die folgende (erste) Zeichnung. Schon die Frage nach den Verhältnissen der Flächen der Halbkreise kann als Instruktion gestellt oder dem Schüler überlassen sein (Sangaku). Weitere Perspektivwechsel sind z.B. geometrisch/algebraisch, euklidisch/abbildungsgeometrisch und die unten dargestellten Aspekte.

Konstruktion/ Berechnung Analyse/ Synthese	Objekt/ Werkzeug Geometrische Objekte/ Satz vom Um- fangswinkel	Spiegel- symmetrie/ Ro- tation prädikativ/ funktional	Satz vom Um- fangswinkel/ Umkehrung prädikativ/ funktional

Viel Spaß beim Lösen der Knobelaufgabe!

Literatur

Artigue, M., Assude, T., Grugeon, B., Lenfant A. (2001): Teaching and learning algebra, approaching complexity through complementary perspectives. The Future of the teaching and learning of algebra (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference), 21-32, Melbourne.

Kaenders, R. Kvasz, L., & Weiss-Pidstrygach, Y. (2011): Recovering Mathematical Awareness by linguistic analysis of Variable substitution. Proceedings CERME 7.

Reinmann, G., Mandl, H. (2006): Unterrichten und Lernumgebungen gestalten.
In: Krapp, A./Weidenmann, B. (Hrsg.): Pädagogische Psychologie, Weinheim: Beltz PVU, S. 613-658.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: ZDM-Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', 70-78.