

Seval YETIS, Matthias LUDWIG, Frankfurt am Main

Diagnose und individuelle Förderung: Ergebnisse einer Vorstudie zum Thema Achsenspiegelung und Achsensymmetrie

Gegenwärtige Diagnose- und Fördermaterialien legen ihren Schwerpunkt auf Arithmetik. Geometrie ist nur schwach vertreten. Es fehlen geeignete Diagnose- und Fördermaterialien für die Sekundarstufe I. Ziel des vorgestellten Dissertationsprojektes ist die Entwicklung eines Interviewleitfadens, mit dem Schülerschwierigkeiten mit Achsenspiegelung und Achsensymmetrie diagnostiziert und individuell gefördert werden können. Im Folgenden werden die Ergebnisse einer ersten Vorstudie präsentiert.

1. Achsenspiegelung und Achsensymmetrie

Laut Kerncurriculum für die Primarstufe wird Achsensymmetrie als Abbildung eingeführt und achsensymmetrische Eigenschaften von Figuren thematisiert. Am Ende der Primarstufe sollen Schüler symmetrische Figuren anhand ihrer Eigenschaften erkennen, Symmetrieachsen finden und (achsen-)symmetrische Muster selbst erzeugen können. Spiegelungen kommen meist nur in solchen Fällen vor, in denen das Objekt direkt an der Spiegellachse liegt und zu einer symmetrischen Figur ergänzt werden soll. Das Wort *abbilden* kennen die Grundschüler nur im Zusammenhang mit Vergrößern und Verkleinern. Es bleibt offen, ob die Achsenspiegelung als Abbildung erfahren wird oder nur als das Erzeugen eines symmetrischen Musters. Die Weiterentwicklung, die Schüler bezüglich dieser Themen von der Primarstufe zur Sekundarstufe machen, liegt darin, dass sie nun Verknüpfungen zwischen den Begriffen (wie z.B. zwischen Symmetrie und Kongruenz) begründen, sowie für das Lösen von Problemen nutzen können.

Hoyles und Healy (1997) berichten, dass den Schülern Spiegelungen an vertikalen und horizontalen Achsen leichter fallen als an schrägen Achsen. Bell (1993) stellt in ihrer Studie fest, dass für Schüler horizontal ausgerichtete Urbilder vertikal ausgerichtete Bilder haben (und umgekehrt) oder dass horizontale/vertikale Urbilder auch horizontale/vertikale Bilder besitzen. Küchemann (1993) nennt als mögliche Faktoren, die die Bearbeitung von Spiegelungsaufgaben beeinflussen, u.a. die (Nicht-)Existenz eines Karorasters, die Neigung der Achse und die Neigung des Urbildes zur Achse.

2. Fischbeins Theorie der figural concepts

Fischbein nennt drei Kategorien von mentalen Objekten: das *concept* (eine abstrakte, allgemeine, ideale Repräsentation), das *image* (eine räumlich, sensorische Repräsentation) und das *figural concept*. Die *figural concepts* besitzen zwei Klassen von Eigenschaften gleichzeitig. Sie sind zeitgleich

image und *concept*. Die figuralen Aspekte ermöglichen das mentale Ausführen von Operationen mithilfe von praktischen Erfahrungen (wie verschieben, schneiden und klappen). Die konzeptuellen Aspekte kontrollieren das logische Denken und die adäquate Ausführung dieser Operationen. *Concept* und *Image* interagieren im Laufe einer mentalen Aktivität; sie sind aber grundsätzlich inkompatibel. Idealerweise sollte das konzeptuelle System die Bedeutung, die Beziehungen und die Eigenschaften der *figural concepts* kontrollieren. Schülerschwierigkeiten im geometrischen Denken können laut Fischbein (1993) auf einen Konflikt zwischen diesen beiden Aspekten zurückgeführt werden.

3. Vorstudie: Design und Stichprobe

Ziel des Dissertationsprojektes ist die Entwicklung aufgabenorientierter Interviewleitfäden, mit der die *figural concepts* der Schüler diagnostiziert werden sollen. Mit den Interviews soll der Bruch zwischen den figuralen und konzeptuellen Aspekten der Achsenspiegelung bei Schülern identifiziert und schließlich die Interaktion zwischen diesen Aspekten gefördert werden. Um geeignete Aufgaben für die Interviews zu finden und aufgabenspezifische Schülerschwierigkeiten zu lokalisieren, wurde eine Vorstudie in Form eines schriftlichen Tests mit 195 Sechstklässlern aus drei Gymnasien durchgeführt. Dieser umfasst sechs Aufgaben mit insgesamt 16 Items. Die ersten beiden Aufgaben des Tests sollten aufzeigen, welche Schülerkenntnisse zur Achsensymmetrie zum Testzeitpunkt vorlagen. Bei der Testauswertung lag der Schwerpunkt auf den Aufgaben 3 bis 6 zur Achsenspiegelung, die dem CSMS-Projekt (Küchemann, 1993) entliehen wurden. Die Aufgaben 3 und 6 erforderten das Zeichnen des Spiegelbildes einer gegebenen Figur; die Aufgaben 4 und 5 (siehe Abb. 1) Begründungen mit formalen Aspekten der Achsenspiegelung. Die Items der Aufgaben 3 und 6 unterteilt Küchemann (1993) in zwei Typen, die sich in Bezug auf die Strategien unterscheiden, die die Schüler zum korrekten Bearbeiten verwenden. Bei Typ A-Items liegt eine vertikale oder horizontale Achse vor oder das Urbild ist ein Punkt; bei Typ B-Items ist eine schräge Achse vorzufinden und das Urbild ist ein Strich oder eine Fahne. Typ B-Items sind schwieriger einzustufen als Typ A-Items, da bei Typ A-Items nur eine Schräge zu beachten ist (die des Urbildes zur Achse oder die der Achse zur Horizontalen), bei Typ B-Items müssen zwei Schrägen beachtet werden.

4. Ergebnisse und Interpretation

Die Ergebnisse des schriftlichen Tests wurden durch zwei Rater nach Item-Typ und Lösungshäufigkeiten der korrekten Schülerbearbeitungen sortiert, sodass eine Stufung nach Schwierigkeitsgrad möglich wurde. Die Stufung

der Rater korreliert mit einem Interrater-Reliabilitätswert von $\kappa=0.90$. Nach einem t-Test ($p>0.86$) besteht zwischen Küchemanns (1980) und unseren Ergebnissen (2012) statistisch gesehen kein Unterschied.

Der Test lässt vermuten, dass der Abstandsaspekt das konzeptuelle Wissen der Schüler zur Achsenspiegelung dominiert. Dies zeigt u.a. Aufgabe 5. Sie wurde als richtig bewertet, wenn B als Bildpunkt *gewählt* wurde – unabhängig von der Begründungsweise. 78% der Schüler haben B als Bildpunkt von A gewählt, 9% haben sich für D entschieden. Interessant sind die Begründungen für die Wahl der Punkte. Der Abstandsaspekt alleine wurde in 52% der Schülerbearbeitungen genannt. 11% rechtfertigten ihre Wahl nur mit der Orthogonalität. Die korrekte Begründung mit Benennung der beiden Aspekte Abstand und Orthogonalität kam lediglich in 8% aller Schülerbearbeitungen vor. Die Ursache für die Dominanz des Abstands begriffs kann in der Verwendung des Geodreiecks im Zusammenhang mit Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie liegen. Schließlich muss bei einer Achsenspiegelung unter Verwendung des Geodreiecks die Mittellinie (Symmetrieachse) auf der Spiegelachse positioniert und so nur der Abstand vom Urbild zur Achse bestimmt und zum Bild übertragen werden.

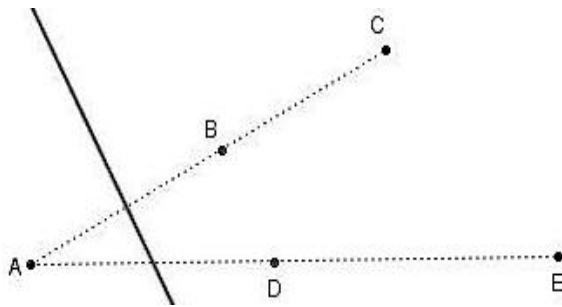


Abbildung 2: Aufgabe 5

Um die Rolle des Geodreiecks näher zu untersuchen, wurde ein Probeinterview mit einer Fünftklässlerin durchgeführt. Hier wurde deutlich, dass das Geodreieck zwar korrekt verwendet wird, aber was hinter der Positionierung des Geodreiecks liegt, ist der Schülerin unklar. Die Schülerin sollte ein Drachen an einer schrägen Achse freihändig spiegeln (siehe Abb. 2). Sie zeichnete das Spiegelbild, als würde sie die Schräge der Spiegelachse ignorieren und stattdessen sich eine imaginäre vertikale Achse (IVA) vorstellen. Eine Fehlstrategie, die wir in unserer Studie als IVA bezeichnen und als den *dominierenden figuralen Aspekt* der Achsenspiegelung (vgl. Fischbein, 1993) vermuten. Als die Schülerin ihre Lösung mit einem Geodreieck überprüfen sollte, stellte sie ihren Fehler fest und konnte innerhalb weniger Sekunden das korrekte Spiegelbild produzieren.

78% der Schüler haben B als Bildpunkt von A gewählt, 9% haben sich für D entschieden. Interessant sind die Begründungen für die Wahl der Punkte. Der Abstandsaspekt alleine wurde in 52% der Schülerbearbeitungen genannt. 11% rechtfertigten ihre Wahl nur mit der Orthogonalität. Die korrekte Begründung mit Benennung der beiden Aspekte Abstand und Orthogonalität kam lediglich in 8% aller Schülerbearbeitungen vor. Die Ursache für die Dominanz des Abstands begriffs kann in der Verwendung des Geodreiecks im Zusammenhang mit Aufgaben zur Achsenspiegelung und Achsensymmetrie liegen. Schließlich muss bei einer Achsenspiegelung unter Verwendung des Geodreiecks die Mittellinie (Symmetrieachse) auf der Spiegelachse positioniert und so nur der Abstand vom Urbild zur Achse bestimmt und zum Bild übertragen werden.

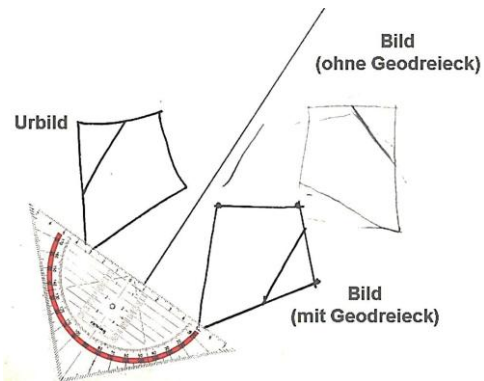


Abbildung 1: Fehlstrategie 'Imaginäre vertikale Achse'

Um die Rolle des Geodreiecks näher zu untersuchen, wurde ein Probeinterview mit einer Fünftklässlerin durchgeführt. Hier wurde deutlich, dass das Geodreieck zwar korrekt verwendet wird, aber was hinter der Positionierung des Geodreiecks liegt, ist der Schülerin unklar. Die Schülerin sollte ein Drachen an einer schrägen Achse freihändig spiegeln (siehe Abb. 2). Sie zeichnete das Spiegelbild, als würde sie die Schräge der Spiegelachse ignorieren und stattdessen sich eine imaginäre vertikale Achse (IVA) vorstellen. Eine Fehlstrategie, die wir in unserer Studie als IVA bezeichnen und als den *dominierenden figuralen Aspekt* der Achsenspiegelung (vgl. Fischbein, 1993) vermuten. Als die Schülerin ihre Lösung mit einem Geodreieck überprüfen sollte, stellte sie ihren Fehler fest und konnte innerhalb weniger Sekunden das korrekte Spiegelbild produzieren.

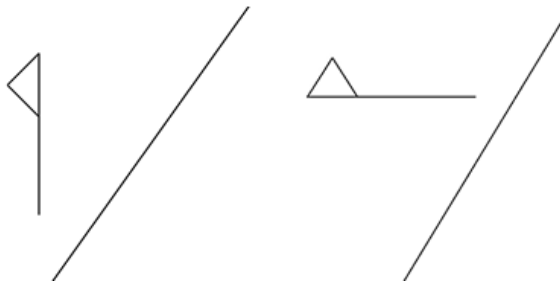


Abbildung 3: Item 3.7 (li); Item 6.1 (re)

Die Ergebnisse der Aufgaben 3 und 6 werfen ebenfalls die Frage nach der Rolle des Geodreiecks bei der Internalisierung der Achsenspiegelung auf. Im Pretest wurde das Geodreieck nur für Aufgabe 6 als Hilfsmittel zugelassen. Sonst mussten Spiegelungen freihändig durchgeführt werden.

Beim Vergleich der Ergebnisse der Items 3.7 und 6.1 (siehe Abb. 3) lässt sich folgendes feststellen: erstens, der prozentuale Anteil an fehlerhaften Schülerbearbeitungen ist bei beiden Items nahezu gleich; und zweitens, die fehlerhaften Bearbeitungen in 3.7 enthalten 21% IVA, in 6.1 sogar 47% – trotz der Verwendung des Geodreiecks in 6.1. Insgesamt kam die Fehlstrategie IVA bei 45% aller Schülerbearbeitungen mehr als einmal vor. Auch ein Vergleich zwei weiterer Items der Aufgaben 3 und 6 lässt Auffälligkeiten erkennen: Sowohl der Anteil an richtigen Antworten als auch der Anteil an den Fehlertypen Horizontal- bzw. Vertikalverschiebung und IVA ist praktisch gleich – trotz Verwendung des Geodreiecks in Aufgabe 6.

5. Forschungsfragen und Ausblick

Die beschriebenen Ergebnisse werfen folgende Fragen auf: Können Schülerfehlvorstellungen und -strategien bei Aufgaben zur Achsenspiegelung auf einen Konflikt zwischen figuralen und konzeptuellen Aspekten zurückgeführt werden? Wenn ja, durch welche Fördermaßnahmen kann man dem entgegenwirken? Ist die Strategie der *imaginären vertikalen Achse* wirklich der kontrollierende figurale Aspekt der Achsenspiegelung? Welche Rolle spielt das Geodreieck bei der Internalisierung der Achsenspiegelung? Verlangsam das Geodreieck oder verhindert es sogar die Entwicklung der Interaktion zwischen den figuralen und konzeptuellen Aspekten der Achsenspiegelung, indem es die Kinder allzu viel assistiert? Diese Fragen sollen in individuellen Interviews mit Sechstklässlern geklärt werden.

Literatur

- Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. In: Educational Studies in Mathematics, 24, 115-137.
- Fischbein, E. (1993): The theory of figural concepts. In: Educational Studies in Mathematics, 24, 139-162.
- Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry. In: International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2(1), 27-59.
- Küchemann, D. K. (1993). Reflections and rotations. In K. Hart: Children's' understanding of mathematics 11-16. London: John Murray, 137-157.