Inhaltsverzeichnis

Teil I: Hauptvorträge, Schnittstellenvorträge und Schnittstellenaktivitäten

Anke LINDMEIER und Stefan UFER
Vorwort zum Münchner Band "Beiträge zu Mathematikunterricht" 1-4

Hans-Georg WEIGAND
Eröffnung der 43. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik 5-8

Hauptvorträge

Philipp MAYRING
Die Methodenfrage in der fachdidaktischen Forschung – qualitativ, quantitativ, mixed? 9-10

Elisabeth MOSER OPITZ
Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung 11-18

Marcus SCHÜTTE, Götz KRUMMHEUER und Aiso HEINZE
Mathematikdidaktik: Quo vadis? - Ein Streitgespräch 19-30

Joke TORBEYNS, Bert DE SMEDT, Greet PETERS, Pol GHESQUIERE und Lieven VERSCHAFFEL
Subtraction by addition: Theoretical, methodological, and educational considerations 31-38

Schnittstellenvorträge

Jürgen BAUMERT
Mathematik für Lehrkräfte: Was zählt - fachwissenschaftliches oder fachdidaktisches Wissen? 39-40

Francesca BIAGINI und Daniel ROST
Money out of nothing? - Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik 41-48

Persi DIACONIS
Adding Numbers and Shuffling Cards 49-50

Hans Niels JAHNKE
Zur Genese des Beweisens 51-58

Ueli MAURER
Kryptografie – Paradoxa der Mathematik 59-60

Schnittstellenaktivitäten

Christine BESCHERER, Ulrich KORTENKAMP und Christian SPANNAGEL
Schnittstellenaktivität Hochschul-Mathematikdidaktik 61-68

Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH und Wolfram KOEPF
Mathematische Brückenkurse ... 69-74

Hans-Wolfgang HENN, Regina BRUDER, Jürgen ELSCHENBROICH, Gilbert GREEFRATH, Jürg KRAMER und Guido PINKERNELL
Schnittstelle Schule-Hochschule ... 75-82

Reinhard OLDENBURG
Geometrische Algebra ... 83-90

Kristina REISS, Manfred PRENZEL, Hans-Dieter RINKENS und Jürg KRAMER
Konzepte der Lehrerbildung ... 91-98

Stephanie SCHIEMANN, Michael BÜRKER, Ralf ERENS, Karin RICHTER, Inge-Gret MAIHÖFNER, Vanessa KRUMMECK, Martin SCHOTTENLOHER, Klaus LINDE, Jürg KRAMER, Ulrich HEY und Rüdiger GIESE
Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik ... 99-106

Rudolf STRAESSER, Karl-Josef FUCHS, Hans-Christoph GRUNAU, Stephan HUSSMANN und Rainer SCHULZE-PILLOT
Bericht über die Schnittstellenaktivität zum „übergang vom Bachelor zum Master“ ... 107-112

Günter TÖRNER
Förderung von Begabten und Hochinteressierten ... 113-120

Teil II: Einzelbeiträge

Ergi ACAR
Emergenz mathematischer Diagrammatizität ... 121-124

Reimund ALBERS
Mathematik Neu Beginnen - Neue Wege in der Grundschullehrerinnenausbildung ... 125-128

Gabriella AMBRUS
Mathematik im Alltag - Realitätsnahe Aufgabentypen in den Klassenstufen 3 und 4 ... 129-132

Stefanie ANZENHOFER
Planung – Durchführung – Auswertung – Ergebnisse eines fächerübergreifenden Unterrichtsversuchs ... 133-136

Daniela ASSMUS
Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei mathematisch begabten Grundschulkindern ... 137-140

Mirco BARTL
Bildungsplan und die Praxis von Erzieherinnen - Eine Fallstudie zu Thüringer Kindergärten ... 141-144

Ludwig BAUER
Fallstudien über Schülervorstellungen zu 0,9 Periode ... 145-148

Stephan BERENDONK
Wie kann Topologie in der Schule sinnvoll unterrichtet werden? *149-152*

Carola BERNACK, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS und Alexander RENKL
Forschungshefte als Instrument der Professionalisierung von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (ForMat) *153-156*

Christine BESCHERER
Erweiterter Kompetenznachweis Mathematik (EKM)....................................... *157-160*

Angela BEZOLD
Kinder argumentieren - eine empirische Studie auf der Grundlage selbstdifferenzierender Lernangebote *161-164*

Ursula BICKER
Auswirkungen des Konzepts Mathematik zum Anfassen *165-168*

Ursula BICKER
Produktives üben und Argumentieren mit dem Pascal-Dreieck........................ *169-172*

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Tommy DREYFUS und Ivy KIDRON
General Epistemic Need - ein Motor für Erkenntnisentwicklung? *173-176*

Ulrich BÖHM
Modellierungskompetenzen mit geeigneten Aufgaben langfristig entwickeln.... *177-180*

Claudia BÖTTINGER
Konzeption von Fach- und Didaktikveranstaltungen Arithmetik *181-184*

Thomas BORYS
Welche Vernetzungsmöglichkeiten bietet die Kryptologie? *185-188*

Birgit BRANDT und Gyde HÖCK
Josefine und ihre Lernpartnerinnen - verschiedene Formen der KoKonstruktion.. *189-192*

Thorsten BRAUN und Engelbert NIEHAUS
Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen... *193-196*

Astrid BRINKMANN und Michael BÜRKER
Vernetzen im Mathematikunterricht - Beispiele für beziehungsreiches Lehren und Lernen.. *197-200*

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN
Explorative Studie zum Löseverhalten bei Geometrieaufgaben........................ *201-204*

Georg BRUCKMAIER, Stefan KRAUSS und Martin BRUNNER
PROLOG: Eine Studie zum probabilistischen und logischen Denken von Jugendlichen in Luxemburg *205-208*

Regina BRUDER
Stand und Perspektiven fachdidaktischer Theorieentwicklung......................... *209-212*

Franco CALUORI und Ernst RÖTHLISBERGER
@rs - eine Selbstlernarchitektur in der mathematikdidaktischen Ausbildung... *213-216*

Janine CAPPELL
Diagnose- und Förderkompetenzen zukünftiger Lehrkräfte der Naturwissenschaften und Mathematik... 217-220

Norbert CHRISTMANN
Stochastik und Musik: Grundideen der Stochastischen Musik im Unterricht.... 221-224

Peter COLLIGNON
Zur Erweiterung der Perspektiven auf die Analysis in der Grund- und Regelschullehrerausbildung.. 225-228

Julia CRAMER
Induktion durch vollständiges Zeigen. Schlussweisen in Argumentationsprozessen.. 229-232

Ervin DEAK
Kritische Untersuchungen über den Tangentenbegriff in mathematischer, didaktischer und mathematikhistorischer Sicht.. 233-236

Bruno DEJON
Syntaxbasierte Meldungen zur Unterstützung selbständigen Lernens mit einem kombinierten Lern-übungs-Programm... 237-240

Theresa DEUTSCHER
Der Umgang von Schulanfängern mit dekadisch-strukturierten Anzahlen........ 241-244

Ernestina DITTRICH
Neue Wege bei der Begabtenförderung in der Mathematik- Ein fachdidaktisches Gesamtkonzept... 245-248

Christina DRÜKE-NOE
Lernstandserhebungen (VERA 8) - Testaufgaben als Basis der Unterríchtsentwicklung? 249-252

Christoph DURCHHARDT und Eva KNOPP
Mathematische Kompetenz von Erwachsenen – Ergebnisse einer Vorstudie im Rahmen des Nationalen Bildungspanels 253-256

Andreas EICHLER und Markus VOGEL
Schülervorstellungen zu Begriffen aus dem Bereich Daten und Zufall............. 257-260

Ulrich EICHMANN
Ableitung ohne Differentialrechnung... 261-264

Wolfram EID
Niveaubestimmende Aufgaben - (nicht nur) ein Mittel zur Implementierung curricularer Vorgaben.. 265-268

Katja EILERTS, Rolf BIEHLER, Reinhard HOCHMUTH und Martin HÄNZE
Mathematiklehrerausbildung zum Studienbeginn: Eine empirische Studie zu Studienmotivation, Vorwissen und Einstellungen zur Mathematik (BMBF-Projekt LIMA).. 269-272

Petr EISENMANN
Eine komische Kurve und ein toller Körper - über eine Diskussion von dem Grenzwertbegriff in der gymnasialen Oberstufe 273-276

Joachim ENGEL
Von Daten zur Funktion: Vernetzungen zwischen Modellierungskompetenzen, Geometrie und Statistical Literacy 277-280

Ingo ENGERT-OOSTINGH, Stefan GÖTZ und Karl Josef FUCHS
Entwicklung eines genetisch(orientiert)en Lehrgangs zur Wahrscheinlichkeitsrechnung 281-284

Joachim FELS
Empirische Evaluation von übergangsproblemen im Mathematikunterricht 285-288

Andreas FEST
Prozessorientiertes Lernen mit interaktiver Geometrie 289-292

Heiko FEY und Regina BRUDER
Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehramtsausbildung Mathematik .. 293-296

Pascal Rolf FISCHER
Ein individualisierter eVorkurs für 400 Studierende und mehr – Ein Lösungsansatz für mathematische Brückenkurse mit hohen Teilnehmerzahlen 297-300

Malik FNDY
Problemlösestrategien im kulturellen Kontext 301-304

Raphael FOCKEL
Data Mining und Knowledge Discovery in Databases 305-308

Okka FREESEMANN, Ina MATULL, Susanne PREDIGER, Stephan HUSSMANN und Elisabeth MOSER OPITZ
Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern – Entwicklung und Evaluation eines Förderkonzepts für die Sekundarstufe I 309-312

Anja FRIED
Mathematische Erfahrungen im Kindergarten - Erzieherinnen und Erzieher schärfen ihren Blick 313-316

Karl Josef FUCHS und Peter FEJES TOTH
Lehren und Lernen von Mathematik mit LMS 317-320

Michael GAIDOSCHIK
Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres 321-324

Hedwig GASTEIGER
Mathematische Kompetenzen wahrnehmen und fördern - von Anfang an 325-328

Thomas GAWLICK und Diemut LANGE
Allgemeine vs. mathematische Begabung bei Fünftklässlern 329-332

Andrea GELLERT
Lehrerintervention im Unterrichtsdiskurs in Kleingruppen 333-336

Boris GIRNAT
Theoretisches und nichttheoretisches Mathematisieren 337-340

Stefan GÖTZ und Hans-Stefan SILLER
Vom Modellieren zum Definieren oder: Mathematik(unterricht) rund ums Ei .. 341-344

Daniela GÖTZE und Karina HÖVELER
Diagnostische Gespräche planen, durchführen, auswerten 345-348

Günter GRAUMANN
Allgemeine Kompetenzen: Alter Wein in neuen Schläuchen? – 40 Jahre Lernziele in der Mathematikdidaktik in Deutschland 349-352

Gilbert GREEFRATH und Michael RIESS
Computer-Algebra-System-Einsatz in der Sekundarstufe I: Das Projekt CASI. 353-356

Eva Maria GRETZMANN
Eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur als Grundlage kognitiver Aktivierung im Mathematikunterricht 357-360

Svenja GRUNDEY
Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen.. 361-364

Dietmar GUDERIAN
Mathematik und Kunst im Wandel - Beispiel Zufall.. 365-368

Jan GUNCAGA
Theorien des Erkenntnisprozesses und Mathematikunterricht.......................... 369-372

Martin GUNDLACH
Einflussgrößen auf Statistical Literacy von Studierenden - Erste Ergebnisse aus dem Projekt RIKO-STAT unter besonderer Berücksichtigung motivationaler Dispositionen 373-376

Mathias HATTERMANN
Die Ellipse in der Primarstufe-Unterrichtsvorschlag und Legitimation mithilfe von Bildungsstandards und Rahmenplan 377-380

Petra HAUER-TYPPELT
Wahrscheinlichkeit, Zufall und Erwartungswert - und das alles aus einem Spiel? 381-384

Martin HENNECKE
Bruchrechnung: Rechenwege von Mädchen und Jungen im Vergleich 385-388

Herbert HENNING und Herber NADINE
Spiralen - ein „Phänomen“ für fächerübergreifendes Lernen von Mathematik 389-392

Kurt HESS
Kompetenz orientierte Diagnostik in Lernumgebungen für Kindergärten und erste Grundschulklassen.. 393-396

Maren HIOB-VIERTLER und Andreas FEST
Entwicklung einer offenen Experimentierumgebung für das Lernfeld Funktionen... 397-400

Horst HISCHER
Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext — vertiefende Aspekte.... 401-404

Eva HOFFART
"Paul hat nicht Recht!" - Das Dilemma guter Aufgaben in Leistungserhebungen... 405-408

Andrea HOFFKAMP
Empirische Befunde und neue Gestaltungsprinzipien für einen inhaltlichen Zugang zur Analysis durch Computereinsatz 409-412

Tobias HOFMANN
Entwicklung und Evaluation einer multimedialen Lernumgebung für einen selbstständigen Einstieg in die Werkzeugsoftware Fathom 413-416

Martin Erik HORN
Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit 417-420

Alena HOSPESOVA, Yvona MAZEHOOVA und Jana KOURILOVA
Natürliche Differenzierung in der Lernumgebung „Mosaike" 421-424

Anna-Marietha HÜMMER
Mathematische Denkentwicklung und ihre Supports 425-428

Hans HUMENBERGER
Riemengetriebe mit Zylindern und Kegeln 429-432

Melanie HUTH
Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen - multimodale Ausdrucksweisen mathematischer Ideen von Kindern 433-436

Beat JAGGI
Mathematik mit Flaggen 437-440

Thomas JAHNKE
Das mähliche Verschwinden des Faches aus der Mathematikdidaktik Vortrag 441-444

Stefanie JANOTT und Heike HAHN
Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern 445-448

Elen Andrea JANZEN
Zielgerichtete Hilfen beim Beweisen mit DGS 449-452

Roland JORDAN
Entwicklung einer übungs-CD zur Förderung des Textverständnisses 453-456

Steffen JUSKOWIAK
Zur Erkundung selbstreflektorischer Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme 457-460

Rainer KAENDERS
Entwicklung des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de 461-464

Gabriele KAISER, Nils BUCHHOLTZ, Björn SCHWARZ, Sigrid BLÖMEKE, Rainer LEHMANN, Ute SUHL, Johannes KÖNIG und Hans-Dieter RINKENS
Kompetenzentwicklung in der Mathematik-Gymnasiallehrerausbildung – eine empirische Studie an fünf deutschen Universitäten 465-468

Hansruedi KAISER
Situiertes Wissen, subjektive Erfahrungsbereiche und Mathematik in der Berufsbildung 469-472

Romualdas KASUBA
Schoener Text bei Aufgaben - wie wertvoll und warum? *473-476*

Stefan-Harald KAUFMANN
Schülerauffassungen von Variablen in der analytischen Geometrie *477-480*

Christa KAUNE, Elmar COHORS-FRESENBORG und Silke KRAMER
Konzeption von Aufgaben zur Förderung metakognitiver Kompetenzen........... *481-484*

Katharina KLEMBALSKI
Primzahltests als innermathematische Vernetzung von Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung... *485-488*

Joost KLEP
D2M: Didaktik der Didaktik der Mathematik *489-492*

Eva KNOPP
Das Inventar „Rechenfische“ für Klasse 1 – Konzeption & Ergebnisse der Erprobungsstudie *493-496*

David KOLLOSCHE
Sinn und Routine im Mathematikunterricht *497-500*

Ulrich KORTENKAMP und Yves KREIS
Konstruktionsbeschreibungen und DGS.. *501-504*

Günter KRAUTHAUSEN und Petra SCHERER
Heterogenität, Differenzierung, Individualisierung – Hintergründe des EU-Projekts NaDiMa (Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht)........ *505-508*

Felix KRAWEHL
Mathematikdidaktische Evaluation von Unterrichtssoftware für das Grundschulalter.. *509-512*

Yves KREIS, Carole DORDING und Ulrich KELLER
GeoGebraPrim – GeoGebra in der Grundschule *513-516*

Isabell KUHNKE-LERCH und Regina BRUDER
Wie analysieren Lehramtsstudierende Unterrichtsentwürfe? - Vorstellung eines Instruments zur Untersuchung von Lernprozessen im Lehramtsstudium........... *517-520*

Sebastian KUNTZE
Sichtweisen von Studierenden zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht – „Rich pictures“ und Multiple-Choice: Gegenüberstellung zweier Erhebungsformate *521-524*

Ladislav KVASZ und Rainer KAENDERS
Mathematisches Bewusstsein.. *525-528*

Gunta LACE
Lehrerfragen im Unterricht von Problemlösen.. *529-532*

Claudia LACK
Frühmathematische Entwicklung *533-536*

Claudia LACK
Junge Mathe Asse angemessen fördern... *537-540*

Diemut LANGE
Studie zur Kooperation von Fünftklässlern beim Problemlösen 541-544

Ingmar LEHMANN
Entdeckungen im Innern eines Dreiecks – Schnittfiguren mit überraschenden Invarianten 545-548

Brigitte LENEKE
Graphentheorie im MU – Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten 549-552

Celine LIEDMANN
Modellieren in europäischen Schulen 553-556

Georg LILITAKIS
Untersuchungen zur Entwicklung von Kompetenzen und Einstellun-gen bei Studierenden des Faches Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel 557-560

Anke M. LINDMEIER, Aiso HEINZE und Kristina REISS
Fachspezifische Wissens- und Kompetenzkomponenten bei Lehrkräften und Studierenden des Lehramts 561-564

Michael LINK
Kinder beschreiben operative Zahlenmuster - ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt 565-568

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN
Mathematikdidaktik zwischen Best Practice und Wissenschaft. 569-572

Miriam LÜKEN
Ohne "Struktursinn" kein erfolgreiches Mathematiklernen - Ergebnisse einer empirischen Studie zur Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang 573-576

Jürgen MAASZ
Bologna - für oder gegen die LehrerInnenbildung in Österreich? 577-580

Markus MANN
Das Umfrageprojekt – Ein Projekt im Mathematikunterricht 581-584

Andreas MARX und Christoph SELTER
PIK AS - ein Projekt zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung 585-588

Michael MARXER und Gerald WITTMANN
Förderung des Zahlenblicks bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen 589-592

Bernhard MATTER, Peter FLURY und Telgia JUON
Mathematischer Lernweg Chur - Outdoordidaktik im Mathematikunterricht ... 593-596

Carmen MAXARA
Verständnis und Begründungen von Studierenden zum Maternity-Ward-Problem und analogen Situationen 597-600

Hartwig MEISSNER
Kreativität und Mathematiklernen 601-604

Alexander MEYER
Algebra als Werkzeug - der Umgang von Neuntklässlern mit einem arithmetisch-algbraischen Problem 605-608

Michael MEYER
"Ich hab grad n Zweieck erfunden" – Typen von Regeln und ihre Bedeutungen bei Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht 609-612

Wolfram MEYERHÖFER
Zu einem theoriesprachlichen Alternativkonzept zur 613-616

Regina D. MÖLLER
Geld im Mathematikunterricht der Grundschule - Ziele, Standards, Kompetenzen 617-620

Renate MOTZER
Uebungen zu den klassischen Mathematik-Vorlesungen organisiert als Expertenpuzzle 621-624

Winfried MÜLLER
Konvex - noch immer (k)ein Thema 625-628

Fritz NESTLE
Endlich: Teaching to the Test als Chance 629-632

Swetlana NORDHEIMER
"Einkleidungen" als Modell-Vernetzungen im MU 633-636

Edyta NOWINSKA
Unterrichtsentwicklung: ein steiniger Weg 637-640

Marcus NÜHRENBÖRGER
Einsichtsvolles Mathematiklernen im Kontext von Heterogenität 641-644

Annegret NYDEGGER
Diagnosekompetenz entwickeln - Erfahrungsbericht aus der Fachdidaktik Mathematik 645-648

Andreas OBERSTEINER, Stefan UFER und Kristina REISS
Förderung des Aufbaus mentaler Zahlrepräsentationen im Grundschulalter ... 649-652

Werner PESCHEK
Zentralabitur Mathematik: Sicherung von Grundkompetenzen 653-656

Kathleen PHILIPP und Timo LEUDERS
Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen 657-660

Franz PICHER
Nachdenken über die Schulanalysis 661-664

Guido PINKERNELL
Rechnerfreie Mathematik in einem technologieorientierten Unterricht 665-668

Eva-Maria PLACKNER
*Leistungsmessung im Mathematikunterricht der Grundschule – eine Stichprobe*669-672

Melanie PLATZ und Engelbert NIEHAUS
Kooperatives Problemlösen von SchülerInnen mit besonderen mathematischen Begabungen und Lehramtsstudierenden *673-676*

Herbert PODLOGAR
Das Projekt Mathe-Meister: Entwicklung eines effizienten Tests zur Erfassung mathematischer Basisanforderungen verschiedener Berufsgruppen *677-680*

Benjamin RAWE
Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung - Ein Förderprojekt für die Hauptschule *681-684*

Julia REIBOLD und Regina BRUDER
Ein binnendifferenzierendes Unterrichtskonzept für die Sekundarstufe I im Projekt MABIKOM: Unterrichtsbeispiele und erste Evaluationsergebnisse *685-688*

Marlene REIMANN
Kindergartenkinder be-greifen geometrische Objekte in Spiel- und Erkundungssituationen *689-692*

Roland RINK und Torsten FRITZLAR
Zu Fähigkeiten von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen *693-696*

Klaus RÖDLER
Abstraktionsstufen der Zahl: Zahlen und Rechnen aus kulturhistorischer Perspektive *697-700*

Matthias RÖMER
Systematische Weiterentwicklung von Mathematiklehrerfortbildung – Das Projekt KOSINUS im Saarland *701-704*

Jürgen ROTH
Mathematik-Labor – Praxisbezogene Lehramtsausbildung *705-708*

Benjamin ROTT
Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern709-712

Christian RÜEDE
Andere sehen anderes -- Lesarten algebraischer Ausdrücke *713-716*

Markus RUPPERT
Analogiebildung - eine grundlegende mathematische Denkweise *717-720*

Ildar SAFUANOV
Genetic approach to the teaching of discrete mathematics *721-724*

Florian SCHACHT
Individuelle Begriffsbildungsprozesse in inferentialistischer Perspektive *725-728*

Ingolf SCHÄFER
Wissenskonstruktion und Objektbezüge "schwacher" Schülerinnen und Schüler in Mathematik in der Sek. 1 .... *729-732*

Ulrike SCHÄTZ
Geometrie zum Anfassen *733-734*

Petra SCHERER und Günter KRAUTHAUSEN
Ausgestaltung und Zwischenergebnisse des EU-Projekts NaDiMa (Partner Deutschland) *735-738*

Georg SCHIERSCHER
Die Null - das Rad der Mathematik? *739-742*

Thomas SCHILLER
Kennzeichenerkennung und digitale Bildverarbeitung als fächerübergreifendes Thema M/INF *743-746*

Tabea SCHIMMÖLLER
Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit? *747-750*

Florian SCHIMPF und Christian SPANNAGEL
Wer suchet, der findet – Zur Oberflächenreduktion in DGS *751-754*

Wolfgang SCHLOEGLMANN
Erwachsene und Mathematik - einige Anmerkungen *755-758*

Anna-Katharina SCHNEIDER und Rose VOGEL
Portfolioarbeit im Studium - angehende Grundschullehrerinnen und -lehrer reflektieren ihre fachspezifische Lernkompetenz im Fach Mathematik *759-762*

Susanne SCHNELL
"Manchmal braucht man auch sehr viel Glück" - Entwicklung von Schülervorstellungen zum Zufall *763-766*

Christof SCHREIBER
Von der Inskription zum Diagramm *767-770*

Stanislaw SCHUKAJLOW, Werner BLUM, Jana KRÄMER, Michael BESSER, Roland BRODE, Dominik LEISS und Rudlolf MESSNER
Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg? .. *771-774*

Stanislaw SCHUKAJLOW und Dominik LEISS
Helfen Strategien beim Lösen von Modellierungsaufgaben? *775-778*

Stephanie SCHULER
Spielen und Lernen - (k)ein Widerspruch?! *779-782*

Andreas SCHULZ
Ergebnisorientierung als Chance für den Mathematikunterricht? - Zusammenfassung der Befunde einer Studie im Mixed-Method-Design *783-786*

Heinz SCHUMANN
Raumgeometrisches Beweisen *787-790*

Michael SCHUSTER
Wiki-Lernpfade: Ein interaktives Werkzeug zum selbsttätigen Lernen und individuell angepasstem Lehren *791-794*

Fritz SCHWEIGER
Die Algorithmen von Poincaré, Brun und Selmer *795-798*

Franziska SIEBEL
„Und das ist dann halt bei allen Zahlen so." Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen. 799-802

Hendrik SIMON
Sollte die Multiplikation vor der Addition eingeführt werden? Ideen zum Anfangsunterricht in der Grundschule 803-806

Johann SJUTS
Aufgabenkompetenz erwerben – ein modellhafter Berufsfeldbezug in der Lehrerausbildung 807-810

Christian SPANNAGEL und Florian SCHIMPF
Zur Prozessorientierung in der Mathematikdidaktik 811-814

Grozio STANILOV
Kanonisierung der Kurven zweiter Ordnung 815-818

Anke STEENPASS
Grundschulkinder deuten Anschauungsmaterialien im Mathematikunterricht - Ziele und Konzept des Forschungsvorhabens KORA 819-822

Gudrun STEFAN
Mathematische Diskussionen mit Grundschülern als Chance zur Bildung situativ-kollektiven Interesses 823-826

Martin STEIN
Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge 827-830

Jürgen STEINWANDEL
Die Strukturerfassung regulärer und halbregulärer Körper. Ein Vergleich von interaktiver 3D-Computer-Simulation, Bild und Realmodell 831-834

Christine STREIT
Einsatzmöglichkeiten eines beobachtungsgestützten Paper-and-pencil-Tests zum Erfassen von Schwierigkeiten beim Rechnen 835-838

Oliver THIEL
Mathematische Bildung in Berliner Kindergärten 839-842

Sandra THOM
Der ‚mathematische Geist' als Wirkkraft entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht Maria Montessoris 843-846

Marie TICHA, Filip ROUBICEK und Jana MACHACKOVA
Zwei geometrische Lernumgebungen zur natürlichen Differenzierung 847-850

Kerstin TIEDEMANN
Die Pause macht's! Elterliche Unterstützung in mathematischen Diskursen mit Vorschulkindern 851-854

Philipp ULLMANN
Deine Daten gehören Dir? Die Leitidee "Daten und Zufall" im Zeitalter des Mikromarketings 855-858

Bodo V. PAPE
*„Geht nicht." gibt's nicht. Plädoyer für eine Schulanalysis ohne Scheuklappen*859-862

Kostas VAINAS
Fachübergreifenden Mathematikunterricht an den berufsbildenten Schulen 863-866

Ödön VANCSO und Attila KOMZISK
Modellieren und Motivation anhand der Erfahrungen gewonnen durch die Anwendung einer realitätsbezogenen Aufgabe 867-870

Ingrida VEILANDE
Die Strukturen von Einheitswürfeln in die kombinatorischen Aufgaben. 871-874

Martina VELTEN
Nacherzählen von Rechengeschichten 875-878

Markus VOGEL und Andreas EICHLER
Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I 879-882

Rose VOGEL
Erste Schritte von Kindern in die Welt der Daten 883-886

Andreas VOHNS
*Mathematik im Kontext (Bericht aus dem Projekt Fächerkonzepte und Bildung)*887-890

Maike VOLLSTEDT
Eine kulturelle Reflexion von Ähnlichkeiten und Unterschieden exemplarischer Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland und Hongkong 891-894

Sieglinde WAASMAIER
Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule - Entwicklung und Förderung fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen im Rahmen eines Unterrichtsprojektes in der 7. und 8. Jahrgangsstufe.. 895-898

Beat WÄLTI und Werner JUNDT
Mathematische Beurteilungsumgebungen (MBU) für die Sek 1 899-902

Daniel WAGNER
Mathematische Kompetenz beim übergang Schule-Hochschule........................ 903-906

Conny WALZEBUG
Mathematische Problemlöseprozesse von 6. Klässlern. Eine Untersuchung zu Vorgehensweisen und Schwierigkeiten bei der Bearbeitung arithmetischer Probleme.. 907-910

Sebastian WARTHA
*Aufbau von Grundvorstellungen zu Zahlen, Rechenoperationen und –strategien*911-914

Thomas WASSONG und Rolf BIEHLER
Statistik lehren online lernen – Ein Modell für Lehrerkompetenz als Basis einer Online-Lehrerfortbildung für Statistik in der Sekundarstufe I 915-918

Christof WEBER und Christian RÜEDE
Aufgabenbearbeitungen von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten aus unterschiedlichen diagnostischen Perspektiven lesen.. 919-922

Hans-Georg WEIGAND und Ewald BICHLER
Der Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien – Analyse eines langjährigen Unterrichtsversuchs *923-926*

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH und Rainer KAENDERS
Geometrisches Propädeutikum zur Begriffsbildung der Analysis *927-930*

Simon WEIXLER
Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I: eine Kennzeichnung von drei Schritten *931-934*

Claudia WITTICH, Marcus NÜHRENBÖRGER und Elisabeth MOSER OPITZ
Ablösung vom zählenden Rechnen - Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule *935-938*

Jan WÖRLER
Konkrete Kunst im Mathematikunterricht: Modellierung und Simulation von Kunstwerken *939-942*

Bernd WOLLRING
EMBIG Handlungsleitende Diagnostik zu Raum und Form - Ein interviewbasiertes Verfahren für die Grundschule *943-946*

Matthias ZELLER und Bärbel BARZEL
Die Rolle von Computeralgebra beim Lernen elementarer Algebra *947-950*

Marc ZIMMERMANN und Daniel HERDING
Entwicklung einer computergestützten Lernumgebung für bidirektionale Umformungen in der Mengenalgebra *951-954*

Arbeitskreise der GDM

Astrid BRINKMANN und Michael BÜRKER
AK Vernetzungen im Mathematikunterricht *955-956*

Katja EILERTS, Christine BESCHERER und Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER
AK Hochschulmathematikdidaktik *957-960*

Silke LADEL und Christof SCHREIBER
AG "Neue Technologien im Mathematikunterricht der Grundschule" - neu: "Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe" *961-964*

Jürgen MAASZ
AK Mathematik in der Weiterbildung für Erwachsene *965-968*

Nachwuchspreisträger der GDM 2010

Sebastian REZAT
Mathematikbuch und Schüler – Ergebnisse einer Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen und Implikationen für die Schulbuchkonzeption *969-976*

Anke M. LINDMEIER, München, Stefan UFER, München

Vorwort zum Münchner Band „Beiträge zum Mathematikunterricht 2010“

Zum zweiten Mal wurde die Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik im Jahr 2010 als gemeinsames Treffen mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gestaltet. Fraglos ist der Kontakt zwischen der Mathematik und der Mathematikdidaktik für beide Bereiche ein zentrales Element. Das beidseitige Interesse der Fachcommunities an einem intensiven Austausch zeigte dann auch die Teilnehmerzahl, die mit über 850 Personen den Umfang einer üblichen GDM-Tagung deutlich überstieg.

Eine Motivation für gemeinsame Tagungen sind die vielfältigen Arbeits- und Gestaltungsbereiche, die beide Communities gleichermaßen betreffen und damit nur im gemeinsamen Diskurs weiter entwickelt werden können. Die von Hans-Georg Weigand (Universität Würzburg) hierzu initiierten Schnittstellenaktivitäten zeigen die Breite dieser Themenbereiche von der Lehramtsausbildung sowie der Fort- und Weiterbildung von Lehrkräften über die Zusammenarbeit zwischen Schulen und Hochschulen bis hin zu mathematischen Gebieten, die besonderes Potential für beide Fachgesellschaften beinhalten. Diese Schnittstellenaktivitäten wurden von Vertretern beider Fachgesellschaften gemeinsam vorbereitet und waren fachgesellschaftsübergreifend gut besucht.

Der intensive Austausch der beiden Fachcommunities war ein zentraler Teil der Tagung, der durch Schnittstellenvorträge und –symposien initiiert wurde. So konnte Jürgen Baumert (MPIB Berlin) im Rahmen der Auftaktveranstaltung an Hand von Ergebnissen aus der COACTIV-Studie aufzeigen, dass sich fachwissenschaftliches oder fachdidaktisches Wissen als Bausteine von Lehrerwissen gegenseitig ergänzen und – eng verzahnt – ein wesentliches Fundament unterrichtlichen Handelns von Lehrerinnen und Lehrern bilden. Persi Diaconis (Stanford University) bot in seinem Schnittstellenvortrag einen äußerst kurzweiligen Ausflug in die Grauzone zwischen Spiel und Mathematik. Dabei konnte er erneut darstellen, dass auch im Alltäglichen mehr Mathematik steckt als man meist vermutet. Der Vortag von Hans-Niels Jahnke (Universität Duisburg-Essen) führte weiter vom Alltag zu den Grundlagen der Mathematik. Fokus seines Vortrags war die historische Genese des Konzepts, das die Mathematik vor allen anderen Wissenschaften auszeichnet. Er stellte die Verbindung von der historischen Entwicklung des Konzepts des Beweises zur konkreten Behandlung im Unterricht der Sekundarstufe I her. Die Schnittstellenvorträge von Ueli Maurer (ETH Zürich) und Francesca Biagini (LMU München) konnten aktuelle, moderne Anwendungen der Mathematik für ein Publikum vom forschenden Mathematiker oder der forschenden Mathematikerin über Lehrkräfte bis hin zu interessierten Laien erschließen. Ueli Maurer widmete sich dabei der Kryptografie und deren – manchmal paradox erscheinenden - Implikationen, Francesca Biagini bereitete – sehr erfolgreich – moderne Anwendungen der Finanzmathematik auf. Von Seiten der Veranstalter freuen wir uns, dass wir den Kontakt von Fachwissenschaft und Fachdidaktik in dieser Breite durch die Schnittstellenvorträge abbilden konnten und danken den Vortragenden, die sich der manchmal schwierigen Aufgabe gestellt haben, ihr Forschungsgebiet für ein breites Publikum aufzubereiten.

Bei allem Kontakt zur Fachwissenschaft war die Münchner Tagung natürlich auch eine Jahrestagung der GDM. Die Hauptvorträge im Rahmen des GDM-Teils der Tagung sollten ebenso die Breite fachdidaktischer Forschung abbilden, was bei nur vier Vortragsterminen eine echte Herausforderung darstellte. Besonders wichtig erschien es dabei – vielleicht als ausgleichendes Element zu dem engen Kontakt mit der Mathematik – auch den Kontakt zu anderen Bezugsdisziplinen zu berücksichtigen. Elisabeth Moser-Opitz (Universität Zürich) begann die Reihe mit einem fundierten Überblick über das Feld der Diagnose und Förderung mathematischer Kompetenzen. Während dieser Beitrag den starken Bezug zur pädagogisch-psychologischen Diagnostik aufwies, brachte Lieven Verschaffel (KU Leuven) eine eher kognitionspsychologische Sichtweise ein. Er beschäftigt sich seit Jahren mit der flexiblen und adaptiven Strategiewahl bei elementaren Rechenoperationen. Seine Studien zu Subtraktionsstrategien boten einen interessanten Einblick in quantitative Laborforschungen zu mathematischen Denkprozessen und deren praktische Relevanz. Aiso Heinze (IPN Kiel) spannte am Donnerstag den weiten Bogen der mathematischen Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne. Er zeigte Wissensstand und Forschungsdesiderate der Mathematikdidaktik als interdisziplinärer Wissenschaft auf, um Übergänge in der Bildungsbiografie optimal gestalten zu können. Als Abrundung zu diesen Vorträgen, die nicht nur Antworten gaben, sondern auch offene Fragen im Bereich fachdidaktischer Forschung herausarbeiteten, diente die Perspektive Philipp Mayrings (Universität Klagenfurt) aus der psychologischen Methodenforschung. Er stellte die Bedeutung einer intelligenten Methodenwahl heraus, die sich an der jeweiligen Forschungsfrage orientiert. Insbesondere die Definition von Wissenschaftsstandards, die qualitative, quantitative und auch gemischte methodische Ansätze berücksichtigen, ist ein Gebiet der Methodenforschung, das die wissenschaftliche Praxis der Mathematikdidaktik besonders betrifft. Die Münchner Tagungsorganisation dankt den vier Hauptvortragenden herzlich für ihr Engagement und die Leistung, nicht nur ihre aktuelle Forschung zu präsentieren, sondern darüber hinaus zentrale Perspektiven und Herausforderungen für die mathematikdidaktische Forschung herauszuarbeiten.

Fachdidaktiken sind nicht nur eigenständige wissenschaftliche Disziplinen, sie adressieren darüber hinaus mehr als viele andere Disziplinen ein spezifisches Berufsfeld. Traditionell war deshalb auch dieses Jahr im Rahmen der Tagung ein Lehrertag vorgesehen, an dem insbesondere auf die Unterrichtspraxis bezogene Beiträge – so weit möglich – gebündelt wurden. Ergänzt wurde dies durch sieben Workshops für Lehrkräfte. Wir danken hier den Referenten für ihr Engagement und besonders auch Christoph Hammer für die Organisation dieses Programmteils.

Letztlich bilden die genannten Veranstaltungen aber vor allem den Rahmen für das, was eine Tagung – und besonders die Jahrestagungen der GDM – auszeichnet. Im Zentrum steht der Austausch mit Kolleginnen und Kollegen im Rahmen der (diesmal etwa 250) Einzelbeiträge, aber auch außerhalb des wissenschaftlichen Programms. Wir haben uns bemüht, dies mit einem ansprechenden Rahmenprogramm zu unterstützen. Die Stimmung die wir beim Eröffnungsempfang am Montag, den Ausflügen am Mittwoch Nachmittag, in den Pausen während der Tagung sowie vor allem beim Gesellschaftsabend am Donnerstag wahrgenommen haben, lässt uns hoffen, dass dies gelungen ist. Trotz der in den traditionsreichen Gemäuern der Ludwig-Maximilians-Universität manchmal recht niedrigen Temperaturen gab es offenbar genug Motivation für lebhafte Diskussionen und Gespräche. Ohne dieses rege Interesse am wissenschaftlichen Austausch innerhalb der mathematikdidaktischen Community und auch darüber hinaus wäre diese Tagung nicht so interessant geworden. Dafür danken wir von Herzen allen Teilnehmerinnen und Teilnehmern.

Damit eine Tagung dieser Größe gelingen kann müssen viele Kräfte zusammenwirken. Besonderer Dank gebührt von unserer Seite den studentischen Hilfskräften, die – so die Rückmeldung vieler Tagungsteilnehmer und Tagungsteilnehmerinnen – stets bemüht waren, in allen Lebenslagen zu helfen. Streikende Technik, die Suche nach dem entlegenen Raum oder der Wickelstation und alle die Anfragen, mit denen im Vorfeld niemand gerechnet hatte, waren so zumeist kein Problem. Außerdem möchten wir besonders den Unterstützerinnen und Unterstützern im Hintergrund danken, beispielsweise Rita Hassemeier, Claudia Christann und Andreas Obersteiner, die sich immer wieder den unerwarteten Herausforderungen des Tagungsverlaufs stellten.

Schließlich bedanken wir uns bei den beiden Fachgesellschaften und ihren Vorsitzenden bzw. Präsidenten, die im Vorfeld vieles unternommen haben um ihre Mitglieder für die gemeinsame Herausforderung zu motivieren. Es ist schön, dass das Zusammenkommen von Mathematik und Mathematikdidaktik als wesentliche Aufgabe gesehen wird.

Wir haben uns über die vielen Kolleginnen und Kollegen gefreut, die der Einladung nach München gefolgt sind, und hoffen, dass sie diese gemeinsame Jahrestagung in guter Erinnerung behalten.

Anke Lindmeier und Stefan Ufer

für das lokale Organisationskomitee

Grußwort des 1. Vorsitzenden der GDM

Hans-Georg Weigand

Sehr geehrter Staatsminister Minister, sehr geehrter Herrn Vize-Präsidenten, liebe Kolleginnen und Kollegen, meine sehr geehrte Damen und Herren,

Ich freue mich sehr, dass wir nach Berlin im Jahr 2007 die 2. Gemeinsame Tagung der DMV und GDM hier in München durchführen können. Mein Dank gilt zunächst allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern hier in München für die Organisation dieser Tagung, für die Ausarbeitung des sozialen Programms und für die Zusammenstellung des wissenschaftlichen Programms. Auch wenn es sich angesichts der offensichtlichen Teamarbeit verbieten sollte, einzelne besonders hervorzuheben, so möchte ich doch seitens der GDM ganz besonders Kristina Reiss danken, ohne die diese gemeinsame Tagung nicht stattgefunden hätte. Ich möchte aber auch Stefan Ufer danken, da ich seine Probleme und Sorgen bei der Programmzusammenstellung hautnah, digital gedacht oder gespürt, miterleben durfte, und ich möchte ihm für seine Geduld und sein fortwährendes Bestreben danken, stets gute oder gar optimale Lösungen anzustreben. Die zweite gemeinsame Tagung von DMV und GDM unterstreicht die engen Beziehungen und Wechselbeziehungen, die Mathematik und Didaktik der Mathematik miteinander verbinden. Einerseits ist die Mathematik die zentrale Bezugswissenschaft für die Didaktik der Mathematik – vor anderen Bezügen zu Psychologie, Pädagogik, Philosophie, Naturwissenschaften. Andererseits kann die Fachwissenschaft Mathematik nicht gelehrt und nicht weiterentwickelt werden, ohne ein intensives Nachdenken über Vermittlungs- und Darstellungswege und ohne ein grundlegendes Wissen über Lern- und Verstehensprozesse bei Studierenden und Nachwuchswissenschaftler.

Lassen Sie mich – in der gebotenen Kürze – 3 Bereiche ansprechen, bei denen ich die Notwendigkeit einer besonderen Wechselbeziehung zwischen DMV und GDM, zwischen der Fachwissenschaft Mathematik und dem Lehren und Lernen von Mathematik sehe. Diese drei Bereiche sind: der Mathematikunterricht, das Mathematikstudium, die Lehrerbildung.

1. Der Mathematikunterricht

In jüngster Zeit sind die Klagen über das mangelnde mathematische Wissen und Können von Studienanfängern unüberhörbar. Sicherlich hilft es nichts, wenn man darauf verweisen kann, dass das schon immer so war, dass sich bereits Sokrates über die Jugend beklagt hat, oder dass etwa der Gymnasialprofessor Karl Schellbach 1846 in einem Schreiben an das Preußische Kultusministerium das niedrige Niveau der Gymnasiasten beklagte und meinte, dass „gewöhnlich ein Drittel jeder Klasse aus Schülern besteht, die zu höheren Studien eigentlich untauglich sind." (zit. Aus Lorey 1916, S. 54).

Es hilft auch nichts, wenn man weiß dass Untersuchungen mit Studienanfängern Anfang der 1970er Jahre katastrophale Ergebnisse bei einfachen mathematischen Zusammenhängen zeigten. Wenn heute die Voraussetzungen für ein wissenschaftliches Studium nicht vorhanden zu sein scheinen, dann muss über Ursachen nachgedacht, und es müssen Möglichkeiten der Veränderung diskutiert werden.

Doch – und dies ist typisch für jedes komplexe System – lediglich isolierte Handlungsanweisungen wie „mehr üben", „weniger Taschenrechner" oder „länger lernen" bleiben ohne eine Beurteilung der Gesamtsituation wirkungslos. Und, man sollte auch die erheblichen Anstrengungen, Veränderungen und Neuansätze der letzten Jahre und Jahrzehnte im Mathematikunterricht nicht verkennen und kritisch konstruktiv bewerten. Da war nicht alles gut, aber auch nicht alles schlecht. Und schließlich: Es gilt auch die positiven Veränderungen bei Studienanfängern anzuerkennen, etwa bzgl. des Umgangs mit Neuen Technologien, die Fähigkeiten der Darstellung und Präsentation oder die größere internationale Erfahrung.

Aber: *Es ist unsere Aufgabe und Pflicht, auf Missstände im Mathematikunterricht hinzuweisen, und es ist die Aufgabe der Didaktik der Mathematik Gründe für Fehlentwicklungen im Mathematikunterricht wissenschaftlich fundiert aufzuzeigen und konstruktive Vorschläge für Weiterentwicklungen zu geben*. Diese Tagung ist ein Schritt in diese Richtung.

2. Das Mathematikstudium

Lehren an der Universität ist in den letzten Jahren nicht einfacher geworden. Da ist zum einen die hohe Zahl der Studierenden: 1910 gab es in Deutschland 80.000 Studenten, heute sind es – bei gleicher Einwohnerzahl – 25 Mal so viele. Aber die moderne Gesellschaft braucht mehr Mathematiker. Da sind zum anderen die komplexer werdenden Inhalte der Mathematik. So konnte noch Georg Joachim Rheticus (1514-1574) bei seiner Antrittsvorlesung 1537 in Wittenberg die Meinung vertreten, dass das schriftliche Addieren und Subtrahieren an der Schule unterrichtet werden könne, das schriftliche Multiplizieren und Dividieren aber der Universität vorbehalten bleiben müsse! Da hat sich doch einiges geändert. Heute führt die Komplexität und Vielgestaltigkeit des mathematischen Fachwissens zu einer immer stärkeren Aufteilung (oder Aufsplitterung) in verschiedene Studiengänge – was nicht von allen begrüßt wird.

Das Problem des Lehrens von Mathematik an der Hochschule liegt insbesondere auch darin, dass eine fachsystematische Darstellung eines Wissensgebietes ein Endprodukt einer langen Entwicklungslinie darstellt, diese Darstellung aber meist keine optimale Lehr- und Lernstruktur ist. Während Lehrende aufgrund ihrer Erfahrung mit einer Theorie eine reichhaltige Bedeutung verbinden, sind Lernende häufig insbesondere am Anfang des Studiums in dem Formalismus orientierungslos und erkennen keine tragenden Ideen (vgl. Hefendehl-Hebeker 2004b, S. 183). Die Konsequenzen zeigen sich dann etwa in der Klage von Lehramtsstudierenden, dass sie das Fachwissen für ihren späteren Lehrberuf als bedeutungslos ansehen.

Auch hier gilt: Einfache Lösungsvorschläge für erkannte Probleme gibt es im Bereich des Lernens und Lehrens nicht. Aber: *In den letzten Jahrzehnten gewonnene Erkenntnisse über das Lernen von Mathematik auch für die Hochschulmathematik fruchtbar werden zu lassen, kann erkenntniserweiternd für die Didaktik und gewinnbringend für die Fachwissenschaft sein.* Anknüpfungspunkte gibt es viele: Darstellungsformen von Beweisen, Entwickeln von Begriffsvorstellungen, verschiedene Arten produktiven Übens, ein konstruktiver Umgang mit Fehlern. Diese Tagung kann ein weiterer Schritt des Aufeinanderzugehens sein.

3. Lehrerbildung

Die gemeinsamen Interessen von DMV und GDM spiegeln sich sicherlich besonders in der Lehrerbildung wider. So heißt es etwa in der DMV-GDM-Denkschrift zur Lehrerbildung vom Februar 2001: „Eine enge Verzahnung von fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Ausbildung erscheint uns essenziell“. In ähnlicher Weise steht es wieder in der Gemeinsamen Erklärung zur Entwicklung von BA-MA-Studiengangen vom November 2004.

Bereits Felix Klein sprach vor fast 100 Jahren in der 1. Auflage der Elementarmathematik vom höheren Standpunkt von der „doppelten Diskontinuität“ in der Lehramtsausbildung. Der Studienanfänger erkennt in der Universitätsmathematik nichts von dem, was er in der Schule gemacht hat und der Hochschulabgänger – wieder an die Schule zurückgekehrt – knüpft wieder an sein Schulwissen an. Das Hochschulstudium ist ihm dann nur noch „eine mehr oder minder angenehme Erinnerung“.

Allerdings: Diese Diskontinuitäten können und sollen nicht völlig aufgelöst oder „verstetigt“ werden. Jeder Mathematiklehrer muss Mathematik als Wissenschaft authentisch kennengelernt haben, und schließlich lebt ja auch jegliches Lernen von der dosierten Überforderung.

Doch, auch hier kommt es auf den Blick aller Beteiligten auf die Gesamtsituation und das Gesamtziel an. Und hier ist in den letzten Jahren doch einiges an Veränderungen geschehen. Es gibt Modellversuche an verschiedenen Universitäten, die Modularisierung wurde auch als Chance für Verbesserung gesehen und genutzt, und es gibt Empfehlungen der DMV, GDM und MNU zur Lehrerbildung, die sog. Kompetenzen oder Standards eine fachlich und inhaltliche Bedeutung geben. *Die Basis all dieser Bemühungen ist unsere Überzeugung, dass die Bildungswirksamkeit des Schulfaches Mathematik nur dann zur Geltung kommen wird, wenn sie in entsprechender Weise im Lehramtsstudium angelegt ist* (Hefendehl-Hebeker 2004a, S. 138).

Damit komme ich zum Schluss. Ich wünsche Ihnen allen, dass Sie auf dieser Tagung interessante Vorträge hören, an belebenden Arbeitsgruppen teilnehmen, neue Anregungen bei vielen Gesprächen bekommen, und wir am Ende der Woche mit neuen Perspektiven für die Fachwissenschaft und Didaktik der Mathematik nach Hause fahren.

Hans-Georg Weigand

(1. Vorsitzender der GDM)

Hefendehl-Hebeker, L. (2004a): Thesen – Konsequenzen aus PISA. In: Bayrhuber, H. u. a. (Hrsg): Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken, 129-139

Hefendehl-Hebeker, L. (2004b): Perspektiven für einen zukünftigen Mathematikunterricht. In: Bayrhuber, H. u. a. (Hrsg): Konsequenzen aus PISA - Perspektiven der Fachdidaktiken, 141-189

Lorey, W., Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts, Leipzig u. Berlin 1916

PHILIPP MAYRING, Klagenfurt

Die Methodenfrage in der fachdidaktischen Forschung – qualitativ, quantitativ, mixed?

Die fachdidaktische Forschung befindet sich in der Frage der Forschungsmethoden heute zwischen Scylla und Charybdis. Auf der einen Seite steht die verstärkte Forderung nach kontrollierten, experimentellen oder zumindest quasi-experimentellen Designs zum Nachweis von Instruktionseffekten; auf der anderen Seite steht die qualitative Wende, konstruktivistische und chaostheoretische Ansätze, praxisbezogene weiche Methoden, Handlungsforschung. Mancherorts wird von „Science Wars" (Ross, 1996; Bammé, 2004) gesprochen.

Der Vortrag will die Leistungen unterschiedlicher Forschungsdesigns, von explorativen, deskriptiven über zusammenhangsanalytischen bis zu kausalanalytischen Ansätzen, in der Fachdidaktik klären, qualitativ und quantitativ orientierte Umsetzungen dieser Designs diskutieren, wissenschaftstheoretische Hintergründe thematisieren und auf Ansätze von „Mixed Methodology" eingehen. Das Ziel soll sein, Wissenschaftsstandards herauszuarbeiten, die für qualitativ wie quantitativ orientierte Forschungsansätze gleichermaßen Gültigkeit beanspruchen. Dabei spielen Ablaufmodelle, Theoriefragen, Stichprobenfragen, Methodenfragen sowie Fragen der Gütekriterien und der Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse eine zentrale Rolle.

Elisabeth MOSER OPITZ, Zürich

Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung

Diagnose und Förderung sind zu wichtigen Themen in der Mathematikdidaktik geworden. Dazu geführt haben insbesondere Ergebnisse aus den Vergleichsstudien, die darauf hinweisen, dass es einen beachtlichen Teil von Lernenden gibt, die große Leistungsdefizite aufweisen (z.B. Frey et al., 2007; Walther et al., 2003). Mit verstärkten Bemühungen um Diagnose und Förderung soll dieser Situation entgegengetreten werden. Im neuen Lehrerausbildungsgesetz von Nordrhein Westfalen wird bspw. explizit gefordert, dass Diagnostik und individuelle Förderung in der Ausbildung von Lehrpersonen besonders zu berücksichtigen sind (Schulministerium NRW, 2009, § 2). Damit verbunden ist die Hoffnung, dass Diagnose- und Förderkompetenzen von Lehrpersonen dazu beitragen können, Schwierigkeiten von Lernenden rechtzeitig zu erkennen und diese adäquat zu fördern (Helmke, 2009; Thomas, 2007). Die Frage ist allerdings, ob und unter welchen Voraussetzungen das gelingen kann und welche Aufgaben sich dabei für die mathematikdidaktische Ausbildung und für die mathematikdidaktische Forschung stellen.

In der aktuellen Fachliteratur werden für diese Aufgabe der Diagnose und Förderung verschiedenste Begriffe verwendet, die auf jeweils unterschiedliche Zielsetzungen und Diagnosekonzepte hinweisen: Selektionsdiagnostik, Eigenschaftsdiagnostik oder Platzierungsdiagnostik implizieren andere Zielsetzungen als Lernprozessdiagnose, entwicklungsorientierte Diagnostik oder Förderdiagnostik. Diese Abgrenzung von verschiedenen Diagnosekonzepten und Vorgehensweisen führt in eine Sackgasse – das hat sich in der Sonderpädagogik deutlich gezeigt. Während Jahrzehnten wurde versucht, die sonderpädagogische Diagnostik – die Förderdiagnostik – in Abgrenzung zur so genannten Selektionsdiagnostik zu definieren. Schlee (2008) hat in einer kritischen Analyse festgestellt, dass es der Sonderpädagogik in drei Jahrzehnten weder gelungen ist, die theoretische Fundierung der Förderdiagnostik systematisch darzustellen, noch deren praktische Nützlichkeit nachzuweisen.

Ein Konzept für Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht kann nicht durch eine Abgrenzung von Konzepten, Methoden und Instrumenten entwickelt werden, sondern ausgehend von der in der konkreten Situation angestrebten Zielsetzung muss gefragt werden, welche Vorgehensweisen bzw. welche Methoden und Instrumente geeignet sind (Scherer & Moser

Opitz, 2010, 31ff.). Damit stellt sich die Frage nach den Aufgaben und Zielsetzungen von Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht.

1. Aufgaben und Zielsetzungen von Diagnose und Förderung

Die Thematik der Diagnostik ist für die Mathematikdidaktik nicht neu. Die Erfassung von Lernwegen und Denkweisen von Schülerinnen und Schülern wird seit längerer Zeit diskutiert und Vorgehensweisen wie diagnostische Gespräche, klinische Interviews und offene Aufgaben werden und wurden erprobt und erfolgreich in der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung eingesetzt (z.B. Hußmann et al., 2007; Leuders, 2006; Peter-Koop et al., 2007; Selter & Spiegel, 1997). Zudem gibt es – insbesondere für die Schuljahre 1 und 2 – einige Instrumente zum Erfassen von Kompetenzen von lernschwachen Schülerinnen und Schülern (z.B. Kaufmann & Wessolowski, 2006; Scherer 2003, 2005a, 2005b; Schmassmann & Moser Opitz, 2008, 2009; Moser Opitz & Schmassmann, 2005).

Durch die Ergebnisse der Vergleichsuntersuchungen und durch die Problematik, dass es sowohl in der Grundschule als auch in der Sekundarstufe I eine große Anzahl von Lernenden mit großen Schwierigkeiten beim Mathematiklernen gibt, stellen sich neue Herausforderungen für Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht. Untersuchungen, die sich mit den Leistungen der schwachen Lernenden in der Sekundarstufe I befasst haben, zeigen, dass diesen Schülerinnen und Schülern teilweise sogar basale Kenntnisse der Grundschulmathematik fehlen (Humbach, 2008; Moser Opitz, 2007, Moser Opitz et al., 2010; Schäfer 2005). Ein Konzept für Diagnose und Förderung im Mathematikunterricht muss somit alle Lernenden, besonders jedoch diejenigen mit besonderem Förderbedarf im Blick haben. Das beinhaltet, dass eine Definition von Diagnose und Förderung einerseits den Aspekt der Lernprozessbegleitung, andererseits aber auch denjenigen der Erfassung von schwachen Mathematikleistungen und damit verbunden der Zuweisung zu besonderen Maßnahmen beinhalten muss. Geeignet für dieses Anliegen ist die Definition von Pädagogischer Diagnostik von Ingenkamp und Lissmann.

> „Pädagogische Diagnostik umfasst alle diagnostischen Tätigkeiten, durch die bei einzelnen Lernenden und den in einer Gruppe Lernenden Voraussetzungen und Bedingungen planmäßiger Lehr- und Lernprozesse ermittelt, Lernprozesse analysiert und Lernergebnisse festgestellt werden, um individuelles Lernen zu optimieren. Zur pädagogischen Diagnostik gehören ferner die diagnostischen Tätigkeiten, die die Zuweisung zu Lerngruppen oder zu individuellen Förderungsprogrammen ermöglichen sowie die mehr gesellschaftlich verankerten Aufgaben der Steuerung des Bildungsnachwuchses oder der Erteilung von Qualifikation zum Ziel haben“ (Ingenkamp & Lissmann, 2005, 13).

Die erstgenannte Zielsetzung von Diagnosen wird im Unterricht oft umgesetzt bzw. in der Ausbildung von Lehrpersonen berücksichtigt. Auch die zweite Zielsetzung wird im Unterricht immer wahrgenommen, z.B. bei der Leistungsbeurteilung oder wenn innerhalb der Klasse verschieden starke Leistungs- bzw. Fördergruppen gebildet werden. Sie wird jedoch kaum in Überlegungen zu Diagnose und Förderung einbezogen. Diagnosen sind ein Prozess des Erkennens, Unterscheidens, Beurteilens und Entscheidens (Werning, 2006, 11) und enthalten dadurch *immer* auch den Aspekt der Selektion. Für den Diagnoseprozess stellt sich somit die zentrale Frage, auf welcher Grundlage Entscheidungen gefällt werden bzw. wie diese transparent gemacht werden können. Dies wird im Folgenden anhand von Merkmalen von Diagnosen dargestellt.

2. Merkmale von Diagnosen

Wember (1998) beschreibt Diagnosen als theoretisch begründete und systematisch geprüfte Methoden, die zur qualitativen und quantitativen Beschreibung von inter- und intraindividuellen Unterschieden eingesetzt werden. Er nennt vier Merkmale von Diagnosen, die hier um ein fünftes erweitert werden:

Diagnosen beschreiben momentane Zustände in selektiver Art und Weise: Wember (ebd., 108) weist auf die Tatsache hin, dass Diagnosen immer in spezifischen Situationen erfolgen und immer nur einen Ausschnitt einer Situation erfassen können. Dazu kommt, dass die Leistungen von Lernenden oft auch instabil sind (z.B. Silver et al., 1999). Auch wenn beim Diagnostizieren z.B. die Leistungen in anderen Fächern, die Tagesform oder die häusliche Situation mit einbezogen werden, bleiben Diagnosen immer Momentaufnahmen und die diagnostizierende Person muss sich dessen bewusst sein. Das Merkmal „Momentaufnahme“ weist zudem auf die Notwendigkeit hin, Diagnosen und auch Förderung kontinuierlich zu evaluieren. Dazu wurde in den USA der Ansatz der „Responsiveness-to-Intervention“ entwickelt (z.B. Vaughn & Fuchs, 2003). Der Ansatz hat zum Ziel, die individuellen Voraussetzungen der Lernenden und die Wirkung des Unterrichts zu berücksichtigen, Förderung innerhalb des Regelunterrichts anzubieten und Lernfortschritte kontinuierlich zu evaluieren. Er wird so umgesetzt, dass die Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu Beginn des Schuljahres mittels schriftlicher Tests geprüft werden. Risikokinder erhalten besondere Förderung im Rahmen des normalen Unterrichts, indem die Lehrperson versucht, auf deren individuellen Voraussetzungen einzugehen. Mit einer zweiten Leistungsmessung wird später überprüft, ob diese Förderung Wirkung gezeigt hat. Bestehen weiterhin Schwierigkeiten, erhalten die betroffenen Schülerinnen und Schüler Förderunterricht in Kleingruppen, der auch wieder evaluiert wird. Wenn auch damit kein Erfolg erreicht wird, wird Einzelförderung angeboten.

Diagnosen sind wertgeleitet: Diagnose- und Förderprozesse sind immer von persönlichen Bildern, Erfahrungen, Werthaltungen usw. geprägt (Werning, 2006, 11). Je nach Verständnis von Mathematiklernen wird bspw. das Gewicht eher auf die halbschriftlichen Rechenverfahren oder auf die schriftlichen Algorithmen gelegt. Hier ist wichtig, dass solche Entscheidungen transparent gemacht und begründet werden.

Diagnosen sind theoriebestimmt: Helmke (2009, 122) nennt die Beurteilung anhand vorgegebener Kategorien, Begriffe oder Konzepte als besonderes Merkmal von Diagnosen. Solche Kategorien und Konzepte – oder auch Theorien – sind zwingend notwendig, um geeignete Diagnoseaufgaben auszuwählen, um Diagnoseergebnisse zu interpretieren und auch um Förderung zu planen (Moser Opitz, 2006; Moser Opitz, 2009).

Diagnosen sind deskriptive Sätze, die für sich alleine keine Ziele begründen: Diagnosen können entgegen einer weit verbreiteten Praxis nie die Grundlage für die Förderung sein und legitimieren keine Folgerungen. Wird Förderung aus einer Diagnose abgeleitet, wird der Fehler des Sein-Sollens-Fehlschlusses gemacht (Schlee, 2004, 30f.), indem von einer Beschreibung – einem Ist-Zustand – auf einen Soll-Zustand geschlossen wird. Die Grundlage für Förderung – und auch für die Diagnosen – sind nie die Diagnosen selber, sondern die diesen zugrundeliegenden Theorien und Konzepte. In der Mathematikdidaktik ist dies das fachliche und fachdidaktische Wissen der Lehrpersonen: Wissen das aufzeigt, welche Aspekte eines bestimmten Lerninhalts wichtig sind, wie sich bestimmte Kompetenzen aufbauen, welche Voraussetzungen notwendig sind, welche Veranschaulichungen oder Arbeitsmittel günstig sind, usw. Dabei geht es nicht um den hierarchischen Aufbau einer „Stoffdidaktik“, die sich reduktionistisch an der Mathematik orientiert (Winter, 1985), sondern darum, einen bestimmten Lerninhalt auf verschiedenen Ebenen zu analysieren und zu strukturieren, insbesondere auch aus fachdidaktischer Sicht. Dadurch können Anhaltspunkte für Diagnose, Förderung und die Begleitung von Lernprozessen gewonnen werden.

Diagnosen sind immer fehlerbehaftet: Beim Diagnostizieren muss berücksichtigt werden, dass die Erhebungssituation, die momentane Verfassung eines Kindes, die Beziehung zur diagnostizierenden Person usw. den Diagnoseprozess und damit das Ergebnis beeinflussen. Deshalb ist es wichtig, dass Regeln – Gütekriterien – eingehalten werden. Beobachtungs- und andere Fehler können dadurch nicht vermieden, jedoch verringert werden und die intersubjektive Nachvollziehbarkeit des Diagnoseprozesses wird erhöht.

Im pädagogischen Kontext besteht z.T. die Gefahr, dass aufgrund der Ablehnung der psychometrischen Diagnostik auch die Gütekriterien über Bord geworfen werden (z.B. Eggert, 2006). Hier muss berücksichtigt werden, dass es beim Einhalten von Gütekriterien nicht darum geht, dass die diagnostizierende Person bspw. eine möglichst große Distanz zum Kind hat, sondern im Zentrum steht Transparenz bezüglich der Durchführung, Auswertung und Interpretation des Diagnoseprozesses (Kornmann, 2002; Moser Opitz, 2006; Scherer & Moser Opitz 2010, 33ff.). Die Einhaltung von Gütekriterien gehört zwingend zu einem transparenten und intersubjektiv nachvollziehbaren Diagnoseprozess.

3. Förderung

Ausgangspunkt für die Förderung sind nie die Diagnosen, sondern fachliche und fachdidaktische Überlegungen, die es ermöglichen, geeignete Diagnoseaufgaben auszuwählen bzw. zu entwickeln, die Ergebnisse zu interpretieren und Fördermaßnahmen zu planen. Insbesondere zur Förderung von Lernenden mit einem sehr großen Leistungsrückstand braucht es evaluierte Konzepte und Materialien, die den Lehrpersonen spezifische Hinweise geben, welche Lerninhalte besonders wichtig sind, auf welche Kompetenzen besonders geachtet werden muss, wie deren Erwerb angeregt werden kann oder was besonders geeignete Aufgaben oder Vorgehensweisen sind. Solche Konzepte fehlen insbesondere für Förderung von älteren Schülerinnen und Schülern.

Hier besteht ein Problem darin, dass noch zu wenig bekannt ist, welche Förderung wirksam ist. Die Mathematikdidaktik verfügt zwar über Theorien zu fachlichen und fachdidaktischen Grundlagen und auch über Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht, weiß aber noch zu wenig über die Wirkung von bestimmten Maßnahmen und verfügt nicht über evaluierte Förderkonzepte.

4. Folgerungen für die mathematikdidaktische Ausbildung

Für die mathematikdidaktische Ausbildung stellen sich Aufgaben auf verschiedenen Ebenen. Es geht zuerst einmal darum, dass die vielerorts begonnenen Bemühungen zur Auseinandersetzung mit und der Begleitung von Lernprozessen fortgesetzt werden. Weiter ist wichtig, dass die Studierenden relevante fachliche und fachdidaktische Theorien und Konzepte kennen lernen, die als Grundlage für Diagnose und Förderung dienen können: Wissen um beeinträchtigte Lernprozesse, Wissen um besonders wichtige Lerninhalte (z.B. dezimales Stellenwertsystem) und Konzepte zu deren Erarbeitung im Unterricht. Zudem sollen Studierende geeignete Diagnoseinstrumente mit unterschiedlicher Standardisierung kennen und einsetzen lernen. In Situationen, in denen Schülerinnen und Schüler einen sehr großen Leistungsrückstand aufweisen, oder wenn es um die Zuweisung zu besonderen Maßnahmen und um interindividuelle Vergleiche geht, ist es – neben dem Einsatz von anderen Vorgehensweisen – oft auch notwendig, standardisierte Instrumente zu verwenden. Studierende sollen die Vor- und Nachteile verschiedener Instrumente kennen und einschätzen lernen. Dazu gehört auch die Auseinandersetzung mit Gütekriterien. Für die Sekundarstufe I ist weiter zentral, dass die Lehrkräfte Kenntnisse über den Aufbau basaler Lerninhalte der Grundschulmathematik erwerben können.

5. Folgerungen für die mathematikdidaktische Forschung

Für die mathematikdidaktische Forschung ergibt sich erstens die Aufgabe, geeignete Diagnoseinstrumente zu entwickeln. Es gibt im Fachbereich eine Fülle von guten und geeigneten Aufgaben, es fehlen jedoch evaluierte und erprobte Instrumente mit unterschiedlicher Standardisierung bzw. diese liegen nur vereinzelt und für die ersten zwei Schuljahre vor. Solche Instrumente können bspw. „kontentvalide Aufgabengruppen" (Wember, 2005) sein oder evaluierte Lernstandserfassungen mit denen mathematische Kompetenzen in verschiedenen Bereichen erfasst werden können. Hier müssten insbesondere Instrumente für die höheren Schuljahre entwickelt werden. Zudem ist auch die Entwicklung von fachdidaktisch reflektierten Instrumenten, die standardisiert sind, unabdingbar. Deren Entwicklung wurde allzu lange der Psychologie überlassen.

Weiterer Handlungsbedarf besteht, wie schon angesprochen, bezüglich der Entwicklung und Evaluierung von Förderkonzepten (z.B. Wittich et al., in diesem Band), insbesondere auch für die Sekundarstufe I (z.B. Freesemann et al., in diesem Band). Hier geht es speziell darum, Fördermöglichkeiten zu entwickeln, die aufzeigen, wie die Erarbeitung fehlender Kompetenzen der Grundschulmathematik mit dem aktuellen Lernstoff verknüpft werden kann.

Literatur

Eggert, D. (2007). *Von den Stärken ausgehen … : Individuelle Entwicklungspläne (IEP) in der Lernförderdiagnostik. Ein Plädoyer für andere Denkgewohnheiten und eine veränderte Praxis.* 5. verbesserte und überarbeitete Auflage. Dortmund: borgmann.

Freesemann, O., Matull, I., Hußmann, S., Prediger, S. & Moser Opitz, E. (2010; im Druck). Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03.2010 bis 12.03.2010 in München.*

Frey, A., Asseburg, R., Carstensen, C. H., Ehmke, T. & Blum, W. (2007). Mathematische Kompetenz. In: PISA Konsortium Deutschland (Hrsg.), *PISA 2006* (249-276). Münster u. a.: Waxmann.

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung.* Leipzig: Klett.

Humbach, M. (2008). *Arithmetische Basiskompetenzen in der Klasse 10. Quantitative und qualitative Analysen.* Berlin: Dr. Köster.

Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (2007). Schülerleistungen verstehen – Diagnose im Alltag. *Praxis der Mathematik in der Schule,* 49, 1-8.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2005). *Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik*. 5. vollst. überarbeitete Auflage. Weinheim: Beltz.

Kaufmann, S. & Wessolowski, S. (2006). *Rechenstörungen. Diagnose und Förderbausteine.* Seelze: Kallmeyer.

Kornmann, R. (2002). Lernbehindernder Unterricht? Vorschläge zur förderungsorientierten Analyse der Lerntätigkeit einzelner Schülerinnen und Schüler in der konkreten Unterrichtspraxis. In: Mutzeck, W. (Hrsg.), *Förderdiagnostik. Konzepte und Methoden* (73–102). 3. überarbeitete Auflage. Weinheim: Beltz.

Leuders, T. (2006). "Erläutere an einem Beispiel …". Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern – mit offenen Aufgaben. *Friedrich Jahresheft*, 78-83.

Moser Opitz, E. (2006). Förderdiagnostik: Entstehung – Ziele – Leitlinien – Beispiele. In: Grüßing, M. & Peter-Koop, A. (Hrsg.), *Die Entwicklung des mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. Beobachten – Fördern – Dokumentieren*. (10-28). Offenbach: Mildenberger.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche/Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2009). Erwerb grundlegender Konzepte der Grundschulmathematik als Voraussetzung für das Mathematiklernen in der Sekundarstufe I. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden* (29-43). Weinheim: Beltz.

Moser Opitz, E., Reusser, L., Moeri Müller, M., Anliker, B., Wittich, C. & Freesemann, O. (2010; im Druck). *Basisdiagnostik Mathematik 4-8*. Bern: Huber.

Moser Opitz, E. & Schmassmann, M. (2005*). Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 5.* Zug: Klett & Balmer.

Peter-Koop. A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007*): Elementarmathematisches Basisinterview EMBI.* Offenburg: Mildenberger.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen. Eine empirische Studie*. Hamburg: Verlag Dr. Kovaç.

Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. München: Spektrum-Akademischer Verlag.

Scherer, P. (2003). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch fordern. Band 2: Addition und Subtraktion im Hunderterraum.* Horneburg: Persen.

Scherer, P. (2005a): *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 1. Zwanzigerraum.* Horneburg: Persen.

Scherer, P. (2005b). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch fordern. Band 3: Multiplikation und Division im Hunderterraum.* Horneburg: Persen.

Schlee, J. (2004). Lösungsversuche als Problem – Zur Vergeblichkeit der so genannten Förderdiagnostik. In: Mutzeck, W. & Jogschies, P. (Hrsg.), *Neue Entwicklungen in der Förderdiagnostik. Grundlagen und praktische Umsetzung* (23-38). Weinheim: Beltz.

Schlee, J. (2008). 30 Jahre »Förderdiagnostik« – eine kritische Bilanz. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, (4), 122-133.

Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2008): *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch.* 3. vollst. überarbeitete Neuausgabe. Zug: Klett & Balmer.

Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2009): *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch.* 4. vollst. überarbeitete Neuausgabe. Zug: Klett & Balmer.

Schulministerium NRW (2009): Lehrerausbildungsgesetz. Download unter: http://www.schulministerium.nrw.de/BP/Schulrecht/Lehrerausbildung/LABG__Fassung_12_05_2009.pdf [18.03.2010].

Selter, C. & Spiegel, H. (1997): *Wie Kinder rechnen.* Leipzig: Klett.

Silver, C.H., Pennett, H.D.L., Black, J.L., Fair, G.W. & Balise, R.R. (1999). Stability of arithmetic disability subtypes. *Journal of Learning Disabilities*, 32, 108-119.

Thomas, L. (2007): Lern- und Leistungsdiagnostik. In: Fleischer, T., Grewe, N., Jötten , B., Seifried, K. & Sieland, B. (Hrsg.), *Handbuch Schulpsychologie. Psychologie für die Schule* (82-97). Stuttgart: Kohlhammer.

Vaughn, S. & Fuchs, L.S. (2003). Redefining learning disabilities as inadequate response to instruction: The promise and potential problems. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18, 137-146.

Walther, G., Geiser, H., Langeheine, R. & Lobemeier, K. (2003): Mathematische Kompetenzen am Ende der vierten Jahrgangsstufe. In: Bos, W. et al. (Hrsg.), *Erste Ergebnisse aus IGLU. Schülerleistungen am Ende der vierten Jahrgangsstufe im internationalen Vergleich* (189-226). Münster: Waxmann.

Wember, F.B. (1998). Zweimal Dialektik: Diagnose und Intervention, Wissen und Intuition. *Sonderpädagogik*, 28, 106-120.

Wember, F. B. (2005). Mathematik unterrichten – eine subsidiäre Aktivität? Nicht nur bei Kindern mit Lernschwierigkeiten! In: Scherer, P., *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen. Fördern durch Fordern. Band 1. Zwanzigerraum* (270-287). 2. Auflage. Horneburg: Persen.

Werning, R. (2006). Lern- und Entwicklungsprozesse fördern. Pädagogische Beobachtungen im Alltag. *Friedrich Jahresheft*, 11-15.

Winter, H. (1985). Reduktionistische Ansätze in der Mathematikdidaktik. *Der Mathematikunterricht (MU)*, (5), 75-88.

Wittich, C., Nührenbörger, M. & Moser Opitz, E. (2010; im Druck). Ablösung vom zählenden Rechnen Eine Interventionsstudie an Grund- und Förderschulen. *Beiträge zum Mathematikunterricht. Vorträge auf der 44. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 08.03.2010 bis 12.03.2010 in München.*

Marcus SCHÜTTE, Götz KRUMMHEUER, Frankfurt
Aiso HEINZE, Kiel

Mathematikdidaktik: Quo vadis? – Ein Streitgespräch

Auf der diesjährigen GDM-Tagung in München gab es mehrere Vorträge, die sich mit den Perspektiven der Mathematikdidaktik auseinandersetzten. Gemeinsam schien einigen Vortragenden die Sorge, dass die Mathematikdidaktik kein klares wissenschaftliches Profil habe und so eine Vielzahl von anderen Forschenden sich in Gebieten tummeln, die eigentlich dem Fachgebiet der Mathematikdidaktik zuzuordnen wären. Der vorliegende Beitrag soll wesentliche Aspekte von zwei Vorträgen wiedergeben. Es handelt sich zum einen um den Beitrag von Marcus Schütte und Götz Krummheuer (Universität Frankfurt) im Rahmen des Symposiums „Perspektiven der Mathematikdidaktik" und zum anderen um den Hauptvortrag von Aiso Heinze (IPN Kiel). Interessanterweise haben wir in unseren Beiträgen unabhängig voneinander ähnliche Diskussionspunkte aufgeworfen. Deshalb haben wir beschlossen, ein gemeinsames Manuskript für den Tagungsband einzureichen – allerdings nicht in Form eines theoretischen Textes, sondern als ein Streitgespräch.

G. K.: Fangen wir mit unserer Analyse doch einmal damit an, dass wir zurückblicken: 1984 hat Bauersfeld eine kritische Analyse der theoretischen Orientierungen in der deutschen Mathematikdidaktik vorgenommen – und die gilt immer noch: Stoffdidaktik, Stoffdidaktik, ein wenig Psychologie und das wär's.

M. S.: Du meinst Bauersfelds Vortag 1984 in Klagenfurt. Da war er aber sehr viel differenzierter, als du es hier vorträgst. Er beschreibt das Forschungsszenario in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik etwa so: Es gibt eine gegenstandsorientierte Forschung und eine pädagogisch-psychologisch ausgerichtete Forschung. Diese weit verbreiteten Forschungsansätze befassen sich Bauersfeld zufolge vor allem mit der Optimierung der Vermittlung mathematischen Wissens. Dies je nach Ausprägung des Wissensbegriffs nach zwei Spielarten: als Stoffdidaktik oder als Fähigkeitsdidaktik.

A. H.: Also, erstens ist „Vermittlung von Wissen" ja wohl nicht mehr so aktuell, Schaffung von Lerngelegenheiten zur individuellen Wissenskonstruktion entspricht eher dem Stand der Forschung. Na ja, und zweitens ist der pädagogisch-psychologische Ansatz in der Mathematikdidaktik so verbreitet nun auch nicht – je nachdem, was man alles darunter fasst.

G. K.: Sag' ich doch: Stoffdidaktik, Stoffdidaktik und ein kleines bisschen

Kompetenzen.

A. H.: Vielleicht sollten wir erst einmal klären, was hier unter Forschung fällt? Es geht ja wohl um eine Grundlagenforschung, deren primäres Ziel nicht allein das Entwickeln von Schulbüchern ist, sondern die Entwicklung von explikativen und möglichst prädiktiven Theorien über das Lehren und Lernen von Mathematik. Ein stoffdidaktischer Ansatz alleine bringt da nur wenig, da in Lehr-Lern-Prozessen ja nun auch noch Individuen eine Rolle spielen. Was Mathematikdidaktik als eigenständige Disziplin hier ausmacht, ist doch gerade das Zusammenspiel, d.h. auf einer stoffdidaktischen Grundlage, die durchaus auch philosophische Aspekte mit einbeziehen sollte, individuelle Lehr-Lern-Prozesse zu erforschen. Da ist die pädagogisch-psychologische Perspektive ganz natürlich, sie sollte nur wissenschaftlich fundiert genutzt werden und nicht nur auf Alltagsniveau.

M. S.: Ist ja alles richtig, aber lasst mich meinen Gedanken doch mal zu Ende führen... Es geht genau darum, dass die pädagogisch-psychologische Perspektive nur ein Teil des Ganzen ist. Notwendige soziologische Einsichten finden nach Bauersfeld nämlich kaum Berücksichtigung in der mathematikdidaktischen Szene. So fordert er ein, dass mikrosoziologische Ansätze, in denen der Mathematikunterricht als soziale Praxis verstanden und Wissen erst in der Interaktion der Beteiligten ausgehandelt wird, mehr Berücksichtigung finden. Der Unterrichtsalltag bestimmt also das Lernen von Mathematik und dieser wird durch die Interaktion der Beteiligten erzeugt.

G. K.: Wissen? Du meinst Bedeutung wird konstruiert in der Interaktion der Beteiligten?

M. S.: So ist es laut Bauersfeld! Zudem warnt er vor einer voreiligen Vereinheitlichung dieser theoretischen Ansätze. Man solle eher Theorien zu Teilgebieten der Mathematikdidaktik entwickeln.

G. K.: Gewiss, wenn man vernünftigerweise die Hoffnung auf eine alle Probleme lösende mathematikdidaktische Theorie begräbt, dann ist das Optimum die Entwicklung von Theorien zum Mathematiklernen mit lokalem Geltungsanspruch, und eventuell entsteht ein Wissenschaftsmarkt konkurrierender Theorien. Damit könnte ich leben.

M. S.: Du könntest mit Theorien von lokalem Geltungsanspruch leben??

G. K.: Ich meinte wirklich lokalen Geltungsanspruch und nicht Geltungsanspruch im Lokalen! Das bedeutet, dass die Analysen nicht nur Theorien hervorbringen, die die betrachteten Fälle erklären, sondern darüber hinaus eine Theorie entsteht, die einen Geltungsspruch hat, der weitreichender ist. Wenn man sich von dem Grundgedanken leiten lässt, dass die Mathematik veränderbar ist und im Unterricht die Wirklichkeit des Mathematikunterrichts erst durch alle Beteiligten konstruiert wird, kann man nicht glauben, dass eine Theorie jegliche Lernprozesse im Unterricht zu beschreiben und erklären vermag.

M. S.: Und schwupp sind wir bei Theorieentwicklung oder Theoriegenese, wie ihr Interaktionisten immer so schön sagt. Was wird denn da entwickelt? Theorien zum Mathematiklernen? Wenn ich eure Arbeiten mal genau betrachte, könnte man doch mit Bauersfeld sagen, dass ihr eher die objektiven Gegenstandsstrukturen der Mathematik verleugnet und durch euren Ansatz, soziologische Alltagsforschung zu betreiben, nur noch allgemeine soziale Strukturen beschreiben könnt. Also allenfalls noch eine lokale Theorie des Lernens im Unterricht entwickelt. Wo bleibt denn da die Mathematik? Sägt ihr damit nicht am Stammbaum der Mathematikdidaktik?

A. H.: Das erinnert mich an die allgemeine Unterrichtsforschung. Die schafft es auch immer, Fachunterricht jeglicher Art zu erforschen, ohne das Fach zu betrachten. Einige Leute sind da echt schmerzfrei.

G. K.: O.k. nehmen wir mal, an diese Kritik sei berechtigt. Bedeutet das, wir sollten diesen soziologischen Zugang zum Unterricht begraben?

M. S.: Sicherlich lässt sich auch an der gegenstandsorientierten oder psychologischen Forschungsorientierung einiges kritisieren...

A. H.: Ach nee…

G. K.: Na, endlich! Und ich dachte, ich hätte mir einen Judas an den Tisch geholt... Ich höre!

M. S.: Kaum wird man mal kritisch und hinterfragt... Also: Die pädagogisch-psychologische Forschungsorientierung erscheint Bauersfeld zufolge etwas einseitig von Mathematik und Psychologie geprägt. Hierdurch ergeben sich Schwächen, die aus der in diesen Ansätzen behaupteten Konstanz der Strukturen und aus Vernachlässigung der interaktiven Wechselbeziehungen der Beteiligten resultiert.

A. H.: Vorsicht junger Freund, nicht zu übermütig! Die Konstanz der Strukturen wird von uns nicht als Tatsache behauptet. Sie wird aufgrund des Ansatzes als Randbedingung angenommen, wohl wissend, dass dies nicht der Realität entspricht…

M. S.: Ja, ja, nun lass doch mal… Es gibt also weder eine Mathematik mit gleichbleibenden sachlogischen Zwängen und Richtigkeiten, an die sich Lernende nur anzupassen haben. Das wird nicht nur Schülerinnen und Schülern klar beim Wechsel der Lehrkraft, sondern auch den Studierenden beim Wechsel des Dozenten von Analysis 1 zu 2. Noch gibt es eine Konstanz der mathematischen Bedeutung, an die sich Lernende anzupassen haben. Gäbe es diese Konstanz der Bedeutung, wäre jegliche Interaktion unnötig und unser Dasein als Forschende eh absurd. Wenn also die eine Forschungsorientierung im Nirwana der Soziologie landet, verliert die andere den Alltag, in dem die Individuen Mathematik betreiben, aus dem Blick. Es lassen sich also Mängel in beiden Forschungsorientierungen sehen.

G. K.: Ja, die sind ja auch sichtbar geworden im Zuge des Wechsels von Piaget zu Vygotsky, der mit einer Verschiebung weg von der Psychologisierung der Mathematikdidaktik hin zu einer Soziologisierung einher gegangen ist. Cobb und Bauersfeld sprechen hier von so etwas wie komplementär zueinander bezogenen blinden Flecken. Die Psychologie hat Schwierigkeiten, die sozial-konstitutive Dimension für kognitive Prozesse zu fassen…

A. H.: … ja, ist maximal eine Kontextvariable...

G. K.: …die Soziologie hat Schwierigkeiten, die kognitiven Konstruktionen von Individuen in ihre Theorien einzubauen…

A. H.: … tja, wie soll das auch gehen…

G. K.: …eben, höchstens als Ausformungen von Sozialisationsprozessen. Dies ist vergleichbar mit der Heisenbergschen Unschärferelation: Je tiefer man in psychologische Fragestellungen eindringt, umso mehr verschwimmt der soziologische Kontext und umgekehrt.

M. S.: Wie wäre es mit kritischem Austausch? Hört sich so an, als wenn beide Seiten voneinander lernen könnten? Wie wäre es mit einer konkurrierenden Befruchtung im Gegensatz zur Vereinheitlichung?

A. H.: Klingt nicht schlecht. Man bleibt auf seinem Terrain und schaut, wie man von den Aktivitäten der jeweils anderen Gruppe sinnvoll profitieren kann. Für mich persönlich eine nette Alternative zur Vereinheitlichung mit euch im Nirwana der Soziologie.

M. S.: Ganz deiner Meinung. Auf euren Datenfriedhöfen gemeinsam Cronbach's α anbeten – na, besten Dank!

G. K.: Nun, diese Konkurrenz müsste natürlich mit rationalen Mitteln ausgetragen werden. Mir fehlt aber die Plattform für einen solchen Diskurs, etwa auf den GDM-Tagungen wie dieser hier. Wie kann man miteinander reden, wenn man immer über den blinden Fleck des anderen reden will. Macht es da überhaupt noch Sinn, so etwas wie den

Kern der Mathematikdidaktik zu bestimmen? Die einen sagen, dies ist die Mathematik; die an der Psychologie Interessierten sagen, dies sind die Lernenden; die soziologisch Angehauchten sagen, dies ist die Interaktion zwischen Lernenden und Lehrpersonen.

M. S.: O.k., du steuerst auf den Dissenz zu. Ich möchte noch mal auf das Problem des dafür benötigten Diskursstiles eingehen. Ich gehe davon aus, dass jede Forscherin und jeder Forscher subjektiv davon überzeugt ist, an einem ganz wichtigen Problem, wenn nicht sogar dem wichtigsten Problem mathematikdidaktischer Forschung zu arbeiten. Das sieht schon sehr nach deiner Dissenzposition aus und es ist auch nur verständlich und wohl auch überaus fruchtbar, wenn man sich dann eher nur mit Gleichgesinnten trifft und Ideen und Ergebnisse austauscht.

G. K.: Das mag das akademische Leben leichter machen, es bringt aber die Mathematikdidaktik immer nur gleichsam auf denselben Trampelpfaden weiter. Die mögen im Laufe der Zeit asphaltiert, mehrspurig und beleuchtet sein. Aber so kann man nicht das Gesamtgebiet der Mathematikdidaktik bearbeiten.

A. H.: Das ist zwar richtig, aber ein Fortschritt ist dennoch zu sehen. Die Frage ist doch: Wann komme ich bei meinen Forschungsfragen mit meinem Ansatz nicht mehr adäquat voran und wieso ist das so? Problematisch wird es, wenn man behauptet, dass der eigene Forschungsansatz für alle mathematikdidaktischen Lebensfragen erschöpfend ist.

M. S.: Hm, ich glaube, ich verstehe. Ihr meint, dass z. B. Arbeiten zum Modellierungskreislauf sicherlich fruchtbar waren. Aber wenn die Jüngerinnen oder Jünger spezieller Ansätze (wir wollen ja politisch korrekt bleiben) ihre ganze Arbeitskraft darauf konzentrieren, diese bestehenden theoretischen Konzepte empirisch und theoretisch auszufeilen, werden wir den Kernfragen der mathematikdidaktischen Forschung nur unzureichend näher kommen. Meint ihr das so? Aber muss man bei empirischer Forschung nicht Komplexitätsreduktionen vornehmen? Man kann doch nicht alles auf einmal untersuchen?

G. K.: So ungefähr. Wenn wir die Kritik von Bauersfeld ernst nehmen und uns die jetzige Szene anschauen, könnte man frech behaupten, dass ein großer Teil der Mathematikdidaktik sich darauf beschränkt, Aufgaben für die instruktionspsychologische Unterrichtsforschung zu entwerfen und ein anderer lediglich noch soziologische Forschung zum Unterrichtsalltag betreibt…

A. H.: … na, da müssen wir aber ein leicht übergeneralisiertes Verständnis von instruktionspsychologischer Unterrichtsforschung haben…

G. K.: … und da gibt es jetzt noch die Semiotiker, die aber auch noch klären müssen, ob das nicht nur zu einem Revival der Stoffdidaktik führt. Dass die Anhänger gewisser mathematikdidaktischer Ansätze sich ihre Kooperationspartner gewöhnlich nicht innerhalb der Mathematikdidaktik suchen, wird einem Fortkommen der Mathematikdidaktik nur im Wege stehen. So werden sich die blinden Flecken der jeweiligen Forschungsansätze in Bezug auf das Problem des Erlernens von Mathematik nicht erhellen und der Kern oder die zentralen Kerne der Mathematikdidaktik weiter im Verborgenden bleiben.

M. S.: Wow, sehr prophetisch, das klingt unglaublich gut und edel.

A. H.: Für mich klingt das eher nach dem zweiten Schritt vor dem ersten. Wenn ich meine Kooperationen bisher in der Psychologie gesucht habe, dann doch deshalb, weil sie mir etwas bieten, was die mathematikdidaktische Community nicht bietet! Erst wenn wir bei uns eine kritische Masse von Leuten haben, die die genannten konkurrierenden Forschungsansätze – und hier beziehe ich mich auf die empirischen – adäquat beherrschen, dann können wir innerhalb unserer Community weitersehen. Mit einem gesunden Halbwissen Fragen auf einem Metaniveau zu behandeln, was soll da herauskommen?

M. S.: Aber ist unsere Community nach Jahrzehnten nicht langsam soweit? Lass uns doch mal nachdenken über die Struktur und Inhalte einer solchen Streitkultur der verschiedenen Zugänge.

G. K.: Das klingt so wie eine Interaktionsanalyse zu einer Unterrichtsszene. Du baust hier gleich schon einmal einen Heimvorteil für uns Interaktionisten ein. Geschickt, geschickt

A. H.: Also, ich kann euch dazu auch einen Fragebogen entwickeln. Ein paar harte Daten wären doch auch nicht schlecht.

M. S.: Apropos Heimvorteil: Mein Eindruck von der mathematikdidaktischen Forschungsszene ist, dass sie sehr stark von aktuellen, fast modischen Fragestellungen geprägt ist und die Forschenden sich durch ein entsprechendes Anpassen an die neueste Mode einen Heimvorteil für ihre Forschung versprechen. Das ist ein ZUGZWANG. Große finanzkräftige Sponsoren sind die Kultusministerien und die DFG. Bei beiden habe ich den Eindruck, dass dort das Interesse an der Förderung der wissenschaftlichen Disziplin Mathematikdidaktik nicht stark ausgeprägt ist. Die Kultusministerien fragen gleichsam eine Expertise ab für ihre Belange, aber sie fördern nicht ihre Entstehung. Die DFG fördert trotz gelegentlicher gegenteiliger Bekundungen allein schon durch die Struktur ihrer Normalverfahren und Schwerpunktprogramme nicht genuin die fachdidaktische Forschung. Diese muss sich zumeist einem psychologisch oder pädagogisch dominierten Gutachtergremium stellen.

A. H.: Das kann ich so nicht stehen lassen. In dem vergangenen Jahrzehnt sind insbesondere die Mathematikdidaktik und die Naturwissenschaftsdidaktiken einen großen Schritt vorangekommen. Gerade das DFG-Schwerpunktprogramm „Bildungsqualität von Schule“ hat einen großen Schub an fachdidaktischen Projekten gebracht. Außerdem gibt es eine Reihe von fachdidaktischen Gutachterinnen und Gutachtern – auch aus unserer Community. Schließlich hat das BMBF ein Programm aufgelegt, in dem diverse Projekte von unseren Kolleginnen und Kollegen gefördert werden. Ein Kernpunkt ist hier die empirische Fundierung der Fachdidaktiken. Was wahr ist, ist die Tatsache, dass nicht unsere Community allein über Projekte zum Mathematiklernen gutachtet. Aber wir sind auch nicht die einzigen, die sich mit dem Mathematiklernen beschäftigen und müssen uns entsprechend in der interdisziplinären Konkurrenz behaupten.

G. K.: Hier habt ihr einen ganz wesentlichen Punkt angesprochen. Ich denke, die Förderaussichten wären besser, wenn sich die Mathematikdidaktik kohärenter als eine empirisch forschende Wissenschaft präsentieren könnte. Das tut sie nur unzureichend, wenn ich mal betrachte, was bei uns alles unter Forschung fällt. Na ja, und da haben wir dann den Zirkelschluss. Neben dem finanziellen Zugzwang gibt es dann auch einen gesellschaftlichen Zugzwang. So wird von vielen Seiten der Gesellschaft gefordert, dass schulische Lerninhalte mehr Nähe zum Alltag und zum künftigen Berufsleben von Lernenden aufweisen sollten.

M. S.: Lassen wir doch die gesellschaftlichen Zugzwänge zunächst beiseite und schauen uns die interdisziplinären Projekte an. Wenn es zu solchen Projekten kommt, dann sind diese meist in der Hand der Erziehungswissenschaft, Soziologie oder Psychologie und die Mathematikdidaktik basteln für sie die Aufgaben – ein bisschen wenig, oder?

A. H.: Es ist sogar noch schlimmer! Nicht selten basteln die Kolleginnen und Kollegen der anderen Disziplinen auch noch die Mathematikaufgaben selbst. Manchmal ist es zum Haare raufen, was dann als mathematische Kompetenzmessung durchgeht.

G. K.: Ja, schade. Es fehlt der Mathematikdidaktik das wissenschaftliche Profil. Als interdisziplinäre Disziplin könnte die Mathematikdidaktik hier Wortführer und Motor sein bzw. müsste es sogar sein. Abgefragt wird allenfalls die gegenstandsbezogene Expertise. Warum geben wir uns eigentlich damit zufrieden?

A. H.: Na, mal ehrlich: Glaubt ihr, dass dieser Zustand daher rührt, dass die anderen Disziplinen einfach nur fies und gemein sind und uns klein- bzw. ‘raushalten wollen? Ich denke eher, dass wir als junge wissenschaftliche Disziplin und Community noch nicht so weit sind, dass man das Fehlen unserer Beiträge und unserer Mitarbeit als klares Defizit bemerkt. Dazu sind natürlich auch substanzielle Beiträge von uns nötig, die man als Forschung bezeichnen kann. Wir müssen uns als Disziplin so deutlich positionieren, dass es sich niemand mehr leisten kann, ohne mathematikdidaktische Expertise mathematikbezogene Projekte durchzuführen. Aber dazu ist der Einfluss der Mathematikdidaktik national und auch international noch viel zu gering. Man kann vom Impact Factor halten was man will, aber er ist derzeit ein guter Indikator genau dafür: Nur eine einzige mathematikdidaktische Zeitschrift ist im Social Science Citation Index gelistet, dafür aber viele psychologische und pädagogische Journals. Dies zeigt doch wie wenig unsere Journals von den Kolleginnen und Kollegen anderer Disziplinen in deren hochkarätigen Zeitschriften zitiert werden. Ein Ergebnis, das man besser verschweigen sollte.

M. S.: Schön, dann schweigen wir lieber darüber und kommen jetzt endlich einmal zu einem mathematisch-inhaltlichen Punkt. Denkt doch mal an die PISA-Ergebnisse und deren Interpretation, dass das deutsche Schulsystem nicht nach Leistung, sondern faktisch nach sozialer Herkunft und sprachlich-kulturellem Hintergrund selektiert. Durch die zunehmende Spaltung der Gesellschaft in Gewinner und Verlierer wird ein anderer gesellschaftlicher Zugzwang zum Dauerbrenner. Selbst in der Diskussion um Hartz IV wird immer wieder auf Bildung als entscheidenden Aufstiegsmotor aus sozial benachteiligten Milieus verwiesen. Insofern lässt sich auch der Mathematikunterricht dahingehend erforschen, wie und nach welchen Kriterien er Lernende selektiert.

A. H.: Na, Migrationshintergrund und Mathematiklernen, das ist doch ein guter Punkt, um unsere bisherige Diskussion zu konkretisieren.

M. S.: Schauen wir uns das Migrationsthema doch mal genauer an und versuchen, die Bauersfeldsche Zustandsbeschreibung anzuwenden. Relativ verbreitet ist hier doch mittlerweile ein interdisziplinär mathematikdidaktischer Ansatz. Die Zeiten, als man die schwachen Leistungen von Migrantenkindern durch die verschiedenen Lehrpläne in Herkunftsland und Migrationsland erklären wollte, sind doch vorüber. Mit dem Einbeziehen der linguistischen und/oder kulturtheoretischen Dimension werden die theoretischen Reflexionen auch sehr viel anspruchsvoller.

G. K.: Da gibt es erst einmal die Arbeiten zur „Fachsprache". Hier wird dann häufig eine Psychologie des „Begrifflernens" beigemischt. Wendet man diese auf die Migrationsthematik an, dann geht es darum zu klären, ob es Kindern mit Deutsch als Zweitsprache schwerer fällt, diese Fachsprache in Deutsch zu erwerben. So gesehen ist dieser Zugang vor allem gegenstandsbezogen und es wird versucht, eine mathematische Fachsprache möglichst erfolgreich zu vermitteln.

A. H.: Das wäre der mathematikspezifische Reparaturansatz. Solange die Unterrichtssprache nicht auf adäquatem Niveau beherrscht wird – etwa im Sinne der Gogolinschen „Bildungssprache", deren Erwerb sich ja über Jahre hinzieht – solange muss in gewisser Weise improvisiert werden. Dabei spielen nicht nur mathematische Begriffe eine Rolle, sondern auch die Deutungen von wichtigen Anschauungsmitteln wie etwa der Zahlenstrahl. Quantitative Studien zeigen, dass sich Kinder mit und ohne Migrationshintergrund längst nicht mehr so stark in ihren Mathematikleistungen unterscheiden, wenn man die Sprachfähigkeit statistisch kontrolliert.

M. S.: Der Sprachansatz hat seine Schwächen und die werden bei der Zuspitzung auf die Migrationsproblematik besonders evident: Nicht der Fachbegriff allein oder seine korrekte Definition helfen, ihn zu verstehen. Das Wort oder der Fachterminus an sich ist erstmal inhaltsleer genauso wie seine alltagssprachlichen Geschwister. Einen Begriff versteht man nur in der Praxis seiner Verwendung. Hier müssen wir gar nicht in sprachphilosophische Erwägungen à la Wittgenstein versinken, dass die Bedeutung eines Wortes nur durch den Gebrauch in der Sprache bestimmt ist. Es hilft bereits die soziologische Perspektive des Symbolischen Interaktionismus, die mit der Vorstellung von der interaktiven Aushandlung von Bedeutung arbeitet.

G. K.: Bei Sprache geht es dann eben nicht nur um die „reine", „saubere" Fachsprache, sondern um die „schmuddelige" Alltagssprache und die Möglichkeiten, in ihr oder aus ihr heraus Präzisierungen zu erlangen. Es ist dann eben nicht nur eine soziologische Perspektive, sondern auch ein mathematisch inhaltliches Anliegen dabei.

A.H.: Nicht zu vergessen die psychologische Perspektive. Oder glaubt ihr, dass das Aushandeln ohne individuelle kognitive Prozesse auskommt? Schließlich müssen ja mentale Repräsentationen zu den Begriffen aufgebaut werden.

M. S.: Nicht ganz so schnell. Ich glaube, ihr überspringt ein paar wesentliche Gedanken, die nicht unbedingt trivial sind. Also: Es stimmt, in der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wurde der Bezug zwischen Mathematik und Sprache meist auf ein Fachsprachenlernen reduziert, was sicherlich zu kurz greift. Lernende brauchen mehr als Vokabelhilfen. Guckt man über den Ozean, so lassen sich z.B. bei Pimm Konzepte finden, nach denen Schülerinnen und Schüler ein mathematisches Register beherrschen müssen. Dieses Register umfasst mehr als die Fachbegriffe der Mathematik. Es gehören neben den Wörtern auch die Strukturen dazu, die Bedeutung ausdrücken. Schülerinnen und Schüler müssen hiernach handeln können wie ein native speaker der Mathematik. Schaut man weiter, lässt sich nach anderen Ansätzen sagen, dass Schülerinnen und Schüler vor allem eine formale Sprache des Unterrichts beherrschen können müssen, um in der schriftförmig geprägten Unterrichtskommunikation weiterführender Schulen zu bestehen, die auf das Abitur vorbereiten.

A. H.: …die bereits erwähnte Bildungssprache, die aber auch schon in der Primarstufe relevant ist.

G. K.: Da haben wir sie wieder, die Anleihen außerhalb der Mathematikdidaktik. Oder woher kommt das Konzept der formalen Sprache? Bernstein? War der Mathematikdidaktiker?

M. S.: Nein, Soziolinguist.....

G. K.: Aha! Ein bisschen Registerbegriff aus der Sprachwissenschaft von Halliday, ein bisschen formale Sprache von Bernstein inklusive soziolinguistische Thesen? Und dann noch Gogolin, also wenn ich am Stammbaum säge, reißt ihr die Knospen aus. Wofür brauchen wir denn dann noch die Mathematikdidaktik, meine Herren Linguisten?

M. S.: Ja, ja, ich sehe es ja ein. Das stimmt. Aber auch ich denke, es reicht nicht aus, dabei stehen zu bleiben und zu überlegen, was für fachsprachliche Kenntnisse Kinder brauchen. So lande ich dann bei grammatikalischen Strukturen und Ähnlichem. Da muss ich doch wohl oder übel, wenn man die Mathematikdidaktik als interdisziplinäre Wissenschaft verstehen will, dorthin gehen, wo die Fachleute dafür sind. In die Linguistik, oder?

A. H.: Eben! Oder sollen wir etwa das Rad noch einmal neu erfinden? Die Frage ist doch, wie wir diese Erkenntnisse in unsere mathematikdidaktische Forschung integrieren.

M. S.: Genau, befasst man sich nämlich intensiver mit diesen Konzepten und nimmt darauf aufbauend eine mathematikdidaktische Perspektive ein, so könnte auch für die Mathematikdidaktik etwas Wertvolles entstehen und diese damit vorankommen. Schülerinnen und Schüler brauchen viel mehr als präzise sprachliche Kenntnisse: sei es auf der Vokabel- bzw. Grammatikebene oder der Ebene allgemeiner formaler sprachlicher Strukturen: Sie benötigen Unterstützungsleistungen, damit sie diese sprachlichen Kompetenzen im Mathematikunterricht einsetzen können. Dafür ließe es sich gerade mit Mathematikdidaktikern, die sich mehr um die Stoffdidaktik bemühen, trefflich streiten, wie solche Unterstützungsleistungen aussehen könnten.

G. K.: Es scheint also Potential in diesem Forschungssektor zu liegen. Hier scheint die Kooperationsbereitschaft durchaus entwickelt zu sein. Offenbar ist die öffentliche Diskussion stärker an interdisziplinären Lösungen interessiert. Dies erweist sich dann als ein gesellschaftlicher Zugzwang – diesmal vielleicht sogar in einem positiven Sinne für die Entwicklung theoretischer interdisziplinärer Grundlagen für die Mathematikdidaktik.

A. H.: Scheint hier ja auch nicht so schwer zu sein. Aber hilft uns das weiter bei der zuvor diskutierten Komplementarität von psychologischer und soziologischer Perspektive in der Mathematikdidaktik?

G. K.: Also ich finde das bereits erwähnte Bild von der Unschärferelation sehr hilfreich. Es zeigt auf die wechselseitigen blinden Flecke und könnte somit einen Diskurs anstoßen. Das erfordert allerdings eine Bereitschaft zur Öffnung auf beiden Seiten. Diese müsste sogar soweit gehen, dass man seine eigene Position grundlegend zu überdenken bereit ist. Das wird schwer.

A. H.: Je nachdem, was du mit „überdenken“ meinst. Kritische Reflektion ist ja wohl zu erwarten, eine Aufgabe der Position kaum.

G. K.: Warum soll sich auch eine mathematikdidaktische Forschungsrichtung mit guten Chancen zur Drittmitteleinwerbung und damit verbunden einer respektierten Forscherkoalition mit Psychologen auf einen solchen Diskurs einlassen? Heiligt hier der Erfolg nicht die theoretische Ausrichtung?

A. H.: Das klingt jetzt nach zu einfacher Revolutionsrhetorik. Wissenschaftliche Forschung ist für mich immer noch durch Erkenntnisgewinn motiviert, und je nach Fragestellung und Forschungsgegenstand ist eine adäquate Methodologie zu wählen. Aus dieser Perspektive heraus lässt sich auch trefflich über komplementäre Ansätze diskutieren, unabhängig davon, ob Kooperationen mit der Psychologie en vogue sind oder nicht.

M. S.: Allerdings kann man auch nicht die gesellschaftlichen Rahmenbedingungen ignorieren. Ich denke, dass in einer demokratischen Gesellschaft letztlich eine gesellschaftliche Meinungsbildung über den gesamten Komplex Bildung stattfindet, in der man sich darüber verständigt, was als relevante Forschung anzusehen ist. Und so sehr im Augenblick die öffentliche Meinung an internationalen Vergleichstests zur Mathematik in der Schule interessiert ist, genauso schnell kann sich die ändern, wenn festgestellt wird, dass die gewonnenen Ergebnisse nicht von der Art sind, dass sie die gesellschaftlich wahrgenommenen Defizite im Bildungssektor zu beheben helfen.

A. H.: Das ist etwas zu einfach gedacht. Die Vergleichsstudien haben erst auf viele Defizite hingewiesen. Zu fragen ist nun, ob diese Studien geeignet sind, zu einer Überwindung dieser Defizite beizutragen. Dies können sie nur insofern, als dass sie Trendentwicklungen über bildungspolitische Maßnahmen aufzeigen. Die Maßnahmen selbst sind mit anderen Methoden zu erforschen. Dazu reichen die bisherigen Ansätze vielleicht nicht aus, aber dies macht ihre Ergebnisse nicht unrelevant. Forschung entwickelt sich eben weiter.

G. K.: Ja, und dann geht die Suche nach alternativen Forschungsansätzen los. Das ist noch eine andere Art von gesellschaftlichem Zugzwang. Wir müssen auch der öffentlichen Meinung die Notwendigkeit unserer Forschung verdeutlichen. Vielleicht ist das ein Zugang zur Entwicklung einer gemeinsamen interdisziplinären, mathematikdidaktischen Perspektive. Wir müssen uns in der Öffentlichkeit als eine wissenschaftliche Disziplin präsentieren und hierzu sollten wir das Gemeinsame finden bei aller Betonung der Unterschiede.

M. S.: Gut, dann wollen wir hoffen, dass diese GDM-Tagung im Sinne einer Initialzündung wirkt und derartige gemeinsame Aktivitäten nun gehäuft stattfinden. Vielleicht im Rahmen eines Arbeitskreises, der nun mal gerade nicht die Gleichgesonnenen anspricht?

A. H.: Ja, dazu wären aber auch konkrete Projekte notwendig. Ein abstraktes Herumphilosophieren dürfte wenig bringen.

G. K.: Gute Idee! Wie sollte man solch einen Arbeitskreis nennen?

M. S.: Vielleicht: AK Mathematikdidaktik??

Joke TORBEYNS, Bert DE SMEDT, Greet PETERS, Pol GHESQUIERE, and Lieven VERSCHAFFEL, K.U.Leuven (Belgium)

Indirect Addition: Theoretical, Methodological and Educational Considerations

The development of fundamentally important arithmetic principles related to the four basic operations, and of arithmetic strategies that are based on these principles, is an intriguing and important element of psychological, mathematical and math educational research. As far as addition and subtraction are concerned, we have, for instance, the following principles: (a) the commutativity principle, which says that the order of the addends is irrelevant to their sum (a + b = b + a); (b) the principle prescribing that if nothing is added to or removed from a collection its cardinal value remains unchanged (a + 0 = 0; a - 0 = a); (c) the principle that adding an amount to a collection can be undone by subtracting the same amount and vice versa (a + b - b = a or a - b + b = a); and (d) the principle that if a + b = c, then c-b = a or c - a = b. Previous theorizing and research shows that understanding these principles plays an important role in children's construction of the additive composition of number and in additive reasoning. Moreover, the implicit or explicit application of these principles can also considerably facilitate people's arithmetic performance by eliminating computational effort and increasing solution efficiency (Baroody, Torbeyns, & Verschaffel, 2009). For example, the first principle underlies the well-known computation shortcut for solving additions starting with the smaller given number (like 2 + 9 or 4 + 58), that consists of reversing the order of operands and adding the smaller addend to the larger one. The fourth principle underlies the computation shortcut for solving subtractions involving a small difference between the two integers (like 11 - 9 or 61 - 59), by determining how much has to be added to the smaller integer to make the larger one. Whereas the first three above-mentioned principles and their accompanying computational shortcut strategies have already received a great amount of research attention (Verschaffel, Greer, & De Corte, 2007), the fourth principle has not. In this contribution, we will present a series of closely related studies in the domain of elementary subtraction that we have done so far on this fourth principle and its accompanying computational shortcut, namely *indirect addition* (IA). We will use the term *direct subtraction* (DS) for the more common straightforward strategy for doing subtraction whereby the smaller number is directly taken away from the smaller one.

Use of IA in Young Adults

In our first study, 25 university students solved a series of three-digit subtractions (Torbeyns, Ghesquière, & Verschaffel, 2009). We made a distinction among three types of subtractions on the basis of the difference between the two given numbers, i.e., subtractions with a small (812 - 783), medium (821 - 475), and large difference (813 - 176). Adopting the choice/no-choice method (Siegler & Lemaire, 1997), all participants were instructed to solve these subtractions individually in one choice and two no-choice conditions. In the choice condition, participants could choose between IA *or* DS. In the first no-choice condition participants were instructed to solve all subtractions with IA; in the second no-choice condition they always had to apply DS. In all three conditions, they had to verbally report the strategy used *after* each trial. We registered the accuracy and speed of responding in each condition on a trial-by-trial basis.

When we analyzed the data from the choice condition, we found that participants solved about half of the subtractions with IA. The data from the two no-choice conditions revealed that, as expected, IA was significantly quicker than DS on the small-difference subtractions. However, we unexpectedly also found that this speed advantage of IA did also hold for medium- and even large-difference subtractions. In other words, IA was executed faster than DS not only when there was a small difference between the two integers, but also on the two other subtraction types where the computational advantage of using IA seems less clear.

Because we were surprised by the efficiency results of this first study, we replicated it in a follow-up study with a similar group of students and with a similar design (Torbeyns, Ghesquière, et al., 2009). The only important difference was that only subtractions with small to medium differences were presented, divided into four problem types on the basis of the size of the difference. The results of this follow-up study were similar to those from the first study, except that the results for the no-choice conditions revealed that IA was not only executed faster but also more accurately than DS. Furthermore, IA was (again) executed more efficiently than DS on the subtractions with a very small difference between the two integers as well as on the other problem types for which the computational advantage of solving the subtraction by IA seems less straightforward.

Still somewhat puzzled by these findings on the overall superior efficiency of IA compared to DS, we conducted a second replication study wherein we administered another set of subtractions in a similar group of young adults, again using the choice/no-choice method (Torbeyns, De Smedt, Peters, Ghesquière, & Verschaffel, 2009). Participants were offered two types of three-digit subtractions, namely subtractions with a very small difference (713 - 695) and subtractions with an extremely large difference, i.e., subtractions with a three-digit minuend and a *two*-digit subtrahend (756 - 78). We reasoned that the latter subtractions would favor DS par excellence and that it (thus) would be really striking if participants still solved these subtractions more efficiently with IA than with DS. Unexpectedly, we again observed that participants solved both subtraction types - even the subtractions with extremely large differences - more quickly and more accurately by means of IA than with DS. In other words, the results from our first three studies indicate that adults use IA frequently and highly efficiently on multi-digit subtractions, even on subtractions where the computational advantage of using IA is less clear.

Development and Use of IA in Children

Given both the results of our studies in adults and the fact that many math educators make a plea for giving IA a prominent place in elementary school children's mental arithmetic lessons, we next investigated children's use of this strategy. It is important to know that in Flanders children are, from the second grade on, intensively confronted with symbolically presented multi-digit subtractions of the form a - b = ?, which they are supposed to solve mentally (before they start learning the written algorithms). Mathematics instruction in mental subtraction typically focuses on the routine mastery of DS, with little or no systematic attention to IA. So, most Flemish teachers do not systematically teach IA and only allow children to apply alternative solution strategies such as IA as long as they can also demonstrate perfect mastery of the school-taught DS strategy and as long as they do not disturb the teacher's regular whole-class teaching with their alternative (self-discovered) strategies.

In line with this instructional tradition, 195 Flemish children who had not received systematic instruction in IA participated in our first study on children's use of IA (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009a). Seventy-one second-, 71 third-, and 53 fourth-graders individually completed two tasks: (a) a *Spontaneous Strategy Use Task* (SST), consisting of different problem types designed to assess the use of diverse shortcut strategies, incl. two-digit small-difference subtractions (41 - 39) which can be efficiently solved with IA; children were instructed to solve each item as accurately and as fast as possible with their preferred strategy, and to verbally report both the answer and the strategy used immediately after solving each item; (b) a *Variability on Demand Task* (VDT), also consisting of various problem types, incl. small-difference subtractions; children had to solve each item with at least two different strategies and verbally report each strategy; the experimenter kept asking for another possible strategy until the child had either reported IA, stated that (s)he did not know any other strategy, or reported five other alternative solution methods.

This study had two main findings. First, the analysis of children's strategy repertoire in the SST revealed that less than 10% of the second- and third-graders and only 15% of the fourth-graders spontaneously applied IA at least once to answer the small-difference subtractions. Thus, children hardly used IA, even on items where this strategy can be considered to be extremely efficient. Second, all children reported various strategies for solving the small-difference items from the VDT, but only a minority of them reported IA as an alternative strategy, suggesting that IA was no part of the strategy repertoire of most children. In sum, these results indicate that elementary school children who did not receive systematic instruction in IA do not apply this strategy (even not small-difference subtractions) and are unable to generate IA as an alternative for their standard (DS) strategy.

To test the generalizability of these findings to children from other instructional backgrounds, we set up a new study wherein we compared the strategy performance of children from two Flemish schools that did not provide instruction in IA (= DS-oriented schools) with children from a third school in which IA did receive special instructional attention (= IA-oriented school) (Torbeyns, De Smedt, Ghesquière, & Verschaffel, 2009b). Children from the IA-oriented school were instructed to use IA when the difference between the two given numbers was small (i.e., a difference smaller than 10). The textbook also introduced a specific notation for the IA strategy: a little arrow or arc from the subtrahend to the minuend. In total, 54 second-, 54 third- and 49-fourth graders participated in this study. The number of children from the IA-oriented school and the two DS-oriented schools was, respectively, 53 and 104. All children completed a paper-and-pencil test with 16 two-digit subtractions. Half the items had a difference smaller than 10 (81 - 79), while the other half had a difference between 10 and 20 (72 - 58). Children were instructed to solve the subtractions in whatever way they wanted and to write down their solution strategy in the scrap paper area below each problem.

The major result of this study was surprising and, from an instructional perspective, quite disappointing. While children from the IA-favoring school used IA slightly more frequently than children from the two other schools, the frequency of IA was generally extremely low in all schools: 7.53% for the IA-oriented school and 0.19% for the DS-oriented schools. Because we could not exclude that the unexpectedly low number of IA strategies in this study was due to the technique being used to identify the children’s solution strategies, namely a paper-and-pencil test, we set up a follow-up study with the same children and the same item set, but this time strategy performance was assessed during an individual interview. The overall frequency of reported IA increased only marginally - from 0.19% in the initial study to 2.43% in the follow-up study - implying that the type of data-gathering method used was clearly not a major cause of the remarkably low frequency of IA observed in the initial study.

In retrospect, the unexpectedly low frequency of IA strategies in the IA-oriented school was probably due to the weak instruction in IA as provided by the textbook and as implemented by the teachers, both from a quantitative and a qualitative perspective. Therefore, we conducted a third study with children, in which we tried to accelerate the emergence and further development of IA, using the microgenetic method (De Smedt, Torbeyns, Stassens, Ghesquière, & Verschaffel, 2010). The sample consisted of 35 third-graders who did not receive any previous instruction in IA and who did not apply IA on any subtraction during the initial test session. These 35 children were divided into the two groups on the basis of their general mathematical achievement level, resulting in two groups of equal mathematical ability: 20 children participated in the *strong instruction* (SI) group and 15 children in the *weak instruction* (WI) group. All children were individually administered three test sessions, four practice sessions, one transfer session, and one retention session. The test sessions, practice sessions, and retention session each consisted of a series of symbolic subtractions in the number domain 20-100. In the transfer session, children were offered two tasks: a symbolic subtraction task in the number domain up to 1000 and a subtractive word problem task in the number domain 20-100. In each session, three item types were included: items with a small, medium, or large difference between the minuend and the subtrahend.

The children from the SI group solved the same series of items as the children from the WI group. All sessions, except the practice sessions, were exactly the same for both experimental groups. In the three test sessions, the transfer session, and the retention sessions, all children were asked to mentally solve all items with their preferred strategy. In the four practice sessions, the SI group was explicitly instructed to mentally solve each item once with DS and once with IA, while children of the WI group mentally solved each item twice with their preferred strategy without any further instruction. In the SI group, the IA strategy was also briefly demonstrated at the beginning of each practice session, and, if necessary, support with the execution of the IA strategy was provided during the practice session. In the WI group, the only extra instruction during practice sessions was an unusually large number of subtractions with a very small difference between the integers, compared to children's regular instructional practice at school, which typically contains little or no such problems.

In each session, children were asked to mentally solve each item as good and as fast as possible. Accuracy and speed of responding were registered per child and per item; children had to verbally report their strategy during (practice session) or immediately after (test, transfer, and retention sessions) solving each item. The exact sequence of the different sessions was: test 1, practice 1, practice 2, test 2, practice 3, practice 4, test 3, transfer, retention. Test, practice and transfer sessions were separated at least two days in time for each child. One month after the transfer session, children were offered the materials from the retention session.

The major results of the microgenetic study can be summarized as follows. First, as far as strategy frequency is concerned, IA was, quite surprisingly, not used on a single trial by any child from the WI group during any session. But also in the SI group, IA was used rather infrequently during the second and the third test session. Second, as far as the efficiency of IA in the SI group is concerned, we compared the accuracy and speed of this newly learnt and quite rarely used IA strategy with the accuracy of the familiar DS strategy. It turned out that as soon as children from the SI group started to apply the new IA strategy, they immediately did so more accurately and more quickly than the DS strategy, although only the greater accuracy in favor of IA reached significance.

Conclusion and discussion

Our research program on IA strategy use in children and adults has yielded quite an interesting contrast, which demands further research and reflection. Whereas young adults use IA frequently, efficiently, and adaptively to solve symbolically presented multi-digit subtractions, IA is almost completely absent in the strategy repertoire of 6- to 9-year-olds. Even when children were confronted with problems for which the computational advantage seems overwhelming or with an explicit invitation to demonstrate strategy variety, even when they reportedly got math education using a book that pays systematic attention to IA, even when they participated in an experiment wherein they actually got instruction and practice in IA, the number of IA strategies remained remarkably low. At the same time, children who (begin to) use IA immediately seem to demonstrate relatively high levels of accuracy and speed, compared to the efficiency of the systematically taught and intensively practiced DS strategy. Therefore, more research is needed to unravel why so many elementary school children stick so strongly and stubbornly to the DS strategy and move so slowly and reluctantly in the direction of IA strategy use. In our view, this is a result of a mixture of factors, educational as well as cognitive-psychological ones.

First of all, there are the math *educational* factors. One could argue that IA will only show up in children when this strategy has received intensive and high-quality instructional attention. Although the children from the strong instruction group in the last (microgenetic) study did receive intensive instruction in IA, it presumably was not of a high quality, given that it was completely individual, purely procedurally oriented, and not building on children's prior knowledge (their physical experiences and social interactions that lie at the roots of inversion; their knowledge of addition-based strategies for solving subtraction word problems of the missing addend type, etc.). Second, at a more general level, the children who participated in our studies all had received math education in a broader math education culture and practice that can be characterized as aiming at *routine* rather than at *adaptive expertise* (Baroody & Dowker, 2003). More particularly, they all had been immersed in a classroom practice and culture that values routine mastery of one single (taught) strategy rather than flexible use of various (self-invented) strategies. Aiming for such adaptive expertise would require a classroom climate and culture that systematically, from a very young age on, teaches for strategy variety and flexibility.

Besides these educational explanations for why elementary school children move so slowly and reluctantly in the direction of IA strategy use, there are also some explanatory factors that are of a more cognitive-psychological nature. First, there is the conceptual knowledge of the mathematical principle that underlies the meaningful use of IA, i.e., the *inverse principle*, which may be particularly difficult for children of that age, who are still in the transition from the pre-operational to the concrete-operational stage of their cognitive development. However, a proper test of this hypothesis would require a test of children's understanding of the underlying inverse principle, independent of their procedural knowledge of IA. A second possible cognitive factor relates to children's limited metacognitive or self-regulatory capacities, which may make it very difficult for them to suppress or inhibit certain tendencies, such as the tendency to execute the (direct) *subtraction* operation when confronted with a problem that contains the *minus* sign. These two intrinsically (meta)cognitive factors may explain why IA apparently originates and develops so slowly and laboriously in the vast majority of children of that age group, whereas other shortcut strategies for doing addition and subtraction, such as disregarding addend order when doing addition, seem to develop much earlier and easier.

From the above list of explanations, it becomes clear that there is probably no single explanation for the absence of IA in many children's repertoire of strategies for doing symbolic subtraction. Most probably, the phenomenon is the result of the complex interaction of various factors, psychological and educational.

Literature

Baroody, A.J., & Dowker, A. (2003). *The development of arithmetic concepts and skills*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Baroody, A. J., Torbeyns, J., & Verschaffel, L. (2009). Young children's understanding and application of subtraction-related principles. *Mathematical Thinking and Learning, 11*, 2-9.

De Smedt, B., Torbeyns, J., Stassens, N., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2010). Frequency, efficiency and flexibility of indirect addition in two learning environments. *Learning and Instruction, 20,* 205-215.

Siegler, R. S., & Lemaire, P. (1997). Older and younger adults' strategy choices in multiplication: Testing predictions of ASCM using the choice/no-choice method. *Journal of Experimental Psychology: General, 126,* 71-92.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009a). Acquisition and use of shortcut strategies by traditionally schooled children. *Educational Studies in Mathematics, 71*, 1-17.

Torbeyns, J., De Smedt, B., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009b). Solving subtractions adaptively by means of indirect addition: Influence of task, subject, and instructional factors. *Mediterrannean Journal for Research in Mathematics Education, 8,* 1-30.

Torbeyns J., De Smedt, B., Peters, G., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). *Use of indirect addition in adults' mental subtraction in the number domain up to 1000*. Manuscript submitted for publication.

Torbeyns, J., Ghesquière, P., & Verschaffel, L. (2009). Efficiency and flexibility of indirect addition in the domain of multi-digit subtraction. *Learning and Instruction, 19,* 1-12.

Verschaffel, L., Greer, B., & De Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. In F. Lester (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (second edition) (pp. 557-628). New York: MacMillan.

JÜRGEN BAUMERT, Berlin

Mathematik für Lehrkräfte: Was zählt - fachwissenschaftliches oder fachdidaktisches Wissen?

Um die im Vortragstitel gestellte Frage beantworten zu können bedarf es einer theoretischen und gleichzeitig empirisch prüfbaren Konzeption des fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Wissens und deren Relation zueinander. Im Vortrag sollen zunächst zwei mathematisch äquivalente, aber theoretisch höchst unterschiedliche Modellierungen beider Wissenskomponenten vorgestellt werden. Im zweiten Schritt soll die kriteriale Validität beider Modelle untersucht werden. Validitätskriterien sind epistemologische Überzeugungen über die Struktur mathematischen Wissens, normative Überzeugungen über das Lehren und Lernen von Mathematik, Qualitätsmerkmale von Unterricht und der Leistungszuwachs von Schülerinnen und Schülern. Abschließend soll versucht werden, die relative Bedeutung des fachwissenschaftlichen und fachdidaktischen Wissens für die Qualität des Mathematikunterrichts und den Leistungsfortschritt von Schülerinnen und Schülern im Rahmen des zu präferierenden Modells zu prüfen.

Francesca BIAGINI, München, Daniel ROST, München

Money out of nothing? - Prinzipien und Grundlagen der Finanzmathematik

Die Finanzmathematik hat als jüngste mathematische Disziplin in den letzten 15 Jahren einen gewaltigen Aufschwung erlebt. Ihre Bedeutung hat jedoch noch kaum einen Niederschlag in der Schulmathematik gefunden. Dabei könnten finanzmathematische Konzepte nicht nur auf Projekttagen behandelt, sondern auch gut in den Unterricht integriert werden. Auch unter diesem Gesichtspunkt sind die folgenden Kapitel zu lesen, in denen wir die wichtigsten mathematischen Grundkonzepte für effiziente Finanzmärkte, bis hin zur berühmten Black-Scholes Formel, vorstellen wollen.

1. Ein verlockendes Angebot ...

Wir betrachten die Aktie der Munich Re (Münchener Rück) und gehen von einem heutigen (April 2010) Kursstand von 125 Euro aus. Ihr Bankberater bietet Ihnen dazu, zu einem gewissen, sofort zu entrichtenden Preis, folgendes "Geschäft" an:

Wenn der Kurs S_T der Aktie der Munich Re zum Zeitpunkt T = April 2011 größer als $K = 96$ (Euro) ist, bekommen Sie von ihm die Differenz zu K ausgezahlt; wenn er kleiner ist, bekommen Sie nichts.

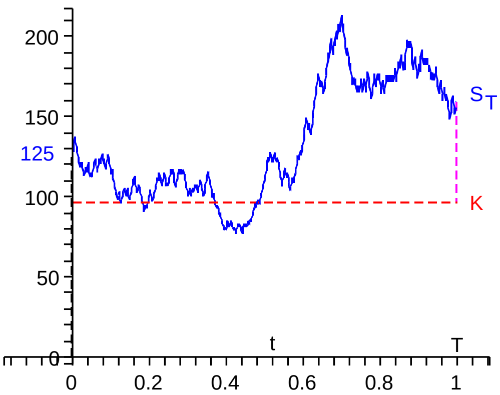
In der Finanzmathematik nennt man ein solches Geschäft eine **Call-Option** auf die Aktie der Munich Re (in diesem Zusammenhang auch **Underlying** genannt) mit **Strike** $K = 96$ und **Fälligkeitszeitpunkt** T = April 2011.

Die Call-Option liefert dann die **Auszahlung**

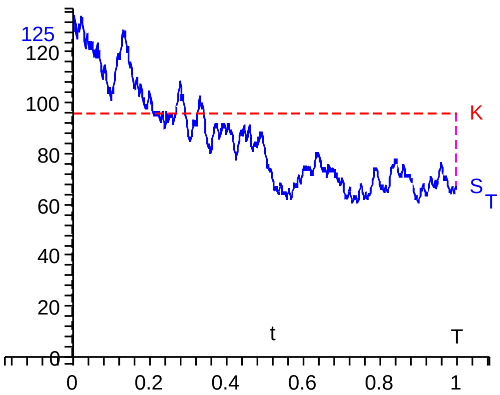
$$C := \max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Was Sie an Auszahlung bekommen, hängt also vom zukünftigen, heute noch ungewissen Kursstand der Aktie in 1 Jahr ab. Das folgende Bild zeigt zwei mögliche Kursverläufe, ausgehend von einem heutigen Kursstand von $S_0 = 125$ Euro.

$S_T > K$:



$S_T \leq K$:



Im linken Schaubild landet der Kurs in T oberhalb von K, Sie erhalten also die Auszahlung $C = S_T - K > 0$. Im Fall rechts ist $S_T < K$, also ist $C = 0$.

Eine Call-Option ist ein gängiges Finanzinstrument zur Absicherung gegen *steigende* Kursverläufe. In der Tat, wenn Sie die Munich Re Aktie zum Zeitpunkt T erwerben, aber dafür nicht mehr als $K = 96$ Euro bezahlen möchten, können Sie dies mit dem Kauf obiger Call-Option bewerkstelligen. Denn unabhängig vom Kursstand zum Zeitpunkt T kostet Sie die Aktie dann maximal 96 Euro indem Sie sie entweder direkt am Markt erwerben (im Fall $S_T \leq K$) oder den anfallenden Differenzbetrag (im Fall $S_T > K$) durch die Auszahlung der Option abdecken.

Die entscheidende Frage ist nun: Wieviel ist eine solche Option heute wert? Welchen Preis darf der Bankberater als Verkäufer dafür verlangen, bzw. welchen Preis sind Sie als Käufer bereit, dafür zu bezahlen?

2. ... und ein fairer Preis?

Wird die Option am Markt gehandelt (wie die Aktie auch), so wird der Preis der Option auch durch den Markt, d.h. durch die Nachfrage bestimmt. Reißt man dem Verkäufer die Optionsscheine aus den Händen, wird der Preis steigen; bleibt er auf ihnen sitzen, wird der Preis sinken. Das Erstaunliche ist nun, dass sich für diesen dann einstellenden "fairen" Preis der Option ein einfaches Prinzip finden und sogar eine Formel angeben läßt.

Zunächst scheint es einsichtig, dass der Preis der Option von den Vorstellungen abhängt, die man vom zukünftigen Kursverlauf hat. Unserer erste Aufgabe wird es also sein – und hier kommt die Stochastik ins Spiel – ein Modell aufzustellen, das den zufälligen Kursverlauf des Underlyings gut erfaßt.
Charakteristisch für die mathematische Herangehensweise ist nun, dass man zunächst ein ganz einfaches Aktienkursmodell betrachtet, auch wenn dieses die für einen Aktienchart typische "Zitterbewegung" nur sehr rudimentär erfasst.

3. Das Binomialmodell

Unsere sehr vereinfachenden Modellannahmen für den Kurs des Underlyings und das Marktgeschehen sind

(1) Ein Börsenhandel ist nur zu 3 Zeitpunkten
$t = 0$ (heute, April 2010)
$t = 1$ (August 2010)
$t = 2$ (Dezember 2010)
möglich; T (=April 2011) wird gleich 3 gesetzt

(2) In diesen drei Zeitpunkten können wir...

- die Aktie des Underlyings (auch Anteile davon) zum aktuellen Kurs kaufen oder verkaufen (auch sog. Leerverkäufe möglich)
- Geld auf ein zinsloses Bankkonto einzahlen bzw. von dort abheben (auch zinslose Überziehung erlaubt)

(3) Die Aktie steht in $t = 0$ bei 125 (Euro) und kann sich pro Zeitschrit nur

- mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = \frac{3}{4}$ um 20% nach **oben** oder
- mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - p = \frac{1}{4}$ um 20% nach **unten**

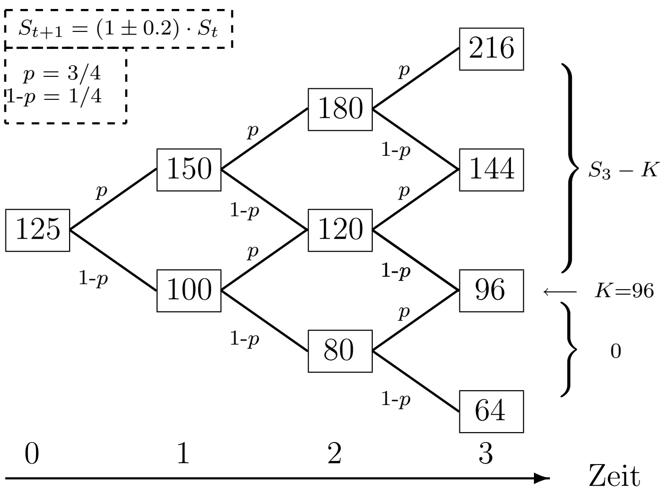
entwickeln.

Die Wahl von $p = \frac{3}{4}$ für eine Bewegung nach oben spiegelt dabei unsere positive Markterwartung wieder.

Dieses Binomialmodell läßt sich als Binomialbaum wie folgt aufzeichnen:

Man sieht, dass der Aktienkurs von 125 (in $t = 0$) bis zu 216 steigen oder auch auf 64 fallen kann. Insgesamt sind in $T = 3$ genau 4 Kursstaände möglich; ganz rechts ist zu diesen Endkursständen die jeweilige Auszahlung der Option notiert. Für

$S_3 = 216$ ist $C = 120$
$S_3 = 144$ ist $C = 48$
$S_3 = 96$ ist $C = 0$
$S_3 = 64$ ist $C = 0$.



Der zu diesem Baum gehörige Grundraum Ω besteht aus den 8 Pfaden, die (von oben nach unten) mit $\omega_1, ..., \omega_8$ bezeichnet seien. Für die zugehörige Wahrscheinlichkeit P auf Ω sind die Elementarwahrscheinlichkeiten dann die Pfadwahrscheinlichkeiten, also z.B. $P(\{\omega_1\}) = p^3$ u.s.w.

Es liegt nun nahe, in diesem Modell als Preis der Option die "mittlere Auszahlung", also den Erwartungswert von C zu verwenden. Dazu berechnen wir die Wahrscheinlichkeitsverteilung von S_3, die sich aus obigem Binomialbaum wie folgt ergibt:

$$\begin{aligned}
P[S_3 = 216] &= \binom{3}{3} p^3 = \frac{27}{64} \\
P[S_3 = 144] &= \binom{3}{2} p^2(1-p) = \frac{27}{64} \\
P[S_3 = 96] &= \binom{3}{1} p(1-p)^2 = \frac{9}{64} \\
P[S_3 = 64] &= \binom{3}{0} (1-p)^3 = \frac{1}{64}
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert von C unter P ist dann

$$E_P\left[(S_3 - K)^+\right] = 120 \cdot \frac{27}{64} + 48 \cdot \frac{27}{64} \;=\; 70.875.$$

Es wäre jedoch äußerst töricht, in diesem Modell für die Option 70.87 (Euro) zu bezahlen, denn man kann, wie wir im folgenden sehen werden, durch geschicktes Handeln mit einem weitaus geringeren Einsatz dieselbe Auszahlung erreichen wie sie die Option liefert. Der faire Preis der Option ist damit *nicht* der Erwartungswert der Auszahlung der Option, 70.87 Euro ist als Preis viel zu hoch.

4. Strategie und Vermögensprozeß

Bis jetzt haben wir zwar ein Modell für den Aktienkurs aufgestellt, jedoch noch nicht die Möglichkeit realisiert, mit der Aktie Handel zu betreiben. Dazu definieren wir für $t = 0, 1, 2$

$$
\begin{aligned}
x_t = &\ \text{Anzahl der Aktien, die zum Zeitpunkt } t \text{ gekauft werden;} \\
&\ \ \text{diese werden bis } t+1 \text{ gehalten} \\
y_t = &\ \text{Betrag auf dem Bankkonto}
\end{aligned}
$$

Es bedeutet also z.B. $(x_0, y_0) = (1.2, -150)$, dass wir zum Zeitpunkt $t = 0$ die Menge von 1.2 Aktien kaufen und uns (dafür) 150 Euro von der Bank leihen, die wir natürlich in $t = 1$ wieder zurückzahlen müssen. (x_t, y_t) dürfen vom Pfad abhängen, d.h. wir können in $S_1 = 150$ anders handeln als in $S_1 = 100$, allerdings dürfen wir in t für die Festlegung von (x_t, y_t) immer nur auf die Information zurückgreifen, die wir zu diesem Zeitpunkt besitzen. Dies ist automatisch gegeben, wenn z.B. x_1 die Form hat $x_1 = a_1 \cdot 1_{\{S_1=150\}} + a_2 \cdot 1_{\{S_1=100\}}$ mit a_1, a_2 beliebige reelle Zahlen; für y_1 analog.

Zur durch $x = (x_0, x_1, x_2)$ und $y = (y_0, y_1, y_2)$ definierten Strategie ist ein

Vermögensprozess $\quad V_t,\ t = 0, 1, 2, 3,$

erklärt:

$t = 0$	$t = 1, ..., T-1$	$t = T$
Startvermögen (Startkosten)	Zwischenvermögen	Endvermögen
$V_0 = x_0 S_0 + y_0$	$V_t = x_{t-1} S_t + y_{t-1}$ $= x_t S_t + y_t$	$V_T = x_{T-1} S_T + y_{T-1}$

Die Gleichung $x_{t-1} S_t + y_{t-1} \ = \ x_t S_t + y_t$ für $t = 1, ..., T-1$ beschreibt eine Bedingung an die Strategie, nämlich **selbstfinanzierend** zu sein. Dies bedeutet, dass sich das Vermögen ohne Zu- und Abflüsse entwickelt: alles, was wir in t besitzen, wird wieder investiert und wir schießen von außen kein Kapital zu.

5. Pricing durch Hedging: No Arbitrage

Die Idee zur Auffindung eines "fairen" Optionspreises π^C ist nun:

- suche eine selbstfinanzierende Strategie (x, y), die als Endvermögen V_3 genau die Auszahlung der Option hat (sog. **Hedge-Strategie für** C), also

$$V_3 \ = \ C \ = \ (S_3 - K)^+.$$

Aus dem Vermögensprozess dieser Strategie leiten wir dann den Optionspreis ab.

Die Bestimmung der Hedge-Strategie geschieht durch **Rückwärtsinduktion** mittels *Lösen von linearen* 2×2 *Gleichungssystemen.*
Dazu betrachten den Binomialbaum und stellen uns die Frage:

Welchen Wert (a, b) muss unsere Strategie (x, y) im Knoten $S = 180$ haben, damit wir in $t = 3$ genau das Vermögen $V_3 = 120$ (im Fall, dass der Kurs steigt) und $V_3 = 48$ (im Fall, dass der Kurs sinkt) erzielen?

Für $\omega = \omega_1, \omega_2$ (das sind die beiden Pfade, die über den Knoten $S_2 = 180$ laufen) ist also $a = x_2(\omega)$ und $b = y_2(\omega)$ und es muss gelten

$$\begin{aligned} a\,S_3(\omega_1) + b &= C(\omega_1) \qquad \text{d.h.} \qquad a\;216 + b = 120 \\ a\,S_3(\omega_2) + b &= C(\omega_2) \qquad\qquad\quad\;\; a\;144 + b = 48 \end{aligned}$$

Damit ist $a = 1$ und $b = -96$, d.h. wir müssen im Knoten $S_2 = 180$ genau 1 Aktie kaufen und uns 96 Euro von der Bank leihen. Da die Aktie in diesem Knoten 180 Euro kostet, benötigen wir dort ein Vermögen von

$$V_2(\omega) = 1 \cdot 180 - 96 \cdot 1 \;=\; 84 \;\text{(Euro)}$$

Analog verfährt man mit den 5 restlichen Knoten: Zunächst liefern die linearen Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a\,144 + b &= 48 \qquad \text{und} \qquad a\;96 + b = 0 \\ a\,96 + b &= 0 \qquad\qquad\quad\;\; a\;64 + b = 0 \end{aligned}$$

jeweils den Wert (a, b) der Strategie in den Knoten $S_2 = 120$ und $S_2 = 80$, nämlich $(a, b) = (1, -96)$ bzw. $(a, b) = (0, 0)$, und damit

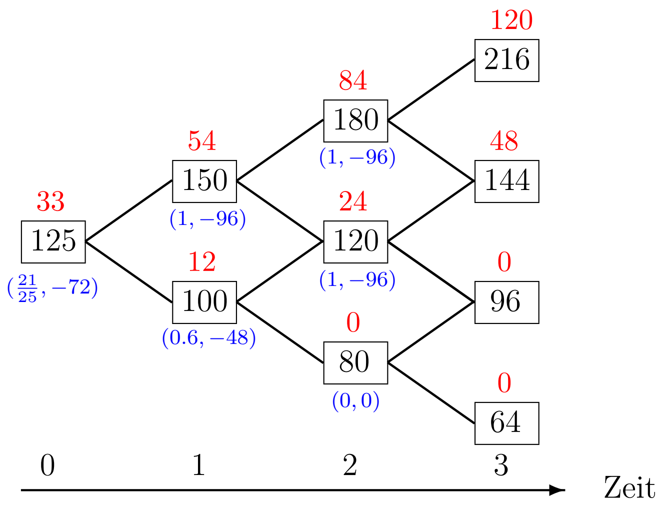
$$V_2(\omega) = 1 \cdot 120 - 96 \cdot 1 \;=\; 24 \qquad \text{und} \qquad V_2(\omega) = 0 \cdot 80 + 0 \cdot 1 \;=\; 0$$

das in diesen Knoten ($\omega = \omega_3, ..., \omega_6$ bzw. $\omega = \omega_7, \omega_8$) benötigte Vermögen. Von dort rechnet man durch den Ansatz

$$\begin{aligned} a\,180 + b &= 84 \qquad \text{und} \qquad a\;120 + b = 24 \\ a\,120 + b &= 24 \qquad\qquad\quad\;\; a\;80 + b = 0 \end{aligned}$$

auf x_1 und V_1 und schließlich auf x_0 und V_0 zurück. Trägt man diese Ergebnisse in den Binomialbaum ein, so ergibt sich

Die oben konstruierte Strategie ist durch Zahlenpaare *unter* den Knoten gegeben; die Zahlen *darüber* kennzeichnen den zugehörigen Vermögensprozess. Sie ist nach Konstruktion selbstfinanzierend und eine Hedge-Strategie für C, denn es gilt $V_3 = C$ (die Zahlen über den Kursständen S_3 entsprechen genau der jeweiligen Auszahlung der Option).



Man kann also bei einem Startkapital von 33 Euro mit obiger Strategie (in $t = 0$ müßte man dann sich noch 72 Euro von der Bank leihen um damit den $\frac{21}{25}$–Teil der Aktie kaufen zu können, u.s.w.) dieselbe Auszahlung erreichen wie die Option. Damit *muss* $V_0 = 33$ (Euro) der gesuchte faire Preis π^C der Option sein, also

$$\pi^C = V_0 = 33 \text{ Euro},$$

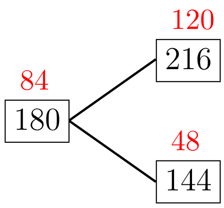
ansonsten gäbe es im Markt die Möglichkeit eines **risikofreien Gewinns**:

> Zahlen Sie für die Option *mehr als* 33 Euro, zu sichert ihr Bankberater die Option mit obiger Strategie (x, y) ab; dazu benötigt er ein Startkapital von nur 33 Euro, die Differenz, $0 < \pi^C - 33$ Euro, streicht er als risikofreien Gewinn ein.
>
> Zahlen Sie für die Option *weniger als* 33 Euro, so handeln Sie mit der Strategie $(-x, -y)$ und verschaffen sich so selbst einen risikofreien Gewinn von $0 < 33 - \pi^C$ Euro.

Eine Möglichkeit (Strategie), einen risikofreien Gewinn zu erzielen, nennt man **Arbitrage**. In einem effektiven Finanzmarkt darf es keine Arbitrage geben, der Markt ist **arbitragefrei**. ("you can't make money out of nothing", "there is no free lunch"). Das Prinzip "No Arbitrage" bestimmt dann den Preis der Option, der "faire" Preis ist also ein **arbitragefreier Preis** und beträgt in unserem Modell genau 33 Euro.

6. Pricing mit dem Martingalmaß

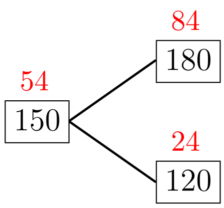
Im letzten Abschnitt wurde der arbitragefreie Preis der Option als Startkapital V_0 einer Hedge-Strategie *rekursiv* ermittelt. Es ist aber auch eine *direkte* Berechnung von V_0 (und auch V_t) möglich: Dazu betrachten wir zunächst im Binomialbaum aus Abschnitt 5 den Knoten $S_2 = 180$ und die von ihm ausgehenden Bewegungen der Aktie sowie des Vermögensprozesses



man erkennt folgenden Zusammenhang: Die beiden Gleichungen

$$q \cdot 216 + (1-q) \cdot 144 = 180 \qquad \text{und} \qquad q \cdot 120 + (1-q) \cdot 48 = 84$$

haben *dieselbe* Lösung, nämlich $q = \frac{1}{2}$.
Dasselbe stellen wir auch für alle anderen Knoten fest, z.B. bei



gilt

$$q \cdot 180 + (1-q) \cdot 120 = 150 \qquad \Longleftrightarrow \qquad q \cdot 84 + (1-q) \cdot 24 = 54,$$

ebenfalls für $q = \frac{1}{2}$.

Damit ist eine Wahrscheinlichkeit Q auf Ω definiert: $\quad Q(\{\omega\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3, \omega \in \Omega,$
für die insbesondere gilt

$$E_Q(S_3) = S_0 \qquad \text{und} \qquad E_Q(C) = V_0.$$

In der Tat ist

$$E_Q\left[(S_3-K)^+\right] = 120 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 48 \cdot 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \;=\; 33.$$

Damit ist der Optionspreis $\pi^C = V_0$ in der Tat der Erwartungswert der Auszahlung $C = (S_3 - K)^+$, allerdings bzgl. Q und *nicht* bzgl. der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit P.

Q heißt das zu P äquivalentes **Martingalmaß**, manchmal auch **risikoneutrales Maß**, weil sich unter Q der Aktienkurs als ein "faires Spiel" entwickelt: der Kursstand von heute ist der unter Q erwartete Kursstand von morgen.

7. Zusammenfassung

Wir fassen nun unsere Erkenntnisse über Optionspricing in einem effizienten Finanzmarkt zusammen. Die Resultate sind aus unserem Binomialmodell gewonnen, gelten aber auch in einem viel allgemeineren Rahmen, z.B. in dem in Abschnitt 8 angesprochenen Black-Scholes-Modell.

- Der "faire" Optionspreis basiert auf dem "No Arbitrage" Prinzip und hängt *nicht* von der Wahrscheinlichkeit P ab, die die Bewegung des Aktienkurses steuert.
- Die Arbitragefreiheit des Marktes ist äquivalent zur Existenz eines risikoneutralen Maßes Q (dies ist die Aussage des berühmten 1. Fundamentaltheorems der Finanzmathematik).
- Der arbitragefreie Preis der Option ist der Erwartungswert der Auszahlung *unter* Q, bzw. das benötigte Startvermögen einer Hedge-Strategie für die Auszahlung, falls man eine solche konstruieren kann.

8. Ausblick auf das Black-Scholes-Modell

Unser Binomialmodell mit nur 3 Handelszeitpunkten im Zeitintervall $[0,1]$ (Zeithorizont = 1 Jahr) beschreibt die reale Aktienkursbewegung natürlich nur sehr unzureichend. Näher an die Realität kommt man, wenn man ein Binomialmodell mit n äquidistanten Handelszeitpunkten $\frac{k}{n}, k = 0, 1, ..., n-1$, im Zeitintervall $[0,1]$ aufstellt, in welchem natürlich auch die Größen in (3) aus Abschnitt 3 an die Tatsache immer kleinerer Handelsspannen angepasst sind.

Für $n \longrightarrow \infty$ führt dies streng mathematisch zum berühmten, nach (den Nobelpreisträgern) Fischer Black und Myron Scholes benannten Black-Scholes-Modell, das den Aktienkurs $S_t, t \in [0,1]$, durch eine **geometrische Brownsche Bewegung** modelliert

$$S_t = S_0\, e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}, \qquad t \in [0,1].$$

$B_t, t \in [0,1]$, bezeichnet dabei die (standard) **Brownsche Bewegung** und ist für die typische "Zitterbewegung" des Kurses verantwortlich. Die e-Funktion garantiert, dass der Kurs stets positiv ist und $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ sind Parameter, die individuell auf die Munich Re-Aktie angepasst werden können. μ heißt **Drift** und gibt an, ob sich der Kurs tendenziell nach oben ($\mu > 0$) oder nach unten

($\mu < 0$) bewegt. Der Parameter σ heißt **Volatilität** und beeinflußt die Stärke der "Zitterbewegung" des Kurses.

In diesem (arbitragefreien) Modell läßt sich eine geschlossene Formel für den arbitragefreien Preis einer Call-Option

$$C = (S_1 - K)^+$$

angeben, nämlich

$$\pi^C = S_0 \cdot \Phi\Big(\frac{\ln\big(\frac{S_0}{K}\big) + \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\Big) - K \cdot \Phi\Big(\frac{\ln\big(\frac{S_0}{K}\big) - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma}\Big),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung bezeichnet und wir wieder angenommen haben, dass wir für Geldgeschäfte bei der Bank weder Zinsen bekommen noch welche entrichten müssen. Dies ist die berühmte **Black-Scholes Formel**, deren Herleitung außerhalb der Reichweite der Schulmathematik liegt, aber denselben Prinzipien und Überlegungen folgt wie wir sie im Binomialmodell vorgestellt haben. Man sieht, dass von den beiden Parametern μ und σ nur letzterer in die Preisformel eingeht; der arbitragefreie Preis ist unabhängig von μ, was im Binomialmodell der Tatsache entspricht, dass dort der Preis nicht von p abhängt.

9. Schlussbemerkung

Die finanzmathematische Modellierung hat sich in den letzten Jahren rasant entwickelt; statt des Black-Scholes-Modells betrachtet man etwa **stochastische Volatilitätsmodelle**, bei denen σ nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Zufall abhängen darf. Eine weitere Verallgemeinerung sind sogenannte **Jump-Diffusion-Modelle**, die Kurssprünge in die Modellbildung mit einbeziehen.
Für die Schule bleibt das Binomialmodell, das von den Zuhörern, wie die Verfasser aus Vorträgen vor Schülern berichten können, auch gut verstanden wird, der beste Einstieg in die Finanzmathematik.

Literatur

Irle, A. (1998). *Finanzmathematik*, Teubner Studienbücher Mathematik.

Jarrow, R., Turnbull, S. (2000). *Derivative Securities*, 2. Auflage, South-Western College Publishing.

Ross, S.M. (1999). *An Introduction to Mathematical Finance* (Options and other topics), Cambridge University Press.

PERSI DIACONIS, Stanford

Adding Numbers and Shuffling Cards

The usual way of adding two large numbers produces "carries" along the way. It is natural to ask: How many carries are typical and how are they distributed? This simple question has some nice mathematics hidden inside. The carries form a Markov chain with an "amazing" transition matrix (Holte). This same matrix comes up in the usual way of shuffling cards. I will review this subject ("The Seven Shuffles Theorem") and the connection. All of this is joint work with Jason Fulman.

Hans Niels JAHNKE, Essen

Zur Genese des Beweisens

In diesem Vortrag soll nicht über die Genese des deduktiven Argumentierens schlechthin geredet werden, sondern über die Herausbildung einer expliziten Konzeption des Beweisens, wie sie in den *Analytica Posteriora* des Aristoteles vorliegt und in Euklids *Elementen* als axiomatisch-deduktive Theorie realisiert ist. Dem entspricht, dass im abschließenden didaktischen Teil nicht allgemein über mathematisches Argumentieren gesprochen wird, sondern über die Frage, wie man in den Klassen 5 bis 10 thematisieren kann, was ein mathematischer Beweis ist und worin der Sinn des Beweisens liegt.

Wir diskutieren zunächst eine These des ungarischen Mathematikhistorikers Árpád Szabó (1913-2001), die dieser in den 60er Jahren des vorigen Jahrhunderts vorgeschlagen hat.

1. Die These von Szabó

Euklid unterteilt in seinen Elementen die am Anfang stehenden Grundlagen in drei Gruppen von Aussagen: (1) Definitionen (griechisch *Horoi*), (2) Postulate (*Aitemata*) und (3) Axiome (*Konai Ennoiai*). Ältere Euklid-Manuskripte enthielten die Termini (1) *Hypotheseis*, (2) *Aitemata* und (3) *Axiomata*.

Nach Szabo waren die Begriffe *Hypothesis*, *Aitema* und *Axioma* gängige Termini der voreuklidischen und vorplatonischen Dialektik und spielten auch in Platos Dialogen und den Abhandlungen des Aristoteles eine bedeutende Rolle. Unter Dialektik verstanden die Griechen die Kunst der Führung von Gesprächen, bei denen kontroverse Themen diskutiert werden. Als Kunstlehre war die Dialektik ein Teilgebiet der Rhetorik, bei Plato (427-348 v. Chr.) stellte sie eine Methode der philosophischen Erörterung und Erkenntnisgewinnung dar.

Von Plato und Aristoteles bis ins 19. Jh. verstanden die Mathematiker und Philosophen unter einem Axiom eine Aussage, die aus sich heraus evident und absolut wahr ist. Die absolute Wahrheit der Axiome garantiert die absolute Wahrheit der Mathematik. Die wichtigsten antiken Kronzeugen dieser Auffassung waren Aristoteles (384 – 322 v. Chr.), insbesondere seine Schrift *Analytica Posteriora*, und der spätantike Neu-Platoniker Proklos (412 – 585 n. Chr.) in seinem einflussreichen Kommentar zum Buch I der Elemente Euklids.

Die Auffassung der Axiome als selbstevidente Wahrheiten erfährt nun deutliche Modifikationen, wenn man Szabós etymologischen Untersuchungen folgt. Betrachten wir zunächst den Begriff der *Hypothesis*. Im Sinne des Wortes ist *Hypothesis* etwas, das *daruntergelegt* wird und folglich als *Grundlage* von etwas anderem dienen kann. Es handelt sich um eine unbewiesene Voraussetzung in einer Argumentation, deren Richtigkeit man unterstellt, um aus ihr andere Aussagen abzuleiten. Bei Plato findet man eine Vielfalt an Situationen und Verwendungsweisen für diesen Begriff. *Hypothesis* ist bei ihm zugleich ein mathematischer *und* ein dialektischer Begriff. Sokrates etwa „bittet“ seinen Gesprächspartner, ihm „zu erlauben“, diese oder jene Hypothese an den Anfang zu stellen. Das Gespräch kann nur weitergehen, wenn der Partner ihm dies gewährt. Bei Plato hießen Hypothesen deshalb häufig auch *Homologemata* (die „zugestandenen Dinge“).

Im Rahmen einer Gesprächsführung wird man in der Regel solche Hypothesen einführen, die man für besonders stark hält und von denen man annimmt, dass sie vom Gesprächspartner akzeptiert werden. Sokrates reflektiert dies an verschiedenen Stellen der Dialoge und ermahnt seine Gesprächspartner, im Hinblick auf den Ausgangspunkt besondere Sorgfalt walten zu lassen.

Man kann eine Hypothese aber auch *probeweise* zum Zwecke ihrer kritischen Untersuchung aufstellen. Im philosophischen Diskurs leitet man dann Schlussfolgerungen ab, die entweder *erwünscht* oder plausibel sind - dann führen sie zur Stärkung der Hypothese- oder *unerwünscht* und daher die Ablehnung der Hypothese zur Folge haben. Z. B. stellt Sokrates im Dialog *Theaitetos* (164 b) die Hypothese auf, dass Wissen und sinnliches Wahrnehmen identisch sind. Im weiteren Verlauf des Dialogs ergibt sich daraus ein Widerspruch. Also kann die Hypothese nicht richtig sein, Wissen und sinnliches Wahrnehmen sind mithin nicht identisch. An dieser Stelle führt die Prüfung der Hypothese also auf einen Extremfall einer unerwünschten Folge, nämlich einen logischen Widerspruch.

Für den Begriff der Hypothese findet Szabó insgesamt drei verschiedene dialektische Bedeutungsvarianten:

> (1) Hypothese = möglichst starke, unbewiesene Aussage. Um seine Partner von einer bestimmten Behauptung zu überzeugen, schlägt Person A eine Hypothese vor, von der sie annimmt, dass ihre Gesprächspartner sie akzeptieren und aus der sich die Behauptung ableiten lässt. Extremfall: eine in sich evidente Aussage, deren Gültigkeit nur „eine streitsüchtige Person“, wie Aristoteles formulierte, in Zweifel ziehen wird.
>
> (2) Hypothese = Aussage, deren Gültigkeit unterstellt wird, mit der Absicht, sie einer kritischen Untersuchung zu unterziehen. Es werden Folgerungen abgeleitet

und geprüft, ob sie erwünscht oder unerwünscht sind. Extremfall: indirekter Beweis.

(3) Hypothese = Definition. Das ist auch für die Mathematik ein relevanter Fall. Man beginnt etwa mit der Definition von „gerader und ungerader Zahl“ und kann daraus die Theorie vom „Geraden und Ungeraden“ deduzieren.

Die drei Begriffe *Hypothesis*, *Aitema* und *Axioma* hatten in der vorplatonischen und voraristotelischen Dialektik eine ähnliche Bedeutung (mit Ausnahme der Variante „Definition“). Sie bezeichneten jene Anfangssätze in der dialektischen Auseinandersetzung, deren Akzeptanz durch einen Gesprächsteilnehmer von seinem Partner *gefordert* wird. Wenn sich die Gesprächspartner auf einen solchen Satz geeinigt haben, dann hieß er häufig *Hypothesis*. Wird dagegen die Zustimmung des Partners in der Schwebe gelassen, so hieß ein solcher Satz *Aitema* oder *Axioma* (Szabó 1960, 399). Diese Bedeutung von *Aitema* kannte auch noch Aristoteles.

Geht man also auf die Genese des Begriffs *Axiom* in der Dialektik zurück, dann bezeichnete dieser Begriff keinesfalls von Anfang an eine unbezweifelbare, absolut wahre Aussage, sondern hatte lange Zeit eine Konnotation im Sinne des modernen Hypothesenbegriffs. Wahrscheinlich war man sich zur Zeit Euklids dieser hypothetischen Konnotation noch bewusst und hat daher den Begriff *Axioma* durch den der *Konai Ennoiai* (= *„die [allen Menschen] gemeinsamen Vorstellungen*“) ersetzt.

So durchlief der Begriff des Axioms in der griechischen Philosophie und Mathematik eine Karriere, deren Anfangspunkt in der Dialektik und deren Endpunkt in der Mathematik lag. In der Dialektik bezeichnete er eine Annahme, die man am Anfang eines Diskurses akzeptieren oder eben auch nicht akzeptieren kann, in der Mathematik eine unbewiesene Ausgangsaussage einer deduktiv organisierten Theorie, die nicht bezweifelt werden kann und den Status absoluter Sicherheit hat. Dies jedenfalls war seit Plato und Aristoteles die herrschende Meinung unter Mathematikern und Philosophen, für die die Mathematik zweitausend Jahre lang das Ideal einer sicheren Wissenschaft darstellte.

Aus Szabos terminologiegeschichtlicher Studie können zwei allgemeine Aussagen extrahiert werden:

(1) Erstens stand die *Praxis eines rationalen Diskurses* sozusagen Modell für die Organisation einer mathematischen Theorie gemäß der axiomatisch-deduktiven Methode. In den Termini *Hypothese*, *Aitema* und *Axiom* sind Verfahrensregeln kristallisiert, die die Verpflichtung der Gesprächspartner beinhalten, ihre Voraussetzungen offenzulegen.

(2) Die zweite Konsequenz betrifft die *Universalität* der Dialektik. Gegenstand eines durch Dialektik geleiteten Diskurses kann *jedes* Problem werden, ob es sich nun um eine Frage der Ethik oder der Mathematik handelt. Die Möglichkeit der axiomatisch-deduktiven Organisation einer Gruppe von Aussagen ist also nicht auf Geometrie und Arithmetik beschränkt, sondern lässt sich potentiell auf alle Gegenstandsbereiche menschlichen Nachdenkens anwenden. Das haben die Griechen zur Zeit Euklids begriffen. Innerhalb kurzer Zeit wandten Euklid und die auf ihn folgenden Wissenschaftler die axiomatische Organisation einer Theorie auf weite Bereiche der (Natur-)Wissenschaft an. Euklid hat eine axiomatische Optik und eine axiomatische Musiktheorie verfasst, von Archimedes stammen axiomatisch-deduktive Darstellungen der Statik und der Hydrostatik. So kann man sagen, dass die Erfindung des Beweisens und der theoretischen Physik Hand in Hand gingen und notwendig miteinander verknüpft waren (vgl. Jahnke 2009).

2. Die eleatische Philosophie und der indirekte Beweis

Platos Dialoge enthalten eine Fülle an Beispielen hypothetischen Denkens in der Philosophie. Darunter sind, wie wir gesehen haben, auch philosophische Argumentationen, die den indirekten Beweisen der Mathematik entsprechen. Generell ist plausibel, dass hypothetisches Argumentieren für die Kunst des Dialogs über streitige Fragen charakteristisch ist. Die Mathematiker haben, so Szabó, die axiomatisch-deduktive Verfahrensweise im Allgemeinen und den indirekten Beweis im Besonderen von den Philosophen gelernt. Doch wann könnte dies geschehen sein? Plato berief sich in seinen Schriften an vielen Stellen auf die Mathematik als Vorbild des Argumentierens. Er riet den Philosophen, von der Mathematik zu lernen. Wenn umgekehrt die Mathematiker von den Philosophen gelernt haben, dann muss dies zu einem früheren Zeitpunkt gewesen sein.

Szabó folgt nun einem Hinweis des Aristoteles, der den Eleaten Zenon als den „Erfinder der Dialektik" bezeichnet hat. Zenon von Elea (490-430 v.C.) war der wichtigste Schüler des Parmenides (540-483 v.C.), der die sogenannte eleatische Philosophie begründet hat. Elea war eine griechische Stadt in Süditalien. In dieser Philosophie ging es darum, die Alltagswahrnehmung der Welt als eine Scheinwahrheit aufzudecken, während die wahre Welt ein unveränderliches, ungeschaffenes, unzerstörbares „Sein" sei. In dem „Lehrgedicht" des Parmenides, seinem einzigen noch erhaltenen Text, spielen indirekte Beweise eine wichtige Rolle. Sie sind Ausdruck seines Bestrebens, eine begriffsanalytische und logisch argumentierende Philosophie zu entwickeln. Ausdrücklich ermahnte er seine Anhänger:

> „Lass nicht die viel erfahrene Gewohnheit dich dorthin verführen! Nicht dem geblendeten Auge, dem tauben Gehör, noch der Zunge darfst Du vertrauen: Allein durch Vernunft entscheide die These, die so häufig umstritten und die von mir hier widerlegt wird!“ (zitiert nach Popper 2005, 127)

Zur Unterstützung der Lehre des Parmenides hat Zenon zahlreiche Paradoxien (40, von denen zehn überliefert sind) rund um den Bewegungsbegriff entwickelt. Das bekannteste ist das Paradoxon von Achilles und der Schildkröte, demzufolge ein schneller Läufer einen langsamen Läufer nicht überholen könne. Um ein solches Paradoxon zu verstehen und zu würdigen, ist eine bestimmte geistige Einstellung notwendig, die in dem angeführten Zitat von Parmenides wunderbar ausgedrückt ist. Man weiß ja, dass Achilles die Schildkröte überholt. Davon darf man sich aber nicht ablenken lassen, sondern muss seinem eigenen Denken vertrauen und den in den Voraussetzungen angelegten Gedankengang bis zu Ende fortführen. In der Mathematik wird diese Einstellung mit dem Begriff ‚Strenge' bezeichnet.

In der eleatischen Schule meint Szabó nun die Entdecker des indirekten Beweises gefunden zu haben. Seine Schlussfolgerung ist: die Mathematiker haben den indirekten Beweis von den Philosophen gelernt, und zwar von Parmenides und Zenon!

Diese These ist spekulativ und dementsprechend nicht ohne Widerspruch geblieben (Knorr 1980). Die schwächere These, dass mathematisches und philosophisches Argumentieren sich in derselben Dialogkultur griechischer Philosophenschulen entwickelt haben, ist dagegen plausibel und wohl belegt.

Insgesamt zeichnet Szabó für die Genese des axiomatisch-deduktiven Verfahrens folgendes Bild. Nach einer Phase anschauungsgebundenen Beweisens, die im 6. vorchristlichen Jahrhundert begonnen habe und deren wichtigster Vertreter Thales gewesen sei, habe unter dem Einfluss der Philosophie in der Mitte des 5. Jh. v. Chr. ein Prozess der Abwendung von Empirie und Anschauung eingesetzt, der schließlich in den Elementen Euklids gipfelte. Dort werden Geometrie und Arithmetik als ein rein begriffliches System dargestellt - mit Beweisen, die von den beigegebenen Figuren, und damit von der Anschauung, letztlich unabhängig sind. Die Axiomatisierung der Mathematik bei den Griechen erfolgte also in einem eineinhalb Jahrhunderte währenden Prozess, der von der Dialogpraxis der Philosophenschulen nicht getrennt werden kann.

3. Die Rettung der Phänomene und die hypothetisch-deduktive Methode

Wir haben gesehen, dass die Griechen die Universalität des axiomatisch-deduktiven Verfahrens verstanden und für die Mathematisierung einer Reihe von Wissenschaftsdisziplinen genutzt haben. Die in diesem Zusammenhang notwendig auftretende Frage nach der Beziehung von Theorie und Empirie haben sie am Beispiel der Astronomie exemplarisch diskutiert, mit Folgewirkungen bis auf Kepler und Galilei. Die Hypothesen über die Bahnen der Planeten mussten etwa so beschaffen sein, dass sie einerseits den damaligen Überzeugungen über die Fundamentalität und Einfachheit der Kreisbewegung genügten, andererseits aber auch die Tatsache erklärten, dass die Planeten auf ihrem Weg durch den Fixsternhimmel in regelmäßigen Abständen eine rückläufige Bewegung ausführen. Das Schlagwort von der „Rettung der Phänomene“ ist griechischen Ursprungs („sozein ta phainomena“) und stammt aus einer wissenschaftstheoretischen Diskussion zur Astronomie, die erstmalig bei Plato erwähnt und bis in die frühe Neuzeit weitergeführt wurde (vgl. Mittelstrass 1962). Mit der „Rettung der Phänomene“ ist gemeint, dass die Hypothesen, mit deren Hilfe man die Bahnbewegung der Planeten beschrieb, so gestaltet werden müssen, dass sich aus ihnen die gemessenen Daten und insbesondere die Rückwärtsbewegung der Planeten ableiten lassen. Damit entspricht die „Rettung der Phänomene“ genau der zweiten Bedeutungsvariante, die Szabó für den Hypothesengebrauch in der Dialektik festgestellt hat: eine Hypothese wird aufgestellt, und man prüft, ob ihre Konsequenzen erwünscht sind, d.h. den Daten entsprechen, oder nicht. Im positiven Fall spricht dies für die Annahme der Hypothese, im negativen Fall muss sie verworfen werden.

Szabó stellt diese Verbindung nicht her. Die Formel der Rettung der Phänomene scheint in der Antike nur auf die Astronomie angewandt worden zu sein (Mittelstrass 1962). Dennoch sollte nicht übersehen werden, dass hier der Sache nach eine Querverbindung besteht (Jahnke 2009), und immerhin tritt diese Problematik in Platos (späten) Dialogen auf.

Im 16. und 17. Jahrhundert setzte, wiederum in der Astronomie, eine neue Diskussion über die Rolle von Hypothesen in den Wissenschaften ein. Diese Diskussion mündete bei Kepler, Galilei und Huygens in der Auffassung, dass Hypothesen am Anfang (natur-)wissenschaftlicher Theoriebildung nicht notwendig in sich evident sein müssen. Vielmehr erweist sich ihre Wahrheit/Angemessenheit dadurch, dass ihre Konsequenzen mit der Erfahrung (insbesondere mit Messungen) übereinstimmen. Am Ende des 19. Jahrhunderts hat man dann diese Auffassung als „hypothetisch-deduktive Methode“ bezeichnet.

Im Hinblick auf die Gültigkeit wissenschaftlicher Theorien findet man also schon in der Antike zwei verschiedene Begriffe von Evidenz. Den einen kann man als ‚direkte Evidenz’ bezeichnen. Er bezieht sich darauf, dass eine Aussage aus sich heraus evident und nicht bezweifelbar erscheint. Den zweiten Evidenzbegriff wollen wir als ‚indirekt' bezeichnen. Dies soll bedeuten, dass eine Hypothese auch dadurch an Akzeptabilität gewinnt, dass die aus ihr abgeleiteten Konsequenzen mit der Erfahrung übereinstimmen. Wir hatten diesen Typ von Evidenz in der griechischen Dialogpraxis ebenso gefunden wie in der Redeweise von der ‚Rettung der Phänomene' und der modernen ‚hypothetisch-deduktiven Methode'.

4. Beweisen in der Sekundarstufe

Für das Beweisen in der Sekundarstufe ergeben sich offensichtliche Konsequenzen, die unter Mathematikern und Didaktikern nicht umstritten sind. Die wichtigste ist: ohne eine Dialogkultur im mathematischen Klassenzimmer kann es keine Hinführung zum eigenständigen Beweisen geben. Erfahrene Lehrerinnen und Lehrer wissen auch, dass die Erörterung von Paradoxien (Zenon) und Gedankenexperimenten eine wichtige Möglichkeit ist, um den Schülern den inhärenten Reiz des logisch-spekulativen Denkens nahezubringen.

Darüber hinaus sollte im Unterricht *explizit thematisiert* werden, was ein Beweis ist und worin der Sinn des mathematischen Beweisens besteht. Dabei handelt es sich um Wissen über Beweise. Heinze & Reiss (2003) sprechen seit mehreren Jahren vom *Methodenwissen* zum Beweisen. Sie verstehen darunter den logischen Aufbau von Beweisen, die zulässige Verkettung zweier Argumente, die Vermeidung von Zirkelschlüssen, Lückenlosigkeit der Argumentation etc. (vgl. auch Ufer et al. 2009).

Parallel dazu müsste aber an substanziellen Beispielen immer wieder thematisiert werden, was der Sinn des Beweisens ist. Die Einsichten, um die es hierbei ginge, lassen sich in folgenden Punkten zusammenfassen:

1. Ein mathematischer Beweis beweist *keine Sachverhalte*, sondern „wenn-dann-Aussagen". Bewiesen wird nicht ein Sachverhalt B, sondern eine *Implikation* „Wenn A, dann B".

2. Die *Sicherheit* der Mathematik liegt nicht in ihren Aussagen, sondern in ihren Schlüssen.

3. Die *Akzeptabilität der Hypothesen*, die man in der Mathematik benutzt, ist eine Sache der Bewertung. Es gibt Hypothesen, die ein hohes Maß an unmittelbarer Evidenz haben und denen man daher hochgradig vertraut, und Hypothesen, denen man vertraut, weil die Folgerungen aus ihnen mit den Erfahrungen übereinstimmen. Letzteres ist die Denkfigur, die der hypothetisch-deduktiven Methode zugrunde liegt.

4. In der *Arithmetik* (und Kombinatorik) hat man es mit Gedankenobjekten zu tun, über die wir hohe Kontrolle haben. Dagegen streift man in der *Geo-*

metrie bereits den Bereich der Physik. Ihre Aussagen unterliegen daher im Prinzip der Kontrolle durch die Erfahrung. Die Zuverlässigkeit der Euklidischen Geometrie im Bereich „mittelgroßer Objekte“ ist eine Erfahrungstatsache und kein Faktum des reinen Denkens.

5. Gerade weil man in der Mathematik hypothetische Gedankengebäude errichtet, stellt das mathematische Schließen besondere Anforderungen der *Strenge*.

Um solche Einsichten zu ermöglichen, vertrete ich seit einiger Zeit den Ansatz, das Beweisen in den Kontext der hypothetisch-deduktiven Methode zu stellen (Jahnke 2007). Inhaltlich sind dazu besonders elementare physikalische Anwendungen geeignet. Dies sind für Schüler überschaubare empirische Theorien mit hohem deduktivem Potential.

Literatur

Heinze, A. & K. Reiss (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. *International Newsletter of Proof*: 4-6.

Jahnke, H. N. (2007). Proofs and Hypotheses. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 79-86.

Jahnke, H. N. (2009). The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In: G. Hanna, H. N. Jahnke & H. Pulte (Hrsg.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. New York et al: Springer**,** 17-32

Knorr, W. R. (1980). On the early history of axiomatics: the interaction of mathematics and philosophy in Greek antiquity. In J. Hintikka & D. Gruender & E. Agazzi (Hrsg.), *Theory change, ancient axiomatics, and Galileo's methodology. Proccedings of the 1978 Pisa Conference on the History and Philosophy of Science*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 145 - 186.

Máté, A. (2006). Árpád Szabó and Imre Lakatos, or the relation between history and philosophy of mathematics. *Perspectives on Science*, *14*(3), 282-301.

Mittelstrass, J. (1962). Die Rettung der Phänomene. Ursprung und Geschichte eines antiken Forschungsprinzips. Berlin: Walter de Gruyter & Co.

Popper, K. R. (2005), *Die Welt des Parmenides. Der Ursprung des europäischen Denkens*. Hrsg. von Arne F. Petersen. München, Zürich: Piper

Szabó, Á. (1960). “Anfänge des Euklidischen Axiomensystems.” *Archive for History of Exact Sciences* 1: 38-106.

Ufer, S., Heinze, A., Kuntze, S., & Rudolph-Albert, F. (2009). Beweisen und Begründen im Mathematikunterricht. Die Rolle von Methodenwissen für das Beweisen in der Geometrie. *Journal für Mathematik-Didaktik, 30*(1), 30-54.

UELI MAURER, Zürich

Kryptografie – Paradoxa der Mathematik

Die Faszination, die von der Kryptografie ausgeht, hat mehrere Gruende. Aus historischer Sicht ist es die Tatsache, dass Erfolge der Kryptoanalyse das Weltgeschehen massgebend gepraegt haben. Aus wissenschaftlicher Sicht sind es die vielen paradoxen Resultate. Wie kann es z.B. moeglich sein, dass zwei Parteien rein durch oeffentliche Kommunikation, ohne jegliche Geheimhaltung, einen geheimen Schluessel erzeugen koennen? Und wie ist es moeglich, einen mathematischen Beweis zu fuehren, ohne dabei jegliche Information ueber den Beweis wegzugeben, ausser der Tatsache, dass er stimmt? In diesem Vortrag diskutieren wir diese und weitere mathematische Paradoxa der Kryptografie.

Ulrich KORTENKAMP, Karlsruhe, Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Christian SPANNAGEL, Heidelberg

Schnittstellenaktivität Hochschul-Mathematikdidaktik

1. Wozu Hochschul-Mathematikdidaktik?

Auf der GDM-Tagung in München 2010 beschäftigten sich erfreulicherweise verschiedene Vorträge und Aktivitäten mit dem Thema Hochschul-Mathematikdidaktik, unter anderem eine 90-minütige Schnittstellenaktivität, auf die sich dieser Artikel bezieht. Obwohl schon in der ICMI Study von 2001 (Holton, 2001) von Claudi Alsina gefordert wurde: „Teaching mathematics at university level should be an enjoyable human experience in which professors share with students the discovery of a new mathematical world as well as their development as person." (Alsina, 2001, S. 11), ist der Alltag des Mathematiklernens an Hochschulen noch weit davon entfernt, eine „angenehme menschliche Erfahrung" zu sein.

Die Notwendigkeit für die intensivere Beschäftigung mit Hochschul-Mathematikdidaktik ergibt sich aus verschiedenen Gründen:

- In vielen Studiengängen wie Ingenieurswissenschaften, Informatik, Psychologie und Wirtschaftswissenschaften sind Lehrveranstaltungen in Mathematik verpflichtende Bestandteile, insbesondere im Grundstudium. Nicht selten scheitern Studierende an den Anforderungen, die in diesen Veranstaltungen an sie gestellt werden. Hohe Durchfallquoten in Klausuren sind dabei sicher nicht nur auf die Lernunwilligkeit der Studierenden zurückzuführen, sondern insbesondere auch auf das Fehlen einer lernförderlichen didaktisch-methodischen Gestaltung der Vorlesung und der Übungen.
- Eine andere Ursache für Probleme der Studierenden in der Hochschulmathematik kann auch in der Nicht-Passung von Schulmathematik und Hochschulmathematik begründet sein. Der Mathematikunterricht in Schulen hat sich seit den eigenen Schulzeiten der Mathematiklehrenden geändert, und zwar sowohl bezüglich der vermittelten Inhalte als auch der eingesetzten Lehr-Lernmethoden und Prüfungsformen. So benötigen Studierende unter Umständen viel Zeit um sich auf die „andere" Art des Mathematiklernens einzustellen.
- Der Einsatz von Technologie zur Berechnung mathematischer Probleme ist aus dem Alltag von Ingenieuren, Naturwissenschaftlern und Fachmathematikern nicht mehr wegzudenken. Trotzdem werden Studierende teilweise immer noch in einer fast „technik-feindlichen" Art und Weise in Mathematik an der Hochschule ausgebildet.

- Lehramtsstudierende des Fachs Mathematik werden in mathematik-didaktischen Veranstaltungen in offene, aktivierende und produktive Formen von Mathematikunterricht eingeführt. Gleichzeitig erleben sie in den (Fach-)Veranstaltungen oft weiterhin frontalen Vorlesungsstil und Vorrechen-Übungen. Will man erreichen, dass die heutigen Lehramtsstudierenden neue Formen des Mathematiklernens in ihrem künftigen schulischen Wirken umsetzen, dann müssen sie in den Hochschulveranstaltungen aktivierende Formen des Mathematiklernens selbst kennen lernen. Dies bedeutet, aktives Mathematiklernen nicht nur in Didaktikvorlesungen zu „predigen“, sondern auch in den Vorlesungen umzusetzen.

2. Pro und Contra zu Vorlesungen in Mathematik

In einer Diskussionsphase der Schnittstellenaktivität „Hochschul-Mathematikdidaktik“ sammelten die Teilnehmerinnen und Teilnehmer die folgenden Punkte zu Für und Wider der (großen) Frontal-Vorlesungen in Mathematik:

Pro:

- Experten-Novizen-Effizienzmodell (Vorlesungen sind eine sehr effiziente Möglichkeit, Expertenwissen an Novizen weiterzugeben.)
- Es gibt Inhalte, die müssen frontal vermittelt werden.
- Portionierung der Inhalte muss durch Experten erfolgen.
- Bedürfnis der Studierenden nach Strukturiertheit, „abgucken“ von Experten.
- Es gibt keine Forschungsergebnisse, die gegen die Methode der Vorlesung sprechen.
- Bisher wurde noch nichts Besseres gefunden.

Contra:

- In Vorlesungen findet keine Sinnkonstruktion der Studierenden statt.
- Vorlesungen erfordern „perfekte“ Lehrende.
- Expertenwissen lässt sich nicht passend für alle portionieren.
- Hohe Abbrecherquoten sind Folge der (großen) Vorlesungen.
- Eigenes Erarbeiten und Entdecken kommen zu kurz.

Im Sinne einer prozessorientierten Sicht auf Mathematiklernen und mit dem Ziel, dass Studierende Mathematik treiben anstatt sie nur auswendig zu lernen, kommt insbesondere dem letzten Gegenargument eine besondere Bedeutung zu. Anstatt vorgetragene Inhalte zu rezipieren, sollten Studierende zum aktiven Mathematiktreiben angeregt werden.

In den folgenden Abschnitten werden drei Beispiele gegeben, wie man aktives Mathematiklernen in der Hochschullehre umsetzen kann: das „aktive Plenum“ als Alternative zu Frontalvorlesungen, aktivierende Übungen und eine projektorientierte Vorlesung zur anwendungsbezogenen Mathematik. Die Beispiele stammen aus der Lehramtsausbildung, können aber auch auf das Fachstudium übertragen werden.

3. Das aktive Plenum

Große Gruppen verführen zur Methode des Vortrags. Der Dozent führt an der Tafel in mathematische Konzepte ein, schreibt Beweise an und erläutert Sätze und Axiome. Die Studierenden rezipieren den Vortrag. Nicht selten kommt es dabei vor, dass Studierende zu einem bestimmten Zeitpunkt „abgehängt“ werden und dem Gesagten nicht mehr inhaltlich folgen können. Die Folge davon ist, dass sie ohne Verständnis mitschreiben und dadurch oft wichtige Randbemerkungen nicht erfassen. Zudem besteht die Gefahr der „Illusion des Verstehens“: Studierende glauben, den präsentierten Lösungsweg verstanden zu haben, durchdringen aber nicht die kritischen Stellen und erwerben nur ein oberflächliches Verständnis. Darüber hinaus können Studierende mit einem niedrigen mathematischen Kompetenzgefühl zu der Ansicht gelangen, dass zwar der Dozent fähig ist, solche Lösungen zu produzieren, dass sie selbst dies aber niemals könnten.

Im Sinne des prozessorientierten Lernens werden Studierende in der Methode des aktiven Plenums dazu angehalten, die Lösungsprozesse kollaborativ selbst durchzuführen (Iberer, in press; Spannagel, in press). Bei dieser Methode wird die Gruppe als *Plenumsversammlung* aufgefasst, die gemeinsam Problemlösungen aushandelt, Entschlüsse fasst und Fragen klärt. Der Dozent verlässt die frontale Position, setzt sich in die letzte Reihe des Raumes und übergibt die Kontrolle an das Plenum. Studierende kommen nach vorne und lenken die Diskussion. So gibt der Dozent beispielsweise eine Beweisaufgabe an das Plenum. Zwei Studierende stehen vorne an der Tafel: Einer ruft Personen im Raum auf, die etwas zur Lösung des Problems beitragen möchten, ein anderer schreibt die Ideen und Lösungsschritte an die Tafel. Der Dozent muss dabei für die entsprechende Atmosphäre sorgen: Erstens muss absolute Ruhe herrschen. Zweitens muss der Dozent immer wieder herausstellen, dass Ideen einfach geäußert werden und nicht (etwa aus Angst vor Fehlern) zurückgehalten werden sollen. Jeder Beitrag ist wichtig, auch derjenige, der zunächst in eine falsche Richtung weist. Drittens muss der Dozent die Studierenden an der Tafel methodisch unterstützen und Hinweise geben, falls diese nicht weiter wissen.[1]

Diese Methode hat mehrere Vorteile: Erstens trauen sich Studierende eher, Fragen zu stellen und Unklarheiten zu äußern. Diese Beiträge werden nämlich nicht an den Dozenten gerichtet, sondern an das Plenum. Die Studierenden diskutieren „unter ihresgleichen". Zweitens werden Prozesse direkt im Plenum vollzogen. So werden nicht die fertigen Beweise an die Tafel geschrieben, sondern der *Beweisprozess* findet – sichtbar für alle – im Plenum statt. Dabei können auch Beweisideen auftauchen, die in eine falsche Richtung weisen oder in eine Sackgasse. Das Plenum kann dann gemeinsam aushandeln, *warum* dieser Ansatz nicht zielführend ist und ein anderer gewählt werden sollte. Derartige Überlegungen werden selten in Dozentenvorträgen explizit aufgegriffen und durchgeführt. Drittens kann der Dozent sich voll und ganz auf die Beiträge der Studierenden konzentrieren, weil er sich aus der Frontalposition herausgenommen hat. Er kann die Lösungswege der Studierenden beobachten, er bekommt mit, welche Begriffe die Studierenden wählen und beispielsweise bei einer fehlerhaften Verwendung der Fachsprache eingreifen.

Wichtig ist hier die Wahl des richtigen Zeitpunkts, in dem der Dozent in das aktive Plenum eingreift, falls dies notwendig ist. Er sollte sich nicht zu früh äußern, damit die Chance besteht, dass Fehler vom Plenum selbst entdeckt und korrigiert werden. Ein zu spätes Einbringen führt allerdings dazu, dass Unsicherheit im Plenum entsteht. Hier ist eine gewisse Intuition notwendig, die sich mit der Zeit ausbildet.

Selbstverständlich kommt keine Lehrveranstaltung ohne inhaltlichen Input aus. Dieser kann beispielsweise durch das vorbereitende Lesen eines Skriptteils erfolgen. Es muss dabei klar sein, dass eine Teilnahme am aktiven Plenum ohne inhaltliche Vorbereitung nicht sinnvoll ist. Darüber hinaus ist das aktive Plenum nur eine der zur Auswahl stehenden *Methoden*, die im Rahmen eines Methodenmixes in der Vorlesung eingesetzt werden können. So kann der Dozent beispielsweise zu Beginn der Vorlesung in einem 15minütigem Vortrag das gelesene Skript zusammenfassen und wichtige Punkte hervorheben. Anschließend findet das aktive Plenum statt.

---

[1] Z.B. „Schauen Sie einmal, dort meldet sich jemand. Rufen Sie ihn doch auf." - „Fragen Sie doch, welche der beiden Lösungsmöglichkeiten wir als erstes aufgreifen sollten." usw.

4. Aktive Übungen

Das traditionelle Konzept von Vorrechen-Übungen beruht in erster Linie auf einem Vorführen einer Musterlösung. Dazu bearbeiten Studierende im Vorfeld einer Übungsstunde eigenständig oder in Lerngruppen wöchentliche Übungsaufgaben. In der Übungsstunde selbst führt dann der Tutor oder einzelne Studierende eine Lösung vor. Im Idealfall überprüfen die Studierenden anhand der Musterlösung ihre eigenen Lösungen, stellen Fragen und übertragen im Nachhinein die gesehenen Lösungswege auf andere, ähnliche Probleme. Problematisch ist an diesem Konzept, dass Studierende oft nicht in ausreichendem Maße die Übungsaufgaben selbstständig vorbereiten und häufig in der Übungsstunde erstmals mit den Aufgaben und deren Lösungen in Berührung kommen.[2] Sie schreiben dann die Lösungen oft ohne Verständnis ab, um sie zu einem späteren Zeitpunkt (meist direkt vor der Klausur) nachzuvollziehen. Darüber hinaus besteht auch hier die Gefahr der „Illusion des Verstehens“ (s. Abschnitt 3).

Im vom BMBF geförderten Projekt SAiL-M, in dem die Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg, Schwäbisch Gmünd und Weingarten sowie die RWTH Aachen beteiligt sind, werden neben einigen anderen Zielen (vgl. http://www.sail-m.de) auch die Entwicklung und Beschreibung von Studierenden aktivierenden Mathematikübungen verfolgt (Spannagel & Bescherer, 2009; Bescherer, Spannagel & Müller, in press). Im Gegensatz zu traditionellen Übungen rechnet hier der Tutor nicht vor, sondern betreut die Studierenden bei ihrer individuellen Arbeit an den Problemen und gibt ihnen Feedback zu ihren Lösungen. Im SAiL-M-Übungskonzept gibt es kein wöchentliches Übungsblatt, das von allen Studierenden gelöst werden soll, sondern 6-8 umfangreichere Arbeitsanregungen. Die Anregungen werden in drei Kategorien eingeteilt. Unter der Überschrift „Technik/ Methoden“ werden Aufgaben zusammengefasst, mit deren Hilfe neu eingeführte oder schon bekannte Verfahren und (Rechen-)Methoden geübt werden können. Diese Anregungen sollen möglichst selbstständig bearbeitet werden. Unter dem Stichwort „Vertiefung“ werden komplexe, offene Problemaufgaben, die zahlreiche Lösungsmöglichkeiten zulassen und zur Diskussion anregen, zusammengefasst. Dabei sollen insbesondere die Erkenntnisse, die in voran gegangen Vorlesung gewonnen werden konnten, angewandt werden. Die dritte Kategorie ist „Erfahrung“. Dies sind Anregungen, bei den die Studierenden Vorerfahrungen zu Vorstellungen / Begriffen sammeln (oder auffrischen) können, die dann in der folgenden Vorlesung systematisiert und formalisiert werden.

[2] Es gibt viele verschiedene Arten, die Vorarbeit der Studierenden durch Zwangsmaßnahmen wie z. B. Votierlisten anzuregen.

Die Studierenden suchen sich zur Bearbeitung aus jeder Kategorie mindestens eine Anregung aus. In den Übungsstunden sitzen die Studierenden in ihren Teams zusammen und bearbeiten die Arbeitsanregungen. Dabei dürfen sie alle Werkzeuge, die sie als sinnvoll im Rahmen der Aufgabenbearbeitung halten, benutzen, also auch Taschenrechner und Laptops.[3] Die Arbeitsanregungen enthalten auch Tipps und Hinweise, welche Werkzeuge empfehlenswert sind.

Die Tutoren verraten dabei nicht die Lösungen, sondern geben Tipps bzw. verhindern, dass sich die Studierenden allzu sehr in „falschen" Lösungswegen verrennen. Darüber hinaus geben sie Rückmeldung zu den Lösungsprozessen, wenn dies gewünscht wird[4]. Weiter können Probleme oder interessante Fragen in virtuellen Foren zu diskutieren oder im offenen Mathe-Raum (einer Tutorensprechstunde) besprochen werden.

Dieses Konzept dient insbesondere dazu, die Motivation der Studierenden im Sinne der Selbstbestimmungstheorie von Deci und Ryan (1993) zu fördern: Faktoren wie die Wahrnehmung von Autonomie (Wahlfreiheit bei den Arbeitsanregungen), die Wahrnehmung eigener Kompetenz (Feedback der Tutoren) und soziale Eingebundenheit (Arbeit in Teams und in der virtuellen Plattform) fördern selbstbestimmte Formen der Motivation. Darüber hinaus soll die mathematische Selbstwirksamkeitserwartung der Studierenden dadurch gestärkt werden, dass sie sich selbst als kompetent beim Lösen der Aufgaben erleben.

5. AnOrMaL: Projektorientiertes Lernen in „Vorlesungen"

Web-2.0-Anwendungen wie Wikis, Youtube, Facebook und Twitter ermöglichen es, Lehrveranstaltungen zu öffnen und Lehrende wie Lernende mit Personen außerhalb der Bildungsinstitution zu vernetzen (Spannagel & Schimpf, 2009). Gerade in Lehrveranstaltungen zur anwendungsbezogenen Mathematik können reale und virtuelle Vernetzungen mit Personen außerhalb der Hochschule genutzt werden, um authentische Kontexte für die Einbindung von Mathematik zu nutzen. Dies wurde in einer gemeinsamen Veranstaltung der Pädagogischen Hochschulen Karlsruhe und Heidelberg im Wintersemester 2009/10 unter dem Namen „AnOrMal – Anwendungsorientiert Mathematik lernen" im Rahmen von Vorlesungen für Lehramtsstudierende durchgeführt.

Traditionell wurde die Veranstaltung bisher entweder als klassische Vorlesung oder in Seminarform (mit Vorträgen der Studierenden) durch-

[3] Dieses Konzept ist in dem didaktischen Pattern TECHNOLOGY ON DEMAND beschrieben, vgl. http://www.sail-m.de.
[4] Didaktisches Pattern FEEDBACK ON DEMAND, vgl. http://www.sail-m.de.

geführt.[5] Das neue Veranstaltungskonzept sollte Raum für projektbezogenes Arbeiten bieten, bei dem die Studierenden sich intensiv mit einem Thema befassen und dann geeignet aufbereiten. Im Gegensatz zu Seminarvorträgen wurde aber – im Sinne der Produktorientierung bei Projekt-Arbeit – Wert darauf gelegt, dass diese Aufbereitung *öffentlich* stattfindet und die Beschäftigung zudem relevant für die Studierenden und ihren weiteren Bildungsweg ist. Als Endprodukt wurde daher statt eines Vortrages ein Video verlangt, welches auf der Online-Plattform YouTube veröffentlicht werden musste.[6] Die Studierenden beider Hochschulen waren dabei das Semester hindurch über Web-2.0-Tools wie Wikis, Facebook und Flickr miteinander vernetzt.[7]

Zur Unterstützung der Lern- und Arbeitsprozesse wurden Zwischenaufgaben (sog. „Challenges“) gestellt. Als erste Aufgabe sollten alle ein Foto zum Thema „Mathematik“ auf Flickr.com bereitstellen. So wurde zum einen bereits frühzeitig in der Veranstaltung auf den Einsatz von Online-Tools vorbereitet und zudem die gewünschte Einstellung zur Mathematik („Mathematik ist überall“) bei den Studierenden hervorgerufen. Im weiteren Verlauf interviewten Studierende dann in kleinen Teams Personen in verschiedenen Berufen und fanden dabei heraus, welche Mathematik sie im Rahmen ihrer Arbeit benötigen bzw. benutzen.

In den Veranstaltungszeiten, die früher für Vorträge zu unterschiedlichen Themen der anwendungsbezogenen Mathematik genutzt wurden, berieten die Studierenden in ihren Teams ihr weiteres Vorgehen. Gelegentlich führte der Dozent in gewisse Themen ein, z.B. mathematisches Modellieren, die Nutzung des Wikis oder die Erstellung von Storyboards für die Produktion des Films. Während früher verschiedene Themen in der Breite inhaltlich angerissen wurden, mussten sich die Studierenden vertieft in ein einziges Thema einarbeiten. Der Schwerpunkt verschob sich dabei von breitem inhaltlichem Wissen hin zu vertieftem Prozesswissen: Die Studierenden lernten, sich selbstständig in ein unbekanntes mathematisches Gebiet einzuarbeiten und dies verständlich für andere inhaltlich und medial aufzubereiten. Diese Kompetenz wird auch später in der Schule benötigt.

Die Meinungen der Studierenden zum neuen Konzept waren größtenteils positiv. Es wurde gelobt, dass Alternativen zum traditionellen Vorlesungskonzept ausprobiert werden, und dass man mit einer solchen Veranstaltung

---

[5] Die zweistündige Veranstaltung war mit 2 ECTS-Punkten ausgewiesen, eine Note war nicht erforderlich.

[6] Die von den Studierenden produzierten Filme sind auf YouTube unter der Adresse http://tinyurl.com/ykptepl zu finden. (letzter Abruf am 1.4.2010)

[7] siehe http://cermat.org/wiki/index.php/AnOrMaL (letzter Abruf am 27.3.2010)

besser auf die spätere Tätigkeit als Mathematiklehrerin oder -lehrer vorbereitet wird. Andererseits wünschten sich aber auch einige Studierende mehr mathematischen „Input“ vonseiten der Dozenten. Bemängelt wurde auch, dass die große Freiheit, die im Konzept lag, nicht von allen gut genutzt wurde. Es wurde vorgeschlagen, dass zu jeder Veranstaltung eine Pflichtanwesenheitsphase von 5 Minuten eingeführt wird, in der – ganz real – der Kontakt zwischen allen Studierenden hergestellt wird.

6. Ausblick

Die hier vorgestellten Konzepte sind zurzeit in der Entwicklungs-, Erprobungs- und Evaluationsphase. Um gesicherte Erkenntnisse über die Wirkung bestimmter Methoden in der Mathematiklehre an der Hochschule zu erhalten, müssen zukünftig verstärkt hochschul-mathematikdidaktische Forschungsprojekte durchgeführt werden. Aus diesem Grund wurde Ende des Jahres 2009 ein neuer GDM-Arbeitskreis „Hochschul-Mathematikdidaktik“ gegründet, dessen Aufgabe es ist, den Austausch in diesem Feld voranzutreiben. Weitere Informationen und Ansprechpartnerinnen dazu finden sich unter http://www.hochschulmathematikdidaktik.de.

Literatur

Alsina, C. (2001). Why the professor must be a stimulating teacher. In D. Holton (Ed.) (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study* (S. 3-11). Dordrecht: Kluwer.

Bescherer, C., Spannagel, C. & Müller, W. (in press). Activating students in introductory mathematics tutorials (europlop 2008). In Schlümmer, T. (Hrsg.) *Proceedings-Band der EuroPLoP 2008*, Irsee, Deutschland.

Deci, E. L. & Ryan, R. M. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik*, *39*(2), 223–238.

Holton, D. (Ed) (2001). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer.

Iberer, U. (in press). Das Aktive Plenum: Neue didaktische Potenziale einer klassischen Sozialform. Erscheint in L. Berger, C. Spannagel & J. Grzega (Hrsg.), *Lernen durch Lehren im Fokus. Berichte von LdL-Einsteigern und LdL-Experten*.

Spannagel, C. (in press). Das aktive Plenum in Mathematikvorlesungen. Erscheint in L. Berger, C. Spannagel & J. Grzega (Hrsg.), *Lernen durch Lehren im Fokus. Berichte von LdL-Einsteigern und LdL-Experten*.

Spannagel, C. & Schimpf, F. (2009). Öffentliche Seminare im Web 2.0. In A. Schwill & N. Apostolopoulos (Hrsg.), *Lernen im Digitalen Zeitalter. Workshop-Band. Dokumentation der Pre-Conference zur DeLFI 2009* (S. 13–20). Berlin: Logos.

Spannagel, C. & Bescherer, C. (2009). Didaktische Entwurfsmuster für technologieunterstützte Mathematikübungen. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Hildesheim: Franzbecker

Rolf BIEHLER, Paderborn, Reinhard HOCHMUTH, Kassel, Wolfram KOEPF, Kassel

Mathematische Brückenkurse

Zur Erleichterung des Übergangs von Schule zu Hochschule werden an vielen Universitäten mathematische Vor- oder Brückenkurse angeboten. Diese richten sich – oftmals differenziert – an Studierende mit unterschiedlichsten Fächern: über die verschiedenen Arten von Lehramtsstudierenden mit dem Fach Mathematik, Studierende der Ingenieur- und Naturwissenschaften bis zu Bachelor-Studierenden der Mathematik.

In dieser Schnittstellenaktivität stellten sich verschiedene Brückenkurse mit ihren didaktischen Konzepten und Projekte zur Entwicklung von E-Learning-Materialien für Brückenkurse vor. Ferner wurden Ergebnisse von Vor- und Nachtests vorgestellt, die zur grundsätzlicheren Diskussion einluden, welche Vorkenntnisse Studierende mitbringen (sollten) und was Brückenkurse tatsächlich leisten (können).

Die Vertreter der verschiedenen Projekte waren aufgefordert in ihren Kurzpräsentationen insbesondere die folgenden Fragen zu beantworten:

- Was ist das Besondere am jeweiligen Vorkurs (z.B. Material, Kurskonzept, didaktischer Ansatz, Kompetenztests, Evaluationsinstrumente)? Wovon könnten andere Vorkurse profitieren?
- Welche Probleme und Fragestellungen sind besonders wichtig, so dass man sich Anregungen/Lösungen von anderen Vorkursen erhofft bzw. diese zur Diskussion im Münchner Workshop oder für nachfolgende Kooperationen vorschlägt?

Die vorgestellten Brückenkurse unterschieden sich insbesondere bezüglich ihres Ablaufs. So werden Brückenkurse etwa als reine Präsenzkurse aber auch als reine Onlinekurse angeboten.

Die Präsenzkurse besitzen typischerweise eine Tagesstruktur, die am Vormittag Vorlesungen und am Nachmittag Übungen vorsieht. Zusätzlich werden in der Regel Übungsaufgaben zur individuellen Bearbeitung ausgegeben. Es gibt auch Präsenzkurse, die Tage vorsehen, an denen die Teilnehmer nicht nur Übungsaufgaben selbständig bearbeiten, sondern sich auch Themen anhand dafür entwickelter Lernmaterialien erarbeiten sollen.

Reine Onlinekurse sind (noch) eher selten. Dies erklärt sich zum Teil daraus, dass für einen solchen geeignetes Material hergestellt werden muss. Präsenzkurse erfordern im Vergleich dazu erheblich weniger Vorarbeiten. Hier sind aber universitätsübergreifende und europaweite Angebote in

Vorbereitung, über die ebenfalls im Rahmen der Schnittstellenaktivität berichtet wurde. Eine besondere Herausforderung im Rahmen solcher Angebote stellt u.a. das Problem dar, komplexe Aufgaben zu bearbeiten und dann automatisch auszuwerten.

In der Regel werden derzeit Brückenkurse im Rahmen von Blended-Learning-Szenarien umgesetzt, d.h. sie kombinieren Präsenz- mit Selbstlernphasen, in denen Onlinematerial (teilweise auf CD) genutzt werden soll. Dabei kommen insbesondere Lernplattformen wie Moodle oder Ilias zum Einsatz.

Auch die geplanten Online-Brückenkurse werden für Blended-Learning Szenarien einsetzbar sein. Insbesondere werden sie in irgendeiner Form mit mündlichen oder schriftlichen Beratungsangeboten kombiniert. Dabei kann es sich um so verschiedene Dinge wie Rückmeldungen bezüglich Aufgabenbearbeitungen oder auch um Einführungstage handeln.

Die Dauer der Kurse ist sehr unterschiedlich. So finden sich zweiwöchige Kursangebote genauso wie Angebote, auf die ganzjährig zugegriffen werden kann.

Die meisten Kurse berichten über Eingangs- und Ausgangsklausuren. Neben einer Rückmeldungsfunktion für die Kursteilnehmer werden die Klausurergebnisse von den Kursanbietern in der Regel auch als Evaluierungsinstrumente eingesetzt. So konnten nahezu alle Kursanbieter über Kompetenzfortschritte ihrer Brückenkursteilnehmer berichten. Solche Fortschritte können unseres Erachtens auch für die Kurse unterstellt werden, in denen diese Klausuren nicht in kontrollierter Form durchgeführt werden. Nur teilweise wurde über den Einsatz diagnostischer Testelemente während der Brückenkurse berichtet.

So unterschiedlich wie die Organisation und der Ablauf der Brückenkurse gestaltet sich auch die Auswahl der Inhalte. Dies erscheint überwiegend der Tatsache geschuldet, dass sich bezüglich der verschiedenen Standorte sowohl die Lernvoraussetzungen der Kursteilnehmer wie auch die Lernziele bezogen auf die Anforderungen der nachfolgenden Studiengänge mehr oder weniger stark unterscheiden. Bemerkenswert ist sicher, dass alle Kursanbieter, wenn auch in unterschiedlicher Gewichtung, über die Notwendigkeit berichten, auch Inhalte der Sekundarstufe I zum Gegenstand der Kurse zu machen.

Die zentralen Inhalte betreffen sicher die gymnasiale Oberstufe, hier insbesondere die Inhalte der Grundkurse. Es gibt beispielsweise aber auch Vorkursangebote, die spezifisch an Lehramtsstudiengängen ausgerichtet sind und Elementarmathematik etwa aus den Bereichen Arithmetik und Algebra zum Gegenstand haben. Eher selten wird für Vorkurse das Anliegen formuliert, dass deren Inhalte ebenfalls überblicksartig oder einführend ins erste Studienjahr reichen sollen. Es gibt eher kalkülorientierte und aber auch eher verständnisorientierte Brückenkursangebote.

Evaluierungen, wenn auch in unterschiedlicher Form und von verschiedenem Umfang, führen letztlich alle Brückenkurse durch. Neben den schon genannten Ein- und Ausgangstests werden insbesondere Befragungen zur Zufriedenheit und zu Verbesserungswünschen der Kursteilnehmer durchgeführt. Insgesamt sind derzeit die Kursteilnehmer mit ihren jeweiligen Kursangeboten sehr zufrieden. Dabei wurde jedoch ergänzt, dass die Kursabbrecher in den Abschlussevaluationen nicht erfasst werden. Die Gründe für die vorzeitige Beendigung zu kennen, wäre für die Verbesserung der Brückenkurse jedoch interessant

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass Brückenkurse offenbar eine Reaktion auf ein weitverbreitetes Bedürfnis von Studienanfängern darstellen und dieses auch (zumindest subjektiv) zu einem großen Teil befriedigen können. Sicher lässt sich noch einiges verbessern. Offene Fragen betreffen etwa eine individuumsorientiertere Auswahl der Lerninhalte und lernerzentriertere Vermittlungsformen oder auch die Ausgestaltung stärker zielorientierter (etwa anwendungsorientierter oder grundlagenorientierter) Brückenkursangebote. Mancherorts wird darüber nachgedacht, Vorkurse mit Self-Assessment-Möglichkeiten auch frühzeitig an Schulen bekannt zu machen und damit für das Studium zu werben, bzw. den Schülerinnen und Schülern Möglichkeiten zur Beurteilung Ihres mathematischen Wissens an die Hand zu geben, um eine Studienentscheidung fundierter fällen zu können.

Vielerorts wird auch darüber nachgedacht, wie die über klassische Brückenkurskonzepte hinausgehenden Funktionen solche Kurse, wie etwa Orientierungshilfen zum Studienbeginn zu bieten oder grundlegende universitätsbezogene Lernstrategien zu vermitteln, noch besser in die bisherigen Kursangebote integriert werden können. Nicht zuletzt stellen die demnächst auf die Hochschulen zukommenden doppelten Abiturjahrgänge eine große Herausforderung für die bisherigen Brückenkursangebote dar.

Selbstverständlich wäre es an dieser Stelle wünschenswert, bezüglich all der vorstehend angesprochenen Punkte differenzierte Auskünfte bezüglich der verschiedenen Kursangebote zu geben. Dafür waren die sehr informativen und gut vorbereiteten Kurzvorträge letztlich aber zu uneinheitlich und nicht hinreichend. Dafür sind noch umfangreichere Nachforschungen und Nachfragen an die Anbieter notwendig. Dies konnte in der kurzen Zeit nach der Schnittstellenaktivität noch nicht zufriedenstellend geleistet werden. Ein Überblick, der in systematischerer Weise über Gemeinsamkeiten, Unterschiede und Hintergründe (wie Ziele der Kurse oder didaktische Konzepte) berichtet, ist in Vorbereitung und wird noch in diesem Jahr zur Verfügung stehen.

Unter den Teilnehmern bestand Konsens, dass ein weiterer bundesweiter Austausch über Brückenkurse, dann mit mehr Möglichkeit zur Diskussion und zum wechselseitigen Austausch, wünschenswert ist. Die Organisatoren dieser Schnittstellenaktivität planen, dafür in absehbarer Zeit eine Gelegenheit zu organisieren.

Brückenkurskonzepte, die sich in der Schnittstellenaktivität vorstellten, waren (in alphabetischer Reihenfolge):

- DHBW Stuttgart
  www.dhbw-stuttgart.de/themen/studium/fakultaet-technik/vorkurs-mathematik.html
  Ansprechpartner: Jan Peter Gehrke (gehrke@dhbw-stuttgart.de)
- FH Südwestfalen
  www3.fh-swf.de/fibw/a_sommer/vorkurs-online.htm
  Ansprechpartner: Adriane Sommer (asommer@fh-swf.de)
- Math-Bridge (Diverse Universitäten)
  www.math-bridge.org/mathbridge/index.php
  Ansprechpartner: Rolf Biehler (biehler@math.upb.de); Pascal Fischer (pascal.fischer@mathematik.uni-kassel.de); Reinhard Hochmuth (hochmuth@mathematik.uni-kassel.de);Thomas Wassong (wassong@math.uni-paderborn.de)
- Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg
  www.thphys.uni-heidelberg.de/~hefft/vk1/
  Ansprechpartner: Klaus Hefft (K.Hefft@ThPhys.Uni-Heidelberg.de)
- TU Berlin
  www.mumie.net.en/index.php und www3.math.tu-berlin.de/OMB/
  Ansprechpartner: Ruedi Seiler (seiler@math.TU-Berlin.de)
- TU Braunschweig
  www.math.tu-bs.de/stochastik/vorl/vorkurs-09.html
  Ansprechpartner: Lothar Schüler (l.schueler@tu-bs.de)
- TU München (Fakultät für Mathematik)
  vorkurse.ma.tum.de
  Ansprechpartner: Rene Brandenberg (brandenb@ma.tum.de)
- Universität Flensburg
  www.uni-flensburg.de/mathe/zero/zero.html

Ansprechpartner: Anca Popa-Fischer (popa-fischer@uni-flensburg.de)

- Universität Kassel
  http:\\www.mathematik.uni-kassel.de/~vorkurs/
  Ansprechpartner: Reinhard Hochmuth (hochmuth@mathematik.uni-kassel.de); Wolfram Koepf (koepf@mathematik.uni-kassel.de); Pascal Fischer (pascal.fischer@mathematik.uni-kassel.de)
- Universität Kiel
  www.physik.uni-kiel.de/mvk/
  Ansprechpartner: Joachim Stettner (stettner@physik.uni-kiel.de)
- Universität Paderborn
  www2.math.uni-paderborn.de/studieninteressierte/vorkurse/vorkurs-mathe.html
  Ansprechpartner: Rolf Biehler (biehler@math.upb.de); Juliane Klemm (jklemm@math.upb.de); Alina Lompe (lompe@math.upb.de); Thomas Wassong (wassong@math.uni-paderborn.de)
- Universität Stuttgart (Fakultät Mathematik und Physik)
  vorkurs.mathematik.uni-stuttgart.de
  Ansprechpartner: Norbert Röhl (roehrl@iadm.uni-stuttgart.de)
- Universität Stuttgart und Ulm
  mo.mathematik.uni-stuttgart.de und www.mathematik-online.de
  Ansprechpartner: Wolfgang Kimmerle (Wolfgang.Kimmerle@mathematik.uni-stuttgart.de)
- VEMA TU Darmstadt
  Ansprechpartner: Regina Bruder (bruder@mathematik.tu-darmstadt.de)

Regina BRUDER, Darmstadt, Jürgen ELSCHENBROICH, Neuss, Gilbert GREEFRATH, Köln, Hans-Wolfgang HENN, Dortmund, Jürg KRAMER, Berlin, Guido PINKERNELL, Darmstadt

Schnittstelle Schule – Hochschule

1. **Einführung** (Regina Bruder)

Eine Initiativgruppe aus Mitgliedern der DMV, GDM, dem MNU und T³ hat sich seit Oktober 2009 intensiv mit aktuellen Problemen an der Schnittstelle von Schule und Universität beschäftigt. In dieser Initiativgruppe wirken gemeinsam mit den Autoren dieses Beitrages *Bärbel Barzel, Wolfram Koepf, Hans-Georg Weigand* und *Wilhelm Weiskirch* mit. Unser Ziel ist die Sensibilisierung der Akteure und Verantwortlichen in Schule, Hochschule und Bildungsadministration für die aktuellen Schnittstellenprobleme und das Anstoßen sowie Verstetigen eines Dialogs auf verschiedenen Handlungsebenen, u.a. in Form einer Arbeitsgruppe der KMK mit Aufgaben der Koordination des Informationsaustausches zwischen Schulen und Hochschulen, einer bundesweiten Abstimmung mathematischer Inhalts- und Kompetenzkataloge für den Schulabschluss und einheitlicher Regelungen für zentrale Prüfungen auch bzgl. des Einsatzes digitaler Medien bis hin zu einer Diskussion von Forschungs- und Entwicklungsfragen und Empfehlung entsprechender Projekte im Schnittstellenbereich von der Entwicklung innovativer Unterrichtskonzepte für die Schule bis hin zu hochschuldidaktischen Fragestellungen. Insbesondere ist eine systematische Beobachtung der mathematischen Voraussetzungen bei Studienanfängern erforderlich.
Die einzelnen Problemperspektiven mit ersten Lösungsvorschlägen werden in den folgenden Abschnitten erläutert.

2. **Die Perspektive der Schule** (Guido Pinkernell)

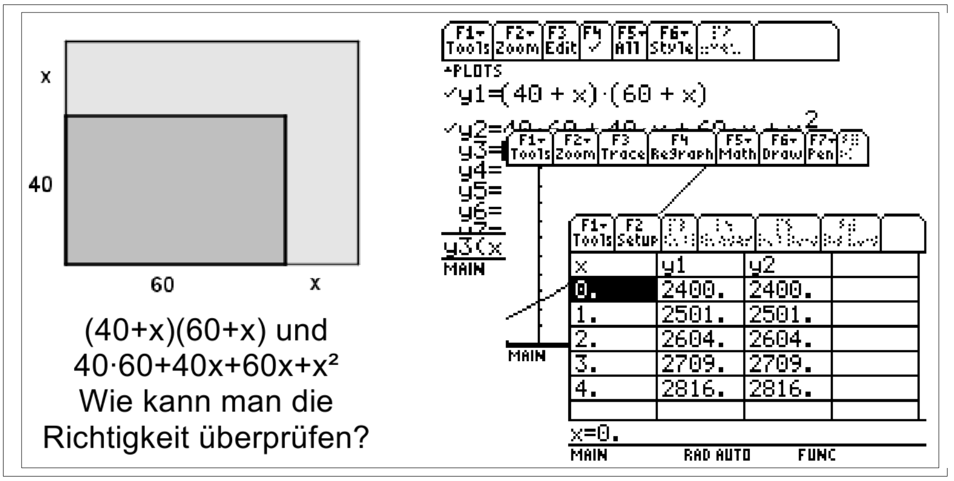
2.1 Langfristige Verfügbarkeit von Grundfertigkeiten

Derzeit häufen sich wieder Klagen über unzureichende mathematische Grundfertigkeiten bei Studienanfängern. So stellt z. B. Knospe (2008) bei Studienanfängern in Ingenieursstudiengängen (FH) seit Jahren stabile, aber schwache Grundkenntnisse fest. Die in diesem Test überprüften Fertigkeiten entstammen nach Angaben von Knospe Inhaltsbereichen der Sekundarstufe I, wie z.B. das Lösen von Gleichungen. Dass Studienanfänger in diesem Bereich große Lücken zeigen, muss auch aus Sicht der Schule alarmieren. Zeigen sie doch, dass es seit Jahrzehnten im Unterricht nicht gelingt, einen langfristigen und nachhaltigen Aufbau von flexibel verfügbarem

Grundwissen und von Grundfertigkeiten insbesondere aus der Sekundarstufe I zu gewährleisten. Dass hieran der Taschenrechnereinsatz und insb. die Verwendung moderner digitaler Medien wie CAS oder GTR ursächlich schuld sein sollen, wie gelegentlich behauptet, ist allerdings zu bezweifeln. Zum einen spielten diese zu Zeiten früherer Untersuchungen zur selben Problematik keine Rolle (vgl. Nägerl et al. 1973). Zum anderen belegen verschiedene Untersuchungen, dass ein technologieorientierter Unterricht nicht zu einer Verschlechterung rechnerfreier Fertigkeiten führen muss (Schmidt et al. 2009, Pinkernell et al. 2009).

2.2 Grundfertigkeiten beherrschen und verstehen

Ein Blick in öffentlich zugängliche Studieneingangstests zeigt, dass neben dem Beherrschen von Kalkülen auch geprüft wird, ob mathematisches Grundwissen auch verständig und flexibel angewendet werden kann. Für den Aufbau solchermaßen tragfähiger Grundvorstellungen gilt der Einsatz digitaler Medien allerdings als hilfreich. Dass dies immer wieder Gelegenheit zu kontroverser Diskussion bietet sei anhand einer Schulaufgabe aus einer Unterrichtseinheit zur Einführung in die Algebra mittels GTR und CAS gezeigt werden (Bruder und Weiskirch 2007).



Zur Überprüfung der Gleichwertigkeit werden zwei Terme anhand von Wertetabellen und Graphen verglichen. Die Variable nimmt also konkrete Werte an, und aus der Gleichheit der Tabellen und Graphen wird auf die Gleichwertigkeit der Terme geschlossen. Das ist bei einer rein algebraischen Vorgehensweise grundsätzlich anders. Aus fachmathematischer Sicht muss dieses Verfahren ineffektiv und unvollständig erscheinen. Aus didaktischer Sicht ist es aber deshalb wertvoll, weil es eine für das Verständnis der Algebra wesentliche Grundvorstellung thematisiert, die bei der häufig bevorzugten kalkülhaften Vorgehensweise untergeht. Es geht im schulischen Mathematikunterricht also nicht nur um das Einüben von Kalkülen.

Es geht auch darum, eine verständige Einsicht in wesentliche Konzepte und Begriffe der Mathematik zu vermitteln. Dieses Ziel ist nicht erst seit Einführung der sogenannten „kompetenzorientierten Bildungsstandards“ für den Mathematikunterricht so gefordert.

Leider muss man feststellen, dass digitale Medien nicht immer im Sinne der Verständnisförderung eingesetzt werden. Geeignete Unterrichtskonzepte gibt es durchaus, nur scheint es an ihrer Verankerung in der Ausbildung von künftigen Lehrern an den Hochschulen sowie Seminaren zu fehlen.

2.3 Rahmenbedingungen

Wer z.B. in Niedersachsen seit 2000 an einem Gymnasium Mathematik unterrichtet, hatte bis dato seinen Unterricht in der Sekundarstufe I nach drei verschiedenen Curricula auszurichten. Ebenfalls zu berücksichtigen waren die Einführung des Zentralabiturs in 2006, die derzeit laufende Umstellung auf G8, und seit 2010 die Einführung eines Kerncurriculums für die Sekundarstufe II. In anderen Bundesländern ist eine ähnlich häufige Aufeinanderfolge von Reformen zu beobachten.

In vielen bundesdeutschen Oberstufen ist eine freie Wahl zwischen Kursen auf erhöhtem und normalen Niveau (auch „Leistungs- und Grundkurse“) nicht mehr möglich mit der Folge, dass sich das nominell „erhöhte“ Niveau dem gesunkenen Durchschnittskönnen aller Teilnehmer anpasst. Hinzu kommen verkürzte Stundentafeln für das Schulfach Mathematik und die Tatsache, dass das Gymnasium sich immer mehr zur Regelschule entwickelt. Es ist in den vergangenen Jahren viel Unruhe zu verzeichnen, in der es vielen Kolleginnen und Kollegen schwer fällt, sich auf Inhalte und Geist der in vielen Teilen sinnvollen Reformen einzustellen. Andere Rahmenbedingungen stehen leistungsintensiveren Schwerpunktsetzungen entgegen.

2.4 Lösungsvorschläge

Es gilt, in den Schulen Unterrichtskonzepte zum nachhaltigen Lernen wahrzunehmen und umzusetzen, insb.

- zur Sicherstellung der Verfügbarkeit mathematischen Grundwissens und -könnens aus Sek. I und II,
- zur Ausbildung tragfähiger Grundvorstellungen, aber auch prozessorientierter Standards wie Argumentieren und Problemlösen, und
- zum adäquaten Umgang mit digitalen Medien.

Von Seiten der Bildungsadministration gilt es eine längerfristige Verlässlichkeit von Bildungsplänen und Prüfungsordnungen, den verpflichtenden Einsatz neuer Medien für einen verständnisorientierten Unterricht und ein ausreichendes Angebot sinnvoller Fortbildungsangebote sicherzustellen.

3. Die Problematik zentraler Abiturprüfungen (Gilbert Greefrath)

Die Abiturprüfung steht am Übergang zwischen Schule und Hochschule und sollte daher auch vor dem Hintergrund der Schnittstellenproblematik Schule–Universität gesehen werden. Besonders zentrale Prüfungen haben Auswirkungen auf den Schulunterricht und auf die Art von Aufgaben, die Schülerinnen und Schüler bearbeiten können. Zentrale Abiturprüfungen gibt es in einigen Bundesländern schon seit vielen Jahren. In den meisten übrigen Ländern wurden sie im Laufe der letzten Jahre eingeführt. Zwei wichtige Aspekte sollen im Folgenden beleuchtet werden: der Umgang mit Anwendungen und Modellierungen sowie die Verwendung von digitalen Werkzeugen in Abiturprüfungen.

3.1 Digitale Werkzeuge in zentralen Abiturprüfungen

Digitale Werkzeuge werden für Prüfungen in Gruppen eingeteilt. Nicht in allen Ländern sind die gleichen Hilfsmittel zugelassen. Einige Länder, z.B. Hessen, unterscheiden wissenschaftliche Taschenrechner (WTR), grafikfähige Taschenrechner (GTR) und Computeralgebrasysteme (CAS) und erstellen drei unterschiedliche Aufgabengruppen. In Nordrhein-Westfalen (NRW) dagegen gibt es eine eigene Aufgabengruppe für CAS und eine weitere Aufgabengruppe für WTR und GTR (= Nicht-CAS) gemeinsam.

Abhängig von den Vorgaben der einzelnen Länder ist die tatsächliche Verwendung von digitalen Werkzeugen in Prüfungen sehr unterschiedlich. Der Einsatz von CAS ist in Prüfungen wenig verbreitet. Betrachtet man exemplarisch typische Aufgabenstellungen aus dem Bereich Analysis in NRW (www.standardsicherung.nrw.de/abitur-gost/fach.php?fach=2), so stellt man fest, dass die entsprechenden Parallelaufgaben mit und ohne CAS sich i.w. nur durch die Anzahl der Parameter unterscheiden. Dabei findet man in der Aufgabengruppe mit CAS jeweils einen Parameter mehr als in der Aufgabengruppe ohne CAS. Bei der näheren Untersuchung kann man einige weitere geringe Unterschiede zwischen Aufgaben, die mit bzw. ohne CAS bearbeitet werden sollen, finden. Die Unterschiede liegen in der geringeren Kleinschrittigkeit der Aufgabenstellungen, der größeren Bedeutung bzw. dem Vorhandensein eines Sachkontextes und der geringeren Anzahl von Standard-Aufgabenteilen in den CAS-Aufgaben. Die meisten Aufgabenteile der CAS-Aufgaben benötigen nicht den Einsatz eines CAS, sondern sind ebenso mit einem Grafiktaschenrechner ohne CAS lösbar.

3.2 Anwendungen in zentralen Abituraufgaben

Ernsthafte und umfangreiche Modellierungsaufgaben sind in Abituraufgaben in der Regel nicht anzutreffen. Allerdings kann die Konstruktion von realitätsbezogenen Aufgaben durch die Wahl geeigneter Kontexte und den ernsthafteren Einsatz von GTR oder CAS optimiert werden. Gerade in den Analysis-Aufgaben findet man zur Zeit außermathematische Kontexte mit (zum Teil zu stark) vereinfachenden Modellierungen z. B. von Wachstumsprozessen. Außerdem gibt es für die Nicht-CAS-Gruppe innermathematische Kurvendiskussionen ohne Anwendungsbezug. Zudem findet man im Bereich der Analytischen Geometrie häufig unrealistische Einkleidungen von mathematischen Problemen.

3.3 Lösungsvorschläge

Sowie man beim sinnvollen Taschenrechnereinsatz in der Sekundarstufe I beispielsweise Kopfrechnen und Überschlagen regelmäßig fördern sollte, so sollte man auch in der S II festlegen, welche Fertigkeiten rechnerfrei beherrscht werden sollen. Einige Bundesländer sind konsequenterweise im Abitur dazu übergegangen, in einem *rechnerfreien Teil* der schriftlichen Prüfung mathematische Grundfertigkeiten abzufragen. Alle Beteiligten brauchen klare *Vorgaben,* welche Funktionalitäten der eingesetzten digitalen Werkzeuge verwendet werden dürfen bzw. sollen. Dies könnte in die Richtung gehen, die das Land Niedersachsen bereits beschritten hat. Hier wurden für alle relevanten Inhalte die vorausgesetzten Fähigkeiten mit dem Rechner aufgelistet.

Der immer geringer gewordene Unterschied zwischen GTR und CAS und die tatsächlich gestellten Aufgaben legen die Zusammenlegung der Aufgabengruppen nahe. Würden alle Schulen bereits *mindestens auf GTR-Niveau* arbeiten, so könnte man die Abituraufgaben auf GTR-Niveau erstellen, so dass CAS-Klassen weder Vorteile noch Nachteile hätten. Im Unterricht kann unabhängig davon zusätzlich ein CAS zum entdeckenden Lernen und experimentellen Arbeiten eingesetzt werden.

Prozessbezogene Kompetenzen, die im Unterricht eine wichtige Rolle spielen müssen, können in der schriftlichen Prüfung oft so nicht abgeprüft werden. Es sollte daher auch über *individuelle, nicht-zentrale Prüfungsformate* nachgedacht werden, die in ihrem Kompetenzspektrum über die schriftlichen Aufgaben des Zentralabiturs hinausgehen.

Anwendungssituationen sollen in Prüfungsaufgaben so vorkommen, dass sie einen *authentischen Mathematikgebrauch* darstellen oder Vorteile bei der Problemerschließung bieten. Eine mögliche Abhilfe, z. B. im Bereich Analytische Geometrie, ist die Verwendung von innermathematischen Problemen. Dies erscheint sinnvoller zur Entwicklung eines angemessenen Mathematikbildes als die Verwendung von eingekleideten Textaufgaben.

4. **Die Perspektive der Universität** (Jürg Kramer)

Die Ausgangslage an der Schnittstelle von Schule und Hochschule ist zunächst dominiert von politischen Rahmenbedingungen und Veränderungen des Bildungswesens. Die Verkürzung der Schulzeit von dreizehn Jahren auf zwölf Jahre (G8) und Stundenzahlkürzungen im Fach Mathematik, die in vielen Bundesländern bereits vor G8 umgesetzt wurden, haben dazu geführt, dass nach unserer Wahrnehmung (die von vielen Kolleginnen und Kollegen geteilt wird) das schulische Niveau im Fach Mathematik abgenommen hat. Die politisch gewollte Erhöhung der Studierendenquote vermindert die durchschnittlich vorhandenen mathematischen Kompetenzen der Studienanfänger zusätzlich. Dies alles hat dazu geführt, dass an den Universitäten von den Dozierenden schlechte Mathematikkenntnisse der Studierenden diagnostiziert und von den Verwaltungen hohe Abbrecherquoten in mathematikintensiven Studienfächern bemängelt werden. Dies trifft insbesondere zu auf die Ingenieurstudiengänge, aber auch auf die Mathematikstudiengänge mit Ziel Lehramt oder mit Ziel Fach-Bachelor. Diese Entwicklung ist noch besorgniserregender, weil Ministerien und Hochschulen inzwischen zu Finanzierungskonzepten in Abhängigkeit von Absolventenquoten übergehen.

Mit Blick auf die Schule beklagt die Hochschulseite die Problematik, dass die heutigen Studierenden vor allem Mängel bei Themen der SI hätten. Nach den Erfahrungen der Universität zeigt eine große Anzahl der Schulabgänger Defizite bei der Bruchrechnung und anderen elementaren Rechentechniken; auch das logische Sprachverständnis ist häufig nur ungenügend ausgebildet. Dies deutet auf Defizite bezüglich der Nachhaltigkeit der schulischen Wissensvermittlung hin. Darüber hinaus werden von Hochschulseite auch Defizite bei allgemeinen Kompetenzen, wie beispielsweise bei der Selbstorganisation, der Selbsteinschätzung oder der Anstrengungsbereitschaft der Studienanfänger, festgestellt.

Die Diskussion, ob die mathematische Fachausbildung und die gymnasiale Lehrerausbildung gemeinsam oder getrennt stattfinden sollten, hat ebenfalls eine lange Geschichte. Jede Universität geht hier ihren eigenen Weg, die Curricula der mathematischen Lehramtsausbildung sehen sehr verschieden aus. Dies wird durch die unterschiedlichen Bildungssysteme der Bundesländer noch verstärkt. In der Regel erhalten die Lehramtsstudierenden aus kapazitären Gründen keine eigenen Fachvorlesungen. Auch die Bedeutung der Fachdidaktik wird sehr unterschiedlich bewertet. Es gibt Ansätze, Fach und Fachdidaktik (stärker) zu verzahnen.

Der nachfolgend vorgeschlagene Maßnahmenkatalog würde unserers Erachtens dazu beitragen, die einleitend dargelegten Defizite an der Schnittstelle Schule-Hochschule zu verringern:

1. Zur Umsetzung politischer Entscheidungen zur Ausbildung im Fach Mathematik durch die KMK und die Schulministerien der einzelnen Bundesländer muss die Kommunikationskultur zwischen den Fachgesellschaften DMV, GDM, MNU und der KMK verbessert werden. Optimales Instrument hierzu wäre eine ständige Arbeitsgruppe „Mathematik", die in Abstimmung zwischen der KMK und den Fachgesellschaften DMV, GDM und MNU etabliert würde; zumindest müssten die Fachgesellschaften an der Benennung von Experten für entsprechende KMK-Kommissionen beteiligt werden. Darüber hinaus sollte auch auf Länderebene die Kommunikationskultur zwischen Schulministerien, Schulen und Universitäten in einer sinnvollen Art institutionalisiert werden.

2. In Abstimmung mit den Fachgesellschaften DMV, GDM und MNU sollte ein bundesländerübergreifender Kanon unverzichtbarer Fertigkeiten und Fähigkeiten für mathematikintensive Studienfächer als Inhalts- und Kompetenzkatalog erarbeitet werden, der bereits bei den in Kürze zu erstellenden Bildungsstandards der Oberstufe Berücksichtigung finden sollte. Diese Kompetenzliste sollte in der Folge auch bei den an vielen Universitäten stattfindenden Vor- und Brückenkursen respektiert werden. Als Grundlage dieses Kanons sollten einerseits die Winterschen Grunderfahrungen und andererseits die prozessbezogenen Kompetenzen im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss sowie die einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik dienen. Es sollte dabei insbesondere klargestellt werden, welche händischen Fähigkeiten ersetzt werden sollen oder können und welche Rolle ein CAS spielen sollte.

3. Den Universitäten muss bewusst sein, auf welche Kenntnisse und Fertigkeiten bei den Studienanfängern vertraut werden kann. Dementsprechend sollten die Universitäten klären, ob sie in mathematikintensiven Studienfächern Eingangstests, Vorkurse oder weitergehende Zusatzangebote einsetzen wollen, um ausreichende mathematische Fähigkeiten bei den Studienanfängern sicherzustellen. Die Universitäten müssen klarstellen, bis zu welchem Punkt eine Absenkung des Niveaus von Beginn des Studiums bis zum Bachelorabschluss verantwortet werden kann.

4. In Bezug auf das Lehramtsstudium sollte hinterfragt werden, ob eine (teilweise) Trennung der (gymnasialen) Lehrerausbildung von der Mathematik-Bachelorausbildung wünschenswert ist. Falls ja, muss geklärt werden, ob dies aus kapazitären Gründen machbar ist. Ein Beispiel soll die Problematik beleuchten: Die Inhalte der üblichen Analysis-Vorlesungen

sind auch für Studierende des gymnasialen Lehramts unverzichtbar. Jedoch müssen diese über die rein fachliche Sicht hinaus auch über epistemologische Aspekte und über adäquate Vorstellungen zu den grundlegenden Ideen der Analysis Bescheid wissen. Darüber hinaus müssen Lehramtsstudierende in die Lage versetzt werden, die Gegenstände der Schulmathematik aus fachmathematischer Sicht zu durchdringen, einzuordnen, Querverbindungen herzustellen und die fundamentalen Ideen für den Mathematikunterricht herauszuarbeiten.

5. Die Schulseite muss dafür Sorge tragen, die Nachhaltigkeit der Mathematikausbildung zu verbessern. Fehlendes Langzeitwissen ist eines der am häufigsten bemängelten Probleme der Studierenden. Stundentafelkürzungen sind hierbei in jedem Fall kontraproduktiv und können nicht einfach durch „Wegstreichen von Inhalten" ausgeglichen werden. Insbesondere die Unterrichtsinhalte der Sekundarstufe I müssen bis zum Abitur nachhaltig gefestigt und vernetzt werden. Irreführend bei Bewertungen von Abiturnoten wäre das Absenken der Leistungsanforderungen in Notenspiegeln durch die Bildungsadministration.

6. Von den Studierenden muss eine bessere Selbstorganisation, Selbsteinschätzung und Anstrengungsbereitschaft eingefordert werden. Man sollte mit den Studierenden hierfür zu Beginn des Studiums Kontrollstrukturen schaffen. Mentorensysteme können hierzu hilfreich eingesetzt werden.

Literatur

Bruder, R. und Weiskirch, W. (2007 ff.): CAliMERO – Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren. Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler sowie methodische und didaktische Handreichungen. Münster: WWU.

Greefrath, G., Elschenbroich, H.-J., Bruder, R. (2010): Empfehlungen für zentrale Prüfungen in Mathematik, *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht,* 63 Bd. 3

Greefrath, G., Leuders, T., Pallack, A. (2008): Gute Abituraufgaben – (ob) mit oder ohne Neue Medien, *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 61 Bd. 2, 79-83

Nägerl, H., Becker, H., Harten, H.-U., Schulte, H.-D., Zerbst, J. (1973): Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. *Didaktik der Mathematik*, 2, 143-157

Pinkernell, G., Ingelmann, M., Bruder, R.(2009): Supporting Basic Mathematical Skills While Teaching With CAS Handhelds, *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the PME.* Thessaloniki, Greece

Schmidt, K.; Köhler, A. & Moldenhauer, W. (2009): Introducing a Computer Algebra System in Mathematics Education - Empirical Evidence from Germany, *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 16, 11-26

DIETMAR HILDENBRAND, REINHARD OLDENBURG, VERENA REMBOWSKI, Darmstadt und Frankfurt

Schnittstellenaktivität S6 „Geometrische Algebra“

1. Einführung

Die Vektorrechnung hat eine lange und von Zufällen bestimmte Geschichte hinter sich (einen Überblick gibt Wittmann). Grassmannalgebren fanden zunächst nicht viele Unterstützer. Eine Variante, bestimmte Clifford-Algebren, wurden von Hestenes (1991) als geometrische Algebra neu interpretiert und propagiert. Diese Algebren erfahren in den letzen Jahren einen bemerkenswerten Boom in der Fachwissenschaft, insbesondere in angewandten Disziplinen. In der hier beschrieben Schnittstellenveranstaltung werden die Leistungen der Geometrischen Algebra aus fachwissenschaftlicher Sicht dargestellt und aus didaktischer Sicht bewertet.

2. Dreidimensionale Geometrische Algebra

Geometrische Algebra kann über Vektorräumen unterschiedlicher Dimension und unterschiedlicher metrischer Struktur betrieben werden. Am nächsten an der üblichen analytischen Geometrie der Schule ist die geometrische Algebra über dem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum.

Vektoren sind in der geometrischen Algebra entsprechend den Vektoren der traditionellen Vektoralgebra als eine Äquivalenzklasse gleichlanger und gleichgerichteter Pfeile oder als eine Äquivalenzklasse aller Translationen gleicher Länge und gleicher Richtung definiert. Somit sind Vektoren eindimensionale Ausdehnungsbilde. Ihre Notation erfolgt in Summenform: $v = v_1\, e_1 + v_2\, e_2 + v_3\, e_3$. Die elementare Vektorrechnung funktioniert in der geometrischen Algebra analog zur Vektoralgebra. Auch das Konzept des Skalarprodukts wird übertragen, es wird jedoch als inneres Produkt bezeichnet und auf weitere, noch einzuführende, Elemente erweitert.

Über Vektoren, als Elemente ersten Grades, hinaus existieren in der geometrischen Algebra zudem Elemente höheren Grades. Solche zweiten Grades werden Bivektoren B genannt. Bivektoren sind, anknüpfend an die Vektordefinitionen, als eine Äquivalenzklasse gleichgroßer und gleichorientierter Parallelogramme definiert, welche durch zwei Pfeile aufgespannt werden oder aus zwei hintereinander ausgeführten Translationen entstehen. Damit sind Bivektoren zweidimensionale Ausdehnungsgebilde.

Bivektoren entstehen über das äußere Produkt zweier Vektoren. Dieses ist über seine Antikommutativität, Verträglichkeit unter der Multiplikation mit Skalaren, Distributivität, Assoziativität und die Eigenschaft $v{^\wedge}w = 0$, wenn die Vektoren parallel sind, definiert. In Koordinatendarstellung folgt für das äußere Produkt der Vektoren v und w: $v \wedge w = (v_1 w_2 - w_1 v_2)\, e_1 \wedge e_2 + (v_2 w_3 - w_2 v_3)\, e_2 \wedge e_3 + (v_3 w_1 - v_1 w_3)\, e_3 \wedge e_1$. Damit stimmt das äußere Produkt in seiner Darstellung mit dem Vektorprodukt überein, es ist jedoch das orthogonale Komplement zu diesem. Weiterhin können Bivektoren miteinander verrechnet werden, wobei hierfür die den Vektoren entsprechenden Gesetze gelten.

Die geometrische Algebra erlaubt zudem die Addition von Elementen verschiedenen Grades, wobei ein Multivektor M resultiert. Der aus dem inneren und dem äußeren Produkt zweier Vektoren bestehende Multivektor wird als geometrisches Produkt dieser Vektoren bezeichnet: $vw = v \cdot w + v \wedge w$. Dieses ist nach Definition in seiner parallelen Komponente kommutativ, in seiner orthogonalen Komponente antikommutativ, verträglich unter der Multiplikation mit Skalaren, distributiv und assoziativ. Das geometrische Produkt kann umgekehrt auch axiomatisch definiert werden durch die Relationen der Basisvektoren ($e_i^2=1$, $e_i e_j = -e_j e_i$), und dann kann daraus das innere Produkt als dessen kommutative Komponente und das äußere Produkt als dessen antikommutative Komponente definiert werden.

Zusätzlich zu Vektoren und Bivektoren existieren in der geometrischen Algebra Trivektoren als Elemente dritten Grades. Diese sind als eine Äquivalenzklasse gleichgroßer und gleichorientierter Parallelotope definiert, und sind somit dreidimensionale Ausdehnungsgebilde. Trivektoren entstehen durch das äußere Produkt dreier Vektoren oder eines Bivektors und eines Vektors, welches mit dem Spatprodukt übereinstimmt.

Die geometrische Algebra über dem dreidimensionalen euklidischen Vektorraum ist folglich als Vektorraum achtdimensional mit der Basis 1, e_1, e_2, e_3, $e_1 \wedge e_2$, $e_2 \wedge e_3$, $e_3 \wedge e_1$, $e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$. Des Weiteren sind Vektoren und Bivektoren, da das geometrische Produkt assoziativ und eindeutig ist, bezüglich dessen invertierbar, was auch die Division durch diese ermöglicht. Es existiert zudem ein Dualitätsoperator, der es erlaubt, zu Elementen beliebigen Grades das jeweilige orthogonale Komplement zu berechnen.

Zur Behandlung der analytischen Geometrie können Geraden und Ebenen über eine Parallelitätsbedingung beziehungsweise eine Komplanaritätsbedingung implizit beschrieben werden. Eine beliebige Gerade mit Richtung v ist somit gegeben als $g{:=}v \wedge (x - v_P) = 0$. Eine beliebige Ebene mit aufspannendem Bivektor B ist analog gegeben als $E{:=}B \wedge (x - v_P) = 0$.

Für Untersuchungen von Lagebeziehungen im Raum werden neben den gegebenen impliziten Formen nur die daraus ablesbaren Parameterdarstellungen benötigt. Die Lageuntersuchungen lassen sich schließlich, wegen der Eindeutigkeit der Geraden- und Ebenendarstellungen nach allgemeingültigen Methoden durchführen, wobei für sämtliche Kalkulationen koordinatenfreie Rechenausdrücke existieren.

Die beschriebene geometrische Algebra bietet, verglichen mit der traditionellen Vektoralgebra, einige Vorteile. So ist ein konsistenter Unterrichtsaufbau möglich, wobei die Struktur des dreidimensionalen Raumes zunächst anschaulich eingeführt wird. Anschließend werden die verschiedenen Produkte koordinatenfrei entwickelt, und schließlich wird die analytische Geometrie anschaulich behandelt.

Darüber hinaus gelten für Elemente verschiedenen Grades die gleichen konzeptuellen Grundlagen. Die Orientierung ist zudem ein wichtiges Merkmal der Bivektoren und Trivektoren, und wird auch zu einem natürlichen Kennzeichen des gesamten Raums. Des Weiteren stimmen die Methoden zur Längen-, Flächen- und Volumenmessung, basierend auf den Beträgen einzelner Elemente, überein. Auch die weiteren elementaren Rechenoperationen mit den verschiedenen Elementen funktionieren analog.

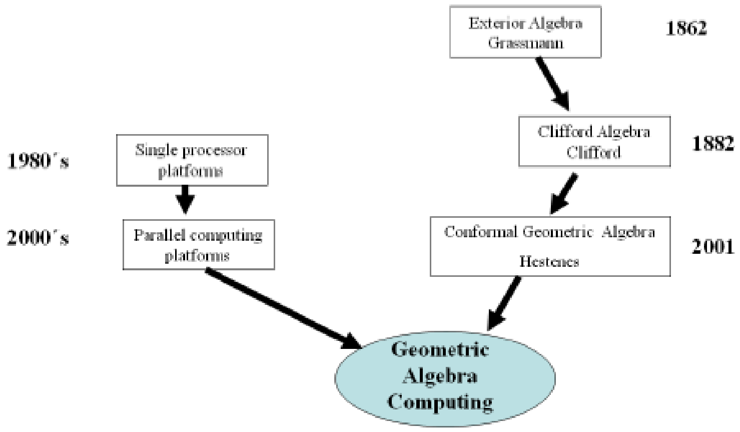
Das geometrische Produkt bietet außerdem konzeptuelle und rechnerische Vorteile gegenüber den anderen Produkten, da es die Beziehung zweier Elemente zueinander lückenlos beschreibt, und sich leicht durch herkömmliches Multiplizieren berechnen lässt. Darüber hinaus bedingt es die Möglichkeit zur Invertierung und zur Division. Zudem lässt sich die Dualitätsoperation auf Elemente jeden Grades und in beliebigen Dimensionen anwenden.

Schließlich werden Geraden und Ebenen anschaulich beschrieben, wobei eine vollständige Analogie zwischen den Geraden- und Ebenendarstellungen vorliegt. Die geometrische Algebra erlaubt letztlich die Verknüpfung einer Vielzahl inner- und außermathematischer Themengebiete.

Allerdings hat die geometrische Algebra auch, im Vergleich zur traditionellen Vektoralgebra, einige Nachteile. So kann die Vielfalt der neuen Konzepte irritieren, wobei Bivektoren und Trivektoren aufgrund ihrer Orientierung von den Parallelogrammen und Parallelotopen der elementaren Geometrie abweichen, sowie dem Trivektor als raumausfüllendes Element eine besondere Rolle zukommt. Zudem sind die elementaren Operationen mit Bivektoren und Trivektoren schwer anschaulich zu machen, und die Vielzahl der Produkte und weiteren Operatoren kann verwirren. Letztlich können bei der Behandlung der analytischen Geometrie Rechenausdrücke sehr unübersichtlich werden.

3. Konforme Geometrische Algebra

Seit der Veröffentlichung der konformen geometrischen Algebra durch David Hestenes (2001) erkennt man ihr immenses Potenzial in vielen Bereichen des Engineering und der Naturwissenschaften. Im Engineering gibt es aktuell hauptsächlich Anwendungen im Bereich von Computergrafik, Computer Vision und Robotik. Aus Sicht der Informatik besonders interessant ist die Kombination der einfachen, eleganten mathematischen Beschreibung von Algorithmen mit hoher Performanz durch die neuen parallelen Rechnerarchitekturen. Diese beiden Trends (s. folgende Abbildung) führen zur „Geometric Algebra Computing“ Technologie,



die beispielsweise Ausdruck findet in den Tools CLUCalc (Perwass, 2010) und Gaalop (Hildenbrand et al. 2010). CLUCalc bietet die Möglichkeit, Algorithmen in geometrischer Algebra auf eine interaktive und visuelle Art und Weise zu entwickeln und zu testen. Gaalop kompiliert diese Algorithmen in optimierte Implementierungen. Diese Technologie soll in Zukunft für hoch performante, spezifische Implementierungen für die unterschiedlichsten parallelen Rechnerarchitekturen ausgebaut werden.

Mit der konformen geometrischen Algebra steht generell eine übergreifende mathematische Sprache zur Verfügung, die es erlaubt, sehr direkt aus der geometrischen Anschauung heraus zu rechnen. So kann beispielsweise mit geometrischen Objekten wie Kugeln, Ebenen und Kreisen sowie mit geometrischen Operationen wie Schnitten von verschiedenen Objekten oder mit Transformationen sehr einfach und direkt gerechnet werden.

Algebraisch kommen zu den drei euklidschen Basisvektoren die beiden Basisvektoren e_0 für den Ursprung und e_∞ für die Unendlichkeit hinzu. Alle Kombinationen dieser Basisvektoren ergeben die 32 algebraischen Basiselementen, die als Blades bezeichnet werden. Ein Multivektor ist eine Linearkombination all dieser Blades, die selbst eine Dimension zwischen 0 für einen Skalar und 5 für den sogenannten Pseudoskalar besitzen.

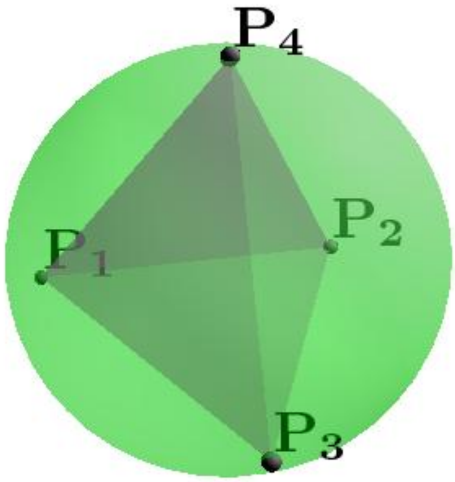
Die folgende Tabelle zeigt die geometrischen Basisobjekte der konformen geometrischen Algebra, die sich als einfache algebraische Ausdrücke ausdrücken lassen.

Entität	**IPNS**	**OPNS**
Punkt	$P = \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^2 e_\infty + e_0$	
Kugel	$s = P - \frac{1}{2}r^2 e_\infty$	$s^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4$
Ebene	$\pi = \mathbf{n} + d e_\infty$	$\pi^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge e_\infty$
Kreis	$z = s_1 \wedge s_2$	$z^* = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3$
Gerade	$l = \pi_1 \wedge \pi_1$	$l^* = P_1 \wedge P_2 \wedge e_\infty$
Punktpaar	$P_p = s_1 \wedge s_2 \wedge s_3$	$P_p^* = P_1 \wedge P_2$

Dies sind Punkte, Kugeln, Ebenen, Kreise, Geraden und Punktpaare. Ein Punkt P wird bspw. repräsentiert als Linearkombination aus dem 3D-Punkt $\mathbf{x} = x_1\ e_1 + x_2\ e_2 + x_3\ e_3$ (3D-Vektoren bzw. -Punkte werden in konformer geometrischer Algebra normalerweise fett gekennzeichnet) und der zusätzlichen Basisvektoren e_0 und e_∞($\mathbf{x}^2$ bedeutet das bekannte Skalarprodukt).

Für die geometrischen Objekte gibt es zwei Repräsentationen, nämlich das IPNS (Inner Product Null Space) und das OPNS (Outer Product Null Space), siehe (Perwass 2009). Will man bspw. die Menge aller Punkte wissen, die bezüglich des inneren Produkts mit dem algebraischen Ausdruck e_0 eine 0 ergeben (IPNS von e_0), ergibt sich die implizite Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, welche nur vom 3D-Ursprung erfüllt wird. Die beiden Repräsentationen sind dual zueinander. Um zwischen den beiden Repräsentationen wechseln zu können, wird der dual-Operator '*' benutzt.

In der IPNS-Repräsentation wird eine Kugel repräsentiert mit Hilfe des Mittelpunkts P und des Radius r. In dieser Repräsentation ist die Bedeutung des äußeren Produktes gleichbedeutend mit dem Schnitt von geometrischen Objekten. Beispielsweise ist der Kreis definiert als Schnitt von zwei Kugeln (s_1^s_2). In der OPNS-Repräsentation konstruiert man eine Kugel mit Hilfe des äußeren Produktes '^' von vier Punkten P_i, die auf der Oberfläche der Kugel liegen. Quadriert man die algebraischen Ausdrücke für Kugeln, Kreise oder Punktpaare erhält man das Quadrat ihrer Radien.



Will man bspw. den Radius der einen Tetraeder umhüllenden Kugel berechnen, kann man das sehr einfach in 2 Schritten tun. Zunächst berechnet man die Kugel S als äußeres Produkt der Eckpunkte des Tetraeders

$$S = P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge P_4\,,$$

deren Quadrat direkt dem Quadrat des Radius entspricht.

$$\mathrm{r}^2 = S^2$$

Neben der einfachen und direkten Beschreibung von geometrischen Objekten bietet die geometrische Algebra eine große Menge an Möglichkeiten, geometrische Operationen zu beschreiben. Neben den Schnitten von geometrischen Objekten gehören dazu die einfache Bestimmung von Abständen und Winkeln sowie Rotationen, Translationen, Projektionen oder Spiegelungen. Den Mittelpunkt einer Kugel kann man bspw. als eine Spiegelung der Unendlichkeit an der Kugel ausdrücken. Aus didaktischer Sicht ergibt sich damit die Notwendigkeit, das große, mathematische System in kleine, sinnvoll verarbeitbare Einheiten zu strukturieren.

Mit konformer geometrischer Algebra ist prinzipiell ein Rechnen im Raum, analog zum Konstruieren in 2D mit Lineal und Zirkel, möglich (CLUCalc). Für die Ausbildung sehr hilfreich wäre eine dynamisches Geometrie-System, welches diese interaktiven und visuellen Möglichkeiten verbindet mit der Möglichkeit des symbolischen Rechnens von Computeralgebra-Systemen.

Generell sind für die Ausbildung auch Strategien zu entwickeln für Lernende, die bereits einen gewissen Background durch andere mathematische Systeme haben. Wichtig ist außerdem, einheitliche Notationen zu finden, wo zurzeit noch ein Wildwuchs von unterschiedlichen Notationen herrscht.

Die TU Darmstadt hat die geometrische Algebra als ein interessantes, interdisziplinäres Projekt identifiziert. Nähere Informationen und Links finden sich unter http://www.fif.tu-darmstadt.de/forschung/spotlight/spotlight_1.de.jsp

4. Computeralgebra

Die Rechnungen in der geometrischen Algebra sind zwar transparent und Dank der Assoziativität des geometrischen und des äußeren Produktes nicht so ungewohnt wie zB Rechnungen mit dem Kreuzprodukt, trotzdem können sie zu viel Schreibarbeit führen. Diesen Kleinkram kann man sich durch ein Computeralgebrasystem (CAS) abnehmen lassen. Es gibt bereits für verschiedene professionelle CAS (Maple, Mathematica) GA-Bibliotheken. Für das Freeware-System Maxima wurde eine neue Bibliothek entwickelt und hier soll exemplarisch dargestellt werden, wie damit der Lotfußpunkt Q von einem Punkt P auf einer Geraden $x=A+t\cdot r$. (In diesem System steht · für das geometrische Produkt).

`(%i37) eq1: IPv(Q-P,r)=0;` (%o37) $\frac{Q\ .\ r}{2}-\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ Q}{2}-\frac{r\ .\ P}{2}=0$	*Q-P* soll auf dem Richtungsvektor *r* senkrecht stehen (IPv=Inneres Produkt)
`(%i38) eq2: APv(r,A-Q)=0;` (%o38) $\frac{Q\ .\ r}{2}-\frac{A\ .\ r}{2}-\frac{r\ .\ Q}{2}+\frac{r\ .\ A}{2}=0$	*R* und *A-Q* sollen parallel sein (APv= Äußeres Produkt)
`(%i39) eq1+eq2;` (%o39) $Q\ .\ r-\frac{P\ .\ r}{2}-\frac{A\ .\ r}{2}-\frac{r\ .\ P}{2}+\frac{r\ .\ A}{2}=0$	Summe beider Gleichungen
`(%i40) Q . r = -(-P . r/2-A . r/2-r . P/2+r . A/2);` (%o40) $Q\ .\ r=\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{A\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ P}{2}-\frac{r\ .\ A}{2}$	Auflösen nach *Qr*
`(%i41) Q=(P . r/2+A . r/2+r . P/2-r . A/2).inv(r);` (%o41) $Q=\left(\frac{P\ .\ r}{2}+\frac{A\ .\ r}{2}+\frac{r\ .\ P}{2}-\frac{r\ .\ A}{2}\right)\ .\ \frac{r}{r^2}$	Expliziter Ausdruck für *Q*

Vektoren können auch als Linearkombinationen von Basisvektoren dargestellt werden. Mit diesem Werkzeugkasten lassen sich alle schulüblichen Berechnungen der analytischen Geometrie durchführen und oft ergeben sich – wie im Beispiel – explizite Formeln.

5. Fazit

Geometrische Algebra besitzt ein enormes Potential, weil sie einen großen Anwendungsbereich durch einen effizienten Kalkül abdeckt. Optimal nutzbar wäre das, wenn sie sowohl in der Schule als auch an Fachhochschulen und Universitäten gelehrt würde. Aber auch solange dies nicht der Fall ist sollte daran gearbeitet, die Realisierbarkeit eines GA-Curriculums zu untersuchen.

Literatur

Calvet, R. G. (2007). *Treatise of Plane Geometry through Geometric Algebra*. Cerdanyola del Valles: Timsac No 1.

Hestenes, D. (1991). *Mathematical Viruses*. http://geocalc.clas.asu.edu/pdf-preAdobe8/MathViruses.pdf.

Hestenes, D. (2001). *Old Wine in New Bottles: A New Algebraic Framework for Computational Geometry*. Geometric Algebra with Applications in Science and Engineering, Bayro-Corrochano E. und Sobczyk (Hrsg.) , Birkhäuser.

Hildenbrand, D. , Pitt J. und Koch A. (2010). *Gaalop- High Performance Parallel Computing based on Conformal Geometric Algebra*. Geometric Algebra Computing for Engineering and Computer Science, Bayro-Corrochano E. und Scheuermann G. (Hrsg.), Springer Verlag.

Horn, M. E. (2004). *Grass, Mann! Das Clifford-Kinder-Rechenbuch*. Nordmeier, Oberländer (Hrsg.) Didaktik der Physik der DPG, Beiträge zur Frühjahrstagung Düsseldorf.

Perwass, Ch. (2009) *Geometric Algebra with Applications in Engineering*. Springer Verlag.

Perwass, Ch. (2010) *CLUCalc.* Homepage www.clucalc.info.

Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (2000) *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*. Band 2. Braunschweig: Vieweg.

Vince, J. (2008) *Geometric Algebra for Computer Graphics*. London: Springer.

Wittmann, G. (2003) *Schülerkonzepte zur Analytischen Geometrie*. Hildesheim: Franzbecker.

KRISTINA REISS, München, MANFRED PRENZEL, München, HANS-DIETER RINKENS, Paderborn, JÜRG KRAMER, Berlin

Konzepte der Lehrerbildung

Die Lehramtsausbildung ist im Gespräch. An vielen Universitäten hat es in den letzten Jahren Initiativen gegeben, zukünftige Lehrerinnen und Lehrer besser auf ihren Beruf vorzubereiten. In diesem Schnittstellensymposium wurden exemplarisch Konzepte diskutiert, die sich mit der Ausbildung von Lehrkräften am Gymnasium beschäftigen. Gemeinsam ist allen Konzepten das Ziel einer besseren Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik Mathematik insbesondere auch durch die Betonung von schulrelevantem Wissen und professionsbezogenen Kompetenzen. Daneben spielt auch die Aufbereitung eine wichtige Rolle, sodass universitäre Lehre zumindest teilweise auch ein Vorbild für den schulischen Unterricht sein könnte.

Im Folgenden soll eine kurze Zusammenfassung der einzelnen Beiträge einen Überblick über den konkreten Stand der Dinge geben. Dabei ist Vieles *work in progress*, auf deren Fortsetzung man sicher gespannt sein darf.

Mathematik Neu Denken

Albrecht Beutelspacher (Gießen) und Rainer Danckwerts (Siegen)

Das Projekt „Mathematik Neu Denken“ legt 2010 seine Empfehlungen zur Neuorientierung des gymnasialen Lehramtsstudiengangs vor, die im Rahmen der Diskussionen einer nationalen Expertengruppe (Beutelspacher, Gießen, Danckwerts, Siegen, Hefendehl-Hebeker, Essen, Neubrand, Oldenburg, Nickel, Siegen, Sjuts, Osnabrück, Walther, Gießen) entstanden sind.

Während die PISA-Studie einen starken Impuls für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts brachte, ist inzwischen auch die fachbezogene Lehrerbildung im Blickpunkt des öffentlichen Interesses. Wissenschaftliche Studien belegen hier, dass die universitäre Phase der Lehrerbildung dringend neuer Impulse bedarf. In besonderem Maße gilt dies für das gymnasiale Lehramt, da es hier traditionell nur unzureichend gelingt, den berechtigten Interessen nach fachbezogener Professionalität Rechnung zu tragen: Das Fachstudium hinterlässt nur wenig Spuren, da insbesondere die Verbindung zur Schulmathematik kaum sichtbar ist und die Fachdidaktik als wenig verbunden mit der Fachwissenschaft wahrgenommen wird. Die einseitig instruktionsorientierten Lehr- und Lernformen unterstützen überdies die Professionsorientierung nur schlecht. Die Pilotphase des Projekts „Mathematik Neu Denken“ (2005-2008) hatte das Ziel, die Verbindung zwischen Fach- und Berufsfeldbezug in einem begrenzten Rahmen – dem ersten Jahr des Grundstudiums – deutlich werden zu lassen.

Im Zentrum der vorliegenden Empfehlungen steht die Überzeugung, dass angehende Gymnasiallehrkräfte eine aktive Beziehung zur Mathematik als Wissenschaft und als Kulturgut haben müssen, um das Fach im Unterricht und darüber hinaus souverän vertreten zu können. Ziel der Lehrerbildung muss es sein, zum Aufbau eines angemessenen und belastbaren „Mathematischen Weltbildes" beizutragen. Dafür muss das Fachstudium Erfahrungen ermöglichen, die neben einer fachmathematischen Seite auch zur Reflexion über Wesen und Bildungswert, die zentralen Ideen und Aufgaben des Fachs und über das Lehren und Lernen von Mathematik Anlass geben.

Daher wird dafür plädiert, bei einer Neuorientierung des Studiengangs – neben einer soliden fachwissenschaftlichen Ausbildung, konzipiert als authentische Begegnung mit Mathematik – auf folgende fach- und professionsbezogene Elemente zu setzen, nämlich auf

- eine starke elementarmathematische Komponente, die nach Möglichkeit an schulmathematische Erfahrungen anknüpft und Forschungserfahrungen „im Kleinen" ermöglicht,
- eine Begegnung mit dem Reichtum der Disziplin, die zur Reflexion der für die Mathematik typischen Denk- und Arbeitsweisen anregt,
- Erfahrungen mit einer „Schulmathematik vom höheren Standpunkt" als Schnittstelle zwischen Fachwissenschaft und Fachdidaktik, die in einem Rückblick auf die Oberstufenmathematik eine Standpunktverlagerung ermöglicht und von der vertrauten Beherrschung von Kalkülen zu einer verstehensorientierten begrifflichen Durchdringung führt,
- ein verbindliches Angebot zur historisch-genetischen oder philosophischen Reflexion über Mathematik,
- eine fachdidaktische Komponente, die eigene Forschungsparadigmen hat und neben dem Schwerpunkt, mathematische Inhalte zugänglich zu machen, einen Akzent auf die Lernerperspektive setzt, diagnostische Fragestellungen einbezieht und bildungstheoretische Aspekte umfasst.

Methodisch kommt es darauf an, Formen des Lehrens und Lernens zu bevorzugen, die Studierende in der eigenaktiven Konstruktion ihres Wissens nachhaltig unterstützen. Nur so werden die künftigen Mathematiklehrerinnen und -lehrer in der Lage sein, auch bei ihren Schülerinnen und Schülern prozessbezogene Kompetenzen zu entwickeln.

Die Empfehlungen sind abschließend in einem idealtypischen Studienplan konkretisiert, der auch unter vergleichsweise traditionellen Bedingungen realisierbar erscheint.

Mathematik Besser Verstehen

Lisa Hefendehl-Hebeker, Christoph Ableitinger & Angela Herrmann (Essen)

Das von der Deutsche Telekom Stiftung unterstützte Projekt „Mathematik Besser Verstehen“ entwickelt ein Begleitprogramm für Studienanfängerinnen und Studienanfänger des Lehramts Mathematik an der Universität Duisburg-Essen. Die Studierenden fühlen sich zu Beginn ihres Studiums oft durch die Umstellung von der Schul- zur Universitätsmathematik - vor allem durch den sprunghaft ansteigenden Abstraktionsgrad - überfordert. Dieser „Abstraktionsschock“, die damit verbundene Sinnfrage der Lehramtsstudierenden „Warum muss ich das für meinen späteren Beruf überhaupt wissen?“ und auch das Gefühl, von Seiten der Universität allein gelassen zu werden, münden oftmals in Studienunzufriedenheit. Aber auch von den Dozentinnen und Dozenten hört man Klagen über das heterogene fachliche Niveau, das die Studierenden aus den Schulen mitbringen.

Ziel des Projekts ist, diesen Problemen gegenüber zu treten und den Studierenden der ersten beiden Semester vor allem Unterstützung auf fachlicher Ebene anzubieten. Des Weiteren soll die Kommunikation unter den Studierenden gestärkt und der Übungsbetrieb strukturell wie inhaltlich den Bedürfnissen besser angepasst werden. Parallel dazu soll die Schnittstelle zwischen Schule und Universität erforscht werden, indem versucht wird, die von Felix Klein proklamierte „doppelte Diskontinuität“ sowie ihre Ursachen präziser zu beschreiben und Maßnahmen zu entwickeln, die den Studierenden helfen, die Anfangshürden ihres Studiums zu überwinden.

Das Projekt gliedert sich in drei Phasen, nämlich Konzeption und Durchführung, ein revidierter zweiter Durchgang, dann Auswertung und Dokumentation. Im Gegensatz zum Projekt „Mathematik Neu Denken“ der Universitäten Gießen und Siegen soll das Projekt „Mathematik Besser Verstehen“ möglichst wenig Einfluss auf den bestehenden Lehrbetrieb nehmen, jedoch Ideen und Hilfsmittel entwickeln, wie auch Universitäten, die nicht die Möglichkeit separater Veranstaltungen für Lehramtsstudierende haben, die Studieneingangsphase stärker phänomenologisch orientiert und verständnisgeleitet gestalten können.

Die inhaltliche Konzeption des ersten Durchgangs enthält verschiedene Komponenten; die dafür entwickelten Materialien stehen den Studierenden auf einer E-Learning-Plattform zur Verfügung. Zum einen wird Begleitmaterial zu den Vorlesungen entwickelt, das den Studierenden das Durcharbeiten des Vorlesungsstoffs erleichtern soll. Darunter fallen Anleitungen, Visualisierungen, Beispiele und Selbsttests zu den Kapiteln der Vorlesung. In den Anleitungen werden die Studierenden beispielsweise dazu angehalten, Beweise und Konzepte aus den Vorlesungen Stück für Stück zu analysieren und nachzuvollziehen, die dahinter stehenden Prinzipien zu rekonstruieren und sich diese für spätere Beweise nutzbar zu machen. Zum anderen gibt es die Übungen betreffende Maßnahmen. Auf jedes Übungsblatt der Analysis und der Linearen Algebra wird eine speziell konzipierte Aufgabe gesetzt, die den Schulstoff mit dem Universitätsstoff verbindet, den Fokus auf die spätere Lehrtätigkeit richtet oder zusätzliche Veranschaulichung liefert. Außerdem wurde der Übungsbetrieb in der Analysis zu Beginn und in der Linearen Algebra zur Mitte des Wintersemesters 2009/10 umgestellt: Die von den Studierenden zu bearbeitenden Aufgaben unterteilen sich in Präsenz- und Hausübungen. Außerdem werden zu den Musterlösungen ergänzende Anleitungen online gestellt, in denen vor allem die Ideen, die hinter den Lösungen stehen, herausgearbeitet werden. Diese vielleicht überraschende und etwas seltsam anmutende Maßnahme erschien uns notwendig, da die offiziellen Musterlösungen oft schon relativ viel mathematisches Know-How voraussetzen und so für die Studierenden nur schwer nachvollziehbar sind. Des Weiteren gibt es auf der E-Learning-Plattform ein Diskussionsforum und eine Materialsammlung aller Übungsaufgaben, Musterlösungen und Skripte der beiden Veranstaltungen. Ein wichtiges methodisches Standbein des Projekts ist das „Betreute Arbeiten“ im Lern- und Diskussionszentrum „LUDI“, bei dem sich Studierende mit Tutorinnen bzw. Tutoren und Projektmitarbeiterinnen bzw. Projektmitarbeitern über ihre Fragen und Übungsaufgaben austauschen können.

Gegen Ende des Semesters wurde unter den Studierenden eine Befragung zur Häufigkeit und Art der Nutzung der Projektangebote durchgeführt. Die Ergebnisse können hier nicht präsentiert werden, wir wollen aber exemplarisch einen Studenten zu Wort kommen lassen: „Das Projekt ist sehr hilfreich, und ich bin dankbar dafür. Ich wünschte, ich hätte noch viel mehr Zeit, mir alles anzusehen.“ Hier zeigt sich als eine erste Grenze die knappe Zeit, die den Studierenden für die Nutzung der Angebote zur Verfügung steht. Außerdem können systemimmanente Schwierigkeiten, wie etwa die Größe der Übungsgruppen, nicht behoben werden. Dass auf die Inhalte der Vorlesungen kein Einfluss genommen wird, ist eine programmatische Selbstbeschränkung des Projekts.

Und doch eröffnet das Projekt Chancen, die Frustration unter den Lehramtsstudierenden einzudämmen, Brücken zwischen Schul- und Universitätsmathematik zu schlagen und dem Bedürfnis an Unterstützungsangeboten von Seiten der Studierenden nachkommen zu können.

Impulse für die Lehramtsausbildung: TUM School of Education

Kristina Reiss und Manfred Prenzel (München)

Leider wird die Lehramtsausbildung allzu oft als „fünftes Rad am Wagen der Fachwissenschaft“gesehen. Entsprechend schlecht (oder besser lieblos) werden künftige Lehrkräfte auf die Anforderungen von Schule und Unterricht vorbereitet. Dieser mangelnde Respekt vor dem Berufsfeld ist sicherlich auch ein Grund für das eher schlechte Image von Lehrerinnen und Lehrern in der Öffentlichkeit. Da es auf der anderen Seite aber an Lehrkräften gerade in der Mathematik und den Naturwissenschaften mangelt, hat die Technische Universität München mit der TUM School of Education ein Projekt auf den Weg gebracht, das explizit auf die Verbesserung der Ausbildungsqualität ausgerichtet ist und das Lehramtsstudium in den MINT- Bereichen attraktiv machen soll.

Ein wesentlicher Aspekt ist dabei, dass Studierende im Rahmen der Lehramtsausbildung ihre Expertise mit einem deutlichen Berufsfeldbezug entwickeln können. Es geht somit darum, fachliche, fachdidaktische und pädagogische Kompetenzen gleichermaßen und aufeinander abgestimmt zu entwickeln. Es soll so ein breites und vielfältig anwendbares Wissen aufgebaut werden, wobei Gelegenheiten zum Sammeln von Erfahrungen, zum Üben und Reflektieren gegeben werden und Rückmeldung ein wichtiger Bestandteil ist. Wesentliche Komponenten sind die Vermittlung von *Wissen*, das sich auf das Fach, die Fachdidaktik, die Pädagogik und die Psychologie bezieht, von *Routinen* wie Muster der Unterrichtsführung, Skripts oder das Handeln in Problemsituationen sowie eines *Berufsethos*, der Engagement, Reversibilität, Fürsorge und die Fähigkeit zum Diskurs umfasst. Die Ausrichtung auf das Berufsfeld umfasst die Thematisierung des Wissensbedarfs für die Handlungsebene von Lehrkräften, der Bedingungsfelder von Unterricht und Schule, des Umgangs mit wichtigen und häufigen Entscheidungssituationen und typischen, gravierenden Problemkonstellationen sowie des Wechselspiels von Wissen, Routinen und Berufsethos. Auch zentrale Aspekte der Professionalität von Lehrkräften (z.B. Standards, Zusammenarbeit, Qualitätssicherung) sind hier von Bedeutung.

Ein wesentliches Merkmal der TUM School of Education ist die explizite Verzahnung von Fach und Fachdidaktik bzw. Fachdidaktik und Erziehungswissenschaft im Curriculum. In Bezug auf die Mathematik heißt das konkret, dass von Anfang an schulbezogene Themen und die klassischen Vorlesungsinhalte etwa von Linearer Algebra, Analysis, Algebra, Geometrie oder Wahrscheinlichkeitstheorie aufeinander bezogen werden. Umgesetzt wird so ein kumulativer Wissenserwerb, der eine Voraussetzung für solide und gut vernetzte Kompetenzen ist. Mindestens eine der beiden Anfangsvorlesungen in der Mathematik wird speziell für Studierende im Lehramt an Gymnasien angeboten, beide Vorlesungen werden durch die genannten schulbezogenen Vertiefungen ergänzt.

Forschung und Lehre werden an der TUM School of Education als Einheit gesehen. Dabei ist das Themenspektrum breit und reicht über die Beschäftigung mit dem Unterricht an Schulen und Hochschulen etwa in Bezug auf Muster, Wirkungen und Innovationen sowie Fragen von Kompetenzentwicklung und Assessment über Untersuchungen zu Lehrkräften bzw. allgemein dem pädagogischen Personal zur Betrachtung der Schule bzw. außerschulischer Lernorte. Dabei geht es um Diagnose im weitesten Sinn genauso wie um Interventionen oder Fragen von Qualitätsentwicklung oder um Bildungskonzepte und Lerneffekte.

Die Philosophie der TUM School of Education ist im Grunde sehr einfach. Jede Universität braucht interessierte und motivierte Studierende, denn nur aus ihnen können exzellente Absolventinnen und Absolventen werden. Solche Studentinnen und Studenten bekommt man gerade im MINT-Bereich nur, wenn bereits in den Schulen die richtigen Weichen gestellt werden. Es ist einsichtig, dass hier den Lehrkräfte eine ganz wichtige Rolle zukommt. In diesem Sinn ist eine gute Lehramtsausbildung auf jeden Fall eine notwendige und lohnende Investition.

Fachinhaltliches Wissen und Können für fachdidaktisches Handeln verfügbar machen - Ergänzungsvorschläge für eine professionsorientierte fachinhaltliche Mathematik-Lehrerbildung

Susanne Prediger (Dortmund)

Der Vortrag gab eine Einordnung verschiedener didaktischer Orientierungen für die Weiterentwicklung der fachinhaltlichen Lehrerbildung und betonte einen bisher nicht konsequent mitgedachten Aspekt der Ausrichtung an didaktischer Handlungsfähigkeit. Vorrangig sind derzeit

1. Orientierung an der Reparatur noch nicht tragfähigen schulmathematischen Wissens
    - im Sinne des Nachholens: Lücken in didaktisch wichtigen Aspekten der Schulmathematik sollen gestopft werden (z.B. inhaltliche Vorstellungen, Anwendungen, systematischer Aufbau, …),
    - im Sinne des eigenen Erlebens: Künftige Lehrkräfte sollen Mathematiktreiben so erleben, wie es didaktisch wünschenswert ist für

Schule (mathematische Grunderfahrungen in ganzer Breite, Prozessbezug, ...).

2. Orientierung an der Vertiefung schulmathematischen Wissens
   - im Sinne der Fundierung: Fachliche Grundlagen sollen erworben werden, um Schulmathematik vom höheren Standpunkt zu begreifen (z.B. Perspektiverweiterung, Präzisierung, Absicherung durch Axiomatik, breitere Anwendbarkeit durch implizite Definitionen ...),
   - im Sinne der Anschlussfähigkeit: Künftige Lehrkräfte sollen erleben, wie Hochschulmathematik aus Schulmathematik erwächst (z.B. Prozesse der Verallgemeinerung, Stufen der Exaktheit, ...).
3. Hinzu kommen sollte als weitere Orientierung die Restrukturierung (im Sinne von Hentigs), mit der die curriculare Diskussion für die fachinhaltliche Ausbildung auch an dem Ziel der didaktischen Handlungsfähigkeit ausgerichtet sein sollte. Künftige Lehrkräfte sollen, so die mit empirisch erprobten Beispielen im Vortrag konkretisierte Forderung, fachinhaltliches Wissen und Können so erwerben, dass es nutzbar ist für späteres didaktisches Handeln.

Mathematik-Lehrerbildung: HU-Modell

Jürg Kramer und Elke Warmuth (Berlin)

Als fundamentale Probleme der Lehrerbildung stellen sich nach wie vor das von Felix Klein bereits 1908 konstatierte „Problem der doppelten Diskontinuität“ sowie das Problem der Sinngebung, das René Thom 1973 mit den folgenden Worten beschrieb: „The real problem which confronts mathematics teaching is not that of rigour, but the problem of the development of ‚meaning‘, of the ‚existence‘ of mathematical objects.“

Die Lehrerausbildung an der Humboldt-Universität zu Berlin verfolgt das Ziel, die Kleinsche doppelte Diskontinuität zu überwinden sowie durch eine verstärkte Sinngebung die Praxisorientierung in der Lehrerbildung zu stärken und sieht folgende Leitlinien als erfolgversprechend auf dem Wege zur Erreichung dieser Ziele an:

- enge Kooperation von Schule und Universität,
- Einheit der Lehrerausbildung von der 1. bis zur 3. Phase,
- Verzahnung der Fachwissenschaft Mathematik mit der Schulmathematik und der Fachdidaktik.

Diese Leitlinien werden institutionell und projektgebunden verfolgt.

Auf institutioneller Ebene sind zu nennen:

1. Einführung konsekutiver Lehramtsstudiengänge an der Humboldt-Universität (in Kraft seit 2004). In diesen Lehramtsstudiengängen wurden neue Module an der Schnittstelle von Mathematik und Fachdidaktik eingeführt, z. B. Arithmetik und ihre Didaktik, Elementargeometrie und ihre Didaktik, Stochastik und ihre Didaktik. Darüber hinaus finden lehramtsspezifische Vorlesungen im Grundstudium Mathematik statt, z. B. Analysis I, II, Lineare Algebra I, II.
2. Kooperation mit Schulen, insbesondere dem Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen. Das seit 2001 auf Basis einer Zielvereinbarung mit dem Berliner Senat arbeitende Netzwerk von derzeit vier Berliner Gymnasien fördert mathematisch begabte und interessierte Schülerinnen und Schüler ab der 5. Klasse. Elemente der Förderung sind u. a. die Arbeit nach speziellen Rahmenlehrplänen, der Unterricht durch Hochschulangehörige an den Schulen, die Anerkennung von besonderen Schulleistungen als Studienleistungen.
3. Jährlich fünf Lehrerabordnungen an das Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin. Diese Abordnungen dienen dem gegenseitigen Austausch von Wissen und Erfahrungen und werden insbesondere von den Studierenden sehr geschätzt.

Auf Projektebene sind wir in folgenden Feldern aktiv:

1. Bereich „Education“ des DFG-Forschungszentrums MATHEON mit den Projekten „Current mathematics at schools“, „Teachers at universities“, „Industry-driven applications of mathematics in the classroom“, Sommerschulen „Lust auf Mathematik“.
2. „Mathematik Anders Machen“, der bundesweiten praxisorientierten Lehrerfortbildung, gefördert von der Deutsche Telekom Stiftung.
3. Humboldt-ProMINT-Kolleg, einem ebenfalls von der Deutsche Telekom Stiftung geförderten Projekt zur neuen Professionalisierung der Lehrerbildung.

Kompetenzentwicklung in der Mathematik-Gymnasiallehrerausbildung – eine empirische Studie an fünf deutschen Universitäten

Gabriele Kaiser, Nils Buchholtz, Björn Schwarz (Hamburg), Sigrid Blömeke, Rainer Lehmann, Ute Suhl (Berlin), Johannes König (Köln), Hans-Dieter Rinkens (Paderborn)

Der Beitrag erscheint an anderer Stelle in diesem Band.

Deutsche Telekom Stiftung (DTS) und Deutsche Mathematiker Vereinigung (DMV), Bonn und Berlin, Stephanie SCHIEMANN, Berlin

S10: Vernetzung von Schule und Hochschule im Bereich Mathematik

In den Jahren 2008 und 2009 haben Mathematikerinnen und Mathematiker – gefördert von der Deutschen Telekom Stiftung (DTS) – die Vernetzung von Schule und Hochschule in den Regionen vorangetrieben. Rund fünfzig Hochschulen haben sich an dem Projekt beteiligt; einzelne Hochschulen konnten bis zu 26 Schulen vor Ort für gemeinsame Projekte gewinnen. Diese beinhalteten zum Beispiel Kinder-Unis und Schüler-AGs zur Mathematik, Tage der Mathematik, Didaktische Kolloquien, Weiterbildungsveranstaltungen für Mathematiklehrerinnen und -lehrer, Mathematikabende für die breite Öffentlichkeit und vieles mehr.

In München auf der gemeinsamen GDM/DMV-Tagung haben die DMV und die DTS Bilanz gezogen. Wolfgang Lück, derzeitiger Präsident der DMV, eröffnete die Veranstaltung und Gerd Hanekamp stellte, als Vertreter der DTS, die Motivation zur Förderung aus Sicht der DTS dar. Er gab einen Überblick über das Engagement der DTS im Bereich Mathematik & Schule. Anschließend präsentierten sich fünf „Best-Practice-Beispiele" aus dem zweijährigen Vernetzungsprojekt, die im Folgenden kurz dargestellt werden. Günter M. Ziegler aus Berlin moderierte die Veranstaltung.

Am Ende der Veranstaltung wurde das neue „Netzwerkbüro Schule – Hochschule" der DMV eröffnet, welches die DTS seit dem 1. Februar 2010 für drei Jahre fördert. Ziel ist es, bestehende Schul-Hochschul-Aktivitäten der DMV zu bündeln, weiterzuentwickeln und neue zu initiieren. Beispiele sind der *DMV-Abiturpreis*, die *Mathemacher* und der *Matheadventskalender*. Zentrales Anliegen des Netzwerkbüros wird sein, ein *Lehrerforum* innerhalb der DMV aufzubauen und dafür Mathematiklehrerinnen und -lehrer innerhalb und außerhalb der DMV zu gewinnen. Die Geschäftsführung liegt bei Stephanie Schiemann.

Best-Practice Beispiel 1: Freiburg

Michael BÜRKER, Ralf ERENS, Freiburg

Herausragende Vernetzungsaktivitäten in Freiburg waren die Vortragsaktion *„die Schulbrücke"*, die *Mathematiktage* an der Universität Freiburg und die *Aktivitäten des Freiburg-Seminars*.

2008 haben Mitglieder des Mathematischen Instituts vor Schülerinnen und Schülern der Oberstufe an insgesamt 26 Schulen aus dem Regierungsbezirk

Freiburg Vorträge über Anwendungsbereiche der Mathematik, mathematische Denkweisen und Strategien bei Problemlösungen, aber auch über ästhetische Aspekte der Mathematik gehalten.

Von Seiten des Instituts haben 16 Personen jeweils ein bis drei Vorträge gehalten: Die Professoren Bangert, Eberlein, Goette, Huber-Klawitter, Kröner, Kuwert, Pfaffelhuber, Rüschendorf, Schlage-Puchta, Siebert, Soergel, Wolke und Ziegler, sowie die Dozenten Junker, Schuster und Bürker. Insgesamt sind durch diese Vortragsaktion ca. 3000 Schülerinnen und Schüler, z.T. auch Eltern erreicht worden.

Bei den an der Uni Freiburg seit 2002 durchgeführten *Mathematiktagen* boten Dozenten interessierten Schülerinnen und Schülern Workshops über die verschiedensten Themen an. Nebenstehendes Bild zeigt Prof. Bangert bei seinem Workshop „Inhaltsberechnung - Der Satz von Pythagoras und das Banach-Tarski-Problem".

Präsentation „Minkowski-Diagramme"

An weiteren Aktionen wie z.B. den *Schnuppertagen für Mädchen*, *den Science-Day* im Europapark Rust waren ebenfalls Professoren und wissenschaftliche Mitarbeiter beteiligt und haben dabei für Mathematik in der Öffentlichkeit geworben. Viele Aktionen fanden in Zusammenarbeit mit schulischen Partnern statt, insbesondere mit dem *Freiburg-Seminar,* in dem motivierte Schülerinnen und Schüler aus Freiburg und Umgebung in den MINT-Fächern von Lehrkräften an einem Nachmittag pro Woche betreut werden. Für die Mathematik sind dies Dr. Gerhard Metzger (SSDL Freiburg) und Ralf Erens (Kreisgymnasium Neuenbürg).

Im Jahr der Mathematik fanden außer den üblichen Wochenendseminaren, Praktika, Betriebsexkursionen, Studienfahrten und Kooperationen mit Hochschulinstituten auch eine Sommerakademie *„maths in summer"* mit Schülerinnen und Schülern aus ganz Baden-Württemberg statt (siehe nebenstehende Fotos).

Präsentation „Kürzeste Wege" (Graphen)

Weitere Informationen findet man unter: http://freiburg-seminar.de/

Best-Practice Beispiel 2: Halle (Saale)

Karin RICHTER, Inge-Gret MAIHÖFNER, Halle (Saale)

Seit dem Jahr 2008 beteiligt sich die Universität Halle in Zusammenarbeit mit einer stetig zunehmenden Zahl von Gymnasien und Sekundarschulen der Stadt und ihrer Umgebung an dem Vernetzungsprojekt von Schulen und Hochschulen.

Mathematik anders machen! Wer könnte hier genauer, lebendiger und einfallsreicher sagen, was Schülerinnen und Schüler sich für ihre Auseinandersetzung mit Mathematik und ihren Anwendungen wünschen, als diese selbst. Den Ausgangspunkt für die Hallenser Beteiligung an der Netzwerk-Initiative bildete die Überlegung, Schülerinnen und Schülern aller Schulformen und Jahrgangsstufen von Anfang an aktiv einzubeziehen, auf ihre Ideen, Vorschläge und Anregungen genau zu hören und mit ihrer Hilfe neue Wege zu gehen in der Zusammenarbeit zwischen Mathematischem Institut der Universität und Schulen Halles und der Umgebung.

Den ersten Schritt auf diesem Weg bildete die Einladung an Schülerinnen und Schüler, sich an dem Wettbewerb *Mathematische Werkstatt* zu beteiligen, zu dem die Universität 2008 aufrief. Die Schulen Halles und der Umgebung wurden eingeladen, Mathematik im eigentlichen Sinne des Wortes selbst in die Hand zu nehmen, mathematische Exponate zum Anfassen selbst zu entwerfen, herzustellen und mit einem begleitenden Text zu versehen, der den mathematischen Kontext beschrieb.

Das Ziel: Diese Exponate auch durch andere Schülerinnen und Schüler ausprobieren, erforschen und nutzen zu lassen. Unterstützt durch Lehrerfortbildungen und immer wieder im Gedanken- und Ideenaustausch mit Lehrerinnen und Lehrern sprang die Idee rasch auf Hallenser Schulen über: Viele Schülerinnen und Schüler machten sich ans Austüfteln, Knobeln, Basteln, Handwerken … Die zahlreichen Exponate, die auf diese Weise entstanden, reichten vom riesigen hölzernen Pythagoras-Puzzle über einen selbst gebauten Jacobsstab bis zu selbst entwickelten mathematischen Spielen. Auf beeindruckende Weise wurde deutlich, mit welchem Ideenreichtum und Eifer die Schülerinnen und Schüler an die Arbeit gegangen waren, wovon sich auch Studierende des Instituts für Mathematik nachhaltig anstecken ließen.

Die Entwicklung des Brettspiels „Der Schatz des Itzam Na“ zur Mathematik der Maya durch Lehramtsstudierende ist ein beredtes Beispiel dafür. Es folgte in Zusammenarbeit mit dem Landesinstitut für Lehrerfort- und -weiter-bildung Sachsen-Anhalt und dem MNU-Landesverband eine erste *Mit-Mach-Ausstellung*, in der diese Exponate ausprobiert werden konnten.

So wurden erste Eindrücke und Anregungen gesammelt, wie eine solche interaktive mathematische Exponate-Präsentation geeignet umgesetzt werden konnte. Auf dieser Grundlage wurde 2009 unter aktiver Beteiligung von Lehramtsstudierenden die Ausstellung *Mathematische Wunderkammer* in enger Zusammenarbeit mit den Franckeschen Stiftung zu Halle realisiert. Mit zahlreichen Schüler-Exponaten lud die *Wunderkammer* zum Ausproben, Entdecken, Erforschen von Mathematik ein, ergänzt und abgerundet durch ein breites Spektrum mathematischer Workshops und spannender Schnuppervorlesungen.

Die starke Resonanz auf die *Wunderkammer*, die sich in der Vielzahl der Besuche widerspiegelte, aber auch die zahlreichen Anregungen und Bitten um weitere Möglichkeiten zur aktiven Beschäftigung mit Mathematik zum Anfassen und das nicht abbrechende Übersenden weiterer Mathematik-Exponate belegten, auf dem richtigen Weg zu sein. Eine Mit-Mach-Dauerausstellung der Mathe-Exponate im Institut für Mathematik der Universität, Mathematik-Entdecker-Nachmittage mit Knobeleien und mathematischen Spielen oder thematische Workshops sind weitere Schritte, um Mathematik, hautnah und zum Anfassen, zu einem festen Bestandteil der Beschäftigung mit Mathematik für immer mehr Schülerinnen und Schüler werden zu lassen. Weitere Informationen:
http://didaktik.mathematik.uni-halle.de/schuelerseite/mathe_wunderkammer/

Best-Practice Beispiel 3: Technische Universität München

Vanessa KRUMMECK, München

Wollte man über sämtliche Aktivitäten an der Schnittstelle Schule / Hochschule des Zentrums Mathematik der TU München berichten, so wäre über folgende Programme zu informieren:

Schülertag, AbiTUMath, Girls' Day, TUMMS, Abitag, Mädchen Machen Technik, Tag der offenen Tür, Herbstuni, Mathematik-Mitmach-Ausstellung ix-quadrat, Web-Schulportal, W/P-Seminare, TUM-Kolleg, Lehrerfortbildungen, Wissenschaftsjahre, Schulverteiler, Mathezirkel, Wissenschaftstage, Schülerstudium, Schulklassenbesuche, Modellierungstage, Sondertage auf Anfrage, Tag der Mathematik für Schülerinnen und Schüler.

Da dies in einem Kurzbericht unmöglich ist, sollen hier die Ziele und Ideen hinter diesen Programmen beispielhaft an zwei Projekten dargestellt werden. Das Zentrum Mathematik möchte mit seinen Schulprogrammen Schülerinnen und Schüler aller Jahrgangsstufen und Schulformen erreichen und Ihnen die aktive Auseinandersetzung mit Mathematik ermöglichen.

So ist die Mathematik-Ausstellung *ix-quadrat*, die von Prof. Dr. Dr. Jürgen Richter-Gebert konzipiert und umgesetzt wurde, eine echte Mitmach-Ausstellung, bei der Mathematik aktiv erfahren und erlebt werden kann. Der Ausstellung liegt ein mehrschichtiges Konzept zu Grunde, das die gesamte Bandbreite vom spielerisch erfahrbaren „Phänomen Mathematik" über Erklärungen und Erfahrungen auf verschiedenen Abstraktionsniveaus bis hin zu forschungsrelevanten Fragestellungen umfasst. Die Exponate beinhalten hierbei einerseits konkrete mathematische Experimente zum „Be-greifen" von Effekten; andererseits werden gezielt interaktive Computervisualisierungen verwendet um thematisch in die Tiefe gehen zu können. Durch dieses Konzept adressiert die Ausstellung erfolgreich eine breite Gruppe von Besuchern: vom Kindergartenkind über Schulkinder bis hin zu Studierenden und Fachwissenschaftlern. Selbstverständlich sind die Weiterentwicklung der Exponate und die Möglichkeit des Transfers des Konzepts in den Schulunterricht sowohl Elemente der Ausbildung von Lehramtsstudierenden als auch von Lehrerfortbildungen.

Seit der Eröffnung im November 2002 nahm die Zahl der Besucher stetig zu. In den letzen beiden Jahren nahmen ca. 250 Gruppen eine Führung durch die Ausstellung wahr. Vertreten waren hierbei Kindergarten- und Hortgruppen, Schulklassen aller Jahrgangsstufen und Schultypen inklusive Berufs- und Fachoberschulen sowie Erzieherinnengruppen, Grundschulseminare und Lehrergruppen, aber auch sehr spezielle Gruppen wie beispielsweise Kindergeburtstagsgäste, Besuchergruppen aus dem Deutschen Museum, Schüler einer Klasse für geistig Behinderte und einer Klasse der

Schule für Kranke, Kinder verschiedenster Ferien- und Nachbarschaftshilfe-Programme, Besucher von Volkshochschulkursen zum Thema Mathematik sowie Seniorengruppen. Für viele Gruppen ist der Besuch im *ix-quadrat* schon ein fest integrierter Jahresprogrammpunkt.

Ein anderes Projekt, welches das mathematische Miteinander verschiedener Altersgruppen unterstreicht, ist der *Bambus-Workshop*, der in Kooperation mit dem Schweizer Geometriekünstler Caspar Schwabe im Rahmen einer Woche unter dem Motto *Mathe-Aktiv* im Jahr der Mathematik an der TU München stattgefunden hat.

Bei der Übertragung der in kleinen Modellen erarbeiteten mathematischen Strukturen auf die in ihrer Dimension beachtlich größeren Bambusmodelle wurde ein tiefes mathematisches Verständnis entwickelt, das die Herstellung der Kunstwerke aus Bambus überhaupt erst ermöglichte. Während einige der Objekte von ganzen Schulklassen gefertigt wurden, entstanden andere Gebilde in kleinen Gruppen, bestehend aus Teilnehmerinnen und Teilnehmern im Alter von 6 – 60 Jahren.

Infos zu allen Projekten finden Sie hier: www.ma.tum.de/Schulportal

Best-Practice Beispiel 4: Ludwig-Maximilians-Universität in München

Klaus LINDE, Martin SCHOTTENLOHER, München

Rund um die LMU hat sich ein Team aus Hochschulmitarbeitern und Lehrern zusammen gefunden um gezielt eine stärkere Vernetzung von Schule und Hochschule voranzutreiben. Hierzu wurden – neben bereits stattfindenden Veranstaltungen wie dem Tag der Mathematik, Mathematik am Samstag, sowie dem Probestudium – zwei neue Projekte ins Leben gerufen: Das *„Mobile Mathematiklabor“ (MML)* und *„Call a Mathe-Prof“ (CMP).*

Das *„Mobile Mathematiklabor“ (MML)*besteht aus einer Auswahl an unterschiedlichen Unterrichtseinheiten mit einem ganzen Set an Material, das es den Schülern ermöglicht, in Gruppen- oder Einzelarbeit Aufgaben zu lösen, Fragestellungen zu entwickeln, evtl. zu basteln oder etwas auszuprobieren. Mathematik soll hier also „hands on“ erlebt werden. Im Zentrum von MML stehen folgende Ziele:

- Es soll der Spaß an mathematischen Inhalten vermittelt werden.
- Lehrer sollen entlastet und zu weiteren Ideen angeregt werden.
- Die Eigenaktivität der Schüler soll gefördert werden.

Die bereitgestellten Sets werden vom Mathematischen Institut verwaltet. Lehrer oder auch Schülergruppen können die gewünschten Sets anfordern, gegebenenfalls mit einem Dozenten oder Studenten. Die bisher den Schulen angebotenen Themen aus dem MML reichen über Fragen aus der Spieltheorie und der Geometrie (etwa über Polyeder) bis hin zur Anwendung von zahlentheoretischen Methoden bei der Erstellung von Strichcodes.

Bei dem Projekt *„Call a Mathe-Prof" (CMP)* handelt es sich um das Angebot von Dozenten des Mathematischen Instituts der LMU an Schulen zu gehen und Vorträge über Mathematik zu halten. Die Zielsetzungen des Projekts CMP bestehen darin, den Schülerinnen und Schülern deutlich zu machen, dass die Mathematik

- neben Spaß machen, auch zu weiterem Nachdenken anregen kann,
- in nahezu allen Bereichen des modernen Lebens vorkommt,
- für viele moderne Berufe und Studiengänge eine Grundlage ist.

Die angebotene Themenpalette reicht von der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die Zahlentheorie sowie Geometrie und Kryptographie bis hin zu Fragen aus der Spieltheorie. Die Dozenten achten trotz der manchmal schwierigen Materie darauf, dass die Schüler nicht überfordert sind.

Darüber hinaus wurde im Mathematikjahr 2008 ein Preisausschreiben veranstaltet, um die angestoßenen Projekte bekannt zu machen, der Adventskalender mit täglichen Rätseln mithilfe des Mathematischen Instituts ausgebaut, siehe: http://www.logicweakly.de/forum/r_index.php und ein Wettbewerb der Facharbeiten ausgeschrieben, der im Jahre 2010 startet. Infos dazu unter: http://www.mathematik.uni-muenchen.de/fachpreise/

Best-Practice Beispiel 5: HU Berlin - Das Berliner Netzwerk

Jürg KRAMER, Ulrich HEY, Rüdiger GIESE, Berlin

Das Institut für Mathematik der Humboldt-Universität zu Berlin (HU) hat bereits jahrzehntelange Erfahrungen in der Zusammenarbeit mit Schulen. Seit 2001 besteht das Berliner Netzwerk mathematisch-naturwissenschaftlich profilierter Schulen, zu dem die vier Gymnasien Andreas Schule, Heinrich-Hertz Schule, Herder Schule und Immanuel-Kant Schule gehören. Inhalte der gemeinsamen Arbeit sind Mathematikunterricht durch Hochschulangehörige in der Sekundarstufe II, Abordnungen von Lehrerinnen und Lehrern an die HU und die Erarbeitung spezieller Rahmenpläne zur Förderung der Schülerinnen und Schüler ab Klasse 5. Die im Jahr 2001 unterzeichnete Zielvereinbarung zwischen Berliner Senat und HU sichert einerseits die Anerkennung von Abiturleistungen als Studienleistungen sowie andererseits, mit Unterstützung des DFG-Forschungszentrums MATHEON, die Finanzierung der Abordnungen. Jährlich finden im Rahmen des Berliner Netzwerks die *Sommerschulen „Lust auf Mathematik“* für Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe II statt. Durch das Projekt *„Mathematik vernetzen“* wurden die Sommerschulen 2008 und 2009 gefördert.

Eine enge Zusammenarbeit zwischen Schule und Hochschule ist auch die Philosophie des von der DTS geförderten bundesweiten Lehrerfortbildungsprojekts *„Mathematik Anders Machen“* mit den Standorten Duisburg/Essen und Berlin. Anliegen ist es, die doppelte Diskontinuität in der Lehrerausbildung zu überwinden und lebenslanges Lernen zu ermöglichen. Wissenschaftler-Lehrer-Tandems

führen die Fortbildungen durch und sorgen für eine enge Verzahnung von Fachwissenschaft, Schulmathematik und Fachdidaktik und stärken das Lehrer-Ich. Solche Tandems sind auch aus der Kooperation im Berliner Netzwerk entstanden. Durch das Projekt *„Mathematik vernetzen“* wurden 2008 zusätzliche Lehrerfortbildungen u. a. zur Arbeit mit dem *Mathekoffer* gefördert.

Im Zentrum des im Aufbau befindlichen und durch die DTS geförderten *Humboldt-ProMINT-Kollegs* steht die Ausweitung der positiven Erfahrungen der Zusammenarbeit zwischen Schule und Hochschule auf die MINT-Fächer. Arbeitsgruppen bestehend aus Fachdidaktikerinnen/-didaktikern, abgeordneten Lehrerinnen und Lehrern sowie Doktorandinnen und Doktoranden werden in gemeinsamer Forschung und Lehre eine horizontale und vertikale Vernetzung der an der HU vertretenen MINT-Fächer über Schulstufen hinweg vorantreiben. Ein weiteres Merkmal dieses Projekts ist eine Vernetzung am Wissenschafts- und Wirtschaftsstandort Adlershof mit HighTech-Unternehmen und außeruniversitären Forschungseinrichtungen, die Lehramtsstudierenden und abgeordneten Lehrkräften Praktika ermöglichen. Das Projekt startet im August 2010 für drei Jahre.

Hinweise zu den erwähnten Projekten finden Sie unter:
http://didaktik.math.hu-berlin.de/

Karl Josef FUCHS, Salzburg; Hans-Christoph GRUNAU, Magdeburg; Stephan HUSSMANN, Dortmund; Rainer SCHULZE-PILLOT, Saarbrücken & Rudolf STRÄSSER, Gießen

Bericht über die Schnittstellenaktivität zum „Übergang vom Bachelor zum Master"

Innerhalb der Schnittstellenaktivität, die während der Tagung 90 Minuten dauerte, wurden zwei Themenbereiche diskutiert:
- der Übergang vom Bachelor zum Master als Differenzierungsinstrument von Hochschulstandorten
- die Rolle von Fachdidaktik und Fachwissenschaft in der Bachelor- und Master-Phase.

Als Ausgangspunkt wurden vier verschiedene Tätigkeiten im Zusammenhang mit Mathematik unterschieden: Mathematik nutzen (der „Anwender"), Mathematik weitergeben (der „Lehrer"), Mathematik entwickeln (der „Forscher") und Mathematik genießen („alle"). Die verschiedenen Studiengänge sollten sich auf diese unterschiedlichen Schwerpunkte in der künftigen (Berufs-)Tätigkeit ihrer Absolventen einstellen. Die Überlegungen während der Münchener Tagung bezogen sich vor allem auf Studiengänge für künftige Anwender und Lehrer. In die Thematik führten jeweils zwei kurze Referate ein, je eines aus Sicht der Didaktik und eines aus Sicht der Fachwissenschaft. Diese Impulsreferate wurden durch Plenardiskussionen vertieft. Im Vordergrund stand ein Erfahrungsaustausch, der bei künftigen Diskussionen in den Hochschulen hilfreich sein kann.

Der Übergang Bachelor/Master als Differenzierungsinstrument von Hochschulstandorten

Die Erfahrungen an den Hochschulstandorten zeigen deutlich, dass der Übergang vom Bachelor- zum Master-Studium nach der Zielstellung des jeweiligen Studienganges unterschiedlich zu diskutieren ist. Die Problematik des Überganges für „Anwender" von Mathematik stellt sich offensichtlich anders dar als für künftige Mathematik-„Lehrer" (Formulierungen dieses Textes sind geschlechtsneutral zu verstehen, z. B. beziehen sich Aussagen über „Lehrer" auf Lehrerinnen und Lehrer).

Bezüglich der „Anwender" ist – auch nach einer informellen Umfrage bei verschiedenen Hochschulen in Deutschland mit Antworten von acht Universitäten – festzuhalten, dass erst wenige Bachelor-Studiengänge überhaupt mehrere Jahrgänge von Absolventen haben. Es fehlen daher statistisch valide Daten. Faktisch wird der Übergang von der Bachelor- in die Master-Phase oft von „besonderer Eignung" abhängig gemacht, nur an wenigen Hochschulen gibt es feste Quoten. Soweit Zahlen über Studienabbrüche zur Verfügung stehen, scheinen sich diese in der Bachelor-Phase zwischen 50% und zwei Drittel zu bewegen, in der Master-Phase finden sich kaum Abbrüche (auch wegen der bescheidenden Datenlage). Insofern werden die Ergebnisse der Untersuchungen von Törner u.a. bestätigt, „dass innerhalb der ersten beiden Semester nicht wenige Studierende ihr Studienfach und/oder die Prüfungsgruppe wechseln oder das Studium vorzeitig, ohne Abschluss, beenden“ (Törner u.a. 2008, S. 178). Studien-Abbrüche in Anwender-Studiengängen erfolgen meist früh. An manchen Standorten sucht man die Auswirkungen der Anfangsschwierigkeiten der Studierenden dadurch in Grenzen zu halten, dass die in der Regel schlechteren Noten des ersten Studienjahres für den Bachelor-Abschluss mit einem niedrigen Faktor gewichtet werden. Die informelle Umfrage zeigt zusätzlich, dass Studierende bei Erreichen eines Bachelor-Abschlusses ihr Mathematik-Studium in der überwiegenden Mehrzahl in einer Master-Phase fortsetzen, für die Lehramtsstudierenden sind das nahezu 100% An manchen Standorten werden auch Regeln für einen fließenden Übergang von der Bachelor- in die Master-Phase geschaffen, z.B. durch die Möglichkeit, bereits in der Bachelor-Phase Lehrveranstaltungen aus der Master-Phase zu hören. Über Abschlüsse in der Master-Phase liegen für Mathematik-„Anwender“ noch keine belastbaren Zahlen vor.

Bezüglich der Mathematik-„Lehrer“ ist zunächst festzuhalten, dass noch nicht in allen Bundesländern der Übergang zur Bachelor-Master-Struktur vollzogen ist. Dort, wo dieser Übergang vollzogen ist, werden allerdings einige Entwicklungstendenzen deutlich. Verteilt man ohne Änderungen und Anpassungen die „alte“ Struktur der Lehrerausbildung auf die zwei Phasen Bachelor und Master, so erweist sich der Bachelor-Abschluss als nicht wirklich berufsqualifizierend – auch nicht im Studiengang Primarstufe, der in Deutschland üblicherweise als Ausbildung einer Lehrperson für alle Fächer, aber dabei mit obligatorischem Unterricht in Mathematik gedacht wird. Für die anderen Lehramtsstudiengänge (der Sekundarstufen und des Berufskollegs) ist ein berufsqualifizierender Abschluss mit einem Bachelor-Titel wohl nur für einen „Ein-Fach-Lehrer“ möglich. Dafür müsste allerdings in Deutschland und Österreich erst ein Arbeitsmarkt geschaffen werden. Jedenfalls ist bei einem Studium in zwei Fächern für die Sekundarstufen und das Berufskolleg kein berufsqualifizierender Bachelor-Abschluss in Sicht. Für das Lehramtsstudium muss demnach jedem erfolgreichen Bachelor-Absolventen ein Übergang in das Master-Studium möglich sein, weil nur so ist ein berufsqualifizierender Abschluss erreichbar ist. Berichtet wird auch über Modifikationen im Prozess der Durchführung von Bachelorstudien. Zudem zeigt die Erfahrung, dass bei den Studierenden –

mindestens in den Studiengängen außerhalb des Lehramtes - eine geringe Bereitschaft besteht, das Studium mit dem Bachelor zu beenden. Argumente aus dem „Bildungsstreik“ des vorigen Jahres werden so bestätigt.

Fachdidaktik und Fachwissenschaft in Bachelor und Master

Der zweite Teil der Schnittstellenaktivität beschäftigte sich insbesondere mit Inhalten des Lehramtsstudiums im Fach Mathematik im Übergang zu einer Bachelor-Master-Struktur. Für die Struktur der Lehramtsausbildung werden oft zwei Modelle unterschieden. Es geht zum einen um ein "Säulenmodell", in dem Fachwissenschaft (z.B. Mathematik) und Fachdidaktik parallel in der Bachelor- und der Master-Phase gelehrt werden. Das "Schichtenmodell" geht im Unterschied davon aus, dass die Fachwissenschaft in der Bachelor-Phase gelehrt wird, während die Fachdidaktik und Erziehungswissenschaft in der Master-Phase im Studienplan steht.

Das Schichtenmodell erscheint für alle Lehrämter nicht praktikabel. Die dabei sich ergebenden drei oder vier Jahre eines nicht schulbezogenen Studiums führen zu einer Separierung von fachinhaltlichen und fachdidaktischen Kenntnissen, deren Trennung für die Professionalisierung des Lehrerberufs schwerwiegende Folgen hat. Nur eine Lehrperson, die fachliches Wissen mit fachdidaktischen Wissen verknüpfen kann, ist in der Lage handlungswirksame Entscheidungen in der Berufspraxis zu treffen. Darüber hinaus zeigen die zur Verfügung stehenden Zahlen, dass die Studierenden mit ihrer Entscheidung für ein Lehramtsstudium eine in der Regel stabile Entscheidung getroffen haben. Damit stehen die Universitäten in der Pflicht ein berufsqualifizierendes Angebot zu schaffen und nich durch ein einseitiges Angebot negativ auf die Motivation der Studierenden einzuwirken.

Im Säulenmodell ergibt sich demgegenüber fachwissenschaftlicher und fachdidaktischer Lehr-Bedarf in beiden Phasen (der Master- wie der Bachelos-Phase), was auch für „kleinere“ Standorte die Einrichtung einer Master-Phase legitimiert. An "größeren" Standorten sollte jeder Studiengang ein auf ihn zugeschnittenes Angebot besitzen, da die beruflichen Anforderungen in der Primarstufe, Haupt- und Realschule, Berufskolleg und Gymnasien in großen Teilen sehr unterschiedlich sind. An solchen Standorten macht auch eine Differenzierung in fachlichen Veranstaltungsangeboten für das Gymnasiallehramt sowohl in der Bachelor-Phase und insbesondere in der Master-Phase Sinn und sind bereits praktisch erprobt (vgl. den Modell-Versuch der Telekom-Stiftung, als Zwischenbericht vgl. Beutelspacher & Danckwerts 2006).

Dennoch besteht etwa in Deutschland noch keine Einigkeit über die Inhalte der Fachvorlesungen für künftige Mathematiklehrer am Gymnasium. Grunau & Röckner (2009, S. 239) listen als „Kerninhalte" des Mathematik-Studiums im Bachelor-Master-Studiengang Mathematik für „Anwender" und „Forscher" auf: Analysis I–III, Lineare Algebra I–II, eine weiterführende Vorlesung aus dem Bereich Algebra / Zahlentheorie / Geometrie und Numerik und / oder Stochastik. Diese Kerninhalte werden ortsspezifisch um weitere Lehrveranstaltungen ergänzt. Wie sieht eine entsprechende Liste für ein Gymnasiallehrerstudium aus, insbesondere vor dem Hintergrund, dass eine Differenzierung der Lehrveranstaltungen an vielen Standorten nicht durchgeführt wird? Wie sollten solche „Kerninhalte" für die verschiedenen Lehramtsstudiengänge aussehen, wenn man die Stellungnahme der Fachverbände (siehe „Standards für die Lehrerbildung" 2008) in Studienverlaufspläne für eine Hochschule umsetzt?

Es wurde die Frage aufgeworfen, ob eine „klassische Diplomvorlesung" ein angemessenes Studienangebot für Studierende im Lehramt sein kann, und es wurden Ansätze vorgestellt, auch künftige Gymnasiallehrer in speziellen Veranstaltungen auszubilden. Intensiv wurde diskutiert, ob eine „Methodenvorlesung" für alle Lehramtsstudierenden sinnvoll sein kann, um die Kompetenz zu trainieren, Mathematik auch anzuwenden. Die Konzeption vieler Lehrveranstaltungen wird von systematischen Aspekten bestimmt und diese schreiten meist linear vom Einfachen zum Schweren/Komplexen fort. Demgegenüber erfordert der Weg vom Problem zur Lösung oft verschiedene Kompetenzen und unterschiedliche Kombinationen derselben. Bei Modellierungsaufgaben tritt diese Eigenschaft besonders deutlich hervor, solche Lösungsprozesse werden in traditionellen Studiengängen aber nur selten trainiert. Dementsprechend werden Modellierungsaufgaben allgemein als schwer empfunden und bedürfen wahrscheinlich eines besonderen Trainings. Zudem wurde das Modellbilden als geeignete Leitidee für Lehrveranstaltungen im Fach sowie in der Fachdidaktik angesehen, da damit die Fähigkeiten des Argumentierens und Begründens besonders gefordert und gefördert werden. Eine solche Veranstaltung bietet zudem die Möglichkeit, sie mit einer Veranstaltung zur fachdidaktischen Reflexion der gewonnenen Erfahrungen zu verknüpfen. Auf diese Weise werden typische Lernsituationen von Mathematik nicht nur am eigenen Leib erfahrbar gemacht, sondern deren besondere Charakteristika, theoretische Hintergründe und Anwendungsfelder können für schulische Anwendungssituationen thematisiert werden. So werden Mathematik, das Lernen von Mathematik und die Gestaltung von geeigneten Lernumgebungen sinnstiftend miteinander verwoben.

Eine solche Verknüpfung ist natürlich nicht nur für Tätigkeiten wie das Modellieren sinnvoll und erwünscht, sondern für alle fachlichen Veranstaltungen, in denen schulische Inhalte thematisiert werden. Hier ist eine Studienorganisation sinnvoll, die der Analysis I und II eine Didaktik der Analysis, wahlweise der Linearen Algebra eine Didaktik der Linearen Algebra oder der Stochastik eine Didaktik der Stochastik im selben oder im nächsten Semester beiseite stellt. Auch sollten Studierende des gymnasialen Lehramts fachdidaktische Veranstaltungen zum algebraischen und funktionalen Denken, zur Diagnose und individuellen Förderung und zu grundlegenden Ideen der Mathematikdidaktik besuchen können. Vervollständigt man das Ganze mit (Pro-)Seminaren, in denen zu mathematischen Schwerpunktthemen Mathematik betrieben und dieses Handeln reflektiert wird, hat man ein Gerüst eines Studienplanes, mit dem zukünftige Gymnasiallehrer gut auf die Praxis vorbereitet sind.

Für die Studiengänge des Haupt- und Realschullehramts und des Primarstufenlehramts bietet sich selbstredend eine andere Gewichtung fachlicher und fachdidaktischer Inhalte an. Es sind jedenfalls Themen zu lehren, die weder für künftige Anwender noch für künftige Gymnasiallehrer üblicherweise im Studium angeboten werden. Als Beispiel sei nur auf eine die Lehrtätigkeit vorbereitende Arithmetik sowie eine die Schulalgebra fundierende Gleichungs- und Formellehre verwiesen.

Will man allerdings erreichen, dass diese Maßnahmen bei den Lehramtsstudierenden ankommen, so sind die Universitäten gefordert, Lehrpersonal aufzustellen, welches bereit und befähigt ist, diese neuen Anforderungen umzusetzen. Jedenfalls muss jeweils „vor Ort“ ausgelotet werden, welche Spielräume sich für die Organisation des Mathematik-Studiums (sowohl für künftige „Anwender“ wie für künftige „Lehrer“) ergeben und wie sich diese ausdehnen lassen.

Literatur

Beutelspacher, A., & Danckwerts, R. (2006). Zwischenbericht Erstes Projektjahr „Mathematik Neu Denken“. Ein Projekt zur Neuorientierung der universitären Lehrerausbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt - gefördert durch die Deutsche Telekom Stiftung (Zwischenbericht). Gießen / Siegen.

Dieter, M., Brugger, P., Schnelle, D., & Törner, G. (2008). Zahlen rund um das Mathematikstudium – Teil 3. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV), 16*(3), 176 -182.

Grunau, H.-C., & Röckner, M. (2009). Denkanstöße zur weiteren Ausgestaltung von Bachelor- und Master-Studiengängen in Mathematik, Wirtschaftsmathematik, Technomathematik, Computermathematik etc. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV), 17*(4), 239-242.

Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU. (2008 (Juni)). Retrieved 1.4.2010, URL: http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf.

Förderung von Begabten und Hochinteressierten

Die Förderung von Begabungen im Bereich der Mathematik ist eine wichtige, von Mathematikern und Mathematikdidaktikern gemeinsam zu leistende Aufgabe. Vom Präsidium der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ging deshalb die Initiative für diese Schnittstellenaktivität aus.

Dierk Schleicher (Jacobs University Bremen) berichtete von der 50. Internationalen Mathematikolympiade, die im Juli 2009 in Bremen stattfand. *Elke van der Meer* (Humboldt-Universität zu Berlin) stellte ein Forschungsprojekt vor, in dem zum einen ausgewählte kognitive, persönlichkeitspsychologische sowie motivationale Faktoren erkundet wurden, denen ein erheblicher Einfluss auf Leistungsunterschiede in verschiedenen Teilbereichen mathematischen Denkens zugeschrieben wird, und in dem zum anderen auch der Einfluss von Lernen und Übung auf die mathematischen Leistungen der beteiligten Schülerinnen und Schüler untersucht wurde.

Stephanie Schiemann (Netzwerkbüro Schulen – Hochschulen der DMV, Technische Universität Berlin) stellte das neugegründete Netzwerkbüro Schulen – Hochschulen der DMV vor, dessen Hauptanliegen die Gründung eines Lehrerforums ist. Für Lehrende soll vom Netzwerkbüro umfangreiches Material für den Unterricht, Begabtenfördergruppen, Projekte, Facharbeiten, Praktika, Fortbildungen u. ä. gesammelt und bereitgestellt werden. Auch die Verbreitung des DMV-Abiturpreises, der seit 2008 verliehen wird, liegt im Aufgabenbereich des Netzwerkbüros. In den ersten beiden Jahren wurden jeweils etwa 1000 Abiturpreisurkunden ausgestellt. Neben einer Urkunde erhalten die Preisträger eine einjährige kostenfreie Mitgliedschaft und einen attraktiven Buchpreis. Die Mathemacher-Initiative aus dem Jahr der Mathematik (2008) wird von der DMV weitergetragen. Nach wie vor können sich Menschen, die sich aktiv um die Mathematik in Deutschland bemühen, als Mathemacher bewerben. Monatlich wird eine Mathemacherin oder ein Mathemacher exponiert auf unserer Homepage hervorgehoben, sie oder er erhält ebenso eine Urkunde und eine einjährige kostenfreie Mitgliedschaft bei der DMV. Auch sehr aktive, leistungsstarke Schülerinnen und Schüler, die sich z. B. um eine schuleigene Mathematik-AG kümmern oder Mathematikwettbewerbe betreuen, können sich als Mathemacher anmelden. Es geht dem Netzwerkbüro auch darum, ein Netzwerk der deutschen Begabungsförderinitiativen aufzubauen. Hier soll der Austausch von interessanten mathematischen Themen angeregt werden, aber auch der Austausch, der Besuch oder Wettkampf unter den Begabten selbst, sowie die gegenseitige Unterstützung unter den verschiedenen Begabungsfördergruppen und –leitern ermöglicht werden. Idealerweise könnten auch gemeinsame Mathecamps von Schülerinnen und Schülern aus dem Osten und dem Westen, aus dem Norden und dem Süden oder dem nahegelegenen Ausland entstehen. Als ein erster Schritt wird die Mathelandkarte auf www.mathematik.de aktualisiert und erneuert.

Kurzfassungen der Beiträge von *Torsten Fritzlar* (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg) und *Kinga Szücs* (Friedrich-Schiller-Universität Jena) schließen sich an.

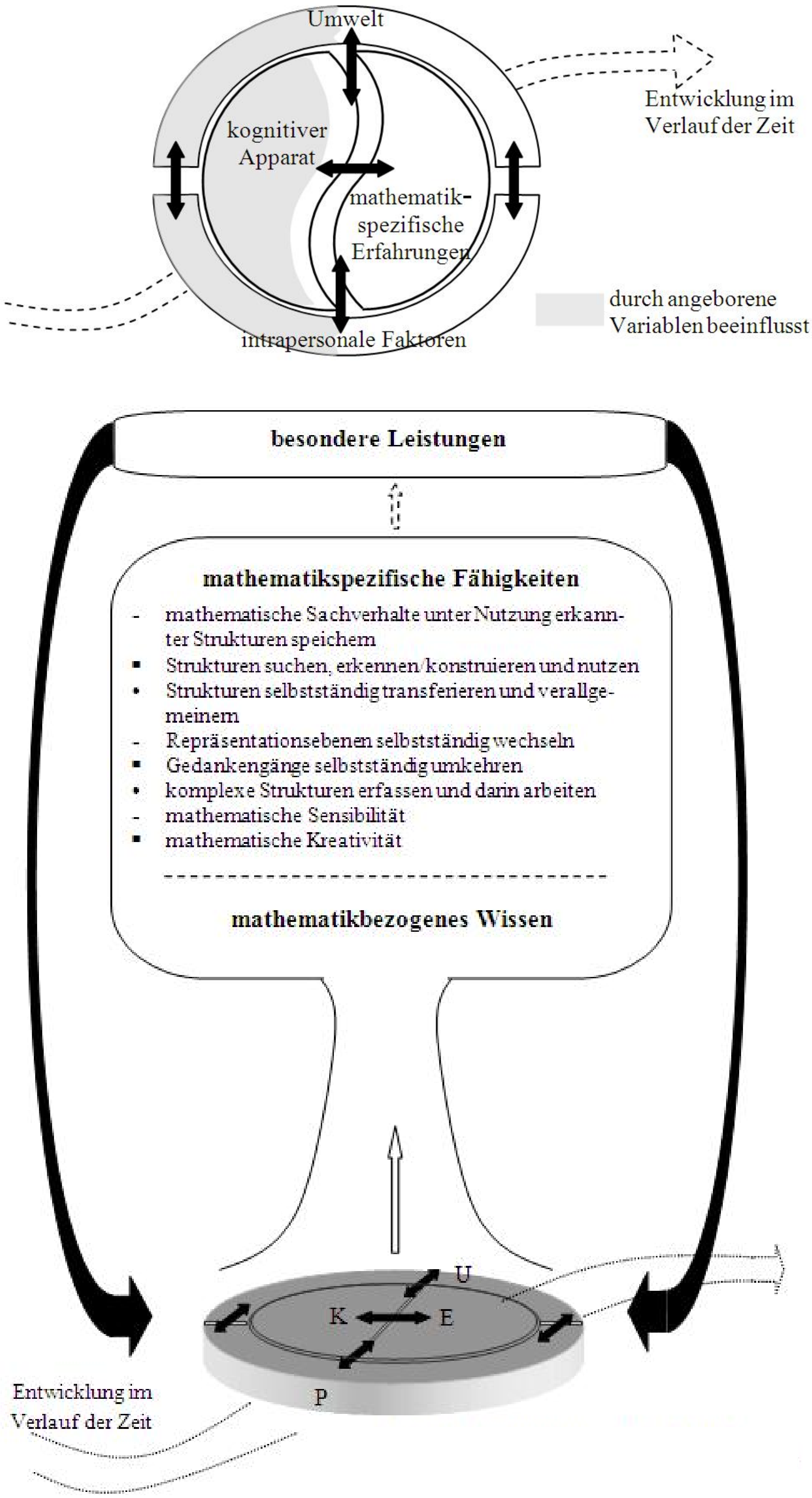
Torsten FRITZLAR, Halle

Begabung und Expertise

Traditionell waren Forschungen zu Begabungen und Forschungen zur Expertise strikt voneinander getrennt, wofür sich zahlreiche (auch gute) Gründe finden lassen. Dennoch wurden in neueren psychologisch orientierten Arbeiten Ansätze für eine fruchtbare Verbindung beider Forschungstraditionen entwickelt, die mir gerade auch für die Entwicklung besonderer Fähigkeiten und Leistungen auf mathematischen Gebieten angemessen erscheinen. Einige mir in diesem Zusammenhang wichtige Thesen kann ich aus Platzgründen lediglich aufzählen:

- In komplexen Domänen gibt es begabte und weniger begabte Personen. Gebräuchliche Tests aus der Mathematikdidaktik messen allerdings eher das aktuelle Niveau einer sich entwickelnden Expertise (Sternberg, 2000).
- Ausgangspunkt der Entwicklung mathematischer Expertise sind weitgehend angeborene hirnorganische Strukturen, teilweise domänenspezifische basale Prozesse und Lernpotenziale.
- Schlüsselelement für die weitere Expertiseentwicklung ist das mathematische Tätigsein. Dabei spielt selbstverständlich nicht nur ein hinreichend großer Umfang, sondern insbesondere auch die Qualität von Erfahrungen bzw. informeller und formaler Lernaktivitäten eine entscheidende Rolle.
- Hinreichende Erfahrungsmöglichkeiten können nur durch entsprechende intrapersonale Faktoren und Umweltbedingungen entstehen, auch letztere unterliegen eingedenk der Plominschen passiven, evokativen und aktiven Genotyp-Umwelt-Effekte teilweise genetischen Einflüssen.

– Die im ersten Teil der folgenden Abbildung veranschaulichten Merkmalsbereiche sind selbstverständlich nicht unabhängig voneinander. Darüber hinaus variiert sowohl die Bedeutung von Merkmalen aus einzelnen Bereichen als auch die Bedeutung der Bereiche insgesamt im Laufe der Entwicklung. Insgesamt kann davon ausgegangen werden, dass der Einfluss angeborener domänenunspezifischer Merkmale



des kognitiven Apparats zugunsten mathematikspezifischer Erfahrungen und deren Niederschlag auf diesen immer weiter zurückgeht.

- Auf der skizzierten Grundlage bildet das Individuum im Laufe der Zeit mathematikspezifische Fähigkeiten (vgl. z. B. Arbeiten von Krutetskii, Kießwetter, Käpnick, Aßmus) und mathematikbezogenes Wissen in zunehmendem Umfang aus.
- Verschiedene Aufzählungszeichen im zweiten Teil der Abbildung sollen verdeutlichen, dass nicht alle Fähigkeiten in gleichem Maße ausgeprägt sein müssen. Auch hier gibt es Veränderungen im Laufe der Zeit, beispielsweise können (weitere) Fähigkeiten ausgebildet oder in zunehmend reichhaltigeren Kontexten realisiert werden.
- Ausreichende Gelegenheiten, Fähigkeiten in erfahrbare besondere Leistungen umzusetzen, sind nicht selbstverständlich, jedoch wichtig, um positiv verstärkende Rückkopplungen auf die grundlegenden Merkmalsbereiche zu initiieren.

Mit der Sichtweise einer sich entwickelnden Expertise wird auf zeitlich stabile Zuweisungen in Kategorien wie „begabt“ vs. „nicht begabt“ verzichtet. Sie betont die zentrale Rolle von Lernprozessen und die Verpflichtung der „Umwelt“, (spezifische) Voraussetzungen für die weitere Entwicklung von Expertise zu schaffen.

Literatur

Sternberg, R. J. (2000). Giftedness as Developing Expertise. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg & R. F. Subotnik (Hg.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (2. Aufl., S. 55–66). Amsterdam: Elsevier.

Kinga SZŰCS, Jena

Die Multinationale Schülerakademie in Metten: Ein Beispiel für außerschulische Begabtenförderung im internationalen Kontext

1. Die Deutsche Schülerakademie

Die Deutsche Schülerakademie (im Weiteren: DSA) wurde 1988 zunächst mit 45 Teilnehmern ins Leben gerufen. Das sich damals noch in einer experimentellen Phase befindende Projekt gewann durch die positiven Rückmeldungen der Teilnehmer in den nächsten Jahren schnell an Bedeutung und Popularität, heute ist es eine dauerhafte Maßnahme im Haushalt des

BMBF. Die in immer breiteren Kreisen bekannt gewordene DSA engagierte sich auch auf internationaler Ebene: 2003 fand die erste Multinationale Schülerakademie in Metten statt, 2007 wurde parallel dazu ein zweiter multinationaler Standort in Torgelow eingerichtet. Die Deutsche Schülerakademie steht unter der Schirmherrschaft des Bundespräsidenten.

Ein wesentliches Ziel der DSA besteht – neben der Förderung von fachlichen Fähigkeiten, die durch die Arbeit an anspruchsvollen Aufgabenstellungen aus den Interessenbereichen der Teilnehmenden gewährleistet wird – darin, begabte Schüler miteinander in Kontakt zu bringen und sie sozial herauszufordern, indem es ihnen zahlreiche Möglichkeiten angeboten werden, Selbstvertrauen aufzubauen, selbständig zu arbeiten und für andere Verantwortung zu übernehmen.

Näheres zur Geschichte, Zielsetzung, zum Konzept, Ablauf und Auswahlverfahren der DSA findet man unter www.deutsche-schuelerakademie.de.

2. Ein Beispiel für Kursarbeit: Kugelgeometrie

Im Folgenden wird ein Kurs mit mathematischem Schwerpunkt, nämlich der Kurs „Kugelgeometrie“, der im Jahre 2006 in Metten von der Autorin und einem ungarischen Kollegen durchgeführt wurde, kurz dargestellt.

Im Kurs wurde zum Ziel gesetzt, über eine erste Einführung in die Kugelgeometrie hinaus die euklidische Geometrie und die Kugelgeometrie gegenüberzustellen und dabei geometrische Begriffe zu vertiefen. Weiterhin sollte der Kurs das Erlebnis des Perspektivwechsels ermöglichen und das statische Bild über die Geometrie durch eine dynamische, sich ständig verändernde und veränderbare Wissenschaft ersetzen.

Um bzgl. fachlicher und sprachlicher Vorkenntnisse eine gemeinsame Basis zu verschaffen wurden acht Referatthemen aus der euklidischen Geometrie im Vorfeld verteilt und zur Vorbereitung Materialien – in erster Linie Auszüge aus deutschsprachigen Schulbüchern – an die Teilnehmer gesandt. Jedes Thema wurde von einem Zweierteam bearbeitet und gemeinsam vorgetragen, wobei für eine fachliche, sprachliche und strukturelle Absprache zu Beginn der Akademie Zeit eingeräumt wurde.

Thematisch wurde im Kurs ein Bogen von geometrischen Grundbegriffen wie Punkt und Gerade über von diesen abgeleitete Begriffe (z.B. Strecke, Winkel, Dreieck, Polygone) und deren Eigenschaften (Parallelität, Orthogonalität, Kongruenz, Ähnlichkeit) – wobei die ebene Geometrie jeweils mit der Kugelgeometrie kontrastiert wurde – bis hin zu möglichen Anwendungen der kugelgeometrischen Ergebnisse insbesondere in der Geographie aufgespannt.

Methodisch herrschte im Kurs die Arbeit in Kleingruppen vor: Die Teilnehmer arbeiteten überwiegend in Vierergruppen an den Problemstellungen mit Hilfe der sog. Lénárt-Kugel[1], einem besonderen Lernmittel, welches speziell für den Unterricht der Kugelgeometrie entwickelt wurde.

Im Folgenden wird ein für den Kurs typischer Tag (bzw. dessen Vormittag), an dem mit dem thematischen Schwerpunkt „Dreiecke" begonnen wurde, vorgestellt.

Als Einführung in die Thematik diente ein Schülerreferat, in dem die Definition eines Dreiecks, Dreiecksarten, spezielle Dreiecke (gleichschenklig, gleichseitig, rechtwinklig), allgemeine Zusammenhänge zwischen Seiten und Winkeln (Dreiecksungleichung, Winkelsummensatz, Außenwinkel gleich der Summe der nichtanliegenden Innenwinkel, größerer Winkel der längeren Seite gegenüber) und einige Folgerungen (gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber, Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind gleich und betragen 60°, in einem Dreieck gibt es höchstens einen rechten/ stumpfen Winkel) aus der ebenen Geometrie wiederholt wurden. Im Anschluss daran wurden relevante Beweise zum Winkelsummensatz, zum Satz „der längeren Seite gegenüber liegt ein größerer Winkel" und zur Dreiecksungleichung im Plenum aufgefrischt. Danach wurden mögliche geschlossene Streckenzügen aus drei Strecken auf der Kugeloberfläche erkundet, wobei jeder Teilnehmer die Gelegenheit hatte, seine eigenen Ideen mithilfe einer Orange, mancher Zahnstocher und Gummibänder zu veranschaulichen und zu analysieren. In einem anschließenden Unterrichtsgespräch wurden die Ideen und Erfahrungen zusammengetragen und dabei wurde eine Definition des sphärischen Dreiecks (sog. Eulerschen Dreiecks) entwickelt. Es wurden auch „nebenbei" entstandene Dreiecke auf der Kugeloberfläche wie Nebendreieck, Scheiteldreieck und Gegendreieck, die nicht alle im Sinne der formulierten Definition sphärische Dreiecke sind, angesprochen. Anschließend wurde in Viergruppen erarbeitet, inwieweit grundlegende Zusammenhänge bzgl. Dreiecke auf der Kugeloberfläche gelten. Dazu wurden folgende Arbeitsaufträge verteilt:

Gruppe A: Winkelsumme	Gruppe B: Dreiecksungleichung
• Zeichne mehrere, unterschiedliche Dreiecke auf die Kugel! Miss ihre Winkel nach! Wie groß ist die Winkelsumme in diesen Dreiecken?	• Zeichne mehrere, unterschiedliche Dreiecke auf die Kugel! Miss ihre Seiten nach! Gilt die Dreiecksungleichung in diesen Dreiecken?

[1] Siehe: http://www.keypress.com/x5883.xml

• Formuliere eine Annahme anhand deiner Messungen über die Winkelsumme von sphärischen Dreiecken! • Versuche deine Annahme nachzuweisen! • Wo „kippt” der Beweis aus der ebenen Geometrie?	• Formuliere eine Annahme über die Seiten eines sphärischen Dreiecks! • Versuche deine Annahme nachzuweisen!
Gruppe C: „größerer Winkel der längeren Seite gegenüber” • Zeichne mehrere, unterschiedliche Dreiecke auf die Kugel! Miss ihre Seiten und die Gegenwinkel nach! • Formuliere anhand deiner Ergebnisse eine Annahme über die Beziehung zwischen Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks! • Wie lässt sich diese Annahme beweisen?	Gruppe D: Spezielle Dreiecke • Versuche analog zu den speziellen ebenen Dreiecken spezielle sphärische Dreiecke zu konstruieren! • Welche Ähnlichkeiten bzw. Unterschiede hast du dabei entdeckt? • Sind die beiden anderen Winkel in einem rechtwinkligen / stumpfwinkligen Dreieck immer spitz? Warum? • Wie groß sind die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks?

Nach der Präsentation und Diskussion der Gruppenergebnisse wurde wiederum in Kleingruppenarbeit der Seitensummensatz sphärischer Dreiecke erarbeitet. Alle Gruppen bekamen dazu folgende Anweisungen:

- Betrachte die Nebendreiecke eines sphärischen Dreiecks! Welche der bisherigen Behauptungen über sphärische Dreiecke gelten auch in diesen Dreiecken?
- Formuliere Aussagen über Seiten- und Winkelverhältnisse in Nebendreiecken!
- Wie können die Ergebnisse plausibel gemacht werden?

3. Spezielle Methoden des deutschsprachigen Fachunterrichts[2]

Auf multinationalen Akademien stellt für ausländische Teilnehmer die in deutscher Sprache stattfindende Kursarbeit eine doppelte Herausforderung dar. Daher wird in multinationalen Kursen neben dem Fachlichen auch auf

[2] Gemeint ist ein Fachunterricht, der in deutscher Sprache gehalten wird, welche aber nicht die Muttersprache der Lernenden ist.

das Sprachliche großer Wert gelegt und es werden spezielle Methoden eingesetzt, die (fremd-) sprachliche und fachliche Arbeit gezielt miteinander kombinieren, fordern und fördern. Eine Grundlage hierfür bietet das Standardwerk von Leisen an[3]. Für den Geometrieunterricht haben sich nach Erfahrungen der Autorin insbesondere die Methoden: Kreuzworträtsel, Kettenquiz, Filmleiste und Wer bin ich? als geeignet erwiesen.

4. Zusammenfassung

Die Deutsche Schülerakademie stellt sowohl für Lernende als auch für Lehrende in fachlicher sowie in sozialer Hinsicht eine sehr spezielle und herausfordernde Situation dar. Auf multinationalen Akademien werden darüber hinaus sprachliche, insbesondere fachsprachliche Kompetenzen gefördert. Die Absicht, die die DSA verfolgt, nämlich eine fachliche, soziale und evtl. sprachliche Bereicherung und keine fachliche Beschleunigung, wird aus Sicht der Autorin durch die Themenwahl bzw. durch die Aufbereitung der Themen und durch die spezielle fachsprachliche Betreuung gewährleistet. Die Thematik des hier vorgestellten Kurses „Kugelgeometrie“ bzw. die Darbietung der Inhalte in diesem Kurs sollen Anregungen für die Begabtenförderung aber auch für den herkömmlichen Mathematikunterricht geben, ferner ist es anzunehmen, dass die hier erprobten speziellen Methoden des deutschsprachigen Fachunterrichts möglicherweise in anderen bilingualen Mathematikkursen – insbesondere in denen mit geometrischem Thema – erfolgreich eingesetzt werden können.

Literatur

Filler, A. (1993). *Euklidische und nichteuklidische Geometrie*. Mannheim: B. I. Wissenschaftsverlag.

Groschopf, G. (1983). *Kugelgeometrie*. Stuttgart: Ernst Klett Schulbuchverlag.

Hajós, Gy. (1971). *Bevezetés a geometriába*. Budapest: Tankönyvkiadó.

Leisen, J. (1999). *Methodenhandbuch. Deutschsprachiger Fachunterricht*. Bonn: Varus Verlag.

Leisen, J. (2004). *Der bilinguale Sachfachunterricht aus verschiedenen Perspektiven – Deutsch als Arbeitssprache, als Lernsprache, als Unterrichtssprache und als Sachfachsprache im Deutschsprachigen Fachunterricht (DFU).* In: Fremdsprache Deutsch 30, 7-14.

Lénárt, I. (1999). *Sík és gömb. Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön. Munkalapok a síkgeometria és a gömbi geometria összehasonlításához*. Budapest: Múzsák Kiadó Kft.

www.deutsche-schuelerakademie.de (letzter Zugriff am 20.02.2010)

http://www.keypress.com/x5883.xml (letzter Zugriff am 17.02.2010)

[3] Leisen (1999)

EMERGENZ MATHEMATISCHER DIAGRAMMATIZITÄT-

Eine überraschende diagrammatische Deutung

Ergi ACAR, Goethe Universität

Meine Arbeit ist eingebunden in die Longitudinalstudie „erStMaL“, in der es um die Untersuchung der mathematischen Denkentwicklung im Vorschul- und frühen Grundschulalter geht. [1] Mein Forschungsinteresse greift die Ausführung zum diagrammatischen Denken auf, die sich in der mathematikdidaktischen Diskussion zur Semiotik stark an Peirce orientieren. Dabei interessiert mich besonders der Zusammenhang zwischen mathematischem Denken und inskriptionalen Darstellungen. Dörfler hebt in diesem Kontext den diagrammatischen Aspekt solcher Inskriptionen hervor. Diagramme sind Inskriptionen, die durch ein „(konventionelles) Regelsystem von Herstellung, Gebrauch und Transformation“ entstehen (Dörfler 2006, S.202). Schreiber und Krummheuer greifen diesen Ansatz auf und integrieren ihn in eine Interaktionstheorie mathematischen Lernens: Inskriptionen ebenso wie ihre regelbasierten Versionen als Diagramme werden als konstitutive Komponenten mathematischer Diskurse verstanden, die gleichsam komplementär als paralleler Kommunikationsstrang neben der vokalen Interaktion diese ergänzen stützen, vertiefen, präzisieren und ggf. auch konterkarieren. In der hier vorzustellenden Studie soll das Verhältnis von inskriptional und vokal geführter Interaktion rekonstruiert und unter einer entwicklungstheoretischen Perspektive analysiert werden. Fragen sind :

- Verändert sich das Verhältnis zwischen inskriptional und vokal geführter Interaktion im Laufe der Entwicklung?
- Geht im Hinblick auf die Entwicklung mathematischen Denkens die diagrammatische Interaktion der verbalen Interaktion voraus?

Dörfler verdeutlicht, dass die Verwendung von Diagrammen in mathematischen Arbeitsprozessen ein Stück weit einen externalen Aspekt des Denkprozesses darstellt. „Externalismus sieht mathematisches Tun primär und untrennbar als die Manipulation, Transformation, Konstruktion, Interpretation von Inskriptionen, die für den Internalismus eben nur Darstellung und Repräsentation sind.“ (*Dörfler 2006).*
Krummheuer hebt ebenfalls die Wichtigkeit von Inskriptionen in der mathematischen Kommunikation hervor: „Mathematische Kommunikation ist ohne das Hinzuziehen eines schriftlich-grafischen Elements (Inskription) kaum vorstellbar“ *(Krummheuer 2009).* Schreiber *(2006)* konnte diesen Zusammenhang in seiner Arbeit zum Mathe-Chat auf der computerbezogenen Chatebene nachweisen.
Insofern gehe ich hier über Dörflers Ansatz hinaus: Inskriptionen und Diagramme sind in einen Interaktionsprozessen eingebunden. Die Kinder interagieren miteinander und manipulieren zugleich an ihren Inskriptionen. Obwohl es bei Hoffman *(2007)* um die Mathematik und bei uns um Kinder und deren mathematischen Denkprozesse geht, sehen wir eine gemeinsamen Ansatzpunkt: Er sieht ein wesentliches Moment der Entwicklung von Mathematik in der Konzeption und Weiterentwicklung von Darstellungssystemen. Bezieht man diese Annahme auf mathematische Denkentwicklungen von Kindern im Vorschulalter, dann liegt die

[1] *Vgl: http://www.idea-frankfurt.eu/Aufgerufen am 12.01.2009*

Vermutung nahe, dass die diagrammatischen Momente in den zugehörigen Interaktionsprozessen den verbalen vorausgehen. In Bezug auf die mich interessierenden vorschulischen Prozesse, untersuche ich unter anderem die Hypothese, ob bzw. in welcher Weise sich die Weiterentwicklung auf der diagrammatischen Ebene auf die mathematische Denkentwicklung auswirkt. Mit Kadunz und Krummheuer sehe ich diese diagrammatischen Entwicklungen auch im Zusammenhang mit Begründungen und Argumentationen.

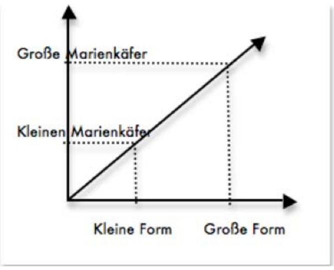
Episode – Was gehört nicht dazu?

Die Aufgabe der Episode geht auf das Aufgabenformat „Which one doesn't belong?" aus Wheatlys Arbeiten zu „Collections" zurück. Für die Marienkäfer-Aufgabe wurde das Aufgabenformat wie folgt modifiziert: Die Marienkäfer sind gelb, grün oder rot, und haben entweder Dreiecke, Kreise oder Quadrate in unterschiedlicher Anzahl und Größe auf dem Rücken. Den 4 ½ jährigen monolingualen Tandemkindern Marie und René werde jeweils drei verschiedene, große Marienkäferkarten vorgelegt. Die Kinder sollen bestimmen, welche Marienkäfer zusammengehören oder welcher nicht in die Gruppe passt. In der Spielsituation sitzen die Kinder in einem ruhigen Raum auf Stühlen an einem Tisch auf dem ein runder Teppich liegt. Die Begleitperson des erStMaL – Teams bietet den Kindern zunächst drei gleich große Stapel mit kleinen Karten an.

Szene 1

Die Begleitperson legt nacheinander ein Tripel von gelben Marienkäferkarten in die Mitte des Tisches. Auf den ersten Blick reagiert Marie mit da die sind groß\ schaut weiter und sagt dann auf die zweite Karte weisend nur die großen\ <665-669>. René kommentiert dies mit Mama und Papa\ ,zeigt mit dem Finger auf die großen Marienkäfer und fährt dann fort mit weiß ich\ die kleinen Kinder <670-672>. Im Anschluss kommentiert Marie das sind die ganz kleinen und nimmt einen kleinen roten Marienkäfer vom Tischrand in die Hand das weiß ich das sind die Babys und das sind die großen <673-676>. Die Begleitperson legt weitere drei Marienkäferkarten auf den Tisch. Marie legt spontan das kleine rote Marienkäferkärtchen zurück in den Kreis und nimmt ein kleines gelbes Kärtchen vom Tischrand. Und das muss ma und das hier ist das Kind\ <681-682> sagt sie, während sie das Kärtchen zwischen die beiden nebeneinander liegenden großen gelben Marienkäfer legt. Marie begründet dieses Position mit weil des weil des genauso aussieht wie das aber das und zeigt mit ihrem Finger auf den unteren Marienkäfer ist nicht richtig weil es Punkte hat und die zeigt auf den rechten oberen Marienkäfer ham Dreiecke\ <687-691>. Renés Reaktion beschränkt sich auf das Zuhören. Zum Schluss nimmt die Begleitperson die großen gelben Marienkäferkarten mit den Punkten weg und lässt somit eine „Familie" auf dem Tisch liegen. Nach dieser Aktion nimmt René eine gelbe, kleine Marienkäferkarte mit drei Dreiecken und sagt des ist der Bruder\ <706>.

Marie und René haben eine als geteilt geltende Deutung der Situation ausgehandelt. Die kleinen Marienkäfer sind die Kinder und die großen sind die Erwachsenen. Dieser Deutung können wir ein Regelsystem der folgenden Art unterstellen:



- Eine Marienkäferfamilie hat gleiche Formen auf dem Rücken.
- Eine Marienkäferfamilie hat die gleiche Farbe.
- Eltern sind größer als Kinder.
- Die Formen auf dem Rücken der Eltern-Marienkäfer sind größer als die der Kinder-Marienkäfer.

Szene 2

Die Begleitperson stellt die Frage: da passt auch einer nicht so richtig\. könnt ihr den erkennen von den drei Großen/ René reagiert und zeigt sofort auf ein Marienkäferkärtchen mit vielen kleinen Dreiecken, während Marie sich offenbar noch die neue Aufgabenkonstellation anschaut, bevor sie sich für eine andere Karte als René entscheidet: Marie zeigt auf den linken Käfer mit der Begründung: Das ist der, weil er große Zacken hat <771> Das Wort „Zacken“ verwendet sie wahr-scheinlich Synonym für Dreieck. Sie möchte somit sagen, dass der Marienkäfer mit den großen Dreiecken nicht dazu gehört.

Im Anschluss stellt die Begleitperson den Kindern Fragen zu ihrer getroffenen Wahl. Er zeigt abwechselnd die zwei großen Marienkäfer mit kleinen Dreiecken und sagt: die zwei . gehören nicht zu\ <784> weil die . gleichzeitig\ <785> . Jedoch scheint die Begleitperson weiterhin Verstehensprobleme zu haben. René zeigt auf die Marienkäfer mit großen Dreiecken und ergänzt: und die wachs. und die sind schon groß- <791>. Er wendet in diesem Fall keine kanonische Zweikartenlösung an, sondern zeigt vielmehr auf die zwei Karte, die nicht dazu gehören. Rene verwendet zwei Klassifikationssysteme und stellt gleichsam eine funktionale Beziehung auf: Große Marienkäfer definiert er als „Mama/Papa“ bzw. „Erwachsene“, kleine Marienkäfer als „Kind“ oder „Baby“. So wie bereits in der Szene 1: Die Größe der Formen weist auf dem Status in der Familie hin (als eine logische Verknüpfung). René und Marie wenden verschiedene Auswahlverfahren an. René wählt eine neue Form der „Zweikartenlösung“ und Marie verwendet die „Einkartenlösung“. Durch die spezifische– diagrammatische Sichtweise ändert sich die von Wheatley beschriebene „Zweikartenlösung“. Sie ist nicht mehr in-direkt sondern direkt, indem René auf beiden Karten zeigt, die auszuschließen sind.

Die Kinder fahren fort, indem sie große und kleine Marienkäfer paarweise gruppieren. Interessanterweise haben Sie auch die großen roten Marienkäfer mit kleinen Dreiecken zusammengelegt, zu denen es in dieser Szene keine passenden

Kinder-Marienkäfer gibt. In dieser Situation sehen wir nochmals die familiale Metaphorisierung. Die Kinder haben sich ein familiales Bezugssystem geschaffen. Dies verstärkt unsere Vermutungen, dass hier eine spezifische Diagrammatizität von den Kindern hervorgebracht wurde, die wohl nicht nur für die Begleitperson überraschend ist.
In der Episode herrscht eine enge Verzahnung von Inskription mit der vokal geführten Interaktion vor *(Krummheuer 2009)*. Die Inskription ist hier als eine Collection-Aufgabe vorgegeben und es ist lediglich die Aufgabe der Kinder, in diesen Inskriptionen eine diagrammatische Struktur zu konstruieren bzw. zu finden. Unser Inskriptionsbegriff selbst ist weiter gefasst und wir werden uns auch mit Fällen beschäftigen, in denen die Kinder Inskriptionen selbst entwickeln.
Die diagrammatischen Deutungen drücken sich in vorliegenden Fall als Zuordnung von Karten zu Eltern und Kindern aus. Es handelt sich hierbei nicht um eine Weiterentwicklung der Inskription selbst, sondern um die spezifische Einordnung der vorgegebenen Inskription. Jedoch kann man in den jeweiligen Zusammenstellungen von drei Marienkäferkarten diagrammatische Weiterentwicklungen sehen.
Wie anfänglich ausgeführt, erkennt man, dass hier die Diagramme in die interaktive Aushandlung eingebunden sind und nicht so sehr - wie bei Dörfler- einen, extra-linguistischen[2] Status besitzen. Sie sind eingebunden in Deutungssysteme, die sowohl inskriptionale als auch verbale (vokale) Elemente enthalten. In weiteren Analysen, insbesondere unter longitudinaler Perspektive, werde ich die Funktion der diagrammatischen Deutungen und ihrer interaktionalen Weiterentwicklungen untersuchen. Da sich in der Entwicklung des mathematischen Denkens auch die mathematischen Darstellungssysteme verändern, ist die Konzeption solcher Darstellungssysteme weiter zu erforschen.

Literatur

Dörfler,W. (2006) Diagramme und Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik 27(3/4): 200-219

Hoffmann, Michael H.G. (2007) Learning from people, things, and signs. Stud Philos Educ 26: 185–204

Kadunz, G. (2006) Schrift und Diagramm. In: Journal für Mathematik-Didaktik27(3/4): 220-239

Krummheuer, G. (2009) Inscription, narration and diagrammatically based argumentation. The narrative accounting practices in the primary school mathematics lesson. In W.-M. Roth (Ed.), *Mathematical representation at the interface of the body and culture* (pp. 219 - 243). Charlotte, NC: Information Age Publishing

Krummheuer, G., Brandt, B. (2001) *Paraphrase und Traduktion. Partizipationstheoretische Elemente einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens in der Grundschule*. Weinheim: Beltz.

Schreiber, C. (2006) Rekonstruktion inskriptionsbasierter Problemlöseprozesse aus semiotischer Perspektive. In: Jungwirth, H. & Krummheuer, G. (Hrsg.): Der Blick nach innen: Aspekte der alltäglichen Lebenswelt Mathematikunterricht, Band 1. Münster u.a.: Waxmann: 153-187.

Wheatly, G. (2008) Which one doesn’t belong? Collections. Bethany Beach, DE, Mathematics Learning.

[2] *Siehe Seite 2*

Reimund ALBERS, Bremen

Mathematik Neu Beginnen - Neue Wege in der Grundschullehrerinnenausbildung

Die Ausbildung von zukünftigen Grundschullehrerinnen mit dem fachlichen Schwerpunkt Mathematik muss anderen Grundsätzen folgen als die Ausbildung von Mathematikern oder Gymnasiallehrern. Umfragen unter Studierenden[1] zeigen, dass die Grundschulstudierenden sich einen starken Praxisbezug wünschen. Dieses sollte sowohl für die didaktischen Veranstaltungen gelten wie auch für die Fachveranstaltungen.

Auf letzteres zielt ein Reformprojekt an der Universität Bremen, das von der Deutschen Telekom-Stiftung gefördert wird. Unter der Leitung von Professor Heinz-Otto Peitgen werden die ersten beiden Semester der fachlichen Ausbildung in Mathematik für angehende Grundschullehrerinnen inhaltlich wie auch methodisch neu gestaltet.

Inhaltliche Umgestaltung

a) Orientieren am schulischen Curriculum

Das Studium soll die angehenden LehrerInnen auf ihren Beruf vorbereiten, diesen Anspruch soll auch die fachliche Ausbildung erfüllen. Daher ist es notwendig, dass die im Studium behandelten mathematischen Themen in Verbindung zu den schulischen Themen stehen. Direkt nachvollziehbare Verknüpfungen mit dem schulischen Alltag steigern die Motivation der Studierenden, sich mit den fachlichen Inhalten auseinander zu setzen. Da in den Veranstaltungen zur „Elementarmathematik" in Bremen (augenblicklich noch) zukünftige Grund- und SekundarschullehrerInnen ausgebildet werden, ist es bei einer fachlichen Analyse notwendig, die Inhalte von Klasse 1 bis 10 zu berücksichtigen. Dazu wurde der Rahmenplan Grundschule Mathematik der vier norddeutschen Länder und der Bildungsplan Mathematik für die Sekundarschule im Land Bremen analysiert.

b) Kernthemen

Bei der Konstruktion der universitären Inhalte wollen wir bewusst die klassisch-fachliche Einteilung (Analysis, lineare Algebra, ...) aufbrechen. Die Inhalte sollten in Kernthemen organisiert werden, die ein vernetztes Arbeiten zulassen. Numerisch-algebraisches und grafisch-geometrisches Arbeiten wurden so weit es ging miteinander verbunden. Zu jedem Kernthema

[1] Georg Lilitakis, *Untersuchung zur Entwicklung von Kompetenzen und Einstellungen bei Studierenden des Fachs Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel*, Sektionsvortrag auf der GDM-Tagung 2009

wurde analysiert, wie es mit den schulischen Themen in Verbindung steht. Zusätzlich wurde überprüft, dass alle Bereiche der schulischen Themen abgedeckt werden. Dabei wurde allerdings der gesamte Bereich Daten - Zufall - Wahrscheinlichkeit herausgelassen, da dieser in einer gesonderten Veranstaltung im 4. Semester behandelt wird.

Kernthemen (Workshops, 4 SWS)	
Wintersemester	**Sommersemester**
• Platonische Körper	• Abbilden von Funktionsgraphen
• Stellenwertsysteme	• Dimension
• goldener Schnitt und Pascalsches Dreieck	• Elemente der Geometrie (Schustermesser)

c) Lehrer unterrichten (zukünftige) Lehrer

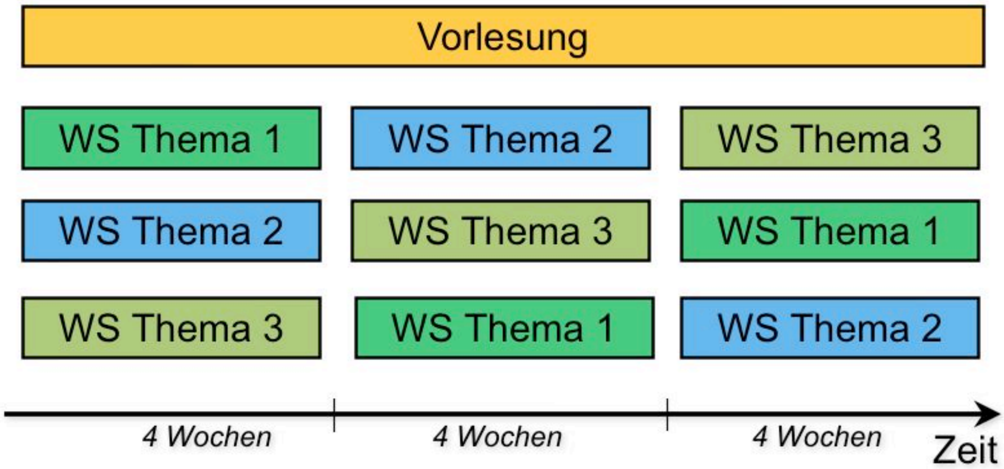
Die Arbeit in den Workshops (s.u.) wird von LehrerInnen geleitet, die aktiv in der Schule tätig sind. So ist sichergestellt, dass die Lernformen an der Praxis der Schule orientiert sind und immer wieder authentische Bezüge zum Unterrichtsalltag hergestellt werden. Im Vordergrund soll aber stets das Erarbeiten von fachmathematischen Inhalten stehen. Diese Form des Erarbeitens wurde in der Überzeugung gewählt, dass die Fachausbildung Vorbildcharakter haben muss, da sich Studierende stark an den erlebten Lehrformen orientieren[2].

Themen der Vorlesung (2 SWS)	
Wintersemester	**Sommersemester**
• Grundlagen der Logik	• Folgen und Reihen
• Vollständige Induktion	• Verknüpfen von Spiegelungen
• Kongruenzrechnung	• analytische Geometrie (Abbildungen)
• Kombinatorik	• Funktionen und Gleichungen

[2] „teachers teach as they were taught, not how they were taught to teach“ (Th.Cooney. H.Wiegel)

Organisatorisch-methodische Umgestaltung

Die Lehrveranstaltung (6 SWS) wird so umgestaltet, dass die Rolle der Vorlesung mit ihrer Einbahnkommunikation zurückgedrängt wird (2 SWS) zugunsten von Workshops (4 SWS), in denen die Kernthemen erarbeitet werden. Die gemeinsame Vorlesung bleibt grundlegenden Inhalten vorbehalten. Sie soll die deduktive Arbeitsweise aufzeigen, so dass dieses klassisch-mathematische Vorgehen ebenfalls einen Raum bekommt.



Für die Workshops werden die Studierenden in klassenähnliche Gruppen (im Studienjahr 2009/10 ca. 30 Studierende) aufgeteilt, in denen das aktive Arbeiten im Vordergrund steht. Diese Lernprozesse sind wesentlich geprägt durch entdeckendes Lernen und die Einbeziehung des Computers. Beide Aspekte sollen im eigenen Lernprozess erfahren werden.

Die Lehrerteams sind pro Semester spezialisiert auf ein Workshopthema. Daher starten die drei Studierendengruppen gleichzeitig mit jeweils einem anderen Thema und wechseln alle vier Wochen das Workshopthema und damit auch die unterrichtenden Lehrerteams. Folglich durchläuft jede Studierendengruppe die drei Workshops in einer anderen Reihenfolge. Das ist praktisch durchführbar, da die Workshopthemen in sich geschlossene Einheiten bilden. Zudem ist es für die Lernenden eine interessante Erfahrung, dass mathematische Bildung nicht notwendiger Weise sequentiell aufgebaut werden muss, sondern in selbstständigen Blöcken organisiert werden kann. Erfahrungen mit diesem Organisationskonzept in bereits durchgeführten Lehrerfortbildungen (NSF-Projekte in Florida) zeigen, dass in der Anfangsphase den Studierenden der Überblick über den gesamten Stoff fehlen wird. Aber nach dem ersten Wechsel, also nach ca. 4 Wochen, löst sich dieses Problem mehr und mehr auf. Besonders in den ersten Wochen eines Semesters kommt der gemeinsamen Vorlesung eine wichtige, verbindende Funktion zu.

Praktischer Ablauf und derzeitiger Stand

Ein wichtiger Startpunkt in das Projekt war die Auswahl der Lehrkräfte, die in den Workshops tätig sind. Durch die Kooperationsstelle Schule-Universität wurde das Anwerben von Lehrkräften erheblich erleichtert. Zu Beginn des Schuljahres 2007/08 wurden neun Lehrkräfte ausgewählt, wobei es für das Gelingen des Projektes essentiell war, dass in den Teams Grundschullehrerinnen und Lehrkräfte aus der gymnasialen Oberstufe zusammenarbeiten. Erstere vertreten authentisch die Schulform, für die die Studierenden ausgebildet werden sollen, letztere können sicherstellen, dass die Studierenden dort abgeholt werden, wo sie realistischer Weise stehen.

Im ersten Projektjahr (Schuljahr 2007/08) wurden die Lehrpläne analysiert, die Kernthemen ausgewählt und in ihrem Umfang gestaltet. Die beteiligten Lehrkräfte wurden in diese Kernthemen eingeführt. Ab dem zweiten Projektjahr (2008/09) waren die Lehrkräfte mit 5 Wochenstunden vom Unterricht befreit, so dass sie nun intensiv im Projekt mitarbeiten konnten. Im Winterhalbjahr bereitete sich jedes Lehrerteam auf seine beiden Workshop-Themen vor und erarbeitete die notwendigen Materialien (Skripte, Übungsaufgaben, Arbeitsblätter, Computerdateien). Die Studierenden wurden noch in der herkömmlichen Form (4 SWS Vorlesung, 2 SWS Übungen) unterrichtet. Im Sommersemester lief der neu gestaltete Lehrbetrieb an mit 2 SWS Vorlesung und 4 SWS Workshop. Wir befinden uns nun im dritten Projektjahr. Das Wintersemester wurde gerade in der neuen Form abgeschlossen.

Im Herbst 2009 wurde von der Senatorin für Bildung die Zusage erteilt, dass das Erprobungsprojekt mit sechs Lehrkräften als reguläre Ausbildungsform übernommen wird.

Weitere Informationen zum Projekt findet man unter

http://www.cevis.uni-bremen.de/Mathematik_Neu_Beginnen.html

Literatur

Landesinstitut für Schule und Medien Brandenburg (LISUM Bbg), *Rahmenplan Grundschule Mathematik* (länderübergreifendes Projekt)

Der Senator für Bildung und Wissenschaft Bremen (2006), Mathematik, *Bildungsplan für die Sekundarschule, Jahrgangsstufe 5 - 10*

Bender, P., Beyer, D., Brück-Binninger, U., Kowallek, R., Schmidt, S., Sorger, P., Wielpütz, H., Wittmann, E.Ch. (1999), Überlegungen zur fachmathematischen Ausbildung der angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrer, *Journal für Didaktik der Mathematik, Jhrg. 20, Heft 4, S. 301-310*

Ziegler, G., Weigand, H.-G., a Campo, A. (2008), *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik*

GABRIELLA AMBRUS, Budapest

„Mathematik im Alltag”- Realitätsnahe Aufgabentypen in den Klassenstufen 3 und 4

Für die Tradition des ungarischen Mathematikunterrichts sind insbesondere eine starke Wissenschaftsorientierung sowie eine bestimmte Betonung des Problemlösens charakteristisch. Den Erwartungen und Ansprüchen, die neulich an die Schule gestellt werden, entspricht vielmehr ein eher an Kompetenzen orientierter Unterricht, der in der letzten Zeit auch in Ungarn eingeführt wurde. Dies zieht notwendigerweise zu lösende Probleme nach sich. Eine zentrale Frage besteht in der Vorbereitung der LehrerInnen und in der Bereitstellung notwendiger und nützlicher Lehr- und Lernmaterialien. Diese beide hängen natürlich miteinander zusammen.

Realitätsnahe Aufgaben in der Unterstufe

In der Verwirklichung der Ziele des kompetenzorientierten Unterrichts spielen solche Aufgaben eine wichtige Rolle, bei denen die Themen aus dem Alltag stammen und bei deren Bearbeitung viele mathematische und nichtmathematische Kompetenzen (Vidakovich 2005) gefördert werden.

Diese Aufgaben sind „realitätsnahe” sogar in zweierlei Hinsicht:

- Die Situation kann die Komplexität der realen Welt nur *annähern*.
- Die Lösungen können nur *nahe* einer wirklich realen Lösung sein.

Obwohl in der Unterstufe viele Situationen im Mathematikunterricht aus der unmittelbaren Erfahrungswelt der Schüler stammen, sind diese oft nur Beispiele und betrachten eine (in den gegebenen Altersgruppen schon mögliche) Komplexität der Inhalte nicht, was aber bei einem kompetenzorientierten Unterricht wichtig wäre. Es mangelt sogar an richtigen realitätsnahen Aufgaben, obwohl bereits in diesen Jahrgängen vieles gemacht werden könnte und sollte.

Inhalt und Aufbau der Arbeitshefte

Die zwei von mir erstellten Arbeitshefte ”Mathematik im Alltag” – für Klassen 3 und 4 bieten realitätsnahe Aufgaben verschiedener Art an, die unabhängig von dem angewendeten Schulbuch verwendet und in längeren oder kürzeren Zeiträumen gelöst werden können.

Die Aufgaben sind nach „Alltagsthemen und nicht nach ihrem mathematischen Inhalt in Kapiteln geordnet, was auch ihren Bezug zur Realität stärkt.

Die Situationen stammen überwiegend aus dem Alltag der Kinder (reale Welt) aber es gibt auch märchenhafte Situationen. Die Welt der Märchen bzw. die Welt zauberhafter, etwas mystischer Situationen gehören auch zur

Welt der Kinder, diese können auch als eine „Realität des Kinderlebens” (Freudenthal, 1984) aufgefasst werden. Etwas mehr kann daraus auch in dem Sinne gewonnen werden, dass es im Allgemeinen das Arbeiten in „fictious real situation” die mathematische Kreativität entwickeln kann (D’Ambrosio, 2009).

Beispiele für einige Aufgabentypen aus den Arbeitsheften

Realitätsnahe Aufgaben können nach verschiedenen Gesichtspunkten eingestuft werden, zum Beispiel nach Offenheit. Zur Illustration habe ich einige Aufgaben aus den Arbeitsheften gewählt (aus Platzgründen wird in Weiterem auf das „Design“ der ungarischen Arbeitshefte verzichtet):

a) Situationen aus der Realität- einfache Textaufgabe

Schnellste Schnecke der Welt
Die schnellste Schnecke der Welt kann in 2 Minuten und 20 Sekunden 330 m zurücklegen.
Wie weit kann sie in 20 Sekunden kommen? Zeichne mit Lineal eine so lange Linie! Wie groß ist die Strecke, die sie in 5 Minuten zurücklegen kann?

b) Thema mithilfe eines Arbeitsblattes bearbeiten

Wir haben einen Hund
Tomi wird diese Woche 3 Stunden mit seinem Hund Mufurc spazieren gehen.
1. Wie kann er diese Zeit einteilen? Suche nach 4 verschiedenen Möglichkeiten!
2. Mufurc bekommt jeden zweiten Tag eine Dose Hundefutter (20 dkg).
Wieviel Futter bekommt Mufurc in einer Woche?
Wieviel kostet es?
3. Mufurc hat einen Ball und ein Kauknochen bekommen. Wieviel hat das gekostet? Du kannst die Preise am Bild ablesen oder nach eigenen Erfahrungen arbeiten.

c) Modellierungsaufgaben

Die Kleider der Königin
Seit die junge Königin in das Schloss eingezogen ist, hat sie sich jede Woche ein neues Kleid nähen lassen.
Seit wieviel Tagen wohnt sie im Schloss, wenn sie schon 35 neue Kleider hat?

Modellieren heißt eine komplexe Aufgabe zu lösen. Bei jedem Schritt des Kreislaufes können die Schüler und Schülerinnen Probleme haben (Blum, Borromeo Ferri 2009).
Nach unseren Erfahrungen ist besonders der Anfang schwer, aber auch später kann Lehrerhilfe nötig sein. Dies soll noch eher direkt sein, wenn die Schüler mit Lösen von Modellierungsaufgaben noch wenige Erfahrungen haben. In diesem Fall können „Modellierungsaufgaben mit Hilfe“ nützlich sein. Ein Beispiel hierfür wäre folgende Aufgabe:
Zuschauer auf dem Bank
Es sind drei Meter lange Bänke für die Zuschauer eines Sportwettbewerbs aufgestellt.
Könnten die Schüler und Schülerinnen in deiner Grundschule auf 5 solchen Bänken genug Platz haben?
Anzahl der Grundschulkinder in unserer Schule:
Soviel Platz braucht ein Kind:
Ungefähr soviel Kinder können auf einem Bank sitzen:
Fertige eine Skizze an! Einem Meter sollen 5 cm in deiner Zeichnung entsprechen.

Einen weiteren Typ von Aufgaben bilden in beiden Arbeitsheften diejenigen Aufgaben, bei denen die Schüler zu angegebenen Operationen denkbare Texte anfertigen müssen.

Die Rolle des Lehrerhandbuches

Neben den Arbeitsheften wird auch ein Lehrerhandbuch angeboten, in dem jede Aufgabe durch ein Kommentar - didaktische Anmerkungen, mögliche Lösung(en), weiterführende Ideen – ergänzt wird.
Nach der angegebenen Hilfe bestimmt natürlich der Lehrer, wie die Aufgabe bearbeitet wird. Dies hängt von der Klasse aber auch von der Einstellung, von dem Sachwissen, und von der Bereitschaft des Lehrers ab. Damit der Lehrer möglichst viele Gedanken im Zusammenhang mit der Aufgabe hat, werden oft an mehrere Lösungsmöglichkeiten verwiesen, es wird aber im Lehrerhandbuch im Allgemeinen nur eine mögliche Lösung detailliert bearbeitet.
Die weiterführenden Ideen weisen oft auf andere Betrachtungsmöglichkeiten der Aufgabe hin, oder sie geben einige Möglichkeiten für eine andere Bearbeitung der Situation/Aufgabe in höheren Klassen an.

Als Beispiel werden in Weiterem zur Modellierungsaufgabe „Die Kleider der Königin” mögliche Lösung(en) auf der Grundlage des Modellierungskreislaufes (Blum, Leiß 2007) und ergänzende Ideen angegeben.

Verstehen der Situation: Bedingungen formulieren (Kalender, 34 volle Wochen aber noch wieviele Tage?) Nehmen wir an, dass sie immer am selben Tag ihr neues Kleid bekommen hat, das erste sofort nach ihrer Ankunft. An Wochenenden hat sie nie ein neues Kleid bekommen.
Matematisches Modell: 7·34 Tage und noch einige Tage, aber weniger als eine Woche, da sie ihr 36. Kleid noch nicht hat.
Mathematisches Resultat: 7·34=238 Tag und noch mindestens ein Tag, aber evtl. auch noch 2,3,4,5,6 Tage, es hängt davon ab, wieviel Tage seit ihrem 35. Kleid bis jetzt vergangen sind. Dies bedeutet, dass es mindestens 239 und höchstens 244 Tage seit der Ankunft der Königin vergangen sind.
Arbeiten mit dem Resultat: Man muss noch beachten, dass die Königin an Wochenenden kein neues Kleid bekommen hat, aber dies beeinflußt das Resultat nicht. Es ist also nicht von Relevanz, wie lange das Wochenende dauert. Das Resultat ist gültig bei den angegebenen Bedingungen.

Weitere Fragen, Ergänzungen

Gib weitere Bedingungen an und berechne die Anzahl der Tage!
Suche nach solchen Bedingungen, unter denen es genau ein Resultat gibt!
Seit wieviel Monaten wohnt die Königin im Schloss? (seit mindestens 9 Monaten).

Ausprobieren in der Schule…

Die Rückmeldungen in Zusammenhang mit der Verwendung der Arbeitshefte in der Schule zeigen, dass ungarische LehrerInnen noch Probleme haben, wie sie eine Stunde gestalten sollen, in der solche Aufgaben bearbeitet werden. Sie finden die Aufgaben aber oft spannend und versuchen sie in ihre Stunden einzubauen.

Literatur

Freudenthal, H. (1984). Wie alt ist der Kapitän? In *Mathematiklehren* August 38 – 39

Vidákovich T. (2005) *A matematikai kompetencia fejlesztésének koncepciója* [Konzeption der Entwicklung des mathematischen Kompetenzen], suliNova Kht., Budapest.

Blum, W./Leiß D. (2007) How do students' and teachers deal with modelling problems? In: *Haines, C. Et al. (Eds), Mathematical Modelling: Education, Engeneering and Economics.* Chichester:Horwood, 222-231

Blum, W./Borromeo Ferri R. (2009) Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? In *Journal of Mathematical Modelling and Application,* Vol. 1, No. 1, 45-58

Ambrus, G. (2010 unter Erscheinen) *Hétköznapok matematikája* [Mathematik aus dem Alltag], Arbeitshefte 3, 4, Nemzeti Tankönyvkiadó Budapest

D'Ambrosio, U. (2009) Mathematical Modeling: Cognitive, Pedagogical, Historical And Political Dimensions. In. *Journal of Mathematical Modelling and Application* Vol. 1, No. 1, 89-98

Stefanie ANZENHOFER, Würzburg

Planung – Durchführung – Auswertung – Ergebnisse eines fächerübergreifenden Unterrichtsversuchs

Im Mathematikunterricht nimmt das Arbeiten mit Funktionsgraphen eine zentrale Rolle ein. Auch im Musikunterricht bilden graphische Darstellungen als Überlieferungsform von Musik die Basis vieler Tätigkeiten. Dennoch ist bekannt, dass Schüler[1] in beiden Bereichen gleichermaßen Schwierigkeiten beim Interpretieren, Analysieren und Erstellen dieser Darstellungen aufweisen [vgl. Kalwies 2001; Hadjidemetriou, Williams 2002; Kösters 1996; Malle 2000].

1. Planung

Ausgehend von dieser gemeinsamen Problematik wurde ein fächerübergreifendes Konzept für eine empirische Untersuchung für den Mathematik- und Musikunterricht der zehnten Jahrgangsstufe des Gymnasiums (G8) entwickelt, in dem sowohl Funktionsgraphen als auch graphische Notationen des 20. Jahrhunderts im Mittelpunkt standen. [vgl. Anzenhofer 2009]
In den ersten beiden Stunden mit Schwerpunkt Mathematik sollten Graphen mittels Cinderella[2] hörend erkannt werden. Dabei überlegten Schüler, inwiefern die Lage des Graphen im Koordinatensystem durch Hören bestimmt werden kann. Außerdem untersuchten sie eigenständig, welche Bedeutung den Eigenschaften und dem Änderungsverhalten eines Graphen beim Identifizieren des Funktionstyps zukommt.
Im Mittelpunkt der anschließenden Doppelstunde mit Schwerpunkt Musik stand das Chorstück *Der Phlegmatiker* von Heinz Kratochwil. Dieses Stück ist notiert mit einer graphischen Notationsform, in der Tonhöhe und Dauer mittels eines funktionalen Zusammenhangs übermittelt werden [siehe Abbildung 1]. Schüler übernahmen in Gruppen eigenständig die musikalische Interpretation und praktische Umsetzung eines längeren Auszuges. Im anschließenden Klassengespräch analysierten, interpretierten sowie deuteten Schüler das Stück anhand der Klangwirkung, des Titels und des Notentextes.
Die Entwicklung einer Klangcollage zum Thema „gefühlte Zeit“ stellt die zentrale Aufgabe in einer abschließenden dreistündigen Unterrichtseinheit dar. Dabei wird „gefühlte Zeit“ als funktionaler Zusammenhang zwischen realer Zeit und Änderungsrate der subjektiv wahrgenommenen Zeit aufgefasst. Schüler zeichneten zu einem persönlichen Erlebnis mit unterschied-

[1] In diesem Text ist der Begriff *Schüler* geschlechtsneutral gebraucht, er umfasst somit auch *Schülerin.*
[2] Sie finden alle Cinderella-Dateien auf *www.dmuw.de/mitarbeiter/anzenhofer*

lich vergehenden Zeitabschnitten einen Funktionsgraphen, welcher als ein Zeit-Frequenz-Diagramm interpretiert die Grundlage für die Klangcollage bildete. Diese wurde mit weiteren klanglichen Mitteln wie Musik, Geräuschen, gesprochenen Texten, Klängen usw. weiter ausgebaut, so dass dem Hörer sowohl Situation und Emotionen des persönlichen Erlebnisses übermittelt wird.

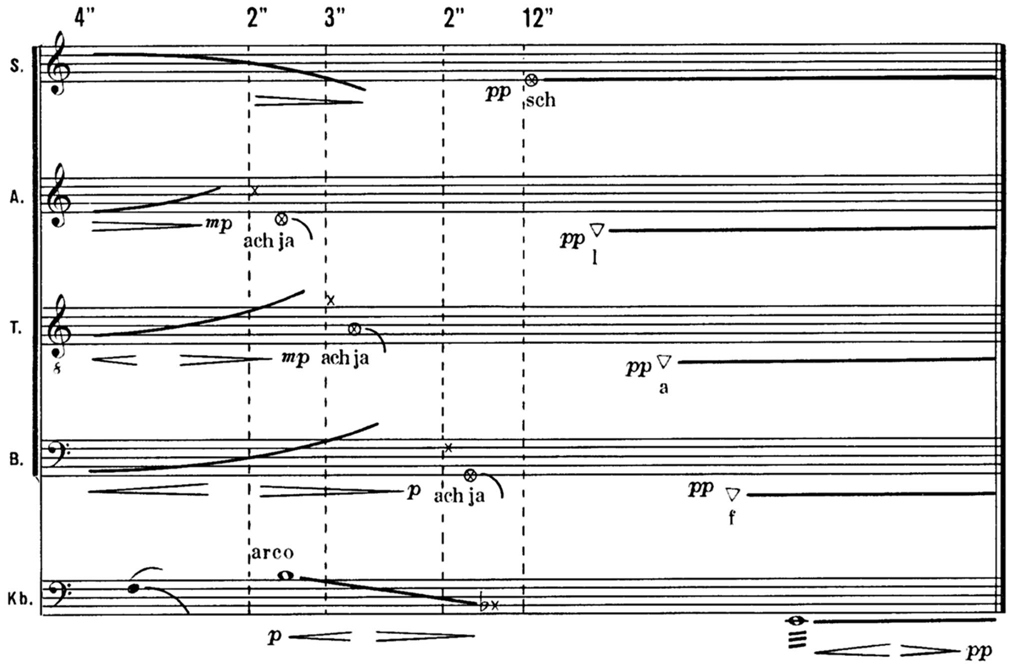


Abbildung 1: Ausschnitt aus *Der Phlegmatiker* von H. Kratochwil

2. Durchführung und Auswertung

Dieses Unterrichtskonzept wurde in einer Hauptstudie mit zwei zehnten Klassen an einem Gymnasium (G8) durchgeführt, der eine Vorstudie mit ebenfalls zwei zehnten Klassen vorausging und eine Nachstudie mit einer elften Klasse (G9) einer Freien Waldorfschule folgte. Nach jeder Themeneinheit wurden jeweils pro Klasse vier qualitative Schülerinterviews nach der Methode des Experteninterviews nach Gläser und Laudel (2006) durchgeführt. Dabei wurde den folgenden Fragen nachgegangen:

- Inwiefern wird das Wissen über Funktionen genutzt, um Gegebenes[3] „adäquat“ beschreiben bzw. darstellen zu können?
- Inwiefern ist ein Zugang zu graphischen Notationen und damit zu Neuer Musik durch den Bezug zu Funktionen möglich?

[3] Gegebenes wird dabei einerseits als Gehörtes andererseits als „gefühlte Zeit“ interpretiert.

Um zu gewährleisten, dass die Interviewfragen aufgrund des Unterrichtsverlaufs beantwortet werden können, wurden die Schülerinterviews durch Unterrichtsbeobachtung trianguliert.

Die 24 Schülerinterviews der Hauptstudie wurden mittels qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring (2008) ausgewertet. Aufgrund der derzeitigen Forschungslage in diesem Themenfeld ist Ziel dieser Studie die Hypothesengenerierung. Die Kategorien wurden dabei induktiv anhand des Textes im Hinblick auf Schülertätigkeiten definiert.

3. Ergebnisse

Aufgrund der Kürze sollen im Folgenden ausschließlich Teilergebnisse der Hauptstudie ausführlicher dargelegt werden, mithilfe derer gezeigt werden kann, inwiefern Schüler das Änderungsverhalten beim Graphen hören berücksichtigt haben.

Bei der Themeneinheit Graphen hören zeigte sich, dass die interviewten Schüler den Verlauf des Gehörten zumeist (22 von 24 Versuche) richtig aufzeichneten und den Funktionstyp daraufhin bestimmten. Nachdem die angefertigten Skizzen und die anschließende Wahl aufgrund der individuell verschiedenen Höreindrücke begründet werden mussten, wurde das Änderungsverhalten der Tonhöhenverläufe durch jeden Interviewten thematisiert. Das Kategorienbündel *„Anhand des Tonhöhenverlaufes wird ein Bezug zum Änderungsverhalten des Graphen hergestellt."* konnte in folgende Kategorien unterteilt werden:

- Tonhöhenverlauf wird nur durch ein grobes Änderungsverhalten beschrieben.
- Tonhöhenverlauf wird durch ein differenziertes Änderungsverhalten beschrieben

Dabei beschreiben Schüler beispielsweise bei einem gekrümmten Kurvenverlauf bei der Angabe des groben Änderungsverhaltens ausschließlich ein Steigen/Fallen, währenddessen unter einer differenzierten Angabe unterschiedliche Grade des Steigens/Fallens beschrieben werden. Dennoch wurden die Krümmungen graphisch stets widergegeben oder mit anderen Begriffen wie Welle, Bogen o.ä. umschrieben, so dass davon ausgegangen werden darf, dass das differenzierte Änderungsverhalten durchaus von jedem Schüler wahrgenommen wird, doch die Formulierungen nicht bei jedem Schüler gleichermaßen präzise sind. Daraus werden folgende Hypothesen abgeleitet:

- Durch die gezielte Betrachtung des Änderungsverhaltens kann eine Grundvorstellung für den Ableitungsbegriff entwickelt werden.

- Zur Präzisierung der Übermittlung des subjektiven Höreindrucks kann bei der Beschreibung des Gehörten die mathematische Fachsprache gefördert werden.

Für die Themenfelder Graphen lesen und schreiben sowie mit Graphen komponieren[4] wurden auf entsprechende Art die Hypothesen generiert:

- Das Wiedererkennen von Funktionsgraphen und damit einhergehend das Übertragen des dazugehörenden Wissens auf graphische Notationsformen kann beim Musizieren und bei der musikalischen Analyse von Tonhöhenverläufen helfen.
- Das Komponieren mit Graphen eröffnet die Möglichkeit für expressiv kreatives Arbeiten im Hinblick auf eine absichtliche und zielgerichtete Verbindung von Funktionsgraphen und Musik.

Demzufolge wird das Wissen über verschiedene Funktionstypen mit den dazugehörenden Eigenschaften und dem Änderungsverhalten in allen drei Themenfeldern auf verschiedene Weise genützt und angewendet.

Literatur

Anzenhofer, S. (2009). Musikalische Graphen im fächerübergreifenden Mathematik- und Musikunterricht. In Neubrand, M. (Hrsg.). *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009 (455-458)*. Münster: WTM.

Anzenhofer, S. (2010). Musik mit Funktionsgraphen – Wissen kreativ nutzen. In Lambert, A., Kortenkamp, U. (Hrsg.). *Tagungsband der Arbeitstagung 2008/09 des AKMUI.* (in Vorbereitung)

Gläser, J., Laudel, G. (2006). *Experteninterviews und qualitative Inhaltsanalyse als Instrumente rekonstruierender Untersuchungen.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Hadjidemetriou, C., Williams, J. (2002). Children‘s Graphical Conceptions. *Research in Mathematics Education*, 4, 69 - 87.

Kalwies, H. (2001). *Notation im Schulmusikunterricht: ein Beitrag zur historisch-systematischen Musikdidaktik*. http://oops.uni-oldenburg.de/volltexte/2001/354/

Kösters, Claudia (1996). Was stellen sich Schüler unter Funktionen vor? *mathematik lehren*, 75, 9 - 13.

Kratochwil, H. (1972). Der Phlegmatiker. Aus *Die vier Temperamente – Komödiantische Szenen für gemischten Chor, Kontrabass, Vibraphon, Becken und Gong (op. 81)*. Wien: Doblinger.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *mathematik lehren*, 103, 8 - 11.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse.* Weinheim: Beltz.

[4] Ausführliche Darlegungen dieser Ergebnisse können Sie demnächst in der Veröffentlichung Anzenhofer (2010) nachlesen.

Daniela AßMUS, Braunschweig

Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei mathematisch begabten Grundschulkindern

Die Erforschung spezifischer Charakteristika mathematischer Begabungen im Grundschulalter hat in letzter Zeit zunehmend an Bedeutung gewonnen. Als ein Begabungsmerkmal werden häufig besondere Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen genannt, die hier als Fähigkeiten zu flexiblen Denkprozessen verstanden werden sollen, bei denen während der Bearbeitung einer Aufgabe ein- oder mehrmalig ein Wechsel der Betrachtungsweise, der Bearbeitungsrichtung und/oder der verwendeten Relationen erfolgt. Zur einführenden theoretischen Analyse des Umkehrens von Gedankengängen werden hier zunächst drei verschiedene Aufgabenkategorien beschrieben, bei deren Bearbeitung unterschiedliche Umkehrprozesse zum Tragen kommen können:

1. Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand

Zu dieser Kategorie sind Aufgaben zu zählen, in denen ausgehend von einem unbekannten Anfangszustand verschiedene Transformationen und der Endzustand beschrieben werden und der Anfangszustand zu ermitteln ist.

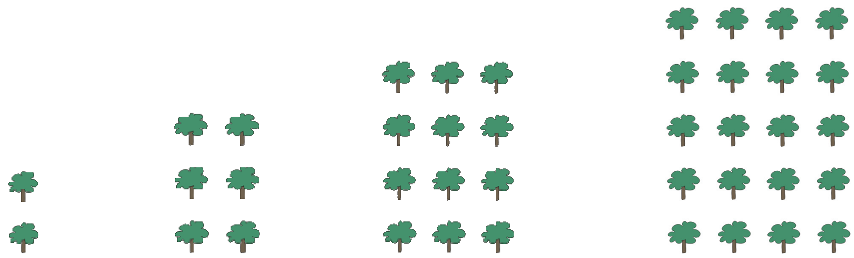
Beispiel: Aufgabe 1

Jenny bekommt von ihrer Oma eine Tüte voller Smarties geschenkt. Am ersten Tag isst sie **die Hälfte** der Smarties und **dann noch einen**, am zweiten Tag isst sie von den übrigen Smarties wieder **die Hälfte** und **dann noch einen**, danach sind noch 6 Smarties übrig. Wie viele Smarties waren am Anfang in der Tüte?

Aufgaben dieser Art können in jedem Fall durch Ausprobieren gelöst werden, wobei für den fehlenden Anfangswert ein mehr oder weniger willkürlich gewählter Wert angenommen wird, auf den die verschiedenen Transformationen angewandt werden. Durch Vergleich des erhaltenen Ergebnisses mit dem in der Aufgabe angegebenen Endwert kann so eine Abschätzung über die Veränderungsrichtung des Anfangswertes vorgenommen werden. Je nach Systematisierungsgrad des Probierens ist eine mehr oder weniger schnelle Annäherung an den gesuchten Wert möglich. Umkehren von Gedankengängen kommt bei dieser Vorgehensweise jedoch nicht zum Tragen. Demgegenüber stellt die heuristische Strategie des Rückwärtsarbeitens einen Bearbeitungsansatz dar, der bei Aufgaben dieses Typs bei korrekter Anwendung unmittelbar zum richtigen Ergebnis führt, sofern alle Transformationen problemlos umkehrbar sind. Korrektes Rückwärtsarbeiten erfordert hier ein Umkehren von Gedankengängen, da die Bearbeitungsrichtung nicht mehr der Aufgabenstellung entspricht. Das Umkehren bezieht sich dabei auf zwei unterschiedliche Aspekte, nämlich einerseits auf die Umkehrung der einzelnen Transformationen und andererseits auf die Transformationsreihenfolge, die nun in umgekehrter Richtung durchlaufen werden muss.

2. Aufgaben mit umgekehrter Fragestellung

Beispiel: Aufgabe 2



1. Jahr 2. Jahr 3. Jahr 4. Jahr

a) Hier wächst ein Zauberwald, der immer die Form eines Rechtecks hat. Jedes Jahr verändert sich der Wald nach einer bestimmten Regel. Wie viele Bäume enthält der Wald im 5. Jahr?
b) Wie viele Bäume enthält der Wald im 9. Jahr?
c) In einem Jahr werden 110 Bäume gezählt. Im wievielten Jahr ist das?

Zu dieser Kategorie sind mehrteilige Aufgaben wie Aufgabe 2 zu zählen, bei denen in mindestens einer Teilaufgabe eine umgekehrte Fragestellung zu bearbeiten ist, in der gegenüber den vorherigen Teilaufgaben Gegebenes und Gesuchtes vertauscht wird, die grundlegende Struktur der Aufgabe jedoch erhalten bleibt. Bei der Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung werden Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen zum einen dafür benötigt, um trotz Umkehrung der Fragestellung die Konstanz der Strukturen erkennen und diese weiter nutzen zu können. So können Aufgaben dieses Typs häufig gelöst werden, indem die Vorgehensweisen der vorangegangenen Teilaufgaben (ausprobierend) fortgeführt werden. Voraussetzung ist hierbei, dass schon bei den ersten Fragestellungen sinnvolle Strukturen erkannt und genutzt wurden. Der Bearbeitungserfolg der umgekehrten Fragestellung ist somit meist von einer korrekten Lösung der vorangegangenen Aufgaben abhängig. Ist das Umkehren der in der Aufgabenstellung verwendeten Relationen eindeutig möglich, kann das Umkehren von Gedankengängen zum anderen im Umkehren von Operationen bzw. Relationen zur Anwendung kommen.

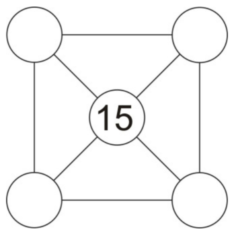
3. Aufgaben, die ein flexibles Umkehren von Relationen erfordern

Zu dieser Kategorie gehören Aufgaben, die nicht durch ausschließliches Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten zu lösen sind, sondern deren Bearbeitungen einen flexiblen Umgang mit sich oft mehrmals umkehrenden Relationen erfordert, sofern nicht nur ausprobiert wird.

Beispiel: Aufgabe 3

Tim denkt sich eine Figur aus, in die er immer nach diesen drei Regeln Zahlen in die Kreise schreibt:

1. Regel: Bei zwei untereinander stehenden Zahlen ist die untere Zahl immer um 1 größer als die obere Zahl.
2. Regel: Bei zwei nebeneinander stehenden Zahlen ist die rechte Zahl immer um 4 größer als die linke Zahl.
3. Regel: Bei den Diagonalen ergeben die beiden Zahlen in den Ecken zusammengezählt immer die Zahl im mittleren Kreis."



Im mittleren Kreis steht die Zahl 15. Welche Zahlen müssen in den anderen Kreisen stehen, damit alle Regeln stimmen?

4. Untersuchungsergebnisse

Untersuchungen mit potentiell mathematisch begabten Zweitklässlern ergaben, dass zwar viele dieser Kinder noch Probleme haben, Gedankengänge umzukehren, es ihnen im Schnitt jedoch wesentlich besser gelingt als „normal" begabten Kindern gleichen Alters. So konnte kein Kind der normalen Grundschulklassen, die als Vergleichsgruppen (N= 69) eingesetzt wurden, Aufgabe 1 lösen, während dies immerhin 9% der potentiell begabten Zweitklässler (N=182) gelang und darüber hinaus bei 35% der Kinder sinnvolle Lösungsansätze zu erkennen waren. Die Mehrheit der potentiell begabten Zweitklässler fand die Lösung durch Rückwärtsarbeiten und auch bei vielen anderen Kindern mit nicht ganz korrekten Ergebnissen waren Lösungsversuche ausgehend vom Endwert zu beobachten. Es zeigte sich, dass den meisten Kinder das Bilden der Umkehroperationen weitgehend korrekt gelang, während es ihnen häufig Schwierigkeiten bereitete, die Operationsreihenfolge umzukehren bzw. alle Operationen bei der Umkehrung zu berücksichtigen.

Auch die umgekehrte Fragestellung in Aufgabe 2 bereitete vielen potentiell begabten Zweitklässlern Schwierigkeiten, es gelang jedoch zwei Drittel der 77 Kinder, die in a) und b) korrekte Strukturen nutzten, diese auch in der Bearbeitung von c) anzuwenden. Besonders erfolgreich waren dabei Kinder, die b) multiplikativ lösten. Auch andere Kinder, die in b) eine falsche

Struktur verwendet hatten, versuchten den eingeschlagenen Lösungsweg fortzusetzen oder gar mit umgekehrten Relationen zu arbeiten und ließen damit erkennen, dass sie die Umkehrung der Fragestellung prinzipiell verstanden hatten. Der Einsatz anderer Aufgaben dieser Aufgabenkategorie bestätigte ebenfalls, dass ein Großteil der potentiell mathematisch begabten Kinder, die in vorangegangenen Aufgabenteilen korrekte Strukturen nutzen konnten, auch bei der Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung sinnvolle Lösungsansätze zeigten (Aßmus, 2010). Eine hohe Lösungsquote war besonders bei den Kindern zu verzeichnen, die vorher den Rechenweg stark verkürzende Strukturen verwendet hatten.

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass die Untersuchungen sowie Beobachtungen in anschließenden Fördermaßnahmen die Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen als Begabungsmerkmal prinzipiell bestätigt haben, wobei diese Fähigkeiten bei Grundschulkindern jedoch noch recht unterschiedlich ausgeprägt sind. Als Erklärungsansätze für den unterschiedlichen Ausprägungsgrad der Fähigkeiten kommen m.E. folgende Hypothesen in Frage: Einerseits könnte die Präferenz für das Rückwärtsarbeiten als Lösungsstrategie bei Aufgaben mit unbekanntem Anfangszustand vom jeweiligen Problemlösetyp abhängen, andererseits könnte eine besondere Ausprägung der Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen ein Indikator für die „Qualität“ der Begabung sein. Für letzteres würde sprechen, dass besondere Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen in der Fördersituation kontinuierlich von den leistungsstärksten Kindern gezeigt wurden.

Auffällig war in den Untersuchungen der bei arithmetischen Aufgaben wiederholt aufgetretene Zusammenhang zwischen der Nutzung mathematischer Strukturen zur starken Verkürzung des Rechenweges und dem Lösungserfolg bei nachfolgenden Teilaufgaben mit umgekehrten Fragestellungen. Der erfolgreichen Bearbeitung der umgekehrten Fragestellung ging häufig die Verwendung eines besonders kurzen Rechenweges voraus. Inwiefern Zusammenhänge zwischen den Fähigkeiten im Strukturieren in Form von Superzeichenbildung und den Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bestehen, wäre in anderen Untersuchungen abzuklären.

Literatur

Aßmus, D. (2010): Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.): *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 45 – 61). Offenburg: Mildenberger

Mirco BARTL, Erfurt

Bildungsplan und die Praxis von Erzieherinnen - Eine Fallstudie zu Thüringer Kindergärten

Geschichtlicher Überblick zur Entwicklung von Bildungsplan und Erzieherausbildung

Bildungspläne sind in den neuen Bundesländern nichts Neues. In der DDR gab es bereits seit 1961 einen „Bildungs- und Erziehungsplan für den Kindergarten“, der mehrfach überarbeitet und aktualisiert in seiner letzten Version 1985 als „Programm für die Bildungs- und Erziehungsarbeit im Kindergarten“ erschien. Die Kindergärten in der DDR waren Bestandteil des Bildungssystems und unterstanden dem Ministerium für Volksbildung. Die Einrichtungen boten für Kinder ab drei Jahren (jüngere Kinder wurden in Kinderkrippen betreut) eine Ganztagsbetreuung an. In der Regel wurde mit altershomogenen Gruppen gearbeitet, so dass auch das „Programm für die Bildungs- und Erziehungsarbeit im Kindergarten“ nach Altersgruppen in Jüngere, Mittlere und Ältere Gruppe gegliedert war. Innerhalb dieser Abschnitte gab es Kapitel zu grundlegenden Themen der Kindergartenarbeit und zu einzelnen Bildungsbereichen. Der Bereich „Entwicklung elementarer mathematischer Vorstellungen“ war ab der Mittleren Gruppe vorgesehen. Die Bildungsbereiche wurden nochmals quartalsweise unterteilt (parallel zum Schuljahr, das 1. Quartal begann am 1. September). Der Bildungsplan machte sehr konkrete Vorgaben, was Anzahl, Dauer und Inhalt der Beschäftigungen betraf. So sollte im Zeitraum von zwei Wochen zweimal eine Beschäftigung zur Entwicklung elementarer mathematischer Vorstellungen durchgeführt werden. Als zeitliche Richtwerte galten für die erste Beschäftigung 15 bis 20 min (pro Tag waren zwei Beschäftigungen vorgesehen). Ein Beispiel zum Inhalt , Ältere Gruppe 4. Quartal: *„Die Erzieherin befähigt die Kinder, mehrere Mengen mit insgesamt höchstens zehn Gegenständen zu einer Menge zusammenzufassen. In ihrer Antwort nennen die Kinder sowohl die Anzahl der Gegenstände in jeder einzelnen Menge als auch die gesamte Anzahl.“* (Programm für die Bildungs- und Erziehungsarbeit im Kindergarten, 1985, S. 246)

Kindergärtnerin war neben Krippenerzieherin und Hortnerin eine eigenständige Ausbildung. Sie erfolgte als dreijähriges Studium an einer Pädagogischen Schule für die Ausbildung von Kindergärtnerinnen. Während der Ausbildung wurden die angehenden Erzieherinnen auch auf die Gestaltung von Beschäftigungen zur Entwicklung elementarer mathematischer Vorstellungen von Kindern vorbereitet. Dazu waren im

Fach Methodik/Mathematik insgesamt 110 Unterrichtsstunden vorgesehen (weitere 151 Stunden zu Methodik/Natur).

Im Zeitraum von 1990 bis 2005 wurden Kindergärten nicht als Teil des Bildungssystems gesehen. Es gab keinen verbindlichen Bildungsauftrag und keine Bildungspläne.

Die Ausbildung der Erzieherinnen in Thüringen wurde auf das System der alten Bundesländer umgestellt zu einer dreijährigen Fachschulausbildung, die zur Arbeit mit Kindern und Jugendlichen in verschiedenen Bereichen (von Krippe bis Jugendeinrichtung, von"0 bis 27 Jahre") vorbereiten soll. Die bis 2004 ausgebildeten Erzieherinnen wurden während der Ausbildung in keiner Weise darauf vorbereitet, mit Kindern Angebote zu mathematischen Themen umzusetzen.

Nicht zuletzt auch in Folge der PISA- Ergebnisse rückte die frühkindliche Bildung wieder stärker in den Fokus. Alle Bundesländer erarbeiteten Bildungspläne und in Thüringen ist seit 2008 der „Thüringer Bildungsplan für Kinder bis 10 Jahre" in der Implementierungsphase (Erprobung seit 2005). Er gliedert sich in die Abschnitte Erziehungswissenschaftliche Grundlagen, Bildungsbereiche und Qualitätsmanagement. Die mathematische Bildung bildet einen der sieben Bildungsbereiche. Innerhalb dieser wird nach dem Entwicklungsstand des Kindes in basale, elementare und primare Bildung unterschieden, in Tabellenform werden dazu jeweils die personale (Wie kann Bildung aus Sicht des Kindes beschrieben werden?), soziale (In welchen sozialen Beziehungen und Austauschprozessen findet diese Bildung statt?) und sachliche (Welche räumlichen und materiellen Rahmenbedingungen sind dazu nötig?) Dimensionen von Bildung benannt.

Seit 2004 findet mit dem Fach „Mathematik und Naturwissenschaften" als Teilbereich der „Angewandten Didaktik und Methodik der sozialpädagogischen Praxis" im Thüringer Lehrplan für berufsbildende Schulen, Bildungsgang: Sozialpädagogik auch wieder eine Vorbereitung der angehenden Erzieher und Erzieherinnen auf die Umsetzung mathematischer Themen mit Kindern statt (insgesamt 100 Unterrichtsstunden für Mathematik, Naturwissenschaften und Technik).

Erste Ergebnisse der Fallstudie

Um den derzeitigen Stand der Umsetzung von Angeboten mit mathematischen Inhalten in Thüringer Kindergärten zu erheben, wurden bisher zehn leitfadengestützte Interviews mit Erzieherinnen durchgeführt. Die Fragen zu verschiedenen Schwerpunkten wurden möglichst offen gestellt. Von den befragten Erzieherinnen haben sieben ihre Ausbildung vor 1990 absolviert, eine im Zeitraum von 1990 bis 2004 und zwei nach 2004.

Abschließend werden erste Ergebnisse zu ausgewählten Schwerpunkten vorgestellt.

1. Umsetzung mathematischer Angebote in der Einrichtung

Alle befragten Erzieherinnen führen vielfältige Angebote zu mathematischen Themen durch und erachten diese als wichtig für die Entwicklung der Kinder. Die Beschäftigung mit Mathematik ergibt sich sowohl spontan aus alltäglichen Situationen, als auch in Form gezielt geplanter Angebote. Teilweise wird versucht die Angebote zur Mathematik mit anderen Bildungsbereichen (z.B. Kunst, Musik, Bewegungserziehung) zu verknüpfen. Wenn möglich werden geplante mathematische Angebote regelmäßig durchgeführt (meist etwa ein Angebot alle vierzehn Tage, wobei das oft als zu wenig erachtet und mit Zeitmangel begründet wurde), vereinzelt wird in Projekten gearbeitet.

2. Rahmenbedingungen

Die Rahmenbedingungen zur Umsetzung mathematischer Angebote in den Kindergärten werden als schwierig eingeschätzt. Als Hauptprobleme benennen die Erzieherinnen die großen Gruppenstärken und, in Einrichtungen mit altersheterogenen Gruppen, die Altersmischung sowie die fehlende Vorbereitungszeit.

Oft fehlen für den Bildungsbereich Mathematik ausreichend neuere Materialien, so dass häufig auf das didaktische Material aus der DDR zurück gegriffen wird.

3. Bildungsplan

Das (Wieder-) Erscheinen eines Bildungsplanes wird generell begrüßt, die Akzeptanz des neuen Bildungsplanes ist aber unterschiedlich. Er wird als zu kompliziert und praxisfern kritisiert. Vor allem die älteren Erzieherinnen orientieren sich noch stark am „Programm für die Bildungs- und Erziehungsarbeit im Kindergarten“ von 1985.

Insgesamt sehen sich die Erzieherinnen auf die Umsetzung des neuen Bildungsplanes schlecht vorbereitet. Die derzeitige Praxis der Fortbildung durch Multiplikatoren wird als unzureichend und oberflächlich kritisiert.

4. Ausbildung

Auch die nach 2004 ausgebildeten Erzieherinnen fühlen sich durch die Fachschulen zu wenig auf die Umsetzung des Bildungbereichs

Mathematische Bildung vorbereitet. Insgesamt wird an der derzeitigen Ausbildung eine mangelnde Praxisverbundenheit kritisiert.

Zusammenfassung

Angebote zu mathematischen Themen sind in den Thüringer Kindergärten fester Bestandteil der Bildungsarbeit, was anscheinend zu einem großen Teil auf die Tradition des DDR Bildungsplans zurückzuführen ist. Allerdings erscheint es zur effektiveren Umsetzung des Thüringer Bildungsplans für Kinder bis 10 Jahren nötig, sowohl im Ausbildungs- als auch im Fort- und Weiterbildungsbereich Verbesserungen vorzunehmen.

Literatur

Kultusministerium des Freistaates Thüringen, Hrsg. (2008). *Thüringer Bildungsplan für Kinder bis 10 Jahre.* Weimar, Berlin: Verlag Das Netz.

Ministerrat der DDR/Ministerium für Volksbildung; Hrsg. (1985), *Programm für die Bildungs- und Erziehungsarbeit im Kindergarten*. Berlin: Volk und Wissen.

Ministerrat der DDR/Ministerium für Volksbildung; Hrsg. (1989), *Studienanleitung für die Ausbildung als Kindergärtnerin Teil III*. Berlin: Volk und Wissen.

Möller, Regina; Sasse Ada. (2005). *Entwicklung mathematischer Kompetenzen im Elementarbereich. Sache Wort Zahl, 33*, 30- 40.

Schinköthe, Horst; Kretschmer, Gerlinde. (1980). *Mengen und Längen im Kindergarten*. Berlin: Volk und Wissen.

Thüringer Kultusministerium, Hrsg. (2007). *Thüringer Lehrplan für berufsbildende Schulen, Bildungsgang Sozialpädagogik.* Erfurt.

Thüringer Kultusministerium, Hrsg. (2000). *Thüringer Lehrplan für berufsbildende Schulen, Bildungsgang Sozialpädagogik.* Erfurt.

Ludwig Bauer, Passau

Fallstudien über Schülervorstellungen zu 0,9 Periode

1. Einführung

256 Schülern der Jahrgangsstufen 7 bis 12 aus 11 Klassen von 3 verschiedenen bayerischen Gymnasien wurde während des Unterrichts ein Fragebogen zur schriftlichen Beantwortung vorgelegt. Eine der Fragen hatte folgenden Wortlaut:

Statt 0,99999… (immer so weiter) schreibt man auch $0,\overline{9}$. *Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Kreuze an:*

a) $0,\overline{9} <$ ☐ *b)* $0,\overline{9} = 1$ ☐ *c)* $0,\overline{9} > 1$ ☐ *Begründung: ……*
Schülerantworten zu dieser "Frage mit Tiefgang" (Danckwerts/Vogel 2006, S. 27-32) werden analysiert und diskutiert.

2. Mathematikdidaktische Analyse

Mögliche Zugangsweisen bzw. Aktivitäten zu $0,\overline{9}$

- Rechnerische Verfahren der Bestimmung von $0,\overline{9} = 1$ mit Hilfe von Brüchen bzw. mit Hilfe von geeigneten Gleichungen, z.B. $0,\overline{9} = 0,999\ldots = 9\cdot 0,111\ldots = 9\cdot\frac{1}{9} = 1$
- Rundungsüberlegungen zu $0,\overline{9}$
- Anschaulich-zeichnerische Darstellung von 0,9; 0,99 usw. auf Ausschnitten der Zahlengeraden
- Funktionale Deutungen von $f(x) = 1-(0,1)^x$ im Koordinatensystem
- Abstandsbestimmungen: Vergleich von 1-0,999…9(k) und $0,\overline{9}$ - 0,999…9(k), wobei 0,999…9(k) den Dezimalbruch mit k Ziffern 9 nach dem Komma bezeichnen soll.
- Zweipersonenspiel der Art: Person P_1 gibt einen (kleinen) Abstand der Größe ε vor, Person P_2 soll dann einen Index k bestimmen, sodass (1-0,999…9(k)<ε gilt (mehrfache Durchgänge; Beobachtung der Gewinnsituation)
- in der Fortsetzung dazu Widerspruchsbeweis: Die Annahme $1-0,\overline{9}=\varepsilon$ wird zu einem Widerspruch geführt
- $0,\overline{9}$ als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe: $S = \frac{0,9}{1-0,1} = 1$

Zur Ontologie von $0,\overline{9}$

$0,\overline{9}$ kann aufgefasst werden als Bezeichnung für …

den unendlichen Dezimalbruch 0,99999… (unendlich viele Stellen nach dem Komma mit Ziffer 9); die unendliche Folge der endlichen Dezimalbrüche 0,9 0,99 0,999 0,9999 usw.; den Grenzwert dieser Dezimalbruchfolge; die Folge der Partialsummen 0,9; (0,9+0,09); (0,9+0,09+0,009); … usw.; den Grenzwert dieser Partialsummenfolge; die unendliche geometrische Reihe 0,9 + 0,09 + 0,009 + 0,0009 + …; die Summe dieser unendlichen Reihe. Je nachdem wird entweder der unendliche Prozess der Entstehung von $0,\overline{9}$ ("potentiell unendlich") oder das Ergebnis, also der Grenzwert des Prozesses ("aktual unendlich") betont. Das Objekt $0,\overline{9}$ ist ontologisch offen bzw. mehrdeutig.

3. Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$: Quantitative Analyse

Klasse	Zahl der Schüler Gesamt	$0,\overline{9}<1$		$0,\overline{9}=1$		…
7a	27	22	81,5%	4	14,8%	
7b	31	19	61,3%	10	32,3%	
8a	23	19	82,6%	2	8,7%	
8b	24	15	62,5%	8	33,3%	
8c	24	15	62,5%	7	29,2%	
9a	19	13	68,4%	5	26,3%	
9b	19	6	31,6%	14	73,7%	
9c	19	15	78,9%	9	47,4%	
10a	23	12	52,2%	14	60,9%	
10b	26	20	76,9%	6	23,1%	
12GK	23	21	91,3%	2	8,7%	
Gesamt	256	177	69,1%	81	31,6%	

Grobe Gesamtergebnisse: $0,\overline{9}<1$ ca. 70%, $0,\overline{9}=1$ ca. 30%; keine lineare Entwicklungstendenz in der Abfolge der Jahrgangsstufen.

"Ausreißerklassen" 9b, 10a: In diesen Klassen erzeugten einzelne Schüler eine lebhafte Gruppendiskussion, in deren Verlauf die Forderung nach einer anonymen Einzelarbeit außer Kraft gesetzt wurde. In der Grundkursklasse 12GK war die Zustimmung zu $0,\overline{9}<1$ mit ca. 91% am höchsten. Die Infinitesimalmathematik der Oberstufe mit einer ausführlichen Behandlung von Grenzwerten führte offensichtlich (zunächst?) zu einer Verstärkung der Position $0,\overline{9}<1$!

4. Schülervorstellungen zu $0,\overline{9}$: Qualitative Analyse

4.1. Argumente für $0,\overline{9} < 1$

- $0,\overline{9}$ und 1 als feste, unterscheidbare Objekte; vom kleineren $0,\overline{9}$ fehlt etwas zum größeren Objekt 1 (*es fehlt immer noch ein Stückchen*).
- $0,\overline{9}$ nähert sich 1, erreicht es aber nicht (Prozess) (*$0,\overline{9}$ geht gegen 1*).
- Dezimalbrüche der Art 0,… sind grundsätzlich kleiner als 1 (*Null Komma etwas ist immer kleiner*).
- $0,\overline{9}$ wird erst durch Runden zu 1.
- 1 ist ein Ganzes, $0,\overline{9}$ ein Teil des Ganzen.
- $0,\overline{9}$ ist zwar mathematisch 1, aber es fehlt noch etwas zu 1.
- $0,\overline{9} < 1$ ist einfach so.
- $0,\overline{9} < 1$. Fragen Sie 11880, da werden sie geholfen.

4.2. Argumente für $0,\overline{9} = 1$

- Es ist so.
- Weil man es so sagt.
- Das haben wir mal gelernt.
- $0,\overline{9} = \frac{9}{9} = 1$ (Umrechnen).
- gleich groß, wenn man rundet.
- $0,\overline{9}$ nähert sich 1, also kann man sagen $0,\overline{9} = 1$.
- Der Unterschied zwischen beiden ist so klein, dass man sagen kann $0,\overline{9} = 1$.

Die letzten drei Aussagetypen stammen zwar aus dem Pool zu $0,\overline{9}=1$, stützen inhaltlich aber eher die Position $0,\overline{9}<1$.

4.3. Kognitive Auffassung

Die kognitive Auffassung der Schüler zu $0,\overline{9}$ ist geprägt durch folgende Kennzeichen: Mathematische Variabilität; Kognitive Unschärfe ("novizenhafte mentale Repräsentation"); Heterogenität, individuelle Verschiedenheit; Implizitheit, Privatheit; Anschauung, Intuition, Alltagsdenken (dominant); Konstruktiver Charakter des Wissens; Formalismen/rechnerische Verfahren (ohne inhaltliche Überlegungen). Offensichtlich wird das Thema

$0,\bar{9}$ im Unterricht nach einer kurzen frühen Behandlung im Rahmen der Bruchrechnung später nicht mehr aufgegriffen.

5. Diskussion

Die Beschäftigung mit Mathematik auf einer formal höheren Stufe führt nicht zwingend zum Verständnis der Mathematik von niederen Stufen! Ein mathematischer Formalismus (rechnerischer Umgang mit Grenzwerten, Epsilontik) garantiert nicht automatisch ein ursprüngliches, elementares Verstehen! Man kann die Aussagen der Schüler idealtypisch formulierten Denkstilen zuordnen (Przenioslo 2006), z.B. den Typen "pragmatisch arbeitender Empiriker", "verfahrensorientierter Schematiker", "holistisch denkender Intuitionist", "analytisch argumentierender Theoretiker". Der Mathematikunterricht sollte Anknüpfungspunkte für alle diese Typen schaffen und zulassen. Wichtig ist ein genetisches Arbeiten in kleinen und damit überschaubaren Lernumgebungen (z.B. im Prozess der Entstehung eines exakten Grenzwertbegriffs durch Präzisierung/Formalisierung anschaulich-intuitiver Alltagsvorstellungen zu $0,\bar{9}$). Am Exempel $0,\bar{9}$ können grundlegende, typische Vorstellungen, Ideen, Begriffe der Analysis erfahrbar und sichtbar gemacht werden (auch ohne systematische Behandlung von Folgen und Reihen). $0,\bar{9}$ sollte an mehreren Stellen / bei verschiedenen passenden Gelegenheiten im Curriculum thematisiert werden, insbesondere wieder mit infinitesimalen Mitteln (Oberstufe Gymnasium, Universitätsstudium). Dabei sollten anschaulich-intuitive Vorstellungen der Schüler problematisiert und mit Angeboten für eine mathematische Weiterentwicklung und Exaktifizierung angereichert werden (siehe 2).

6. Literatur

Dankwerts, R., Vogel, D. (2006): Analysis verständlich unterrichten. Heidelberg: Spektrum

Eisenmann, P. (2005): Warum gilt nicht $0,\bar{9} < 1$? In: Praxis der Mathematik, H. 4, S. 40-42

Prediger, S. (2001): Mathematiklernen als interkulturelles Lernen. Entwurf für einen didaktischen Ansatz. In: Journal für Mathematikdidaktik 22, H. 2, S 123-144

Przenioslo M. (2006): Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types. In: Journal für Mathematikdidaktik H. 2, S. 113-139

Stephan BERENDONK, Köln

Wie kann Topologie in der Schule sinnvoll unterrichtet werden?

Mathematisch interessierte Oberstufenschüler können in den Niederlanden seit 2007 zusätzlich zu 'Wiskunde B' (Mathematik B) das Fach 'Wiskunde D' wählen. Eines der Ziele von Wiskunde D ist es, Schülern einen Einblick in die Entwicklung der modernen Mathematik zu vermitteln. An verschiedenen niederländischen Universitäten laufen daher momentan Projekte in denen Unterrichtseinheiten für Wiskunde D entwickelt werden.

Die aufsehenerregende Lösung der Poincaré-Vermutung gab den Anlass, neben Themen der angewandten Mathematik auch die Topologie als mögliches Thema von Wiskunde D aufzunehmen. Hieraus entstand das Interesse an der im Titel gestellten Frage. 'De Praktijk', ein Projektbüro für naturwissenschaftlichen Unterricht, wurde schließlich mit der Entwicklung einer 20 Schulstunden umfassenden Unterrichtseinheit zur Topologie beauftragt, die inzwischen fertiggestellt ist und den Namen 'TopWis Poincaré' trägt (http://www.diswis.nl/nl/homepage/wat-is-diswis/diswis-poincare).

Ein zentraler Lehrinhalt von TopWis Poincaré ist die Klassifikation der geschlossenen Flächen, die besagt, dass jede geschlossene Fläche entweder zu einer Kugel mit Henkeln oder zu einer Kugel mit Kreuzhauben homöomorph ist. Hierzu werden zunächst Torus und projektive Ebene als Beispiele für Flächen eingeführt. Danach werden nach dem Baukastenprinzip, d.h. durch Bildung der zusammenhängenden Summe, kompliziertere Flächen erzeugt. Dies geschieht auf spielerische Weise. Dann wird festgelegt, dass zwei Flächen als gleich, man sagt homöomorph, angesehen werden, wenn sie durch eine Reihe von stetigen Verformungen und bestimmten Schneide- und Klebeoperationen ineinander überführt werden können. Die Arbeit der Schüler ist konstruktiv, die Handlungsorientierungen werden jedoch durch schrittweise Instruktion und Anleitung gegeben.

Die geschlossenen nicht-orientierbaren Flächen besitzen kein Referenzobjekt in der Realität der Schüler. Ebenso besitzt die Durchführung einer Homöomorphie oder das Bilden einer zusammenhängenden Summe keine Referenzhandlung in ihrer Realität, im Gegensatz beipielsweise zur Isotopie zweier Knoten. Die betrachteten Objekte und Operationen sind daher abstrakt und werden bei den SuS kaum Assoziationen auslösen. Den SuS fehlen dazu in ihrer Erfahrungswelt Situationen, aus der sie Handlungsorientierungen und Vorstellungen übertragen könnten. Dies erschwert es den SuS, eigene Entdeckungen zu machen. Hans Freudenthal (1991) plädierte daher dafür, dass Mathematikunterricht von den Erfahrungen der

SuS ausgehen sollte. Hieraus ergibt sich die Herausforderung einen Unterricht zu entwickeln, der die SuS ausgehend von vertrauten Phänomenen, durch plausibele Handlungen zur Frage nach der Klassifikation der Flächen führt.

Die Frage nach der topologischen Klassifikation der Flächen wurde zuerst von Bernhard Riemann (vgl. Volkert, 2002) im Zusammenhang mit Problemen aus der Funktionentheorie gestellt. Die historische Herangehensweise ist daher in der Schule wohl nicht durchführbar.

SuS nehmen die Mathematik häufig als eine fertige Wissenschaft wahr, in der vermutlich nur noch über vernachlässigbare Details gestritten wird. Dieses Bild der Mathematik hängt Imre Lakatos (1976) zufolge mit einer Vernachlässigung der Entstehung von Fragestellungen und Begriffen im Unterricht zusammen. Wir stellen uns hierzu eine Unterrichtssituation vor, in der den SuS der Eulersche Polyedersatz vorgelegt wird und zwar in der folgenden Form: Für einfache Polyeder mit einfach zusammenhängenden Flächen gilt: Ecken – Kanten + Flächen = 2. Es folgt der klassische Beweis von Cauchy (1813). Wir nehmen an, dass die Begriffe ‚einfaches Polyeder' und ‚einfach zusammenhängende Fläche' vor der Formulierung des Satzes definiert wurden. Es mag offensichtlich sein, dass diese beiden Begriffe, durch Beispiele entstanden sind, auf die sich der Beweis von Cauchy nicht übertragen ließ. Daher wurden sie dem Polyedersatz als zusätzliche Bedingungen auferlegt. Den SuS ist dies jedoch nicht unbedingt bewusst, sodass es für sie schwer nachvollziehbar ist, wie je ein Mensch diese Bedingungen erraten konnte.

Der Autor wünscht sich jedoch, dass die Topologie von den SuS als eine lebendige, sich in ständiger Entwicklung befindliche vom Menschen geschaffene Wissenschaft erfahren wird.

Hierzu muss der Entstehung von Begriffen Zeit eingeräumt werden, sodass den SuS gezeigt werden kann, wie ein in der Anschauung begründeter Begriff, z.B. der einer Fläche, durch natürlich auftretende Fragen und Konflikte geschärft werden kann.

Im Rahmen eines math-il.de Projekts (vgl. Kaenders, 2010) und auf der Grundlage von TopWis Poincare wird daher von einer Gruppe erfahrener niederländischer Mathematiklehrer zusammen mit dem Autor an einer Unterrichtseinheit zur Topologie der Flächen gearbeitet, in der die SuS eine genetisch nachvollziehbare Entstehung der kombinatorischen Topologie nacherleben können, welche jedoch nicht notwendigerweise der tatsächlichen entspricht.

Es folgt nun ein konkreter Vorschlag, wie man in eine solche Unterrichtseinheit einsteigen könnte.

Man stelle sich eine Gebirgslandschaft auf einer Insel vor. So ein Gebirge besitzt lokal höchste Punkte, die Berge, und lokal tiefste Punkte, die Täler. Steht man auf einem Berg und möchte zu einem benachbarten Berg gelangen, so wird man eine Gratwanderung machen. Man läuft dann entlang einer Wasserscheide. Ist man jedoch in einem Tal und möchte ein benachbartes Tal erreichen, so wird man entlang eines Passes gehen. Die Kreuzung eines Passes mit einer Wasserscheide nennen wir einen Sattelpunkt. Die Anzahl der Berge, Täler und Sattelpunkte auf einer Insel kann man zählen. Besteht zwischen den Anzahlen ein Zusammenhang? Dies ist die Einstiegsfrage. Sie ist an Referenzobjekte (reale Inseln) und Referenzhandlungen (Gratwanderungen) gebunden und kann daher an die Erfahrungswelt der SuS anknüpfen. Es wird sich herausstellen, dass diese Frage uns tief in die Flächentopologie hineinzuführen vermag.

Lässt man die SuS nun ihre eigenen Inseln aus Salzteig modellieren und trägt die Anzahl der Berge, Täler und Sattelpunkte der verschiedenen Inseln in einer Tabelle zusammen, so gelangen die SuS zu der Vermutung, dass gilt: Berge + Täler = Sattelpunkte + 1.

Daraufhin wird mit den SuS ein Beweis dieses Zusammenhangs erarbeitet, der auf James Clerk Maxwell (1870) zurückgeht: Man stelle sich eine Sintflut vor. Der Meeresspiegel steigt und mit ihm steigt der Grundwasserspiegel auf der Insel gleichermaßen. Wir beobachten nun, was passiert, wenn der Meeresspiegel die Höhe eines Sattelpunktes erreicht. Das Wasser nähert sich dem Sattelpunkt von zwei Seiten. Einen Sattelpunkt, bei dem das Wasser auf beiden Seiten zum gleichen Gewässer gehört, bezeichnen wir als Landenge; gehört das Wasser zu zwei verschiedenen Gewässern, so bezeichnen wir den Sattelpunkt als Meerenge. Die Anzahl der Sattelpunkte ist also gleich der Anzahl der Landengen plus der Anzahl der Meerengen. Man kann sich nun überlegen, dass die Anzahl der Täler gleich der Anzahl der Meerengen und die Anzahl der Berge um 1 größer als die Anzahl der Landengen ist. Damit ist die Vermutung bewiesen.

Der bisher skizzierte Ablauf wurde im vorigen Jahr in einem Workshop beim internationalen Mathecamp des Känguruwettbewerbs in Eberswalde durchgeführt. Beim Bauen der Inseln fragten einige SuS, ob auch Inseln mit Höhlen oder Tunneln zugelassen wären, was zunächst nicht der Fall war. Nun aber greifen wir diese Ideen auf, um unsere Vermutung und den Beweis einer strengen Probe zu unterziehen. Wir verwenden nun also die Methode des Beweisens und Widerlegens, wie sie von Lakatos (1976) dargelegt wurde. Hierdurch verstehen wir den entdeckten Zusammenhang besser und können präzisieren, für welche Inseln er gilt.

Für Inseln mit Höhlen gilt der gefundene Zusammenhang noch stets, jedoch kann der gegebene Beweis dies nicht ohne weiteres erklären. Im Falle von Inseln mit Tunneln muss auch die Vermutung verworfen werden. Es muss nach einer neuen allgemeineren Vermutung gesucht werden. Es stellt sich heraus, dass für Inseln mit n Tunneln gilt:

$$\text{Berge} + \text{Täler} = \text{Sattelpunkte} + 1 - 2n.$$

Für zwei Inseln mit gleicher Anzahl von Tunneln gilt also der gleiche Zusammenhang. Erreicht man diese Stelle mit den SuS, so scheint die Frage nach der Klassifikation der (orientierbaren) Flächen plötzlich in Reichweite zu sein.

Der soeben skizzierte Vorschlag ist ein Versuch, das bei TopWis Poincaré auftretende Problem der fehlenden Referenzobjekte und Referenzhandlungen zu vermeiden und dennoch durch entdeckendes Lernen auf genetisch nachvollziehbare Weise zur Klassifikationsfrage zu gelangen.

Der Autor dankt Dr. Ysette Weiss-Pidstrygach für die anregenden Diskussionen.

Literatur

Cauchy, A. L. (1813). Recherches sur les Polyedrès. *Journal de l'École Polytechnique, 9*, 68-86.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education, China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaenders, R. (2010). Entwicklung des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM Verlag.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations, The Logic of Mathematical Discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.

Maxwell, J. C. (1870). On Hills and Dales. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and J. Science, 40*, 421 - 425.

Volkert, K. (2002). *Das Homöomorphismusproblem insbesondere der 3-Mannigfaltigkeiten, in der Topologie 1892-1935*. Paris: Éditions Kimé.

Carola BERNACK, Lars HOLZÄPFEL, Timo LEUDERS, Pädagogische Hochschule Freiburg, Alexander RENKL, Universität Freiburg

Forschungshefte als Instrument der Professionalisierung von Mathematiklehrerinnen und Mathematiklehrern (ForMat)

Bei der Professionalisierung von Mathematiklehrern wird die Integration von fachwissenschaftlichen, fachdidaktischen und praxisbezogenen Kompetenzen (Baumert et al. 2007) gefordert, da die Trennung unter anderem als ein Grund dafür angesehen wird, dass Studierende eine Diskontinuität zwischen erster und zweiter Ausbildungsphase erleben (Terhart et al. 1994). Ausgebildete Mathematiklehrkräfte haben zudem eine eher statische Sicht auf die Mathematik (Pehkonen & Törner 2004), was als eine Ursache für einen eher am rezeptiven Kalküllernen als am aktiven Problemlösen orientierten deutschen Mathematikunterricht angesehen wird.

Eine Möglichkeit, die Sicht Lehramtsstudierender auf die Mathematik als Disziplin und als Unterrichtsfach in Richtung eines angemessenen Bildes von Mathematik zu verändern, bieten durch Forschungshefte gestützte, reflexive Problemlöseseminare. Diese wurden bereits mehrfach praktiziert (z.B. Lester et al. 1994, Berger 2005), jedoch wurde ihre Wirkung nicht empirisch überprüft. Das vom BMBF geförderte Projekt ForMat will unter anderem diese Frage klären: Welche Wirkungen hat reflexives, durch Forschungshefte gestütztes Problemlösen auf die fachlich-reflexiven und fachdidaktischen Kompetenzen (Professionswissen, Überzeugungen, motivationale Orientierungen) der Teilnehmerinnen und Teilnehmer?

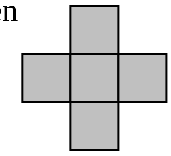
Konzept eines reflexiven Problemlöseseminars mit Forschungsheften

Während der Seminare findet eine selbstregulierte Bearbeitung mathematischer Probleme statt, die Möglichkeiten zum explorativen Arbeiten und dem Verfolgen individueller Lösungswege bieten. Als Lernziel stehen Problemlösestrategien, nicht die mathematischen Inhalte, im Fokus. Auf der affektiven Ebene ist eine Änderung des mathematischen Weltbildes hin zu Mathematik als Prozess intendiert. Das benötigte Vorwissen wird deshalb bewusst gering gehalten.

Die Studierenden dokumentieren ihren gesamten Arbeitsprozess während der Problembearbeitung schriftlich in eigenen Kladden („Forschungsheften“). Das reflexive mathematische Arbeiten wird durch das Schreiben solcher Forschungsheften auf verschiedene Weise gestützt. Besondere Wirkung haben hier vor allem reflexive und elaborative Lernprozesse (Brouer 2007, Ruf & Gallin 1999, Nückles et al. i.Dr, Nückles & Renkl i.Dr.).

Ein Beispiel illustriert den Charakter der gestellten Probleme, die jeweils individuell über mehrere Stunden bearbeitet werden:

Problem 2: Wenn man aus lauter kleinen Quadraten Figuren legt, so haben diese unterschiedliche Umfänge. Das Beispiel hat z.B. den Flächeninhalt F=5 und den Umfang U=12. Wie sehen Lösungen mit möglichst großen oder kleinem Umfang bzw. Flächeninhalt aus?



Kann man ganz allgemein etwas darüber sagen, wie Figuren mit maximalem oder minimalem Umfang aussehen? Reflektieren Sie ihre Lösungsversuche. Stellen Sie eigene Fragen oder variieren Sie das Problem.

Die Pilotstudie

Die Pilotstudie hatte unter anderem zwei Hauptziele. Einmal stand die spezifische Wirksamkeit der Intervention im Zentrum. Daraus ergab sich die Frage, ob sich mathematikunterrichtsbezogene Überzeugungen und das Mathematikbild der Studierenden ändern. Zum Zweiten sollte durch die Pilotstudie eine Optimierung der Erhebungsinstrumente erreicht werden.

Für die Pilotstudie bearbeiteten Lehramtsstudierende der Pädagogischen Hochschule Freiburg in zwei parallel durchgeführten Hauptseminaren (N=56) selbstständig sieben Probleme. Dabei verschriftlichten sie ihre Gedanken dazu sowie ihr komplettes Vorgehen. Zusätzlich wurden sie aufgefordert, über ihr Vorgehen und die Veränderung ihres mathematischen Weltbildes zu reflektieren. Zur längsschnittlichen Erfassung der Überzeugungen wurden bewährte Erhebungsinstrumente wie Skalen zu Beliefs (Grigutsch et al. 1998, Köller et al. 2000), mathematikunterrichtsbezogenen Überzeugungen (Köller et al. 2000) und mathematikbezogenen Selbstwirksamkeitsüberzeugungen eingesetzt (Schwarzer & Jerusalem 1999, Schulz 2007). Zusätzlich wurden die Reflexionen der Studierenden zur Veränderung ihres Mathematikbildes mittels zusammenfassender Inhaltsanalyse ausgewertet (Mayring 2007). Hier stand im Fokus, welche Aspekte des Mathematikbildes die Studierenden dabei aus eigenem Antrieb vorwiegend ansprechen.

Erste Ergebnisse

In der längsschnittlichen Erhebung zeigten sich signifikante Veränderungen in den Beliefs in Richtung ‚Mathematik als Prozess‘ und bei den mathematikunterrichtsbezogenen Überzeugungen. Zum Beispiel nahm die Überzeugung zu ‚Rezeptivem Lernen durch Beispiele und Vormachen‘ ab.

Die Inhaltsanalyse der Reflexionen zum Mathematikbild ergab eine Zusammenfassung der angesprochenen Aspekte in acht Kategorien. Dabei fanden sich teilweise dieselben Kategorien wie in den Skalen wieder, wie zum Beispiel der Anwendungsaspekt. Es ergaben sich auch zusätzliche Kategorien, wie die Kategorie ‚Lösung/Lösungsweg'. Interessanterweise ließen sich drei distinkte Kategorien durch die Häufigkeit der Nennungen bilden, die bei Betrachtung der Skalenitems zu ‚Mathematik als Prozess' alle in dieser einen Skala angesprochen werden. Eine davon ist die dynamische Sicht auf die Mathematik.

Auf Grundlage dieser ersten Ergebnisse lässt sich die erste Frage an die Pilotstudie, die Wirksamkeit der Intervention, klar beantworten: Ein Vorgehen wie das beschriebene führt zu signifikanten Veränderungen im Mathematikbild. Zudem kann durch die qualitative Analyse eine Neugewichtung der Skalen erfolgen. So wird deutlich welche Überzeugungen zur Mathematik durch die Intervention in der Wahrnehmung der Studierenden in den Vordergrund treten. Auch eine Optimierung der Erhebungsinstrumente für die Hauptstudie erfolgt auf der Basis dieser ersten Ergebnisse. So kann die Skala ‚Mathematik als Prozess' nun weiter ausdifferenziert werden.

Mit den Ergebnissen in Bezug auf das zukünftige Unterrichtshandeln der Studierenden muss vorsichtig umgegangen werden, da Studien auf Widersprüche zwischen Lehrerhandeln und Beliefs hinweisen (Thompson 1992). Das heißt, dass man Beliefs und Lehrerhandeln nicht als reines Ursache-Wirkungs-Verhältnis betrachten kann, da der soziale und institutionelle Kontext Schule für die Lehrenden weitere Einflussquellen bereithält (ebd.). Die Änderung der Beliefs wird jedoch als notwendige Bedingung für ein geeignetes unterrichtliches Handeln angesehen

Ausblick

Im Folgenden steht nun an, die Wirksamkeit der Intervention auch im Vergleich zu anderen Lehrkonzepten zu erfassen. Dabei ist zusätzlich von Interesse, welches bei dieser Lernform die entscheidenden Moderatorvariablen sind. Dazu könnten die Leistung in Mathematik und die studierte Schulform gehören. Darüber hinaus soll erhoben werden, welche Form und Intensität der Intervention über die individuelle Arbeit an gestellten Problemen hinaus die Wirkung optimiert.

Literatur

Baumert et al. (2007). *Ausbildung von Lehrerinnen und Lehrern in Nordrhein-Westfalen. Empfehlungen der Expertenkommission zur Ersten Phase*. Düsseldorf: Ministerium für Innovation, Wissenschaft, Forschung und Technologie.

Berger, P. (2005). Änderung professioneller Einstellungen durch 'Forschendes Studieren'. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (pp. 77–80). Hildesheim: Verlag Franzbecker.

Bernack, C., Holzäpfel, L., Leuders, T., Renkl, A. (in Vorb.). Changing beliefs of pre-service teachers in a reflexive problem solving course. *Proceedings of the MAVI-16 Workshop.*

Brouer, B. (2007). Portfolios zur Unterstützung der Selbstreflexion – Eine Untersuchung zur Arbeit mit Portfolios in der Hochschullehre. In M. Gläser-Zikuda & T. Hascher (Eds.), *Lernprozesse dokumentieren, reflektieren und beurteilen.* (pp. 235–265). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Grigutsch, S., Raatz, U., & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik*, *19*(1), 3–45.

Lester, F.K.Jr., Masingila, J.O., Mau, S.T., Lambdin, D.V., dos Santon, V.M. & Raymond, A.M. (1994). Learning how to teach via problem solving. In: Aichele, D. & Coxford, A. (Hg.), *Professional development for teachers of mathematics.* (pp.152-166), Reston.

Köller, O., Baumert, J., Neubrand, J. (2000): Epistemologische Überzeugungen und Fachverständnis im Mathematik- und Physikunterricht. In Baumert, J., Bos, W., Lehmann, R. (Hg.): *TIMSS/III Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie (Band 2).* (pp.229-269). Opladen: Leske & Budrich.

Mayring, P. (2007). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken* (9th ed.). Weinheim: Beltz.

Nückles, M., Hübner, S., Glogger, I., Holzäpfel, L., Schwonke, R., & Renkl, A. (in press). Selbstreguliert lernen durch Schreiben von Lerntagebüchern. In M. Gläser-Zikuda (Ed.), Lerntagebuch und Portfolio aus empirischer Sicht. Landau: Verlag Empirische Pädagogik

Nückles, M., & Renkl, A. (in press). Das Lerntagebuch in der Hochschullehre: Ein hochschuldidaktischer Ansatz zur Förderung selbstgesteuerten Lernens. In C. Spiel, R., Reimann, B. Schober & P. Wagner (Hrsg.), *Bildungspsychologie*. Göttingen: Hogrefe.

Pehkonen, E. & Törner, G. (2004). Methodological Considerations on Investigating Teachers' Beliefs of Mathematics and its Teaching. *Nordic Studies in Mathematics Education 9* (1), 21-49.

Ruf, U. & Gallin, P. (1999). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik..* Seelze: Kallmeyer.

Schulz, A. (2007). Teachers' Self-efficacy and Conceptions about Mathematical Teaching Practice and its Innovation. In *Proceedings of the Conference. Conceptions and Beliefs in Mathematics and Science Education including MAVI XIII*. University of Gävle, Sweden. (beim Autor erhältlich)

Schwarzer, R. & Jerusalem, M. (Hg.). (1999). *Skalen zur Erfassung von Lehrer- und Schülermerkmalen. Dokumentation der psychometrischen Verfahren im Rahmen der Wissenschaftlichen Begleitung des Modellversuchs Selbstwirksame Schulen.* Berlin: Freie Universität und Humboldt-Universität.

Terhart, E., Czerwenka, K., Ehrich, K., Jordan, F., Schmidt, H. J. (1994). *Berufsbiographien von Lehrern und Lehrerinnen*. Frankfurt: Lang.

Thompson, A. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Christine BESCHERER, Ludwigsburg

Erweiterter Kompetenznachweis Mathematik (EKM)

Wenn die Kompetenzorientierung der aktuellen Bildungsstandards tatsächlich ernst genommen werden soll, so müssen die allgemeinen mathematischen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler in irgendeiner Form in die Leistungsbeurteilung eingehen (Bescherer 2007). Dies wird in baden-württembergischen Hauptschulen seit dem Schuljahr 2008/09 in Form *erweiterter Kompetenznachweise in Mathematik* (EKM) versucht. Dabei handelt es sich um offene, kompetenzorientierte Mathematikaufgaben, die mehrmals pro Schuljahr in Kleingruppen bearbeitet werden. Verschiedene Gruppen stellen dann ihre Ergebnisse vor und die Schülerinnen und Schüler von ein bis zwei der Gruppen bekommen eine Note, die der einer Klassenarbeit entspricht.

Anhand von Beispielen aus der Schulbuchreihe denk**stark** Mathematik[1] werden Aspekte der Vorbereitung, Durchführung und insbesondere der Bewertung dieser EKM diskutiert.

Selbstverständlich muss der Mathematikunterricht auf die Förderung allgemeiner mathematischer Kompetenzen ausgerichtet sein. Dazu sind entsprechenden Aufgaben, die z. B. mathematisches Argumentieren und Kommunizieren verlangen, notwendig.

5 Stimmen diese Aussagen?
a) „Alle Zahlen, die durch 9 teilbar sind, sind auch durch 3 teilbar."
b) „Alle Zahlen, die durch 3 teilbar sind, sind auch durch 9 teilbar."
Finde Beispiele und begründe.

Beispiel aus denkstark Mathematik 6 S. 12

Allerdings spielt die Unterrichtskultur eine wichtigere Rolle als die konkreten Aufgaben, denn kompetenzorientierte Aufgaben können von der Lehrkraft auch einfach vorgerechnet werden, während die Schülerinnen und Schüler mitschreiben. Andererseits können gute Lehrerinnen und Lehrer auch mit „schlechten" Aufgaben einen kompetenzorientierten Unterricht gestalten, indem z. B. vorhandene geschlossene Aufgaben gemeinsam erweitert und geöffnet werden (vgl. auch Büchter & Leuders 2005).

[1] Es werden Beispiele aus den Schülerbänden für Kl. 5 und Kl. 6 vorgestellt. In Baden-Württemberg muss jede Schulbuchreihe mit „1" beginnen, unabhängig von der Klassenstufe.

Der folgende EKM „Autokauf“ wurde im Dezember 2009 in einer 6. Klasse einer Stuttgarter Hauptschule durchgeführt. Die Aufgabenstellung wurde von der Lehrerin selbst konzipiert. Die Bewertung erfolgte durch acht Lehramtsstudierende anhand des unten beschriebenen Kriterienrasters.

Inhaltlich befasst sich dier EKM „Autokauf“[2] mit Dezimalzahlen und Größen. Hier sollen sich die Schülerinnen und Schüler einer Gruppe anhand von sechs Steckbriefen verschiedener Autos auf eine Kaufentscheidung für fiktive Personen einigen, diese begründen und der Klasse vorstellen.

Mini-Flitzer für 2
6 Jahre alt 
Höchstgeschwindigkeit **131 km/h**
Beschleunigung **16,7 s**
Motorleistung **40 kW (54 PS)**
Benzinverbrauch **4,5 l**
CO2 Ausstoß **115 g/km**
Gewicht **731 kg**
Länge **251,3 cm**
Kofferraumvolumen **150 l -255 l**
Preis **2154 €**

Beispiel für Steckbrief

Die Schülerinnen und Schüler müssen dazu die Größenangaben, die z.T. als Dezimalzahl und manchmal als natürliche Zahl angegeben waren, verstehen und vergleichen. Jede Gruppe wurde dabei von zwei Lehramtsstudierenden, der Lehrerin und der Autorin beobachtet, die einerseits Fragen beantworteten, andererseits nach einem vorgegebenen Kriterienraster die Gruppen bewerteten.

Auftrag:
Für welches Auto würdet ihr euch selbst entscheiden? Warum?
Welches Auto passt zu Familie Glück, Oma Grün, Dr. Fröhlich und Jenny?
Schreibt eine Empfehlung mit Begründung für die verschiedenen Personen.
Vorgehen:
- Arbeitet in Dreier- oder Vierer-Gruppen zusammen.
- Schaut euch die Autotabellen genau an.
- Vergleicht die verschiedenen Autos miteinander.
- Überlegt welches Auto am besten zu den verschiedenen Personen passt.
- Einigt euch in der Gruppe auf ein Auto pro Person.
- Diskutiert und begründet eure Entscheidungen.
- Schreibt die Empfehlungen mit den Begründungen auf.

Familie Glück	**Oma Grün**	**Dr. Fröhlich**	**Jenny**
Mama und Papa Glück fahren mit ihren zwei Kindern mit dem Auto oft in den Urlaub.	wohnt mit ihrem Mann mitten in der Stadt. Der Umweltschutz ist ihr sehr wichtig.	ist Arzt und lebt alleine. Er macht viele Hausbesuche mit dem Auto.	lernt gerade Frisörin. Sie hat keine Kinder, aber einen großen Hund.

Beispiel: EKM Autokauf

[2] Dieser EKM wird in denk**stark** Mathematik 2 Baden-Württemberg erscheinen.

In verschiedenen Handreichungen zu den EKM werden Bewertungsschemata vorgeschlagen, die z.B. nach „Arbeitsphase“, „Präsentation“ und „Produkt“ unterscheiden und weiter nach Sach-/Fach-, Sozial-, Methoden- und personaler Kompetenz[3]. Allerdings ist die Untergliederung viel zu fein, um in der kurzen Zeit – ein EKM soll 90 Minuten dauern – eine Bewertung für die einzelnen Schülerinnen und Schüler ausfüllen zu können.

Als sehr gut geeignet hat sich ein Performanzkriterienraster erwiesen mit den folgenden Kategorien, die jeweils detailliert in den Ausprägungen „Anfänger“, „fortgeschritten“, „fähig“ und „hervorragend“ beschrieben werden.[4] Die Bewertung bezieht sich auf den EKM „Autokauf“.

- Entscheidung (10% der Note): „nur nach den eigenen Vorlieben“ (Anfänger)
- Begründung der Entscheidung (20%): „Die Begründung ist sehr gut nachvollziehbar und überzeugend. Es wurden verschiedene Aspekte und Sichtweise beachtet und ein sinnvoller Kompromiss eingegangen.“ (hervorragend)
- Umgang mit den Größen (20%): „Im Großen und Ganzen wurden die Größen korrekt verglichen.“ (fortgeschritten)
- Äußere Form der Empfehlung und Begründung (10%): „Das Wichtigste steht drauf, aber auch völlig Unwichtiges kann noch vorkommen.“ (Anfänger)
- Vorstellung und Erklärung (15%): “Die Entstehungsgeschichte der Empfehlung und die Begründungen sind klar, nachvollziehbar und spannend präsentiert.“ (hervorragend)
- Zusammenarbeit in der Gruppe (25%): „Die Zusammenarbeit macht keinerlei Probleme, die Entscheidungen werden gemeinsam gefällt.“ (fähig)

Für die einzelnen Schülerinnen und Schüler werden in den Einzelkriterien nur die Zeichen - (Minus), o (Kringel) und + (Plus) notiert und die ausführliche Bewertung wird im Nachhinein erstellt. Sowohl die Studierenden, die noch keine Erfahrung mit der Bewertung von Schülerleistungen hatten, wie auch die Lehrerin kamen mit diesem – von der Autorin erstellten – Raster sehr gut zurecht. Ein weiterer Vorteil des Performanzkriterienrasters (Bescherer 2007) liegt in den bewussten, didaktischen Entscheidungen, die bei der Erstellung getroffen werden. So kann die Lehrkraft entscheiden,

---

[3] zu finden unter http://tinyurl.com/yaddfw3, Zugriffsdatum 9.4.2010

[4] Aus Platzgründen, wird hier nur je eine Ausprägung beschrieben. Das gesamte Raster kann unter E-Mail bescherer@ph-ludwigsburg.de angefordert werden.

welche Punkte wie wichtig eingestuft werden sollen und entsprechend die Schülerinnen und Schüler darauf vorbereiten. Wenn z. B. die Gestaltung des Präsentationsmediums (Plakat oder Folie) in die Bewertung eingehen soll, so müssen die Schülerinnen und Schüler dies vorab wissen und üben.

Aber auch die Nutzung des vorgefertigten Performanzkriterienrasters war erfolgreich, da für alle Schülerinnen und Schüler ausführliche Bewertungen erstellt werden konnten. Selbstverständlich kann eine Lehrkraft alleine nie alle Gruppen gleichzeitig bewerten. Gedacht ist bei den EKM, dass bei jeder Durchführung nur eine oder zwei Schülergruppen genauer beobachtet und bewertet werden. Aus diesem Grunde müssen im normalen Mathematikunterricht pro Schuljahr ca. 5 bis 6 EKM durchgeführt werden. Wünschenswert wäre deshalb, die Bewertung durch mehrere Lehrkräfte durchführen zu lassen – anhand des vorgegebenen oder gemeinsam entwickelten Kriterienrasters.

Wenn für die Schülerinnen und Schüler die gestellte Aufgabe nicht schon Routine ist, so bieten gut geplante und durchgeführte EKM eine echte Gelegenheit, allgemeine mathematische Kompetenzen zu bewerten.

Literatur

Bescherer, Christine (2007): Möglichkeiten alternativer Formen der Leistungsmessung. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*. Vorträge auf der 41. Tagung für Didaktik der Mathematik in Berlin, Franzbecker, Hildesheim online unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/BzMU/BzMU2007/Bescherer.pdf, Zugriffsdatum: 9.4.2010

Bescherer, C. & Jöckel, S. (Hrsg.) (2010). *denkstark Mathematik 6.* Braunschweig: Schroedel Verlag

Bescherer, C. & Jöckel, S. (Hrsg.) (2009). *denkstark Mathematik 1 Baden-Württemberg*. Braunschweig: Schroedel Verlag.

Büchter, Andreas; Leuders, Timo (2005): *Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern – Leistung überprüfen.* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Eine Linksammlung zum Thema EKM, die laufend ergänzt wird, findet sich unter http://delicious.com/cbesch/ekm, Zugriffsdatum: 9.4.2010

Angela BEZOLD, Würzburg

Kinder argumentieren – eine empirische Studie auf der Grundlage selbstdifferenzierender Lernangebote

Ausgehend von der Auffassung der Mathematik als „die Wissenschaft von den Mustern“ (Devlin 1998, S. 3) lässt sich die Zielsetzung ableiten, Schülerinnen und Schüler zu befähigen, sich aktiv die Vielfalt der Muster zu erschließen. Dies bedeutet Muster und Strukturen zu erforschen, über Eigenschaften und Beziehungen nachzudenken, mathematische Aussagen zu hinterfragen, logische Schlussfolgerungen zu ziehen und Entdeckungen zu begründen. Hierbei handelt es sich um argumentative Tätigkeiten, die auch in den Bildungsstandards zum Ausdruck kommen (KMK 2005, S. 8).

1. Forschungsanlass und Design der Studie

Es stellt sich zum einen die Frage, wie es gelingen kann, argumentative Kompetenzen aller Schülerinnen und Schüler zu fördern, und zum anderen die Frage, welche argumentativen Anforderungen Grundschulkinder erfüllen können. Eine Analyse von standardisierten Tests (u.a. PISA, IGLU-E, VERA) weist nun einerseits auf Defizite bezüglich des Argumentierens in der Sekundarstufe und andererseits auf eine fehlende umfassende Standortbestimmung in der Primarstufe hin.

Hieraus ergaben sich zwei Hauptziele für die Forschungsarbeit:

- Erstellung eines Unterrichtskonzeptes zur Entwicklung von Argumentationskompetenzen
- Entwicklung eines Kompetenzmodells für das Argumentieren, das eine Grundlage für ein Beurteilungsinstrument in der Praxis liefern soll

Das Unterrichtskonzept wurde in einer Vor- und Hauptstudie in insgesamt 6 Klassen der 3. Jahrgangsstufe erprobt; für die Hauptstudie wurde ein Vortest-Nachtest-Design gewählt. Dabei wurde das Kompetenzmodell als Beurteilungsinstrument eingesetzt bzw. evaluiert. Insgesamt standen nach der Studie circa 850 Schülerdokumente mit schriftlichen Argumentationen für eine Analyse zur Verfügung.

2. Argumentieren in der Grundschule – Begriffsklärung

Der Argumentationsbegriff wird im Mathematikunterricht und in der mathematikdidaktischen Diskussion häufig im Sinne des Begründens verwendet. Im eigenen – spezifisch für die Grundschule entwickelten – Argumentationsverständnis wird das Begründen als eine argumentative Tätigkeit betrachtet, jedoch nicht mit dem Argumentieren gleichgesetzt. Darüber hinaus erfolgt eine Abgrenzung zum Beweisen im streng deduktiven Sinn. Weitere Überlegungen, die auf Winters allgemeinen Lernzielen (Winter 1975) aufbauen, führen zum folgenden aus drei Bausteinen bestehenden Argumentationsbegriff:

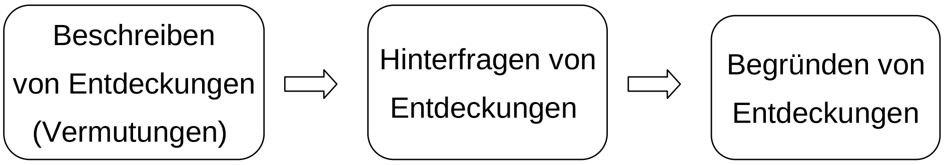


Abb. 1: Argumentationsbegriff

Argumentieren bedeutet Vermutungen über mathematische Eigenschaften und Zusammenhänge (kurz: Entdeckungen genannt) zu beschreiben (Baustein 1), diese zu hinterfragen (Baustein 2) sowie sie zu begründen bzw. hierfür eine Begründungsidee (Baustein 3) zu liefern.

3. Kompetenzmodell für das Argumentieren

Die Beziehungen zwischen den Teilargumentationen einzelner Schülerdokumente aus den Voruntersuchungen wurden nach Toulmins Ansatz der funktionalen Argumentationsanalyse (1975) analysiert. Hieraus entwickelte sich ein dreistufiges Theorie basiertes Kompetenzmodell für das Argumentieren, das durch zwei zentrale Komponenten bestimmt wird:

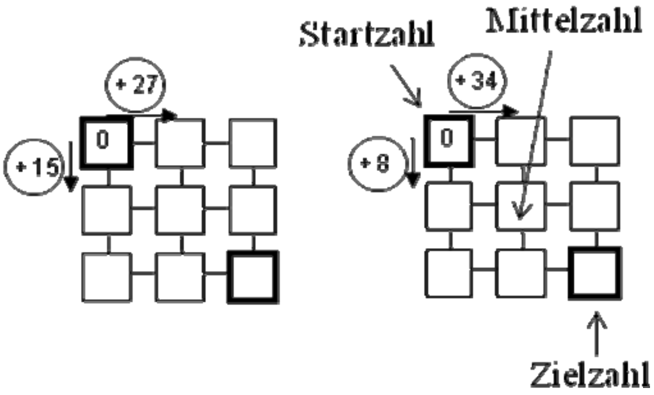
- die Komplexität der entdeckten Zahlbeziehungen und
- das Begründungsniveau

Bedeutsam ist, dass jedes Kompetenzniveau mit und ohne Begründung(en) erreicht werden kann. Somit spiegelt sich der eigene Argumentationsbegriff deutlich im Kompetenzmodell wider.[1]

4. Aufgabenformate und Unterrichtsmodell

Durch welche Aufgaben können Kinder unabhängig ihres Leistungsniveaus hinsichtlich des Argumentierens gefördert werden? Diesem Anspruch werden sog. Forscheraufgaben wie das Zahlengitter[2] gerecht.

[1] Der interessierte Leser findet das ausführliche Modell in Bezold 2009, S. 155-161.
[2] Die Aufgabenstellungen zum Zahlengitter und alle weiteren in der Studie eingesetzten Forscheraufgaben finden Sie unter www.dmuw/Mitarbeiter/Bezold



Das Rechnen beginnt bei der „Startzahl“. Die restlichen Felder werden gefüllt, indem auf waagrechten und auf senkrechten Wegen jeweils eine bestimmte „Kreiszahl“ addiert wird.

Abb. 2: Zahlengitter

Forscheraufgaben

- geben vielfältige Anlässe für Entdeckungen von mathematischen Zahl- und Rechenphänomenen. *(Mögliche Entdeckung bei den obigen Zahlengittern: Trotz des unterschiedlichen Zahlenmaterials erhält man identische Mittel- und Zielzahlen.)*
- weisen ein Argumentations- bzw. Begründungspotential auf. *(Eine Begründung für die identischen Mittel- und Zielzahlen liefert die Tatsache, dass bei beiden Beispielen die Summe der Kreiszahlen identisch ist.)*
- stellen Anforderungen unterschiedlichen Niveaus trotz des gleichen inhaltlichen Kontextes.

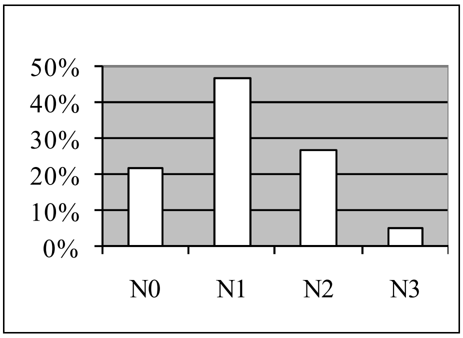
Das Unterrichtskonzept basiert auf Forscheraufgaben und dem aus folgenden vier Phasen bestehenden Unterrichtsmodell: Initiierung des Forscherauftrags – individuelle Phase – gemeinsame Phase (Forschertreff) – Präsentation der Forscherergebnisse. In der individuellen Phase beschäftigen sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig ohne Hilfestellungen mit dem Forscherauftrag und notieren ihre Argumentationen schriftlich. Im anschließenden Forschertreff diskutieren sie über ihre Entdeckungen. Mit sog. Forschertipps[3] stehen die Lehrkräfte den Gruppen beratend und fördernd zur Seite. Auch nach der Teamarbeit werden neue Erkenntnisse individuell und selbstständig notiert.

5. Eine Auswahl wesentlicher Ergebnisse aus der Hauptstudie

Den schriftlichen Argumentationen der Schüler (entnommen aus den Tests und aus der Lernphase) wurden entsprechend des Kompetenzmodells Niveau 0 (keine oder unrichtige Argumentation), 1, 2 oder 3 zugeordnet.

---

[3] Es handelt sich hierbei weniger um inhaltliche, sondern vielmehr um strategische Tipps. Alle Forschertipps zu den Forscheraufgaben der Studie finden Sie unter: www.dmuw/Mitarbeiter/Bezold.



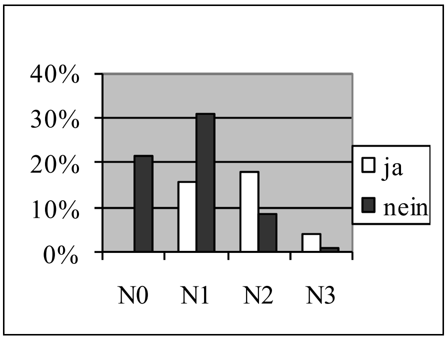


Abb. 3: Niveauverteilung **Abb. 4: Begründung**

Die Diagramme (Mittelwerte aller Aufgaben aus der Lernphase) belegen die Anforderungsdifferenzierung von Forscheraufgaben: Grundschüler können Anforderungen jedes Niveaus bei *einer* Forscheraufgabe zeigen (Abb. 3). Zusätzlich wurde bei dieser Auswertung der Anteil der Schüler untersucht, der seine Entdeckungen nicht „nur" beschreiben, sondern auch begründen kann (Abb. 4). Besonders hervorzuheben ist die Tatsache, dass dies einem Drittel der „N1-Kinder" gelang. Dieses Ergebnis ist auch vor dem Hintergrund zu sehen, dass einfachste Begründungen möglich waren und wahrgenommen wurden.

Das Unterrichtskonzept zur Steigerung der Argumentationskompetenzen von Grundschülern bewährte sich in der Praxis. Insgesamt konnten 83 % der Kinder jeder Lernausgangslage (bezogen auf die Leistungen im Vortest) ihre Argumentationskompetenzen verbessern.

Die Methodik des individuellen und gemeinsamen Forschens überzeugte im Wesentlichen, jedoch sollte die Teamarbeit insbesondere für leistungsstarke Kinder noch optimiert werden. Das entwickelte Kompetenzmodell eignete sich als Beurteilungsinstrument in der Praxis; subjektive Einschätzungen können bei der Beurteilung des Argumentierens sicherlich nicht ausgeschlossen werden.

Literatur:

Bezold, A. (2009). Förderung von Argumentationskompetenzen durch selbstdifferenzierende Lernangebote. Hamburg: Dr. Kovač.

Devlin, K. (1998). Muster der Mathematik. Ordnungsgesetze des Geistes und der Natur. Heidelberg, Berlin: Spektrum.

KMK (2005). Beschlüsse der Kultusministerkonferenz: Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München, Neuwied: Luchterhand.

Toulmin, St. E.(1975). Der Gebrauch von Argumenten. Aus dem Englischen übersetzt von Ulrich Berk. Kronbert: Scriptor Verlag.

Winter, H. (1975). Allgemeine Lernziele für den Mathematikunterricht? In: Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 7, S. 106-116.

Ursula BICKER, Bad Kreuznach

Auswirkungen des Konzepts „Mathematik zum Anfassen“ auf Schülereinstellungen und das Lernen von Mathematik

Die Ausstellung „mathematik be-greifen“

Nach dem Vorbild des Giessener „mathematikum“ ist „mathematik be-greifen“ eine „Ausstellung zum Mitmachen, Staunen, Entdecken, Erkennen und Weiterdenken“. Seit Mai 2004 wurde sie an verschiedenen Standorten in Rheinland-Pfalz gezeigt und hatte bisher insgesamt etwa 100.000 Besucher. Unterstützt wird die Ausstellung durch die Klaus-Tschira-Stiftung.

Die zunächst als reine Ausstellung konzipierte Exponatsammlung wurde in den folgenden Jahren zunehmend didaktisiert und umgestaltet in Richtung auf Einsatzmöglichkeiten im Unterricht. In Lehrerfortbildungen wird gezeigt, wie man mit den Modellen der Ausstellung mathematische Inhalte erschließen kann, andererseits werden Anregungen für den Nachbau der Modelle gegeben. Seit 2009 bieten „Forschungsfragen“ in der Ausstellung interessierten Besuchern Anregungen, mathematische Sachverhalte tiefer und fundierter zu erkunden.

„Mathematik zum Anfassen“ in der Schule

Gespräche mit Lehrerinnen und Lehrern zeigen, dass das Konzept „Mathematik zum Anfassen“ zunächst oft im „Freibereich“ des Mathematikunterrichts umgesetzt wird, etwa in Vertretungsstunden, Arbeitsgemeinschaften, Projekten. Zum Teil liegt es daran, dass diese Vorgehensweise wegen des oftmals spielerischen Zugangs als nicht „ernsthaft“ genug für den regulären Mathematikunterricht gesehen oder als zu zeitaufwendig empfunden wird. Dabei bietet der Zugang über „Mathematik zum Anfassen“ viele positive Aspekte, um den Unterricht abwechslungsreicher und effektiver zu gestalten. Schülermeinungen nach dem Besuch der Ausstellung bringen es auf den Punkt:

„Trotz schlechter Noten in Mathematik war es für uns sehr interessant. Wir haben die Mathematik ganz neu kennen gelernt.“ Auch bei negativen Vorerfahrungen lassen sich die Schülerinnen und Schüler auf die Experimente ein, ihre Neugier wird geweckt; die Motivation sorgt für ein längeres Durchhaltevermögen bis hin zur Lösung. Besonders für leistungsschwache Schülerinnen und Schüler scheint dies ein lohnenswerter Zugang zu sein, da sowohl positive Emotionen als auch die durch Handeln erzielten starken „Anker“ im Gehirn die Nachhaltigkeit des Lernens unterstützen.

„An der Mathematikausstellung habe ich viel gelernt!!! Ich hab zwar nicht gern in der Schule Mathematik.“ Das Lernen beim „Be-greifen“ funktioniert auf einer anderen Ebene als etwa das Üben im Unterricht. Durch das Handeln werden die Denkprozesse auf natürliche Weise verlangsamt, mit dem ganzen Körper erfahren und damit intensiver erlebt. Dies kann einen stabilen Aufbau von Grundvorstellungen unterstützen.

„Ich finde Ausstellungen zur Mathematik immer ziemlich gut aufgrund des Erfolgsgefühls, wenn ich eine schwierige Aufgabe gelöst habe und das Denken mir Spaß gemacht hat, was in der Schule leider nicht oft der Fall ist.“ Ein Erfolgsgefühl lösen Aufgaben dann aus, wenn sie einerseits eine Herausforderung sind, andererseits aber in einem vertretbaren Zeitrahmen auch zu Ergebnissen führen. Kurz: Sie dürfen nicht zu einfach und nicht zu schwierig sein. Der ideale Schwierigkeitsgrad ist für jede Schülerin und jeden Schüler individuell. Die Arbeit mit den Exponaten sorgt für eine natürliche Differenzierung, da jeder Besucher individuell entscheidet, wie weit er sich auf die Entdeckung der Muster und Phänomene einlässt und wie weit er tiefergehende Untersuchungen und Argumentationen durchführt.

Schülereinstellungen zur Mathematik

Anhand von zahlreichen Fragebögen bei Schülerinnen und Schülern (ca. 600 ohne Besuch der Ausstellung, ca. 250 mit Besuch der Ausstellung) konnte ich unterschiedliche Einstellungen zur Mathematik feststellen. Die folgende Tabelle zeigt exemplarisch charakteristische Beispiele.

Das sagen Schülerinnen und Schüler, die die Ausstellung nicht kennen:	Das sagen Schülerinnen und Schüler, die die Ausstellung besucht haben:
Mathe ist langweilig, deprimierend. Stress, Druck, Angst, schlechte Noten ein bisschen Spass, aber auch ein bisschen Anstrengung ein kompliziertes Fach, das man meistens nicht versteht	Mathematik kann schön sein Mathematik kann ganz leicht sein. Mathe ist doch nicht so langweilig wie ich dachte. Ich hätte nicht gedacht, dass ich das schaffe.
Mathematik ist eine Formel, um manche Aufgaben zu lösen. Ziel ist, ein Ergebnis auszurechnen. Ein Fach, wo bei einem Fehler die ganze Aufgabe falsch ist. viele Zahlen und unnötige Rechenwege	Mathe kann mehr sein als nur Rechnen. Mathematik ist viel mehr, als nur Zahlen zusammenzuzählen. dass es auch andere Wege gibt, eine Lösung zu finden außer stures Rechnen.

Diese Rückmeldungen kommen von Schülerinnen und Schülern aller Schularten im Alter zwischen 10 und 17 Jahren. Bei den Schülern, die nicht in der Ausstellung waren, sind mehr als 2/3 der Äußerungen negativ besetzt; bei den Besuchern der Ausstellung gibt es nur einzelne Negativaussagen (unter 10%). Bei den positiven Äußerungen auf der rechten Seite klingt teilweise eine ursprünglich negative Grundhaltung mit, die offensichtlich dem bisherigen Erleben von Mathematik entspricht. Bei den Rückmeldungen in der ersten Tabellenzeile werden bei der linken Gruppe die wenigen positiven Begriffe in Verbindung mit Knobeln und Spielen in Verbindung gebracht, die negativen Begriffe sehr stark mit Hausaufgaben/Üben und mit Noten/Klassenarbeiten.

Die Rückmeldungen in der zweiten Tabellenzeile zeigen, dass links ein statisches Mathematikbild vorherrscht (Mathematik als abstraktes System von theoretischen Aussagen, das aus Axiomen, Begriffen und Relationen besteht bzw. ein Unterricht, in dem das Lernen und Anwenden von Definitionen, Fakten und Routinen Vorrang hat). Dagegen sind auf der rechten Seite nahezu ausschließlich Rückmeldungen zu finden, die die Mathematik als eine Tätigkeit sehen, die mit Fragen und Problemen beginnt und zur Entdeckung von Mustern führt (dynamisches Bild von Mathematik); ein entsprechender Unterricht stellt dementsprechend das Nacherfinden von Mathematik, Ideen und Denkprozesse in den Vordergrund. Da bei der statischen Sichtweise Fehler als Defizit erlebt werden werden, führt dies oft zu einem negativen Selbstbild und damit auch zu einem negativen Bild der Mathematik. Dagegen ist bei der dynamischen Sichtweise ein Fehler ein produktives Element auf dem Weg zur Lösung.

Erstes Unterrichtskonzept

Im Schuljahr 2008/2009 haben zwei HS-Klassen, zwei GY-Klassen und eine Hochbegabtenklasse nachgebaute Modelle der Ausstellung (8 Modelle zum Thema Brüche) in ihrem Unterricht eingesetzt (1.Halbjahr 6.Schuljahr). Diese Modelle wurden in Form von Stationenlernen zunächst alle gleichzeitig kennen gelernt. Im Unterricht wurden dann bei den passenden Inhalten die einzelnen Exponate nach und nach eingesetzt und vertieft erarbeitet. Die Bruchrechnung ist ein geeignetes Thema, weil sie bei vielen Schülerinnen und Schülern oft schon vorher negativ besetzt ist. Außerdem wird dieses Thema häufig sehr rechenlastig unterrichtet. Viele Fehler sind auf ein fehlendes Grundverständnis zurückzuführen, so dass gerade hier der Aufbau von Grundvorstellungen zentrale Bedeutung hat.

In allen Klassen gelang die positive Einstellung zum Thema gut, insbesondere in den Hauptschulklassen und der schwächsten Gymnasialklasse. Am wenigsten Akzeptanz gab es in der Hochbegabtenklasse, hier wurde die Arbeitsweise oftmals nicht ernst genommen. Gerade in den Hauptschulklassen war auch besonders stark die Neugier der Schülerinnen und Schüler auf die Entdeckung der Zusammenhänge. In der Klassenarbeit ergaben sich besonders in den Hauptschulklassen Notenverbesserungen, hier insbesondere im oberen Bereich. Insgesamt zeigte sich besonders bei lernschwachen Schülerinnen und Schülern der Zugang über „Mathematik zum Anfassen“ als erfolgversprechend.

„Auswirkungen des Konzepts „Mathematik zum Anfassen“ auf Schülereinstellungen und das Lernen von Mathematik“

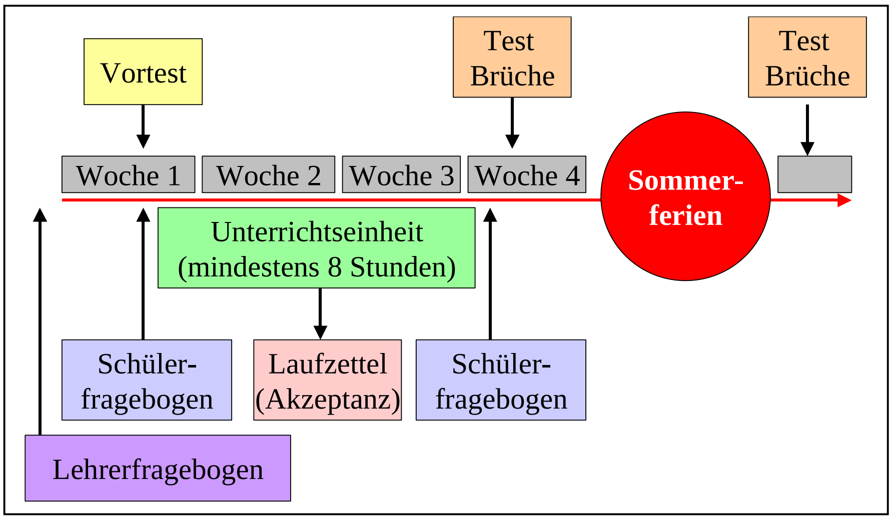
Aufbauend auf den oben beschriebenen Erfahrungen will ich mit dieser Studie folgende Hypothesen überprüfen:

Hypothese „Lernen“: Besonders für leistungsschwache Schüler ist Mathematik zum Anfassen ein lohnenswerter Zugang (positive Emotionen, nachhaltiges Lernen durch starke Anker, stabiler Aufbau von Grundvorstellungen).

Hypothese „Einstellungen“: Die Übertragung von Prinzipien von „Mathematik zum Anfassen“ auf den Unterricht ändert die Sichtweise von Schülerinnen und Schülern in Richtung auf ein dynamisches Mathematikbild.

Untersuchungsdesign der Studie

Testklassen waren eine GY-Klasse, eine IGS-Klasse und eine Regionalschulklasse (Mischform HS/RS). Wegen kurzfristiger Absagen konnte nur in der Regionalen Schule die Parallelklasse als Vergleichsklasse gewonnen werden. Thema war Einführung in die Bruchrechnung am Ende der 5. Klasse (Zeitraum 3 bis 4 Wochen vor den Sommerferien). Die Testklassen arbeiteten mit bereitgestelltem Material ausschließlich handlungsorientiert (ohne Schulbuch), die Vergleichsklasse mit dem eingeführten Schulbuch.



Mögliche Einstellungsänderungen bei Schülerinnen und Schülern wurden durch einen Fragebogen ermittelt (vor bzw. nach der Unterrichtseinheit). Die allgemeine Leistungsfähigkeit der Klassen in Mathematik wurde zu Beginn durch einen Vortest abgefragt. Nach der Unterrichtseinheit wurde ein Test über Bruchvorstellungen/Grundaufgaben geschrieben, der nach den Sommerferien wiederholt wurde. Durch die Ferien ist gewährleistet, dass die Schülerinnen und Schüler sich knapp zwei Monate lang mit dem Thema nicht auseinandersetzen.

Fragestellungen

Lernen die Schülerinnen/Schüler mehr/anders als im normalen Unterricht?

Unterstützt diese Vorgehensweise nachhaltiges Lernen?

Gelingt dies gleichermaßen in verschiedenen Schularten?

Reichen bereits kleinere/einmalige Unterrichtselemente, oder ist ein häufiges bzw. langfristiges Anwenden dieses Prinzips erforderlich?

Gibt es Typen von Schülern, die besonders gut/schlecht mit dieser Methode zurecht kommen?

Werden Einstellungsänderungen erzielt? Sind diese nachhaltig?

Ursula BICKER, Bad Kreuznach

Produktives Üben und Argumentieren mit dem Pascal-Dreieck

Das Pascal-Dreieck regt auf verschiedenen Klassenstufen zu mathematischen Forschungen an. Die meisten Entdeckungen lassen sich auf einfache und elementare Weise erklären (ohne abstrakte Sprache oder mathematische Formeln). Beim Entdecken der Muster und Phänomene müssen oftmals elementare Rechenarten angewendet werden, ganz im Sinne produktiver Übungseinheiten.

Zahlen mauern – das Bauprinzip des Pascal-Deiecks

Da aus der Grundschule Zahlenmauern bekannt sind, wird bei Betrachtung des Dreiecks in der Regel sehr schnell und meist eigenständig das Bauprinzip des Pascal-Dreiecks entdeckt: Die Zahlen entstehen jeweils als Summe der beiden darüber stehenden Zahlen. Dies ist eine sehr wichtige Erkenntnis, die bei vielen der nachfolgenden Entdeckungen eine tragfähige Begründung liefert. Eine weitere elementare und hilfreiche Entdeckung ist die Symmetrie, mit der man sich etwa Rechnungen ersparen kann („symmetrisches Ausfüllen“).

Muster entdecken - Zahlenfolgen im Pascal-Deieck

Als erste Zahlenfolge werden die natürlichen Zahlen neben den Einserreihen entdeckt; damit ist das Augenmerk auf die Diagonalreihen gerichtet. Für die beiden folgenden Zahlenreihen lassen sich geometrische Veranschaulichungen finden: Die dritte Diagonalreihe 1, 3, 6, 10, ... enthält die Dreieckszahlen, die Folge daneben 1, 4, 10, 20, ... sind die Tetraederzahlen. Bei den Dreieckszahlen lässt sich das Bildungsmuster herausarbeiten; sie entstehen sukzessive durch Addition der natürlichen Zahlen 1+2+3+4+ ... , entsprechend der Vorstellung eines Dreiecks als Punktmuster.

Ein Verfahren, mit dem man die Bildungsmuster vieler Zahlenreihen entschlüsseln kann, ist das Differenzenprinzip. So haben etwa die Tetraederzahlen als Differenz die Dreieckszahlen. Da die Tetraeder durch Aufeinanderlegen der verschiedenen Dreiecksschichten entstehen, ist dies eine geometrische Veranschaulichung des Additionsprinzips.

Addiert man die Zahlen, die in einer Querreihe stehen, so erhält man die Zweierpotenzen. Auch dies lässt sich mit dem Bauprinzip des Pascal-Dreiecks begründen: Jede Zahl aus der oberen Reihe fließt bei der Summenbildung aus der oberen Reihe zweimal in die untere Reihe, nämlich nach rechts und nach links. Da die Reihe der Quer-Summen mit 1 bzw. 2 anfängt, ergeben sich so die Zweierpotenzen. Eine direkte Erklärung für die Zweierpotenzen als Summe der Zahlen in einer Reihe ergibt sich erst bei kombinatorischer Sichtweise (s.u.).

Mit den Querreihen lässt sich noch eine andere Zahlenfolge entdecken: Die Reihen, in denen alle Zahlen (außer den beiden Rand-Einsen) durch die Zahl neben der 1 teilbar sind, sind genau die Primzahl-Reihen. Eine Begründung ist hier auf elementare Weise nicht möglich.

Dreiecksmuster finden – Anwenden von Teilbarkeitsregeln

Zunächst wird eine Startzahl Z gewählt – am einfachsten 2, 5 oder 3, es gehen aber auch alle anderen Zahlen. Alle Felder, in denen die Zahl im Pascal-Dreieck durch Z teilbar ist, werden dann farbig markiert. Da die Zahlen in den unteren Reihen schnell groß werden, ist dies eine gute Übung zur Anwendung der Teilbarkeitsregeln. Als Muster finden die Schüler – unabhängig von der Startzahl – verschieden oder gleich große, nach unten gerichtete Dreiecke. Dies lässt sich begründen mit der „Summenregel“ für die Teilbarkeit: Wenn zwei Zahlen durch eine bestimmte Zahl teilbar sind, dann ist auch deren Summe durch diese Zahl teilbar. Sobald also mehrere Zahlen nebeneinander durch dieselbe Zahl teilbar sind, entstehen wegen des additiven Bauprinzips automatisch nach unten hin geschlossene Dreiecke. Und wegen der Symmetrie des Pascal-Dreiecks ergeben sich ästhetische und regelmäßige Muster aus größeren und kleineren Dreiecken.

Wege laufen – Kombinatorik und strategisches Probieren

Der schönste – weil experimentelle – Zugang zum Pascal-Dreieck geht von einem 5x5-Geo-Brett aus, das diagonal hingelegt wird. Mit einem Faden sollen von oben an alle möglichen Wege gespannt werden, die zu einem bestimmten Nagel führen. Um alle 25 Nägel mit der entsprechenden Anzahl an Möglichkeiten beschriften zu können, sind zugrunde liegende Muster und Prinzipien hilfreich. Naheliegend ist das Symmetrieprinzip, das darauf beruht, dass beim Fadenspannen die Wege nach rechts und links vertauscht werden. Auch der Einser-Rand ist schnell einsichtig.

Eine effektive Lösungsmethode zum Finden aller Möglichkeiten ist das Rückwärtsarbeiten, indem man sich überlegt, von welchen Nägeln aus man auf den gewünschten Nagel kommt. Dies sind offensichtlich gerade die beiden diagonal darüber stehenden Nägel, so dass sich die Anzahl der möglichen Wege als Summe der Wege zu den beiden darüberstehenden Nägeln ergibt (Additionsprinzip). Insgesamt kann so die erstaunliche Entdeckung gemacht werden, dass jede Zahl im Pascal-Dreieck genau mit der Anzahl der Wege übereinstimmt, die zu ihr hinführen.

Eine klassische Einkleidung dieser Aufgabe ist das Stadtplanproblem – in einem (rechteckigen) Stadtplangitter, wie es idealerweise in Mannheim vorliegt, soll die Anzahl der Wege zu einem bestimmten Ziel hin gefunden werden. Das gleiche Prinzip liegt ebenfalls beim Galton-Brett vor – mit dem Nachteil, dass die Kugeln zu schnell fallen, um wirklich verfolgt werden zu können. Der Vorteil des Galton-Brettes ist, dass es eine elementare Erklärung liefert für die Zweierpotenzen als Quersummen der Zahlen in einer Reihe. Beim Durchlaufen der Kugeln gibt es an jeder Stelle zwei Alternativen, nämlich den Weg nach rechts oder nach links; insgesamt gibt es damit in n Reihen insgesamt 2^n Möglichkeiten, unten anzukommen.

Um ein Verständnis für das kombinatorische Bauprinzip des Pascal-Dreiecks zu gewinnen, sollte der Zusammenhang mit einem Baumdiagramm erarbeitet werden. Mehrere Wege, die zu jeweils gleichen Ergebnissen führen, werden dabei zusammengezogen. Ein Anwendungsbeispiel ist das Mischen von zwei Farben (z.B. rot und blau) in mehreren Durchgängen. Werden die Farben rot und blau durch die Variablen a und b ersetzt, erhält man im Pascal-Dreieck die Binomischen Formeln. Interpretiert man „blau“ und „rot“ durch „rechts“ und „links“, so simuliert man das Durchlaufen der Kugeln beim Galton-Brett. Und schließlich lassen sich auch die Lottozahlen im Pascal-Dreieck finden. Dazu werden die beiden Farben durch die Antworten „ja“ und „nein“ in der folgenden Situation ersetzt. In der Ebene 1 wird gefragt: Nimmst du die Zahl 1? In der nächsten Ebene wird gefragt, ob man die 2 nimmt, dann die 3 usw.. . Auf diese Weise kann verstanden werden, dass das Pascal-Dreieck die Anzahl der Möglichkeiten für „n aus k“ enthält. Dass dahinter die Binomialkoeffizienten stecken, wird dagegen nicht unmittelbar klarer.

Vielfache suchen - Multiplikation im Pascal-Dreieck

Überraschend einfach und spannend ist die Untersuchung von Mustern mit Hilfe der Multiplikation. Zunächst werden benachbarte Zahlen gesucht, von denen die rechte Zahl ein ganzzahliges Vielfaches der linken Zahl ist. Der reine Übungseffekt dieser Aufgabe ist nicht zu unterschätzen, da die Zahlen ja doch recht groß werden. Spannend wird es dann, wenn Muster entdeckt werden. Sie sind nicht unbedingt gut zu finden, weil sich die einzelnen Muster überlagern. Systematisch können sie entlang der Diagonalreihen gefunden werden.

In der ersten Doppelreihe (1 – 1, 1 – 2, 1 – 3, 1 – 4, 1 – 5, ...) treten der Reihe nach alle Vielfachen auf. In der zweiten Doppelreihe (3 – 3, 4 – 6, 5 – 10. 6 – 15, ...) kommen die Vielfachen jeweils in Zweiersprüngen vor. In der nächsten Doppelreihe (beginnend bei 10 – 10) braucht man bereits Dreiersprünge usw.

Brüche entdecken - Abzählbarkeit

Was passiert zwischen den einzelnen ganzzahligen Vielfachen? Hier erhält man ein hervorragendes Übungsfeld zum Rechnen mit Brüchen, insbesondere Grundaufgaben sowie Erweitern und Kürzen. Untersucht man die diagonale Doppelreihe mit den Zweiersprüngen, so erkennt man sehr schnell das zugrundeliegende Muster: Die rechte Zahl entsteht aus der linken jeweils durch Multiplikation mit 1, 3/2, 2, 5/2, 3, 7/2, usw. Die Doppelreihe mit den Dreiersprüngen führt auf die Multiplikation mit 1, 4/3, 5/3, 2 = 6/3, 7/3, 8/3, 3 = 9/3, usw. Das Muster lässt sich auch in den folgenden Reihen (Viertel, Fünftel usw.) bestätigen. Man findet so tatsächlich alle Brüche im Pascal-Dreieck – jeweils zwischen zwei Zahlen als deren Multiplikationsfaktor.

Bisher haben wir nur Brüche größer als 1 entdeckt. Aber wenn man die Doppelreihen schräg nach oben fortsetzt, dann stimmt das Bild: In der Doppelreihe mit den Dritteln finden wir nach oben fortgesetzt 2/3 und 1/3, bei den Vierteln sind es die fehlenden ¾, 2/4 und ¼ usw.

Dies bedeutet, dass tatsächlich alle Brüche im Pascal-Dreieck vorkommen! Wenn man sie aufzählen will, so ist die naheliegendste Vorgehensweise reihenweise von oben nach unten... und damit lässt sich mit dem Pascal-Dreieck auch die Abzählbarkeit der Brüche veranschaulichen. Diese Aufzählung entspricht im Verlauf genau der Reihenfolge beim Cantorschen Diagonalverfahren.

Formel finden – Binomialkoeffizienten als explizite Terme für die Zahlen im Pascal-Dreieck

Alternativ zu der oben beschriebenen Vorgehensweise gibt es einen anderen attraktiven Zugang, der zu den Brüchen führt; hierbei werden die Querreihen betrachtet. Geeignet für den Anfang ist die folgende Reihe: 1 6 15 20 15 6 1.

Mit welcher Zahl muss jeweils multipliziert werden, um von einer Zahl zur nächsten Zahl zu kommen? Diese Reihe ist für die Entdeckung des Zahlenmusters geeignet, weil nach Kürzen die Zahlen in einer geeigneten Form erscheinen (6/1, 5/2, 4/3, ¾, 2/5, 1/6), um das zugrundeliegende Muster zu entdecken: Von links nach rechts wird der Zähler jeweils um 1 erniedrigt, der Nenner jeweils um 1 erhöht.

Dieses Zahlenmuster lässt sich auch in den anderen Reihen wiederfinden, dort müssen die Zahlen für die Multiplikation manchmal geschickt erweitert werden. Ein Nachvollziehen des Musters ist so auch in den oberen Reihen möglich, die Entdeckung des Musters ist dort aber praktisch unmöglich, weil die Zahlen durch Kürzen verfremdet sind.

Mit diesem Muster hat man ein neues Bauprinzip des Pascal-Dreiecks entdeckt. Es ist im Vergleich zum Additionsprinzip sicherlich komplizierter, hat aber den Vorteil, dass man damit jede beliebige Zahl direkt berechnen kann. So ergibt sich etwa die 5. Zahl in der Reihe mit 11 durch

1 * 11/1 * 10/2 * 9/3 * 8/4 – d.h. durch 11*10*9*8 / 1*2*3*4.

D.h. hier werden die Binomialkoeffizienten als Bauprinzip entdeckt – und außerdem der Vorteil einer direkten Berechnungsmöglichkeit (gewissermaßen einer „Formel“ für die Zahlen im Pascal-Dreieck) im Vergleich zu dem rekursiven Additionsprinzip.

Eine weitere frühere Entdeckung lässt sich jetzt ebenfalls elementar begründen, nämlich die Primzahleigenschaft: In Reihen, die mit einer Primzahl anfangen (neben der Rand-1), sind alle Zahlen in dieser Reihe durch diese Primzahl teilbar. Schauen wir uns exemplarisch das Bildungsgesetz der Zahlen in der Reihe mit 11 an. Gerechnet wird 11 * 10 * 9 * 8 * 7 *.../ 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * ...

Die Zahl 11 im Zähler kann nicht gekürzt werden, da die 11 als Primzahl keine der kleineren Zahlen im Nenner als Teiler hat. Daher bleibt der Faktor 11 in allen Zahlen der Reihe erhalten (außer bei der 1 am rechten Rand, da kürzt er sich mit der 11 im Nenner weg). In Reihen mit Nicht-Primzahlen wird die erste Zahl irgendwann durch einen ihrer Teiler teilweise gekürzt.

Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen, Tommy DREYFUS, Tel Aviv, Ivy KIDRON; Jerusalem

„General Epistemic Need” – ein Motor für Erkenntnisentwicklung?

In dem deutsch-israelischen Projekt *Effective knowledge construction in interest-dense situations (*)* werden zwei Modelle zur Wissenskonstruktion miteinander vernetzt (Prediger & Bikner-Ahsbahs, 2008), ein individuell-kognitives (RBC-Modell), das soziale Prozesse zur Wissenskonstruktion als individuell aufgebaut versteht, und ein sozial-konstruktivistisches (SVSt-Modell), das individuelle Prozesse zur Wissenskonstruktion als sozial eingebettet auffasst.

Das RBC-Modell ist Bestandteil der Theorie zur kontextueller Abstraktion (Abstraction in Context: AiC): Wissenskonstruktion ist kontextabhängig und beginnt darin mit einem Bedürfnis für die Konstruktion eines neuen Sachverhalts (need for a new construct), dem folgt die Konstruktion in Gestalt von drei ineinander geschachtelten epistemischen Handlungen: **C**onstructing impliziert **B**uilding-with und **B**uilding-with impliziert **R**econgizing. Die neue Erkenntnis wird anschließend konsolidiert. (Hershkowitz, Dreyfus, & Schwarz 2001)

Das SVSt-Modell ist ein Modell kollektiver Erkenntnishandlungen, das aus der Theorie interessendichter Situationen (IDS) erwachsen ist, einer Theorie, die beschreibt und erklärt, wie Interesse fördernde Situationen im Mathematikunterricht durch kollektive Handlungen aufgebaut sind und durch welche Bedingungen sie gefördert oder behindert werden. Dieses Modell besteht aus drei eher heuristischen epistemischen Handlungen: **S**ammeln mathematischer Bedeutungen, **V**erknüpfen mathematischer Bedeutungen und **St**ruktursehen. Alle interessendichten Situationen führen ins Struktursehen hinein. (Bikner-Ahsbahs, 2005)

Untersucht wird die Frage, was Lernende antreibt, in ihren Erkenntnisprozessen voranzukommen. In beiden Theorieansätzen wird dieser „Erkenntnisantrieb“ als situativ geprägt verstanden. AiC fasst Bedürfnisse (für ein neues Konstrukt) als Antriebsquelle für Erkenntnisprozesse auf. Die Theorie interessendichter Situationen sieht diese Antriebsquelle im Geflecht auftretender Interessen verankert (z. B. im kollektiven situativen Interesse der Gruppe oder im situationalen Interesse des Individuums, das aus der Situation emergiert). Methodisches Prinzip ist der Austausch von Analyseergebnissen, wobei die jeweils fremde Theorie mit ihren Methoden und Ergebnissen als Quelle von Herausforderung und Inspiration angesehen wird. Ziel ist es, beide Theorieansätze systematisch in Beziehung zu bringen und dadurch zu vertieften, möglicherweise integrierenden theoretischen Einsichten zu gelangen. Das folgende Beispiel illustriert den methodischen Kern des Vorgehens und stellt erste Ergebnisse vor.

Aufgabensituation: Ein deutsches Schülerpaar bearbeitet eine von dem israelischen Team erstellte Aufgabe zu einer Kettenbruchentwicklung der Goldenen-Schnitt-Zahl $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Die Schüler erhalten die Kettenbruchdarstellung F(n) = $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1...}}}$, wobei n die Anzahl der auftretenden Brüche ist. Sie sollen zunächst die ersten sieben endlichen Kettenbrüche berechnen, anschließend die ersten 20 als Dezimalzahlen darstellen, jeweils beobachten und ihre Beobachtungen begründen. Ein abschließender Vergleich mit der Goldenen-Schnitt-Zahl sollte dann dazu führen, den Konvergenzprozess zu erfassen und sich den Begriff des Grenzwerts zu erschließen.

Mette und Jens, ein Schülerpaar aus einem deutschen Grundkurs des 11ten Jahrgangs (Beginn der Einführungsphase in die Oberstufe und ohne Erfahrungen mit Grenzwerten) werden bei der Bearbeitung dieser Aufgabe videographiert. Die Daten werden transkribiert, von beiden Teams getrennt analysiert; die Ergebnisse werden ausgetauscht und verglichen. Dies ist die Basis für anschließende Re-Analysen und einen erneuten Austausch der Ergebnisse, dem Vergleich und Analysen folgen, usw. Als Resultat dieser Überkreuzanalysen gewinnt man ein beide Modelle integrierendes Ergebnis oder aber die Einsicht, warum eine Integration der Ergebnisse nicht gelingen kann.

Ergebnisse der ersten separaten Analysen:

Ergebnisse des AiC-Teams: Dieses Team führt a priori Analysen durch, das heißt Analysen der Aufgabe gemäß der zu erwartenden Konstruktionen über den neu zu erwerbenden mathematischen Gegenstand. Die a posteriori Analyse der Transkripte konzentriert sich dann verstärkt auf Transkriptstellen im Bereich der Konstruktionen der neuen Sachverhalte. Wesentliche Ergebnisse der ersten Analysen sind:

- A priori Analyse: Eine Liste von zu erwartenden Konstruktionen zum Grenzwertbegriff (z. B. „Die Dezimalzahlen kommen der Zahl beliebig nahe“)
- A posteriori Analyse: (nur eine Auswahl wird vorgestellt)
    - Das Bedürfnis für die Bildung eines Grenzwertbegriffs als neues Konstrukt konnte wider erwarten nicht rekonstruiert werden.

- Die erwartete Systematik bei der Konstruktion des Grenzwertbegriffs trat nicht auf.

Ergebnisse des IDS-Teams: Mittels sequentieller interpretativer Analyse des gesamten Prozesses wird ein Phasendiagramm seines Verlaufs gewonnen: (Phase I: Sammeln, Phasen II, V: Verknüpfen, Phasen III, VI, VII, IX: Struktursehen, Phase VIII: Interviewerzentriert und dirigistisch).

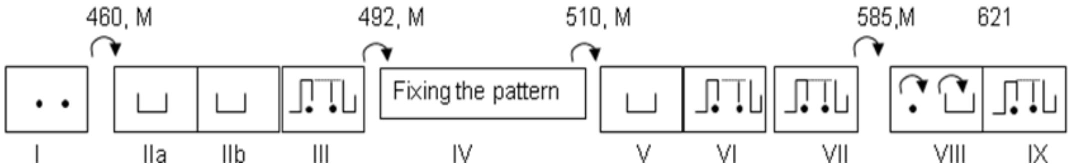


Abbildung 1: Phasendiagramm

- Mette steuert den Erkenntnisprozess vorausschauend („wir könnten jetzt gucken obs ne Regelmäßigkeit gibt”) und rückblickend („Ist das das einzige Ergebnis?“) und bevorzugt bei ihrer Beobachtung wahrnehmbare Muster im Endlichen.
- Jens pflegt hypothetisches Denken und versucht eher die potentiell unendlichen Prozesse zu erfassen.

Der folgende Analysetausch bringt beiden Teams Einsichten als Grundlage für den nächsten Analyseschritt. Das AiC-Team lernt, dass Mettes Steuerungsverhalten einen Beitrag zur Wissenskonstruktion liefert und dass in den Analysen nicht genügend zur Kenntnis genommene Transkriptbereiche bereits den Keim für Konstruktionen enthalten. Das IDS-Team lernt, dass die zentrale und lange Abschlussphase des Struktursehens in seiner fachlichen Qualität unstrukturiert ist und sich deshalb der weiteren Analyse entzieht. Behoben wird letzteres durch die Rekonstruktion des fachlichen Ideenflusses in Verbindung mit einer Konvertierung des Need-Konzepts: Es geht als emergentes Phänomen in den nächsten Analyseschritt des IDS-Teams ein.

Die Befunde aus diesen Überkreuzanalysen legen nun nahe, ein „general epistemic need (GEN)“, also ein allgemeines epistemisches Erkenntnisbedürfnis zu postulieren, das *vage mathematische Ideen in einer Aufgabe zunächst intuitiv und implizit erfasst und durch emergente Handlungen systemtischer Klärung und Präzisierung diese Ideen zu expliziten und genauer festgelegten Konzepten transformiert*. Das GEN ist nicht explizit sichtbar, und man kann auch nicht davon ausgehen, dass dieses Bedürfnis den Lernenden bewusst ist. Dennoch scheint es sinnvoll sein, dieses Bedürfnis als Erkenntnisantrieb anzunehmen, das sich in der Art und Ausprägung des Handelns von Lernenden zeigt. Es verknüpft beide Theorien, weil es eng mit dem situationalen Interesse verwoben ist, sich je nach Interessenlage (Cramer & Bikner-Ahsbahs, 2009) individuell unterschiedlich realisiert und die Emergenz des „need for a new construct“ ermöglicht. Seine Postulierung hat beim IDS-Team z. B. zur Rekonstruktion folgender Erkenntnisschritte bei der Berechnung der Kettenbrüche als Brüche geführt:

Schritt 1: *Schrittweise Zeichen verfolgen* (Beginnt mit dem Berechnen der einzelnen Brüche, um die Bruchdarstellung des Kettenbruchs zu erhalten.)

Schritt 2: *Berechnungsprinzip wird zum Aufbauprinzp* (Die Berechnung der Brüche führt z. B. zur Erkenntnis F(n)=1+1/F(n-1) als Aufbauprinzip der Folge, allerdings nur verbal, weil die Formalisierung nicht gelingt.)

Schritt 3: *Muster sehen* (oder Struktursehen) (Z. B. werden F(3) = 5/3 und F(4)=(5+3)/5 als musterhaft wahrgenommen.)

Schritt 4: *Muster prüfen* (d. h. an konkreten Beispielen testen.)

Schritt 5: *Muster rechtfertigen* (Z. B. formal, aber auch allgemein verbal-inhaltlich.)

Diese fünf Schritte zeigen, wie implizit in den Aufgaben enthaltene Gesetzmäßigkeiten handelnd als vage Ideen erschlossen und zunehmend expliziert werden und schließlich durch Geltungsprüfungen und –nachweisen zu einem konkreten, präziser fundierten und definierten mathematischen Gegenstand transformiert werden.

Die Übertragung der ersten vier Schritte auf die Dezimaldarstellungen gelingt gut. Schritt 5 aber können die Lernenden nicht umsetzen. Dieser *Mangel an Erfolg* wird zu einer *Quelle* für Explorationen zur Idee der *Annäherung der Dezimalzahlen an die Goldene-Schnitt-Zahl,* ein Prozess, dessen Erkenntnisfluss wiederum ein GEN unterstellt werden kann.

(*) Dieses Projekt wird gefördert von der “German-Israeli Foundation for Scientific Research and Development”, grant 946-357.4/2006.

Literatur

Bikner-Ahsbahs (2005). *Interesse zwischen Subjekt und Situation*. Berlin, Hildesheim: Franzbecker Verlag.

Cramer, J. & Bikner-Ahsbahs, A. (2009). Mathematical interest spheres and their epistemic function. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidrou, H. Sakonidis (Eds.), *Proc. of the 33th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 2 (353-361). Thessaloniki-Greece: Moucos-Communication.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education, 32,* 195-222.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A. & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connection theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM-International Journal on Mathematics Education,* 40(2), 165-178.

Ulrich BÖHM, Darmstadt

Modellierungskompetenzen mit geeigneten Aufgaben langfristig entwickeln

Zur Förderung von Modellierungskompetenzen gibt es inzwischen zahlreiche Angebote und Hinweise. Allerdings gibt es bislang kein Unterrichtskonzept für eine systematische Förderung von Modellierungskompetenzen in der Sekundarstufe 1 bis zum Mittleren Schulabschluss (vgl. Böhm 2009). Im Rahmen meines Promotionsvorhabens ist es das Ziel, Vorschläge für einen vertikalen Aufbau (vgl. Bruder 2006, S. 136) von Modellierungskompetenzen in der Sekundarstufe 1 zu erarbeiten.

In diesem Beitrag wird zunächst ein begrifflicher Rahmen zur Beschreibung von Modellierungskompetenz vorgestellt, so dass Teilziele eines langfristigen Kompetenzaufbaus beschrieben werden können. Anschließend geht es um eine Förderung von Modellierungskompetenzen in Klasse 5 auf der Grundlage eines lerntheoretischen Konzeptes.

1. Modellierungskompetenzen und Lernziele

Im KOM-Projekt erfolgt die Beschreibung von Modellierungskompetenzen anhand dreier Dimensionen (vgl. Blomhøj und Jensen 2007, S. 51): 1. *Degree of coverage* (Wissen, Können und Meta-Wissen zum Ausführen des Prozesses der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben), 2. *Technical level* (Mathematik, die bei der Bearbeitung realitätsbezogener Aufgaben eingesetzt werden kann) und 3. *Radius of action* (Situationen und (außermathematische) Kontexte, aus denen realitätsbezogene Probleme mit Hilfe von Mathematik bearbeitet werden können).

Das Ziel des langfristigen Aufbaus von Modellierungskompetenzen hinsichtlich der ersten Dimension ist eng verknüpft mit dem Modellierungskreislauf, der den Prozess des Bearbeitens realitätsbezogener Probleme beschreibt (vgl. Leiß & Blum 2006, S. 40f). Zu Beginn der Sekundarstufe 1 kann hierbei auf Vorkenntnissen aus der Grundschule aufgebaut werden. Entsprechend den Bildungsstandards für die Grundschule können Lernende „Sachprobleme in die Sprache der Mathematik übersetzen, innermathematisch lösen und diese Lösungen auf die Ausgangssituation beziehen“ (KMK 2005, S. 8). Diese Beschreibung entspricht einem Lösungsplan mit drei Schritten: 1. Problem verstehen, 2. Mathematik ins Spiel bringen und rechnen und 3. Resultat auf das Problem beziehen und prüfen. Ein solcher Lösungsplan wird in der Grundschule bisher nicht expliziert. Er stellt jedoch eine spezifische Erweiterung des Schemas „Frage-Rechnung-Antwort“ dar und kann in höheren Klassen zu einem Modellierungskreislauf mit mehreren Schritten erweitert werden. In Klasse 5 soll den Lernenden ein Lösungsplan nun explizit zur Verfügung stehen.

Notwendige Voraussetzung zum sinnvollen Arbeiten mit einem solchen Lösungsplan ist das Ernstnehmen des realen Kontextes einer Aufgabe. Dass Lernende genau dies häufig nicht tun, sondern sich beim Bearbeiten von Textaufgaben z.B. an Signalworten im Aufgabentext orientieren, zeigen zahlreiche Studien um „word problems“ (vgl. Greer 1997, S. 294). Dieses Ziel, das Lernende den Kontext ernst nehmen, lässt sich der Dimension „radius of action“ zuordnen.

Zum mathematischen Wissen, das Lernende in Klasse 5 anwenden können sollen, gehören die Grundrechenarten. Da die innermathematische formale Beherrschung von Inhalten ein Anwenden-können nicht impliziert (vgl. Blomhøj und Jensen 2007, S. 54), ist es nötig die Grundrechenarten als Mathematisierungsmuster auszubilden. Mathematisierungsmuster sind mathematische Wissenselemente, die zur Anwendung verallgemeinert sind und deren Verwendung reflektiert erfolgt (vgl. Bruder 2006, S. 137). Sie lassen sich über das „technical level“ beschreiben.

Die Ziele für die Entwicklung von Modellierungskompetenzen in Klasse 5 lassen sich also wie folgt zusammenfassen: *Lernende wenden die Grundrechenarten flexibel zum Bearbeiten von Sachaufgaben an. Der Bearbeitungsprozess orientiert sich dabei an einem Lösungsplan.*

2. Theorie der Lerntätigkeit

Lerntätigkeit ist auf die Aneignung von Wissen und Können gerichtet (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 67). Die oben genannten Ziele stellen das gewünschte Lernergebnis dar. Diese Ergebnisse unterscheiden sich von den äußeren Produkten der Lerntätigkeit (z.B. der schriftlichen Bearbeitung einer Sachaufgabe) (vgl. Lompscher 1985, S. 40). Damit (Lehr-)Ziele erreicht werden, müssen vom Lernenden individuelle Lernziele gebildet werden, deren Erreichen von Lernmotiven angetrieben wird. Die Realisierung der Lernziele erfolgt dann innerhalb der Lernhandlung, die in einer Folge von Teilhandlungen vollzogen wird (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 189). Dabei hängen Lernverlauf und Lernergebnis wesentlich von der Orientierungsgrundlage ab (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 192).

Eine wünschenswerte Orientierungsgrundlage für das Bearbeiten realitätsbezogener Aufgaben ist der oben beschriebene Lösungsplan. Nach Greer (1997, S. 294) weisen Studien zur Bearbeitung von word problems darauf hin, dass Lernende genau diesen Lösungsplan häufig nicht befolgen, sondern Operationen nach Schlüsselwörtern auswählen, die Zahlen aus dem Aufgabentext einsetzen, das Ergebnis berechnen und keinen Rückbezug auf das ursprüngliche Problem herstellen. Das Arbeiten nach einer solchen Orientierungsgrundlage führt bei „normalen“ eingekleideten Aufgaben häufig zum Erfolg. Das hat zur Konsequenz, dass Ziele (z.B. Aufgaben schnell bearbeiten zu können) erreicht werden können. Dies verhindert jedoch die Aneignung grundlegender Fertigkeiten für einen langfristigen Aufbau von Modellierungskompetenzen. Dazu müssen geeignete Lernziele gebildet werden (z.B. Realitätsbezogene Probleme mit geeigneter Mathematik lösen) und es muss zur Ausführung entsprechender Lernhandlungen aufgefordert werden. Dies geschieht durch die Auswahl geeigneter Aufgaben als Aufforderungen zum Lernhandeln (vgl. Bruder 2008, S. 16).

Im Sinne des Aufsteigens vom Abstrakten zum Konkreten eignen sich die Lernenden zunächst den Lösungsplan sowie die Mathematisierungsmuster als Ausgangsabstraktion in aktiver Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand an. Wurde dann das „kognitive Werkzeug“ bereitgestellt, erfolgt das Eindringen in den Lerngegenstand, um das Handeln mit zuvor erarbeiteten Ausgangsabstraktionen in vielfältigen Situationen zu üben (vgl. Giest und Lompscher 2006, S. 220f).

3. Konzept und Aufgaben einer Förderung von Modellierungskompetenzen in vier Etappen

In der *ersten Etappe* entwickeln die Lernenden eine Modellperspektive. Dazu muss erkannt werden, dass die Grundrechenarten bei Sachaufgaben als mathematisches Modell zur Beschreibung und Bearbeitung von realitätsbezogenen Situationen angewendet werden können. Des Weiteren wird auf Grenzen bzw. Probleme dieses Vorgehens anhand von Nicht-Standard-Einkleidungen (P-items bei Verschaffel et al. 1994, S. 275) hingewiesen.

In der *zweiten Etappe* wird, anknüpfend an die Erfahrungen mit den Aufgaben aus Etappe eins, ein Lösungsplan erarbeitet, der in den weiteren Etappen als Orientierungsgrundlage dient.

In *Etappe drei* geht es um die Ausbildung der Mathematisierungsmuster, jeweils einzeln zu jeder Grundrechenart. Hier kann auf Vorerfahrungen aus der Grundschule aufgebaut werden. Damit die Aufgaben nicht anhand von Oberflächenmerkmalen bearbeitet werden, kommen in dieser Etappe auch Nicht-Standard-Einkleidungen sowie Über- und Unterbestimmte Aufgaben (vgl. Humenberger 2003) vor. Nach dieser Etappe sind die Ausgangsabstraktionen erarbeitet.

In der *vierten und letzten Etappe* wird flexibel mit den zuvor erarbeiteten Mathematisierungsmustern auf Grundlage des Lösungsplans gearbeitet. Bevor Aufgaben bearbeitet werden, für deren Bearbeitung alle Schritte des Lösungsplans notwendig sind, können zuvor Klassifikationsaufgaben (vgl.

De Bock et al. 2009) mit dem Schwerpunkt „Mathematik ins Spiel bringen“ und „Wer hat Recht?“-Aufgaben (vgl. Bruder 2008, S. 34) zum „Prüfen“ bearbeitet werden. Das flexible Arbeiten mit den Mathematisierungsmustern und dem Lösungsplan erfolgt dann in einer Lernumgebung zu einem Sachkontext mit verschiedenen, oben genannten Aufgabentypen aus den Etappen eins bis drei.

Eine Konkretisierung des Konzepts mit Aufgabenbeispielen wird demnächst in einem ISTRON-Band erscheinen (Böhm in Vorbereitung).

Literatur

Blomhøj, M. und Jensen, T. H. (2007). What’s all the fuss about competencies? In: Blum, W. et al (Hrsg.) *Modelling and Applications in Mathematics Education*, S. 45-56.

Böhm, U. (2009). Ein Online-Lehrerfortbildungskurs zum mathematischen Modellieren. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster, WTM-Verlag. S. 479-482.

Böhm, U. (in Vorbereitung). Aller Anfang ist schwer, modellieren lernen umso mehr!? In: Bruder, R. & Eichler, A. (Hrsg.): *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht.* Hildesheim: Franzbecker.

Bruder, R. (2006). Langfristiger Kompetenzaufbau. In: Blum, W. et al. (Hrsg.) *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 135-151.

Bruder. R. (2008). Vielseitig mit Aufgaben arbeiten – Mathematische Kompetenzen nachhaltig entwickeln und sichern. In: Bruder, R. et al.: *Mathematikunterricht entwickeln*. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 18-52.

De Bock, D., Van Dooren, W., Vleugels, K. & Verschaffel, L. (2009). Word problem classification: A Promising Modelling task at the elementary level. Paper presented at ICTMA 14. Hamburg.

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293-307.

Giest, H. und Lompscher, J. (2006). Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Berlin: Lehmanns.

Humenberger, H. (2003). Dreisatz einmal anders: Aufgaben mit überflüssigen bzw. fehlenden Angaben. In: Henn, H.-W. & Maaß, K. (Hrsg.) *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker. S. 49-64.

KMK (2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. München: Luchterhand.

Leiß, D. und Blum, W. (2006). Beschreibung zentraler mathematischer Kompetenzen. In: Blum, W. et al. (Hrsg.) *Bildungsstandards Mathematik: konkret*. Berlin: Cornelsen Scriptor. S. 33-50.

Lompscher, J. (1985). Persönlichkeitsentwicklung in der Lerntätigkeit. Berlin: Volk und Wissen.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294.

Claudia BÖTTINGER, Essen

Konzeption von Fach- und Didaktikveranstaltungen Arithmetik

Das didaktische Grundlagenstudium Mathematik in NRW

In NRW müssen Studierende mit den Ziel Lehramt Grund-, Haupt- oder Realschule (GHR), die nicht Mathematik als Studienfach gewählt haben, Mathematik im geringeren Umfang als sogen. „Didaktisches Grundlagenstudium (DGM)“ belegen. Sie müssen sich darauf einstellen, dass sie in ihrem späteren Berufsleben, Mathematik unterrichten müssen, und zwar auch an den weiterführenden Schulen wegen des großen Fachlehrermangels in Mathematik.

Gerade der Studiengang GHR zeichnet sich durch einen hohen Anteil von Studierenden aus, „[...] *deren Auseinandersetzung mit Mathematik über viele Jahre hinweg von Abneigung und Misserfolg geprägt war* (Bender, Rinkens, Schipper, Selter, 2009). Dies lässt sich durch empirische Studien belegen. So zeigt Eilerts (2008, S. 91), dass sie im Vergleich zu anderen Studierenden des Fachs Mathematik das geringste Interesse an diesem Studienfach haben. Auf die bedeutsamen Unterschiede im mathematischen Fachwissen zwischen den Studierenden der unterschiedlichen Lehrämter GHR bzw. Gym/Ge) gehen ausführlich auch Blömeke et al. (2008 z. B. S. 91) ein. Man kann begründet annehmen, dass diese Ergebnisse sich speziell für das DGM noch verschärfen. Im Hinblick auf die Lehrveranstaltungen im DGM kann man davon ausgehen, dass einer großer Teil dieser Studierenden

- ein negatives Selbstkonzept in Mathematik hat
- einem Bild von Mathematik hat, das geprägt ist von (unverstandenen) Regeln und Verfahren
- unselbstständig ist, wenn es darum geht zu entscheiden, ob eine mathematische Aussage schlüssig bewiesen ist oder nicht.

Zusätzlich verschärfen sich in der Ausbildung die Schwierigkeiten, die auch in den Veranstaltungen BA oder Diplom Mathematik auftreten (Schichl, Steinbauer, 2009):

Der Wissensstand der AbiturientInnen stellt sich [...] sehr unterschiedlich dar. Insbesondere klafft bei der Mehrheit der StudienanfängerInnen eine deutliche Lücke zwischen dem tatsächlich aus der Schule mitgebrachten Wissen und dem [...] vorausgesetzten und unkommentiert verwendeten „Schulstoff“

Die Tatsache, dass die wahre Entwicklung mathematischer Inhalte von konkreten Beispielen abgehoben, innerhalb abstrakter Strukturen und in allgemeinen Aussagen erfolgt, die dann auch noch bewiesen werden, führt häufig zu einem ”Abstraktionsschock“ unter den Studierenden.

Dies führt dazu, dass gerade im DGM sorgfältig Konzepte (inhaltlich und organisatorisch) überlegt werden müssen, um die Grundeinstellungen aufzudecken, zu reflektieren und weiterzuentwickeln und um gleichzeitig trotz des geringen Studienanteils eine professionelle Ausbildung zu gewährleisten.

Hierbei sollten einerseits fachwissenschaftliche Konzepte, Methoden und Kenntnisse in den fachdidaktischen Veranstaltungen aufgegriffen und auf die spezifischen schulischen Belange bezogen werden. […] Zum anderen sollten die fachwissenschaftlichen Veranstaltungen so organisiert werden, dass sie die zugehörigen fachdidaktischen Konzepte zur Gestaltung von Lehr-/Lernprozessen widerspiegeln. (Bender, Rinkens, Schipper, Selter, 2009) Diese Forderung klingt selbstverständlich, muss aber für das DGM noch ernster genommen werden. Im Folgenden sollen daher inhaltliche und organisatorische Akzentuierungen für das DGM („Arithmetik" und „Didaktik der Arithmetik") vorgestellt werden.

Inhaltliche Akzentuierungen im Hinblick auf das DGM

Theoretische Grundlage aller Veranstaltungen ist einerseits die Sichtweise auf Mathematik und damit verbunden die Sichtweise auf das Lehren und Lernen von Mathematik. Entscheidend ist die Ausweitung der Sichtweise von „Mathematik als Produkt" hin zur „Mathematik als Tätigkeit" (Freudenthal, 1973). *Die Lernenden werden mehr als Akteure ihres Lernprozesses, weniger als Objekte der Belehrung betrachtet. Entsprechend hat sich die Aufgabe der Lehrenden von der Wissensvermittlung zur Anregung und Organisation von Lernprozessen verschoben. Bei den Inhalten zählen mehr die Entwicklungsprozesse, die zu Verständnis führen, weniger die fertigen Wissensstrukturen. Was die Zielsetzungen anbelangt, wird ein sinnerfüllter Unterricht gefordert und die Produktion von Lösungswegen genießt Vorrang vor der Reproduktion von Rezepten*, (Müller, Steinbring, Wittmann, 2004). Diese Sichtweise soll einerseits in der Fachveranstaltung selbst erlebt werden und andererseits in der zugehörigen Fachveranstaltung reflektiert werden.

In Anlehnung an „Arithmetik als Prozess" (Müller, Steinbring Wittmann, 2004) kommt darüber hinaus der Idee der „Schulmathematik vom höheren Standpunkt" (Müller, Steinbring, Wittmann, 2002) eine zentrale Rolle zu – auch um schulische Defizite aufzuarbeiten. Um allen Studierenden einen neuen Zugang zur Mathematik zu ermöglichen und gleichzeitig ein gutes Angebot an mathematischen Aktivitäten bereitzustellen, sind produktive Aufgaben mit unterschiedlichen Lösungen und mit Lösungswegen in unterschiedlicher mathematischer Tiefe unerlässlich. Dem oben erwähnten „Abstraktionsschock" wird durch den intensiven Einsatz von Veranschaulichungen entgegengewirkt. Diese werden nicht im Sinne eines Hilfsmittels für die „schwachen Studenten" gesehen, sondern als epistemologisches Werkzeug, mit dessen Hilfe abstrakte mathematische Beziehungen erkundet und begründet werden können. Dabei ist das Beweisen und Begründen ein wesentlicher Bestandteil, auf den keinesfalls verzichtet wird. Diese Beweise erfolgen nicht formal mithilfe von Variablen, sondern entweder durch Deutungen von strukturierten Darstellungen oder beispielgebunden. Dem Unterschied zwischen einem beispielgebundenen Beweis und einer Überprüfung einer Aussage durch die Angabe eines Beispiels dabei wird große Bedeutung zugemessen.

In Didaktik der Arithmetik erfolgt die theoretische Grundlegung und bewusste Reflexion der verschiedenen Sichtweisen auf Mathematik im Hinblick auf den selbst erlebten Unterricht, auf die Veranstaltung Arithmetik und auf die Vorstellungen vom Unterrichten. Gerade weil viele Studierende negative Vorerfahrungen mitbringen, werden diese aufgegriffen und mit anderen Modellen kontrastiert. Diese Kontrastierung setzt sich in allen Themenbereichen fort – ganz ausdrücklich dürfen Einordnungen und Bewertungen nur auf der Basis theoretischer Grundlagen vorgenommen werden, um Begründungen auf der Basis des selbst erlebten Mathematikunterrichts deutlich zurückzudrängen.

Organisatorische Änderungen

Organisatorische Änderungen betreffen vor allem den Ablauf der Übungen (alle Veranstaltungen sind als Vorlesung mit angegliederter Übung organisiert) und damit verbunden die Konzeption der Übungsblätter. Die Übungsblätter bestehen aus 2 Aufgaben, bei denen entweder nur der Vorlesungsstoff mit eigenen Worten wiederholt werden muss oder ein mathematisches Verfahren, wie der euklidische Algorithmus, durchgeführt werden muss. Diese Aufgaben werden korrigiert, sodass die Studierenden eine Rückmeldung erhalten, ob sie den Inhalt richtig wiedergeben, aber nicht weiter besprochen. Zwei Aufgaben orientieren sich an den Zielen der Veranstaltung und werden sowohl korrigiert als auch – in unterschiedlicher Form – besprochen. Diese Reduktion der Besprechungen führt zu einem deutlichen Zeitgewinn in den Übungen.

Die Gestaltung der Übungen erfolgt mit dem Ziel, die mathematische Urteilsfähigkeit zu steigern. Dass die Studierenden ihre Bearbeitungen vorstellen, sollte sich von selbst verstehen. Diese Vorstellung erfolgt ganz bewusst vor der Korrektur, damit sie sich nicht auf das Urteil von „kompetenten“ Korrekturkräften berufen können. Das wichtigste Element sind **Feedbackgruppen**, die zu den vorgestellten Präsentationen inhaltliche Rückmeldung geben müssen unter Nutzung von Feedbackregeln. Welche Argumente haben mich überzeugt? Diese müssen benannt und wiederholt werden. An welcher Stelle bin ich mir unsicher? An welcher Stelle ist ein Argument für mich nicht überzeugend oder wo habe ich Nachfragen? Rückmeldungen, die nicht angemessen auf die Inhalte der Präsentation eingehen, werden zurückgewiesen. Diese Art der Rückmeldung **müssen** alle Studierenden in Kleingruppen mehrmals pro Semester geben – natürlich mit dem Ziel, dass im Laufe mehrerer Veranstaltungen diese Art bedeutungslos wird, weil die Studierenden selbstständig nachfragen und Urteile abgeben. Offene Fragen und weitere Ergebnisse werden gesammelt und zunächst in Kleingruppen bearbeitet, bevor die Übungsgruppenleiter sie kommentieren.

Durch den Zeitgewinn besteht die Möglichkeit zusätzliche Arbeitsaufträge unter Nutzung aktivierender Methoden, wie sie aus der Hochschuldidaktik bekannt sind, zu bearbeiten.

Ein Bonuspunktesystem z. B. für hohe Punktzahl auf den Übungsblättern sorgt darüber hinaus deutlich erkennbar zu größerer Motivation bei der Bearbeitung der Übungsblätter und zu deutlich höheren Bestehensquoten bei der Abschlussklausur.

Ausblick: Tutorenschulung

In Zusammenarbeit mit dem Zentrum für Hochschul- und Qualitätsentwicklung wird es im „Tandem" eine Tutoren- (=Übungsgruppenleiter-)schulung geben, ähnlich wie z. B. in Dortmund (Siburg, Hellermann, 2009). Die zugrunde liegende Theorie bleibt (s. o.), sie wird angewendet auf die besonderen Bedürfnisse der Fach- und Didaktikveranstaltungen im Bereich Mathematik (Böttinger, Ladwig, 2010), wobei die Erfahrungen aus der Arbeit im DGM eingehen und auch auf andere Veranstaltungen übertragen werden sollen.

Ausblick: Evaluation

In der Arbeitsgruppe Steinbring wurde ein Fragebogen entwickelt, der an den Zielen des Studiums orientiert (vgl. Grundlagen) ist und als Vor- und Nach"test" sowohl bei den Fachstudierenden im Studiengang GHR als auch im DGM zum Einsatz kam. Da es um Sichtweisen auf Mathematik und Mathematiklernen geht, wurde ein spezielles Fragebogendesign weiterentwickelt, das aus den Naturwissenschaften bekannt ist, ein sogen. „Two-tiers-test". Zu einer fachlichen Frage muss auch eine Begründung gewählt werden – auf diese Weise werden die Beziehungen zwischen der fachlichen Antwort und der damit für die Studierenden verbundenen Sichtweisen erfasst.

Literatur

Bender, Rinkens, Schipper, Selter, (2009) *Empfehlungen für die universitäre Grundschullehrerausbildung im Lernbereich Mathematische Grundbildung in Nordrhein-Westfalen*.

Blömeke, S., Kaiser, G. Lehmann, R. (Hrsg.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer*, Münster: Waxmann

Böttinger, C., Ladwig, A. (erscheint 2010). Hochschuldidaktik meets Mathematik, In: *Hochschuldidaktik für die Lehrpraxis*, N. Auferkorte-Michaelis, A. Ladwig, I. Stahr (Hrsg.)

Eilerts, K. (2008). *Kompetenzorientierung in der Mathematik-Lehrerausbildung*, Paderborner Beiträge zur Unterrichtsforschung und Lehrerbildung, Berlin: Lit Verlag

Freudenthal (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Band 1, Stuttgart: Klett

Müller, N., Steinbring, H. Wittmann, E. Ch. (2002). *Jenseits von PISA, Bildungsreform als Unterrichtsreform*, Seelze, Friedrich Verlag

Müller, N., Steinbring, H., Wittmann, E. Ch. (2004). *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer

Schichl, H., Steinbauer, R. (2009) *Einführung in das mathematische Arbeiten*, Dordrecht: Springer

Siburg K. F., Hellermann, K. (2009). *Mathematik lehren lernen – Hochschuldidaktische Schulungen für mathematische Übungsgruppenleiter*, DMV-Nachrichten 17, 174-176

THOMAS BORYS; Karlsruhe

Welche Vernetzungsmöglichkeiten bietet die Kryptologie?

Die Kryptologie ist eine sehr alte Wissenschaft. War sie bis vor wenigen Jahrzehnten noch eine Wissenschaft für Regierungen, Militär, Geheimdienste und Spione, so ist sie aufgrund der vielen Anwendungen im Umfeld des Computers in unserem Leben nahezu allgegenwärtig. Man bedient sich ihrer täglich, Beispiele hierzu sind: das Einloggen auf dem E-Mail-Account, Arbeiten auf https-Seiten z. B. beim Onlinebanking und Telefonieren mit dem Handy.

Es stellt sich nun die Frage, welche Vernetzungsmöglichkeiten kryptologische Inhalte mit der Mathematik bieten, damit diese gewinnbringend im Mathematikunterricht eingesetzt werden können.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist der Begriff der beziehungsvollen Mathematik im Sinne Freudenthals. Erörtert wird die Frage anhand exemplarischer Beispiele und der fundamentalen Ideen der Mathematik, die hier als Leitlinie zugrunde gelegt werden. Dabei wird folgender eigener Katalog fundamentaler Ideen verwendet: *Algorithmus, funktionaler Zusammenhang, mathematisches Modellieren, Zahl, Messen* und *Ordnen* (das beinhaltet das geometrische Strukturieren und das logische Ordnen). Ihm liegen die Sammlungen fundamentaler Ideen von Humenberger/Reichel, Schreiber, Tietze/Kilka/Wolpers und Heymann zugrunde.

1. Begriffsbestimmungen zur Kryptologie

Die Kryptologie ist die Wissenschaft, die einerseits zur Geheimhaltung von Information durch Verschlüsselung (Kryptografie) dient. Andererseits beinhaltet sie die Kunst des Entschlüsselns (Kryptoanalyse), die ihrerseits auch die Sicherheit von Verschlüsselungen analysiert. Diese Begriffsauffassung wird den folgenden Ausführungen zugrunde gelegt. (Allerdings gibt es auch andere Auffassungen, siehe z. B. Beutelspacher.)

Es gibt grundsätzlich zwei Methoden der Geheimhaltung. Die erste Möglichkeit besteht im *Verbergen der Existenz einer Information*, d. h. alleine durch das Verstecken der Information wird diese geschützt. Diese Methode gehört in den Bereich der Steganografie. Beispiele hierfür sind die Verwendung von Geheimtinte (z. B. Zitronensaft) und der berühmte doppelte Boden. Eine zweite Möglichkeit besteht im *Verschleiern der Information*, d. h. hier wird die Information durch eine geschickte Verschlüsselung geschützt. Diese Methode gehört in die Kryptografie.

2. Vernetzungsmöglichkeiten der Kryptologie mit der Mathematik

Für diesen Artikel werden die Vernetzungsmöglichkeiten exemplarisch anhand der fundamentalen Ideen des funktionalen Zusammenhangs und des mathematischen Modellierens gezeigt (weitere Beispiele vgl. Borys).

2.1 Funktionaler Zusammenhang

Der funktionale Zusammenhang ist bei der Kryptologie von zentraler Bedeutung. Grob gesprochen wird durch die Verschlüsselungsfunktion der Klartext, der die zu übermittelnde Information enthält, auf einen Geheimtext, der für Fremde nicht lesbar ist, abgebildet. Durch die Injektivität der Verschlüsselungsfunktion ist der Empfänger in der Lage, den Geheimtext zu entschlüsseln. Im Schaubild ist das durch den Doppelpfeil versinnbildlicht.

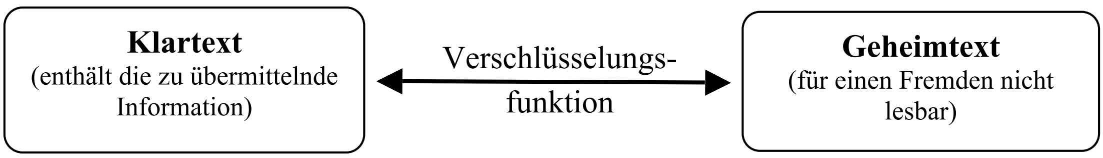


Abbildung 1

Sehr deutlich tritt die fundamentale Idee des funktionalen Zusammenhangs bei den beiden Basistransformationen: *Transposition* und *Substitution* zum Verschleiern der Information zutage.

Mit *Transposition* ist gemeint, dass zur Verschlüsselung die Positionen der Schriftzeichen des Klartextes verändert werden, sodass dieser nicht mehr zu lesen ist, so wird z. B. aus dem Klartext `Edgar Allan Poe` der Geheimtext `der analoge Alp`. Wenn wie im Beispiel eine sinnvolle Buchstabenfolge entsteht, bezeichnet man diese als Anagramm. Das Kennzeichen dieser Verschlüsselungsmethode ist also, dass alle Schriftzeichen erhalten bleiben und nur deren Position im Text geändert wird. Mathematisch steckt dahinter die Permutation. Wenn man die Leerzeichen auch als Buchstaben auffasst, wäre P die dazu gehörige Permutation.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 2 & 1 & 10 & 5 & 3 & 4 & 7 & 8 & 14 & 13 & 6 & 12 & 15 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Weitere Beispiele für Transpositionsverfahren sind die Skytala von Sparta und die Verschlüsselungsschablonen nach Fleißner.

Mit Substitution ist gemeint, dass zur Verschlüsselung die Schriftzeichen des Klartextes durch andere Schriftzeichen ersetzt werden. Ein Beispiel hierfür ist die bekannte Cäsar-Verschlüsselung, die auf Gaius Julius Caesar (100 – 44 v. Chr.) zurückgeht. Jeder Buchstabe des Klartextes wird durch den Dritten ihm im Alphabet folgenden Buchstaben ersetzt. Die Buchstaben x, y, und z werden mit den Buchstaben a, b, c verschlüsselt. Für den

Klartext `Edgar Allan Poe` erhält man `Hgjdu Diidq Srh`. An dieser Stelle sind zwei bijektive Funktionen zu erkennen:

- Zuordnung der Klartextbuchstaben zu den Geheimtextbuchstaben, wobei der Definitions- und der Wertebereich gleich sind,
- Zuordnung des Klartextes zu genau einem Geheimtext.

Weitere Beispiele in diesem Zusammenhang sind der Freimaurercode und die Verschlüsselung von Karl dem Großen (vgl. Bauer). Allerdings sind bei den genannten Beispielen Definitions- und Wertebereich der Verschlüsselungsfunktion unterschiedlich.

Dass es sich, wie in Abbildung 1 dargestellt, bei der Zuordnung von Klar- zum Geheimtext nicht immer um eine Verschlüsselungsfunktion handelt, wird an den homphonen Verschlüsselungen deutlich. Bei diesen ist die Zuordnung des Klar- zum Geheimtext nicht mehr eindeutig. Beim Verschlüsseln ein und desselben Klartextes können unterschiedliche Geheimtexte entstehen. Somit liegt dann keine Verschlüsselungsfunktion mehr vor, sondern eine Verschlüsselungsrelation.

2.2 Mathematisches Modellieren

Frage: Können zwei Personen einen geheimen Schlüssel austauschen, ohne dass sie sich je im Leben persönlich begegnet sind?

Die Antwort lautet ja. Allerdings beantworteten diese Frage Martin Hellman und Whitfield Diffie erst 1976 in ihrem Artikel *New Direction in Cryptography*. Ziel dieses Verfahrens ist die sichere Vereinbarung eines gemeinsamen geheimen Schlüssels (K) in Form einer Zahl über eine unsichere, d. h. einer öffentlichen Verbindung. (Diffie und Hellman beschrieben ihre Verfahren sehr allgemein.) Im Folgenden wird das Verfahren spezialisiert auf einen Restklassenkörper Z_q mit q als Primzahl dargestellt.

Zu Beginn der Kommunikation vereinbaren die Kommunikationspartner, nennen wir sie A(lice) und B(ob), eine gemeinsame Primzahl q und eine weitere Zahl g (sog. Generator), dies sollte eine Primitivwurzel von q sein. Diese beiden Startinformationen können ruhig über einen unsicheren Kanal, d. h. für einen Unbefugten Dritten lesbar, übermittelt werden. Beide Partner wählen sich aus der Menge $\{1, \ldots, q\text{-}2\}$ eine beliebige Zahl. Sagen wir Alice wählt a und Bob wählt b. Diese beiden Zahlen werden nicht ausgetauscht, sondern sind streng geheim.

Alice berechnet: $x_A = g^a \bmod q$ und gibt diese Zahl an Bob weiter.

Bob berechnet: $x_B = g^b \bmod q$ und gibt diese Zahl an Alice weiter.

Auch der Austausch dieser Information kann wieder über einen unsicheren Kanal erfolgen. Aus dieser Information können beide Kommunikationspartner wie folgt ihren gemeinsamen Schlüssel K berechnen:

A berechnet	B berechnet
$K = x_B^a \bmod q$	$K = x_A^b \bmod q$

Obwohl beide den Schlüssel K ganz unterschiedlich berechnen, erhalten sie beide denselben Schlüssel. Bei diesem Schlüssel handelt es sich um einen geheimen Schüssel, den nur die beiden Kommunikationspartner kennen. Da x_A und x_B durch die diskrete Exponentialfunktion, die eine Einwegfunktion darstellt, berechnet werden, ist ein Angreifer, der die Zahlen q, g, x_A und x_B abgefangen hat, nicht in der Lage a bzw. b zu berechnen. Genau diese Stelle ist Kern der mathematischen Modellierung, denn durch die Mathematik ist sichergestellt, dass die Kommunikation geheim ist. Die Sicherheit des Verfahrens hängt hauptsächlich an der Wahl der beiden Zahlen q und g. In der Praxis reichen üblicherweise Primzahlen q der Größenordnung 2048 Bit aus.

Insgesamt wird an den Ausführungen deutlich, dass die Kryptologie viele Vernetzungsmöglichkeiten mit der Mathematik bietet, daher sind kryptologische Themen eine besonders lohnenswerte Bereicherung für den Mathematikunterricht.

Literatur

Bauer, F. (1997): *Entzifferte Geheimnisse*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag

Beutelspacher, A.; Neumann, H.; Schwarzpaul, T. (2005): *Kryptographie in Theorie und Praxis*. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn/GWV Fachverlag

Borys, T. (2008): *Geheimnisvolle Mathematik - Codierungen im Spiegel der fundamentalen Ideen der Mathematik*. In: *Karlsruher Pädagogische Beiträge*, 69/2008, S. 65-83

Diffie, W.; Hellman, M. E. (1976): *New Directions in Cryptography*. In: *IEEE Transactions on Information Theory*. IEEE 22. Jahrgang, Heft 6, S. 644-654.

Freudenthal, H. (1977): *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 1, 2. Auflage, Stuttgart: Klett Verlag

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim: Beltz Verlag

Humenberger, J., Reichel H.-Ch.: *Fundamentale Ideen der angewandten Mathematik.* Aus der Reihe Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik Band 31, Mannheim: Bibliographisches Institut & F.A. Brockhaus

Schreiber, A. (1979). *Universelle Ideen im mathematischen Denken – ein Forschungsgegenstand der Didaktik.* In: mathematica didactica 2, 165-171

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H. (Hrsg.) (2000). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II.* Band 1, 2. Auflage, Wiesbaden: Vieweg,

Birgit BRANDT, Frankfurt, Gyde HÖCK, Frankfurt

Josefine und ihre Lernpartnerinnen – verschiedene Formen der KoKonstruktion

Kooperative und kollaborative Lernformen haben sich in vielen Studien als förderlich sowohl für soziales Lernen als auch für fachliches Lernen erwiesen. In den Bildungsstandards wird dieses Ineinandergreifen sozialer und fachlicher Aspekte zum Beispiel durch die übergeordneten Kompetenzen „Kommunizieren“ und „Argumentieren“ betont. Auch im Mathematikunterricht der Grundschule ist daher das Lernen auf eigenen Wegen und im eigenen Tempo zu verknüpfen mit Lernen in kommunikativ-kooperativen Arbeitsprozessen. Im Unterrichtsalltag ist jedoch häufig gerade im Mathematikunterricht eine Konzentration auf ein individualisiertes Aufgabenangebot zu beobachten, das den Austausch und die Verständigung über Mathematik im Klassenzimmer erschwert. Da jedoch allein die Methode kooperativer Arbeitsformen noch keine konstruktiven Verständigungsprozesse unter Lernenden garantiert, setzt sich das Projekt „Kollektives Problemlösen“[1] mit einem gezielten Einsatz auseinander.

1 Forschungsmethodische und lerntheoretische Einordnung

Im Projekt „Kollektives Problemlösen“ haben wir in einem Zeitraum von 9 Monaten in zwei Klassen (3. und 4. Jg.) jeweils vier Bausteine kooperativen Problemlösens in Zusammenarbeit mit den Lehrpersonen entwickelt und die Umsetzung videografiert. Ein wesentliches Moment waren dabei längerfristige Lernpartnerschaften, die in verschiedene kooperative Lernformen eingebunden wurden.

In dem Projekt wird der grundlegenden Frage nachgegangen, wie in kollektiven Lernarrangements individuelles fachliches Lernen ermöglicht wird. Forschungsmethodologisch ordnet sich das Projekt ein in die qualitativ-interpretative Unterrichtsforschung und greift auf die damit verbundene lerntheoretische Position zurück, dass Lernen auf wechselseitigen Verstehens- und Verständigungsprozessen beruht. Bezogen auf die fokussierten kooperativen Lernprozesse bedeutet dies, dass die Lernenden wechselseitig und gemeinsam die Ermöglichungsbedingungen für mathematisches Lernen in der Interaktion erzeugen, und zwar auf der Grundlage dessen, was in ihrem Klassenzimmer als ‚mathematisch’ gilt und fachdidaktisch aufbereitet als Anregung zur Auseinandersetzung zur Verfügung gestellt wird.

[1] Finanziert vom Zentrum für Lehrerbildung und Unterrichtsforschung an~~F~~ der Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt von Feb. 2009 – Jan. 2010.

Ziel des Projektes ist die Beschreibung musterhafter Strukturen und Strukturierungen in kollektiven Problemlöseprozessen. Dabei soll die Wechselbeziehung zwischen individuellen Partizipationsprofilen (Brandt 2004) und kollektiver Kooperationsdynamik nachgezeichnet werden. Für die Herausarbeitung der Partizipationsprofile wird auf die Interaktions- und Partizipationsanalyse (ebd.) zurückgegriffen; die Kooperationsdynamik wird mittels qualitativer Inhaltsanalyse (Mayring, 2003) kodiert. Im folgenden Analysebeispiel sollen erste Ergebnisse dargestellt werden.

2 Analysebeispiel

Die folgenden Interaktionsprozesse sind alle dem letzten Baustein entnommen, bei dem sich die Kinder mit Textaufgaben und Rechenbäumen in verschiedenen Partnerarbeitsphasen auseinandersetzen sollten. Es werden verschiedene Arbeitsphasen mit Josefine fokussiert: 1. mit ihrer langfristigen Lernpartnerin Janina hat sie sich zunächst in das Thema eingearbeitet; 2. mit ihrer Crossover-Partnerin Belen hat sie schließlich eigenständig Textaufgaben entwickelt und Rechenbäume dazu aufgestellt.

1. Josefine und Janina, laut Lehrerin ein leistungshomogenes Paar, arbeiten seit Beginn der Studie sehr fachbezogen und zielstrebig zusammen (Kodierung). Sie sollen nun zu folgendem Aufgabentext eine Aufgabe finden und rechnen: *„Du sparst schon eine ganze Weile dein Taschengeld, damit du Geschenke kaufen kannst. Insgesamt sind es 39 Euro. Ein Drittel möchtest du allerdings behalten. Von dem Rest gibst du 8 Euro aus.“* Als ersten Rechenschritt einigen sich die beiden zunächst auf 39 geteilt durch 3; Janina stellt fest *da kommt kein Rest raus*, was Josefine sofort bestätigt *stimmt da ist gar kein Rest ... da käme 13 raus*. „Rest“ wird so von beiden der Division mit Rest zugeordnet. Nun entwickeln sie gemeinsam folgende Lösung:

Josefine	oder wir rechnen da minus
Janina	wart mal (8 sec.) also acht Euro gibst du für deine Eltern aus also 39 minus acht
Josefine	31
Janina	jetzt willst e ja noch ein Drittel behalten
Josefine	jetzt geteilt durch 3 ... 31
Janina	*(unverständlich)* jetzt hast du noch ein Euro
Josefine	Jaa da käme dann 10 Rest eins raus

Im Transkript wird deutlich, dass beide durch wechselseitiges Aufgreifen und Konkretisieren bzw. Ausrechnen die Lösung entwickeln: So nennt zunächst Josefine die Rechenoperation *minus*, Janina die Aufgabe *39-8*, das Ergebnis *31* nennt wiederum Josefine. Mit *ein Drittel* regt nun Janina die Division an, Josefine nennt hier die Aufgabe *(31):3* und Janina benennt mit *ein*

Euro den Rest. Sie notieren 39-8=31 und 31:3=10 als Rechenschritte im Rechenbaum und halten als Antwortsatz fest: „Sie hat für sich 10 Rest 1". Für ihre gemeinsam geteilte Deutung von ‚Rest' als Division mit Rest haben sie somit gemeinsam eine befriedigende Antwort gefunden.

2. Josefine und Belen arbeiten erstmals als Crossover-Paar zusammen; hier besteht ein deutliches Leistungsgefälle. Belen ist in anderen Arbeitszusammenhängen oft mit nicht-fachlichen Aktivitäten beschäftigt (Kodierung). In der Crossover-Arbeitsphase erstellen die beiden zusammen eine Textaufgabe, berechnen den ersten Teilschritt und notieren dazu den Rechenbaum. Auch hierzu ein kurzer, charakteristischer Transkriptausschnitt:

Josefine	machen wir lieber so . zum Beispiel also mhmh Sonntag findet am Opernplatz ein Weihnachts-markt statt
Belen	*nickt, geht dabei mit dem ganzen Oberkörper mit*
Josefine	Dort verkauft Belen Belen
Belen	*hüpft kurz hoch*
Josefine	hat hat einen Stand – hat hundert
Belen	*Achtzig*
Josefine	Achtzig Plätzchen davon verkauft sie 95. so Josefine hat auch einen Stand .. sie hat ..
Belen	(unverständlich) 450

Ganz deutlich gibt Josefine die Struktur der Aufgabe vor; allerdings geht Belen zunächst sehr körperbetont, dann aber auch mit inhaltlich passenden Einwürfen auf diesen Vorschlag ein und akzeptiert diese Aufgabe so als gemeinsames Produkt. Josefine bindet ihrerseits Belens Vorschläge ein – so wird aus ihrer Zahl *hundert* und der Zahl *achtzig* von Belen im Aufgabentext 180. Bei der späteren Berechnung gibt Josefine die Rechenschritte vor und zeigt dabei auf die entsprechenden Felder im Rechenbaum: *Was ist das 305 plus 190*; Belen berechnet korrekt: *sind dann 495*. Auch hier wird somit Belen von Josefine in ihre Struktur eingebunden.

In beiden Partnerschaften zeigt sich Josefine dominant und vorantreibend auf der organisatorischen Ebene (Kodierung) und sehr an fachbezogenen und zielstrebigen Interaktionsprozessen orientiert. In der Kooperation mit Belen dominiert Josefine auch auf der inhaltlichen Ebene der Aufgabenbearbeitung, wohingegen sich in der Zusammenarbeit mit Janina eine sehr symmetrische Ideenentwicklung rekonstruieren lässt. In diesen beiden Partnerschaften findet man unterschiedliche Ausprägungen ihres Partizipationsprofils: einmal als Teampartnerin (mit Janina) und einmal als Tutorin (mit Belen).

3 Theoretische Zusammenfassung

Abschließend sollen diese Rekonstruktionen theoretisch gebündelt und dabei mit den von Howe (2009) an empirischen Beispielen herausgearbeiteten beiden Grundtypen der „joint construction“ verbunden werden. Im Typ 1 werden unterschiedliche Sichtweisen verbalisiert und im Diskurs zu einer gemeinsam akzeptierten Sichtweise zusammen geführt; im Typ 2 wird lediglich die Idee eines einzelnen Lernenden näher verhandelt und als gemeinsame Lösung akzeptiert. Dabei betont Howe, dass es hier nicht um eine Akzeptanz der Lösung mangels inhaltlicher Interessen geht, sondern um eine Einigung auf die Idee eines einzelnen Lernenden, der inhaltlich die Führung übernimmt (vgl. „focal navigator“, Schneeberger 2010, 334). Während sich nun die Zusammenarbeit von Belen und Josefine deutlich dem Typ 2 zuordnen lässt, kann die Interaktion zwischen Josefine und Janina in diesem letzten Baustein keinem der beiden Grundtypen zugeordnet werden: weder wird die Lösung nur von einer der beiden Lernenden entwickelt, noch kommt es zu einer Auseinandersetzung zwischen zwei verschiedenen Sichtweisen. Vielmehr lässt sich hier ein Typ 0 der ‚joint construction’, erkennen, in dem die gemeinsame Lösungsidee – bis hin zu gemeinsam produzierten „Fehlvorstellungen“ – geradezu symbiotisch erzeugt wird. Gerade im Vergleich mit der „fehlerhaften“ Produktion im Interaktionsprozess Typ 0 lassen sich die lernförderlichen Momente für Josefine in ihrer Rolle als Tutorin im Typ 2 mit Belen erkennen: Die von Josefine gestaltete kleinschrittige Aufteilung, die Belen eine Teilnahme am inhaltsbezogenen Arbeitsprozess ermöglicht, bietet ihr selbst eine Konzentration auf die Gesamtstruktur der Aufgabe, die ihr in der Aufgabenbearbeitung mit Janina aus dem Blick geraten ist.

Literatur

Brandt, B. (2004): *Kinder als Lernende – Partizipationsspielräume und -profile im Klassenzimmer.* Frankfurt a. M. u.a.: Lang.

Howe, C. (2009): Collaborative Group Work in Middle Childhood – Joint Construction, Unresolved Contradiction and the Growth of Knowledge. In: *Human Development* 52, 215-239.

Mayring, P. (2003): *Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken* (8. Auflage). Weinheim: Beltz-UTB.

Schneeberger, M. (2009): *Verstehen und Lösen von mathematischen Textaufgaben im Dialog.* Münster u.a.: Waxmann

Thorsten BRAUN, Engelbert NIEHAUS, Koblenz/Landau

Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen

Bei dem Einsatz von Stochastischen Netzen in der Modellierung von realen Verteilungsprozessen ist die Wahl und Berechnung der Kantengewichte entscheidend. Inhaltlich geht es bei diesem Anwendungsbezug um die Verteilung von Gütern mit und ohne Berücksichtigung von Verbrauchs- und Produktionsprozessen. Der Schwerpunkt soll nun auf der Optimierung der Stochastischen Netze durch Verringerung der Fehler in der Vorhersage durch Anpassung der Kantengewichte sein. Daher ist es das Ziel, die Fehlerberechnung durch didaktische Reduktion für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I zu ermöglichen.

1. Projekt: Mathematisches Umweltlabor

Im Mathematischen Umweltlabor wird mathematische Modellbildung im Kontext von umweltwissenschaftlichen Problemen angewendet. Durch die Teilnahme von drei unterschiedlichen Teilnehmergruppen in den Seminaren soll eine gemeinsame Lehr-Lern-Umgebung entstehen. Die drei Teilnehmergruppen sind Studierende des Diplomstudiengangs Umweltwissenschaften, Lehramtsstudierende des Faches Mathematik und Schülerinnen und Schüler mit besonderer mathematischer Begabung aus der Sekundarstufe I (Kl. 8-10), welche zu einem „Frühstudium“ an die Hochschule kommen. Die Umweltwissenschaftler bringen das notwendige Fachwissen zur Lösung des Problems mit. Die Schülerinnen und Schüler tragen mit Lösungsstrategien und logischem Denken zur Problemlösung bei. Die Lehramtsstudierende Mathematik sollen auf der einen Seite die mathematischen Modelle kennen und entwickeln, aber auch die beiden anderen Teilnehmergruppen bei fehlenden mathematischen Voraussetzungen unterstützen.

2. Stochastische Netze

Ein Stochastisches Netz besteht zunächst aus einer Menge an Knoten und Verbindungen, wobei diese Verbindungen gerichtet sind. Stochastisch wird das Netz dadurch, dass man jeder Verbindung einen Wert zuordnet, welche als Kantengewicht bezeichnet wird. Diese Kantengewichte müssen nun die Eigenschaften einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung erfüllen. Dies bedeutet, dass die Kantengewichte aus dem Intervall [0;1] sein müssen und die Summe über die Kantengewichte aller von einem Knoten ausgehenden Verbindungen gleich 1 sein muss.

3. Verbindung zwischen dem Mathematischen Umweltlabor und den Stochastischen Netzen

Eine Verbindung zwischen dem Mathematischen Umweltlabor und den Stochastischen Netzen ergibt sich durch die Behandlung von umweltwissenschaftlichen Verteilungsproblemen in den Seminaren. Wenn vorliegende Flächeninformationen zum Beispiel über eine Schadstoffbelastung eines bestimmten geographischen Gebiets diskretisiert werden, gelangt man zu der Netzstruktur des Stochastischen Netzes und könnte dann Vorhersagen über die zukünftige Verteilung dieses Schadstoffes berechnen. Ob die Seminarteilnehmerinnen und Seminarteilnehmer von der Netzstruktur tatsächlich zu Stochastischen Netzen gelangen, ist nicht zwingend notwendig, sondern eine Option, die die Lehrenden als ein Modell für die Vorhersage der zukünftigen Verteilungen verwenden könnten (siehe [5] Diffusionsgleichung). Zentrale Aufgabe der Lehrenden ist es, die heterogene Gruppe ggf. bei der weiteren Präzisierung der Modellvorschläge der Lerngruppen zu unterstützen.

4. Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen

Wenn man die Verteilung eines Schadstoffes beispielsweise auf die Knoten festgelegt hat, kann man eine Vorhersage mit dem Stochastischen Netz treffen, wie sich der Schadstoff von diesen Knoten ausgehend verteilt. Um dann die Güte dieser Vorhersage zu überprüfen, also den eventuellen Fehler des Stochastischen Netzes zu bestimmen, muss eine Datenerhebung in den Knoten durchgeführt werden, in die entsprechend der Berechnung des Stochastischen Netzes der Schadstoff verteilt wurde. Sollte diese Datenerhebung nicht mit der Prognose des Stochastischen Netzes übereinstimmen, so muss das Modell verbessert werden. Betrachtet wird nun die Anpassung der Kantengewichte, bei einem durch die Lernenden gewählten Modellierungsansatz über Stochastisches Netze. Dazu erhebt man eine Datenreihe aus mehreren Datensätzen und berechnet für jeden einzelnen Datensatz ein Kantengewicht, indem man jeweils die mobilisierten Schadstoffmengen durch die gesamte Schadstoffmenge dividiert. Nun sind durch die Lerngruppe Möglichkeiten zu untersuchen, wie man das Kantengewicht schrittweise für das Stochastisches Netz bei neuen Daten anpasst. Der Mittelwert der Kantengewichte der einzelnen Datensätze ist dabei lediglich eine erste Option. Sollte beispielsweise in den Kantengewichte der Datenreihe eine abnehmende oder zunehmende Tendenz erkennbar sein, bietet es sich an mit gewichteten Mittelwerten zu arbeiten, wobei dann ältere Daten schwächer gewichtet werden sollten als jüngere Daten. Bei diesem Vorgehen bestehen Analogien zu Lernprozessen, in denen man ältere Daten nach und nach vergisst und diese dadurch nur noch geringeren Einfluss erhalten. Ziel des Modellierungsschritts ist damit die Festlegung der Gewichtung. Diese Gewichtung kann sowohl durch eine Gewichtung nach der zeitlichen Reihenfolge der Messungen als auch in Abhängigkeit vom Alter mit Hilfe einer stetigen Funktion erfolgen. Die Gewichtung mit einer stetigen Funktion wird zum Gegenstand der Modellbildung wenn die Lernenden den Abstand zwischen den verschiedenen Messpunkten direkt berücksichtigen wollen.

5. Lehrplanbezug

Um eine didaktische Reduktion der Fehlerberechnung von Stochastischen Netzen für den Einsatz in der Schule vornehmen zu können, muss zunächst die Frage beantwortet werden, ob es überhaupt einen Bezug zum Lehrplan Mathematik der Sekundarstufe I gibt. Dies geschieht hier im Hinblick auf den Rahmenlehrplan der Sekundarstufe I des Landes Rheinland-Pfalz.

Zunächst soll geklärt werden, ob es bereits Themen aus dem Bereich der Orientierungsstufe (Kl. 5/6) im Lehrplan gibt, deren Kenntnis für die Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen notwendig sind. Daraus ergibt sich eine Verbindung zur Leitidee „L2: Messen und Größen“, in der eine Datensammlung und Datenerhebung gefordert wird. Die Bestimmung der Kantengewichte aus den gesammelten Daten, sowie die Berechnung der Kantengewichte und Dezimalbrüche fällt in den Bereich der Leitidee „L1: Zahl und Zahlbereiche: Bruchzahlen“. Weiterhin sollen nach der Leitidee „L5: Daten und Zufall“ absolute und relative Häufigkeiten, sowie das arithmetische Mittel behandelt werden.

Zum Lehrplan für die Klassen 7 und 8 ergibt sich eine Verbindung zur Leitidee „L1: Zahl und Zahlbereiche: Prozent- und Zinsrechnung“ durch die Bestimmung und Berechnung der Kantengewichte aus den gesammelten Daten. Außerdem erneut zur Leitidee „L5: Daten und Zufall“, nach der eine Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs erfolgen soll, sowie gewichtete Mittelwerte und in Ansätzen das Gesetz der Großen Zahlen behandelt werden soll.

6. Fazit

Ein Einsatz der Fehlerberechnung in Stochastischen Netzen als Modellierungsaufgabe in Klasse 7/8 ist, wie im Punkt 5. Lehrplanbezug erläutert, möglich, da es einige Verbindungen zwischen dem Lehrplan und den benötigten mathematischen Werkzeuge bei diesem Beispiel gibt.

Schülerinnen und Schüler erreichen bei einer ersten Beschreibung des vorhandenen Problems aus der Realität bereits einen großen Anteil des mathematischen Modellierungsprozesses. Allerdings wird die verbale Formulierung als entscheidender Schritt der Modellbildung nicht als Teil der mathematischen Lösung bewusst wahrgenommen, sondern erst wenn Formeln sichtbar werden, wird für die Lernenden Mathematik betrieben. Daher ist es wichtig, dass die Lehramtsstudierenden mathematische Modellierung in verbalen Aussagen von Schülerinnen und Schülern erkennen können. Dazu ist es zunächst notwendig, dass die Lehramtsstudierenden selbst sowohl Probleme aus der Realität als auch mathematische Modelle verbal beschreiben können und in einem nächsten Schritt aus einer möglichst großen Anzahl von mathematischen Modellen geeignete Modellierungsansätze den verbalen Beschreibungen zuordnen können. Mit diesen möglichen Zuordnungen im Blick können die Lernenden auf dem Weg zu ihrem gewünschten Modell begleitet und mit adäquater Hilfestellungen unterstützt werden.

In den Seminaren konnte festgestellt werden, dass die Lehramtsstudierenden von sich selbst Modellierungsvorschläge auf abstrakter formaler Ebene als Ergebnis erwarten und verbale Beschreibungen in einem Modellierungsprozess als unzureichendes und nicht den Erwartung des Lehrenden entsprechendes Ergebnis einschätzen. Damit setzen die Studierenden die Hürde für Beiträge für sich selbst so hoch, dass sie überhaupt nicht mit dem Modellieren beginnen. Daher ist es besonders wichtig, dass die angehenden Lehrerinnen und Lehrer die Angst vor dem Modellieren verlieren und verbale Beschreibungen als wesentlichen Teil der mathematischen Modellierung wahrnehmen. Wenn die Angst vor falschen Aussagen und die eigenen Hürden für akzeptable Modellierungsschritte für sich selbst zu hoch eingeschätzt werden, werden Lehramtsstudierende in ihrem späteren Unterricht möglicherweise keine Modellierungsaufgaben einsetzen, weil sie die eigene Überforderung auf die Überforderung der Schülerinnen und Schüler übertragen und die verbale Formulierung von Modellierungsschritten auch bei den Schülerinnen und Schüler nicht als kreative Beiträge der mathematischen Modellierung werten.

7. Literatur

[1] Braun, Thorsten; Niehaus, Engelbert: Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Stochastischen Netze, Koblenz/Landau, (2008).

[2] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007).

[3] Tücke, Manfred: Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern, Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9, (2005).

[4] Smoller, Joel: Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations, 2. Auflage, Springer, Berlin, (1994).

[5] Wagner, Ralf; Niehaus, Engelbert: Verbindung von Tabellenkalkulation, Dynamischer Geometriesoftware und Geographischen Informationssystemen zur Visualisierung von glatten Wegen im mathematischen Umweltlabor, Koblenz/Landau, (2009).

ASTRID BRINKMANN, Münster, MICHAEL BÜRKER, Freiburg

Vernetzung im Mathematikunterricht

1. Einleitung

Die Studien TIMSS und PISA haben Defizite deutscher SuS im Bereich vernetzten Denkens deutlich gemacht (siehe z. B. [1], [2]). Mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten werden zu sehr voneinander isoliert und beziehungslos gelehrt und gelernt. Es kommt gerade zum Erwerb von Problemlösekompetenzen darauf an, verschiedene Kompetenzen, Wissenszweige, Gebiete innerhalb und außerhalb der Mathematik miteinander zu vernetzen. Im Bestreben, diese Defizite abzubauen, ist daher der Begriff *Vernetzung* zu einem der zentralen Leitbegriffe in der bundesdeutschen Mathematikdidaktik geworden. Auf internationaler Ebene ist „Connections Standard" zu einem der 10 Standards der NCTM erhoben worden. Aus diesen Gründen hat sich ein Arbeitskreis „Vernetzung im Mathematikunterricht" gegründet, der sich speziell dieses Themas annimmt.

2. Arbeitsschwerpunkte / Zielsetzungen

Der Arbeitskreis verfolgt die Zielsetzungen,

- innermathematische Beziehungen zwischen den in der Schule üblicherweise nebeneinander unterrichteten Teilgebiete aufzuzeigen und ins Bewusstsein der Lehrenden zu rücken,
- dazu beizutragen, dass SuS beim Erwerb zentraler Kompetenzen wie z. B. Modellieren und Problemlösen möglichst viele Gebiete der Schulmathematik miteinander vernetzen, um einen reichhaltigen Vorrat an Werkzeugen und Problemlösetechniken zu erhalten,
- Annahmen, Modelle, Berechnungsergebnisse sowie deren Interpretation und Visualisierung miteinander in Beziehung zu setzen,
- Einsicht in mathematische Zusammenhänge zu vermitteln, um damit einen breiteren Horizont zu schaffen,
- dazu beizutragen, dass SuS an vielen Beispielen lernen, dass Mathematik mehr ist als das Ausrechnen von Zahlen mit Hilfe vorgegebener Formeln.

Dementsprechend sollen auch schwerpunktmäßig

- die Methoden zum Erkennen und Lernen von Zusammenhängen und Vernetzungen wie Mind Mapping, Concept Mapping und Lernlandkarten

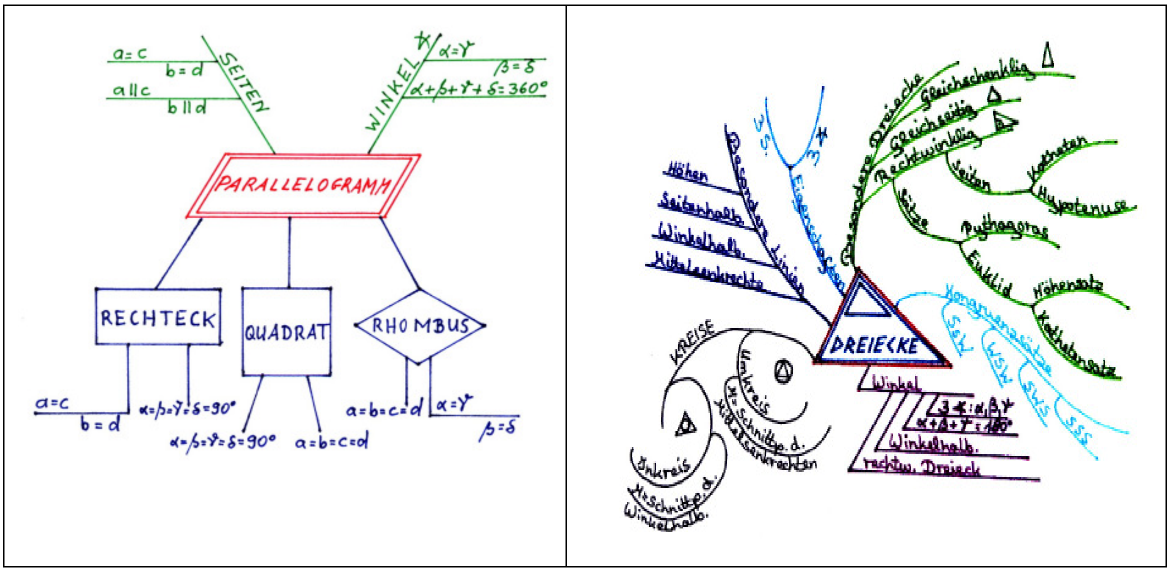
- und System Dynamics als Schlüssel zur Modellierung und zum Verständnis von vernetzten Problemen unserer Welt, insbesondere aus Umwelt, Natur und Ökonomie

für einen effizienten Einsatz im Mathematikunterricht aufbereitet und weiterentwickelt werden.

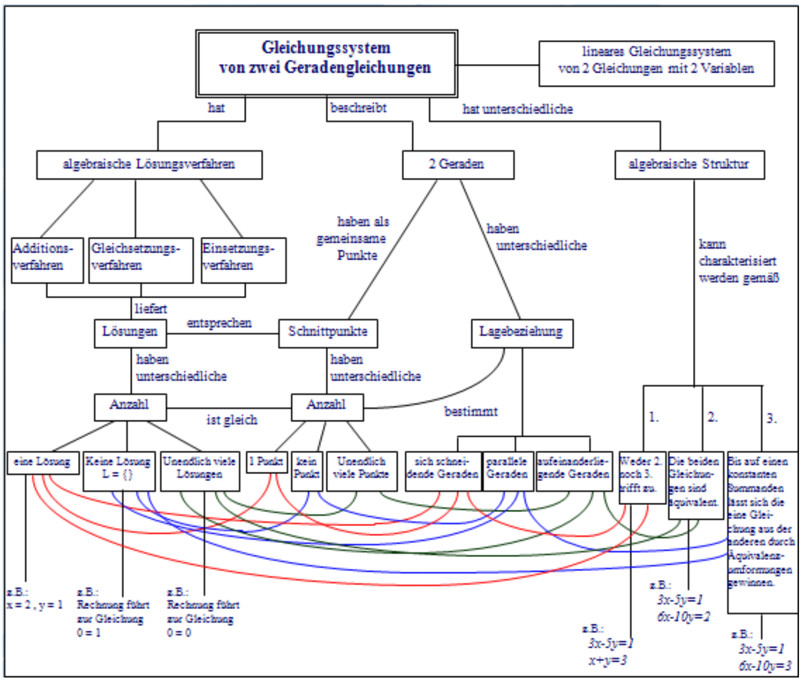
3. Graphische Darstellungen

Drei Beispiele seien hier gezeigt:

Mind Map



Concept Map



Mind Maps, Concept Maps und ähnliche graphische Netzwerkdarstellungen können als effiziente Unterrichtsmittel zum Lehren und Lernen von Mathematikvernetzungen dienen. Als Anwendungsmöglichkeiten sind insbesondere folgende hervorzuheben (ausführliche Darlegung z. B. in [3]):

- Maps zum Aufbau von Wissensnetzen durch Visualisierung geordneter Strukturen
- Anwendung von Maps beim Lernen, z. B. als zusammenfassende Wiederholung bei einer Prüfungsvorbereitung
- Maps als Visualisierung der kognitiven Strukturen von Individuen
    - Den Lernenden verhilft die Anfertigung einer Map, die die eigene Sicht auf die Struktur des Lerngegenstands visualisiert, zu einem klareren Bild über Zusammenhänge gemäß ihrer Denkstruktur.
    - Über die von Schüler/innen selbst erstellten Maps erhalten Lehrer/innen Informationen über Schülervoraussetzungen, auf denen Unterricht dann effektiver aufgebaut werden kann. Falsche Verknüpfungen werden sichtbar und können korrigiert werden.
    - Lehrende können sich ein Bild über den Wissenszuwachs bei Schüler/innen zu einer im Unterricht behandelten Thematik machen, wenn die Lernenden zu Beginn und am Ende einer Unterrichtseinheit jeweils eine Map zu dem Thema dieser Einheit zeichnen.
- Maps in der Form von „Lückentexten“ zum Lernen mathematischer Vernetzungen
- Maps als Hilfe beim Problemlösen

4. Ein Beispiel für die Vernetzung von Geometrie und Analysis beim Funktions- bzw. Ableitungsbegriff

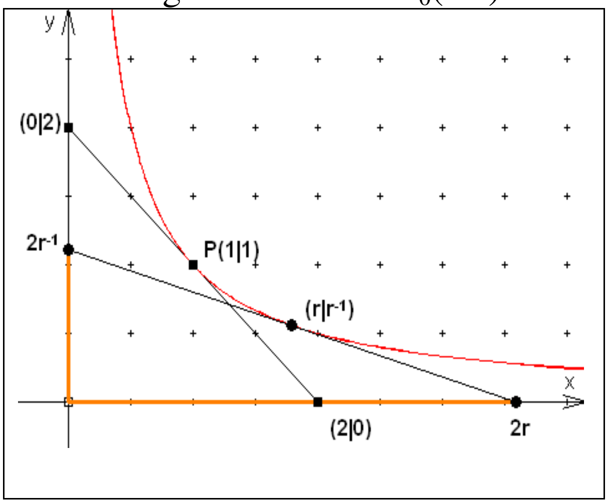
Bekanntlich gehören die Kongruenz- und Ähnlichkeitsabbildungen zum Kanon der Schulgeometrie. Erweitert man den Begriff der zentrischen Streckung in der Weise, dass man nicht nur Abbildungsgleichungen der Form $x' = kx$ und $y' = ky$ betrachtet, sondern für die Streckung in x-Richtung und in y-Richtung verschiedene Streckfaktoren, also eine Abbildungsgleichung der Form $x' = rx$ und $y' = sy$ wählt, so erhält man eine Euleraffinität, die man durch dynamische Geometrie-Software wie z. B. Dynageo leicht visualisieren kann. Während eine zentrische Streckung als Fixelemente nur das Streckzentrum Z als Fixpunkt und die durch Z gehenden Geraden als Fixgeraden hat, hat eine Euleraffinität mit verschiedenen Streckfaktoren die beiden Koordinatenachsen als Fixgeraden und den Ursprung als Fixpunkt. Es ist für die SuS eine herausfordernde Aufgabe, weitere Fixelemente herauszubekommen:

Aufgabe: *Gegeben sei der Punkt P_0 (1|1) und die Abbildung x'=2x, y'= 4y. Bestimme den Bildpunkt P_1(x'|y') von P_0, dann den Bildpunkt P_2 von P_1, usw. Auf welcher Kurve liegen die Punkte P_0, P_1, P_2?*

Als „Fixkurve" ergibt sich die Normalparabel $y = x^2$. Das heißt: Alle Punkte der Normalparabel werden durch die Abbildung x' = 2x und y' = 4y auf Punkte derselben Parabel und damit die Normalparabel als ganzes auf sich abgebildet.

Die Ideen lassen sich weiter verfolgen (siehe [4]):

Betrachtet man die Abbildung $x' = r \cdot x$ und $y' = 1/r \cdot y$, so ergibt sich als Fixkurve $y = 1/x$. Betrachtet man weiter die Tangente im Punkt P_0(1|1), welche (aus Symmetriegründen) die Steigung -1 hat und die beiden Koordinatenachsen im Punkt Y(0|2) bzw. X(2|0) schneidet, so ergeben sich als deren Bildpunkte X'(2r|0) und Y'(0|$2r^{-1}$). Da die Tangente im Punkt P_0(1|1) wieder auf eine Tangente abgebildet wird, nämlich auf die Tangente im Punkt P_0'(r|r^{-1}), ist deren Steigung gleich $-2r^{-1}/2r = -1/r^2$. Wir erhalten damit die Ableitungsfunktion x $-1/x^2$ auf rein abbildungsgeometrische Art. Diese Überlegungen waren Teil eines Unterrichtsversuchs mit SuS (Kl. 8-10) des Freiburg-Seminars im Februar 2010.



Diese Überlegungen werden im 1. Band der Schriftenreihe „Vernetzungen im Mathematikunterricht" weiter ausgeführt.

Literatur

[1] Baumert, J. u. a. 1997. *TIMSS – Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde.* Opladen: Leske+Budrich.

[2] Neubrand, J., M. Neubrand, H. Sibberns. 1998. „Die TIMSS-Aufgaben aus mathematikdidaktischer Sicht: Stärken und Defizite deutscher Schülerinnen und Schüler." In: W. Blum und M. Neubrand (Hrsg.). *TIMSS und der Mathematikunterricht. Informationen, Analysen, Konsequenzen.* Hannover: Schroedel Verlag GmbH, 17-27.

[3] Brinkmann, A. 2007. *Vernetzungen im Mathematikunterricht. Visualisieren und Lernen von Vernetzungen mittels graphischer Darstellungen.* Hildesheim: Franzbecker.

[4] Bürker, M. 1990. Bahnkurven affiner Abbildungen – Schnittstellen zwischen Abbildungsgeometrie und Analysis. *Didaktik der Mathematik* 18 (1990), S. 119-140.

Dirk BROCKMANN-BEHNSEN, Hannover

Explorative Studie zum Löseverhalten bei Geometrieaufgaben

1. Theoretischer Hintergrund

Die Nutzung von dynamischer Geometriesoftware (DGS) bietet viele Vorteile gegenüber einer Papier- und Bleistiftumgebung: Neben der Makroerstellung, dem dynamischen Messen und der Ortslinienfunktion ist hier vor Allem die dynamische Veränderbarkeit der Zeichnung im Zugmodus zu nennen: Das Ziehen an der Zeichnung erzeugt schnell eine so große Vielzahl an diskreten Varianten der zugrunde liegenden Figur, dass dies wie eine kontinuierliche Veränderung wirkt. Das dynamische Geometrieprogramm zeigt nicht nur konkrete Repräsentanten der definierten Figur auf dem Bildschirm, sondern verwaltet darüber hinaus auch noch das relationale Gefüge zwischen den Komponenten der Figur. Hölzl (1994, S.68) spricht in diesem Zusammenhang von der relationalen Modellvorstellung.

Bei Arzarello (2002) wird zwischen verschiedenen Nutzungsmodalitäten des Zugmodus unterschieden. Schüler bzw. Studierende, die Geometrieaufgaben unter Zuhilfenahme von DGS bearbeiten, wechseln bei der Bearbeitung mehrfach zwischen der Wahrnehmungsebene und der Ebenen der Theoriebildung und die DGS mit ihren Nutzungsmodalitäten des Zugmodus hat hier eine zwischen den Ebenen vermittelnde Funktion.

Die Phasen im Löseprozess von der Wahrnehmungsebene hin zur Theorieebene bezeichnet Arzarello mit *Ascending control stream*, diesen Phasen zugeordnet ist beispielsweise die Nutzungsmodalität des *Guided dragging*, bei der Basispunkte geplant so gezogen werden, dass die Zeichnung eine bestimmte Gestalt erhält. Entsprechend werden die Phasen von der Theorieebene zur Wahrnehmungsebene mit *Descending control stream* bezeichnet. Eine diesen Phasen zugeordnete Nutzungsmodalität des Zugmodus ist der *Dragging test*. Hier wird eine zuvor aufgestellte Vermutung durch die gezielte Konstruktion einer Figur und entsprechende Zugfestigkeitsprüfungen untersucht.

2. Forschungsfrage

In der hier vorgestellten Studie wurde der Frage nachgegangen, ob sich die bei Arzarello beschriebenen Nutzungsmodalitäten des Zugmodus in den beobachteten Schülerprozessen wiederfinden lassen.

Untersucht wurden zwei Schülerinnen und zwei Schüler des neunten Jahrgangs mit überdurchschnittlichen Mathematikleistungen, die in mehreren

Sitzungen partnerschaftlich je vier Aufgaben, die im Sinne von Dörner (1975) Problemaufgaben sind, bearbeiteten. Grundlage der Auswertung waren Filmaufzeichnungen der Problemlöseprozesse und entsprechende Transkripte sowie die Aufzeichnungen der Schülerinnen und Schüler. Nachfolgend soll ein solcher Prozess repräsentativ vorgestellt werden.

3. Beispiel für einen Problemlöseprozess

Bei der von den Schülern zu bearbeitenden Aufgabe geht es um die Schnittfigur der Winkelhalbierenden in einem Viereck:

Gegeben sei ein Viereck ABCD. E, F, G und H seien die Schnittpunkte jeweils zweier benachbarter Innenwinkelhalbierenden des Vierecks. Untersuche wie sich das Aussehen des Vierecks EFGH verändert, wenn du das Ausgangsviereck ABCD durch Ziehen an seinen Eckpunkten in unterschiedliche Formen bringst.

Den Schülern lag der Aufgabenstellung noch eine Skizze bei. Auffällig war die große Zahl an Vermutungen, die innerhalb kürzester Zeit aufgeworfen wurden. In den nachstehenden Grafiken wird die Entwicklung von vier unterscheidbaren Vermutungen im Laufe der ersten acht Minuten dargestellt.

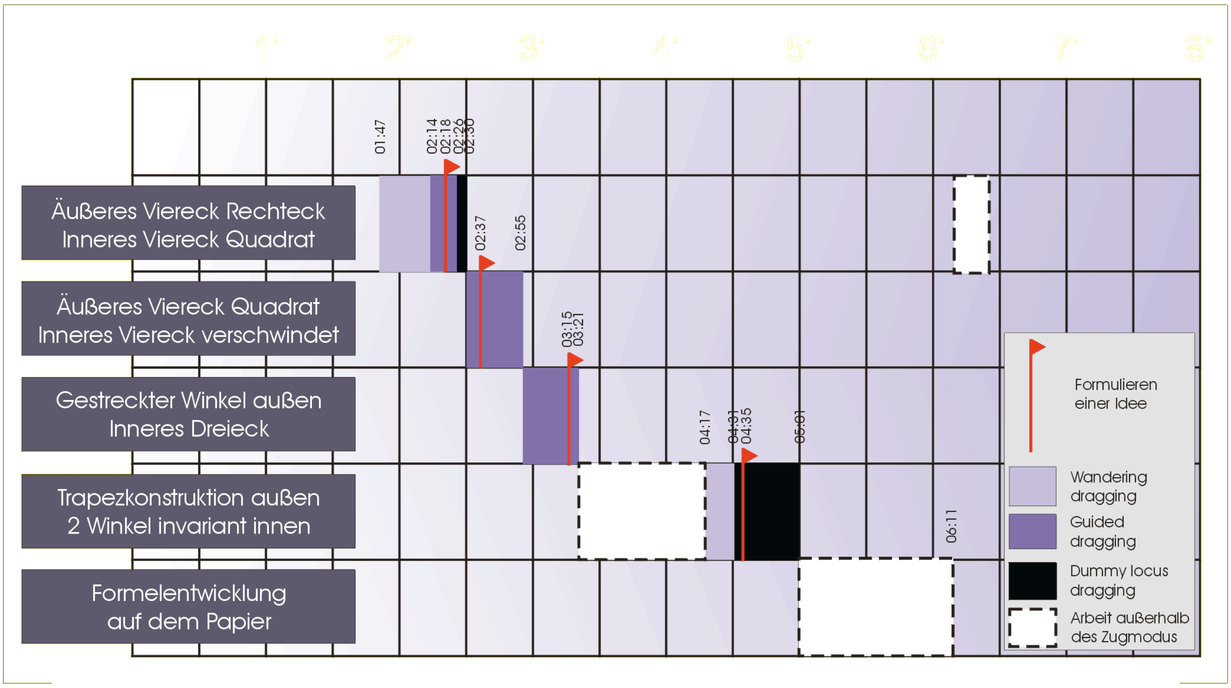


Abbildung 1

Nachdem die Schüler die entsprechende Figur konstruiert hatten, begannen sie diese mit Hilfe von *Wandering dragging*, einer noch nicht zielgerichteten, explorativen Verwendungsmodalität des Zugmodus, zu untersuchen. Einer der Schüler, Ralf, entdeckte mehr zufällig, dass sich für das innere

Viereck ein Quadrat ergibt, falls das äußere Viereck ein Rechteck ist. Er begann im Folgenden das äußere Viereck zielgerichtet zu einem Rechteck zu formen. Die zugeordnete Verwendungsmodalität heißt *Guided dragging*. 02:18 Minuten nach Aufzeichnungsbeginn formulierte Ralf seine Vermutung, in Abbildung 1 mit einer Fahne markiert. Bei der folgenden Untersuchung der Vermutung bedienten sich die beiden Schüler ebenfalls der Modalität des *Guided dragging*, indem sie durch gezieltes Ziehen an den Eckpunkten das äußere Viereck in unterschiedliche Rechteckformen brachten.

Dabei ergab sich auch zufällig eine quadratische Form für das äußere Viereck, entsprechend fielen die Eckpunkte des inneren Vierecks in einem Punkt zusammen. Diese Beobachtung führte zur nächsten Vermutung, der dann nachgegangen wurde, ohne dass die erste Vermutung abschließend untersucht worden wäre. Der entsprechende Phasenwechsel ist in Abbildung 2 durch einen Pfeilwechsel zwischen Wahrnehmungs- und Theorieebene visualisiert.

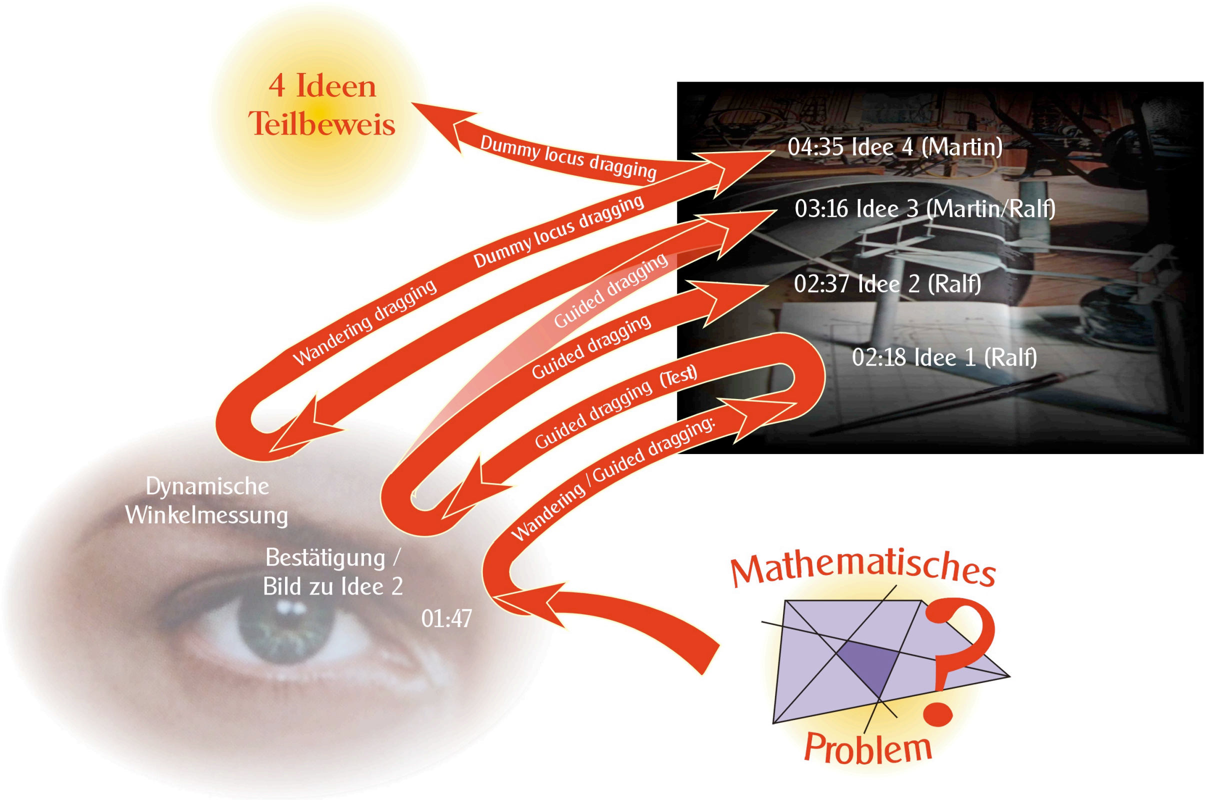


Abbildung 2

Dieses Phänomen der nicht abgeschlossenen Untersuchung von Vermutungen wiederholte sich sowohl im weiteren Verlauf dieses untersuchten Prozesses, als auch in den anderen Prozessen der Studie.

3. Erkenntnisse

Das von Arzarello beschriebene Wechselspiel zwischen Wahrnehmungs- und Theorieebene sowie einige Nutzungsmodalitäten des Zugmodus konnten in einigen der untersuchten Prozessen beobachtet werden. In anderen Prozessen dagegen wurden vage formulierte Vermutungen nicht mit Hilfe der DGS validiert oder es wurden immer neue Vermutungen ohne weitere Begründungen aufgestellt oder die DGS wurde zu Gunsten einer rein theoretischen Betrachtung der Aufgabe ungenutzt gelassen. Oft begnügten sich die Schülerinnen und Schüler auch damit, auf explorativer Ebene gewisse Zusammenhänge zu vermuten, ohne diese in einem mathematisch tieferen Sinn weiter zu ergründen. Insgesamt kann man sagen, dass die DGS nicht annähernd im vollen Rahmen ihrer heuristischen Möglichkeiten eingesetzt wurde. Symptomatisch für diese Beobachtungen ist auch die Tatsache, dass die Nutzungsmodalität des *Dragging test* in keinem der Prozesse beobachtet wurde.

Arzarello (2002) formuliert in diesem Zusammenhang die Hypothese, dass Schülerinnen und Schüler den Zugmodus mit seinen Möglichkeiten erst verinnerlichen müssen, um ihn produktiv einsetzen zu können. Dies erfordert eine Lernkultur, die systematisch mit DGS arbeiten lässt.

4. Ausblick

Zunächst müssen erheblich mehr Prozesse mit weiteren Schülern und Aufgaben durchgeführt werden. Die weiteren Untersuchungen werden sich dann darauf konzentrieren, wie DGS im Unterricht eingesetzt wird und wie dieser Einsatz optimiert werden kann. Dabei wird auch ein besonderes Augenmerk auf die Rolle des Lehrenden geworfen werden.

Literatur

Arzarello, F., Micheletti, Ch., Olivero, F., Robutti, O., Paola, D., Gallino, G., (1998), Dragging in Cabri and modalities of transition from conjectures to proofs in geometry, *Proceedings of PME XXII, Stellenbosh, S.A.*, S. 2-32 – 2-39

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., Robutti, O., (2002), A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments, *ZDM 2002 Vol. 34 (3)*, S. 66 - 72

Dörner, D., (1975): *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, Kohlhammer, Stuttgart

Hölzl, R., (1994), *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie*, Deutscher Studien Verlag, Weinheim

Hölzl, R., (1999), *Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software*, Wißner-Verlag, Augsburg

Roth, J., (2005), *Bewegliches Denken im Mathematikunterricht*, Franzbecker Verlag, Hildesheim

Schoenfeld, A., (1985): *Mathematical Problem Solving*, Orlando, Academic Press.

Georg BRUCKMAIER, Regensburg, Stefan KRAUSS, Regensburg, Martin BRUNNER, Luxemburg

PROLOG: Eine Studie zum *pro*babilistischen und *log*ischen Denken von Jugendlichen in Luxemburg

Zusammenfassung

Probabilistisches und logisches Denken ist Forschungsgegenstand dreier verschiedener Disziplinen: Didaktik der Mathematik (d.h. Stochastik), Kognitionspsychologie (Urteilen und Entscheiden unter Unsicherheit) und Intelligenzforschung (logisches und schlussfolgerndes Denken). Jede Forschungstradition verwendet verschiedene Untersuchungsparadigmen, die bislang kaum kombiniert eingesetzt wurden. Im PROLOG-Projekt (von *pro*babilistisch und *log*isch) – einer nationale Ergänzung der luxemburgischen PISA 2009-Studie – bearbeitete erstmalig eine große Stichprobe von etwa 2000 Jugendlichen eine umfassende Sammlung von Aufgaben aus allen drei Forschungstraditionen.

1. Die drei in PROLOG untersuchten Bereiche: P, L und T

Folgende bei PROLOG untersuchten Aspekte sind wesentlich für den vorliegenden Beitrag:

P: Aufgaben aus der Stochastik (z. B. PISA-Aufgaben zur Leitidee „Daten und Zufall"). Dieser Kompetenzbereich, den wir im Folgenden kurz „P" (für probabilistisches Denken) nennen, umfasst im Wesentlichen Inhalte des schulischen Stochastikunterrichts (vgl. auch statistical literacy).

L: Aufgaben zum schlussfolgernden Denken (z. B. Figurenanalogien und Zahlenreihen). Diesen Kompetenzbereich, der üblicherweise allgemeine kognitive Fähigkeit (bzw. IQ) genannt wird, bezeichnen wir in unserem Projekt kurz als „L" (für logisches Denken).

T: Kognitive Täuschungen stochastischer und logischer Art (wie z. B. Wasons Kartenauswahlaufgabe, das Ziegenproblem, die Linda-Aufgabe, etc.), die vor allem von Kognitionspsychologen ausführlich experimentell untersucht wurden (z. B. Kahneman, Slovic & Tversky, 1982; vgl. auch Tabelle 2). Diesen Bereich nennen wir im Folgenden kurz „T" (für Täuschungen).

2. Fragestellungen

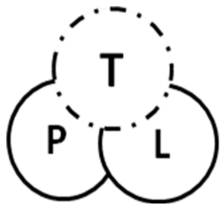
Im vorliegenden Beitrag fokussieren wir vor allem auf T (vgl. Tabelle 1).

Forschungsfrage 1:
Berühmte kognitive Täuschungen logischer und stochastischer Art werden üblicherweise experimentell einzeln untersucht (vgl. z. B. das Forschungs-

programm von Kahneman und Tversky). Interessanterweise wurde unseres Wissens bislang noch nicht die Frage gestellt, ob es sich bei T um eine eigenständige Kompetenz handelt, das heißt, ob es Personen gibt, die sich *grundsätzlich* kompetent (bzw. grundsätzlich nicht kompetent) bei solchen Aufgaben erweisen. Die Frage lautet also, ob sich mit verschiedenen Items dieser Art ein Konstrukt „Täuschungsresistenz“ reliabel erfassen lässt.

Forschungsfrage 2:
Inwieweit hängt eine solche angenommene Kompetenz T mit den (bereits etablierten) Kompetenzbereichen P bzw. L zusammen? Sind P bzw. L notwendige oder gar hinreichende Kompetenzen, die „resistent“ gegenüber berühmten kognitiven Täuschungen machen? Eine alternative Hypothese wäre, dass es sich bei diesen Täuschungen um Aufgaben einer ganz eigenen Art handelt, bei denen weder stochastische Schulbildung noch hohe Intelligenz von großem Nutzen sind.

Tabelle 1: Fragestellungen der vorliegenden Untersuchung

Fragestellungen	Erläuterung	Psychometrische Entsprechung	Visualisierung
Frage 1: Ist T eine eigenständige (reliabel messbare) Kompetenz?	Gibt es „Experten“ für T?	Korrelieren die Items von T? Wie hoch ist Cronbach's α?	
Frage 2: Wie hängt T mit P und L zusammen?	Kann man bei berühmten kognitiven Täuschungen von P bzw. L „profitieren“?	Wie korrelieren die Items von T mit P und L?	

Der gestrichelte Kreis in Tabelle 1 (rechts) um T bedeutet, dass die Etablierung dieses Kompetenzbereichs noch aussteht (Forschungsfrage 1). Die untere Grafik der sich überschneidenden Kreise steht für die Frage, inwieweit die drei Kompetenzbereiche zusammenhängen (Forschungsfrage 2).

3. Methode: Stichprobe und Instrumente der PROLOG-Studie

PROLOG ist eine luxemburgische Ergänzungsstudie von PISA 2009 zur Analyse des probabilistischen und logischen Denkens von Schülern.

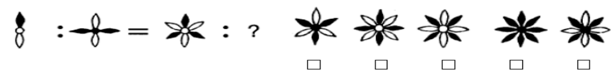
Stichprobe
An PROLOG nahmen 1926 SchülerInnen (58% Mädchen) im Alter von 16 bis 18 Jahren teil. Die SchülerInnen besuchten je zur Hälfte das *Enseignement secondaire technique* (vergleichbar mit der deutschen Realschule)

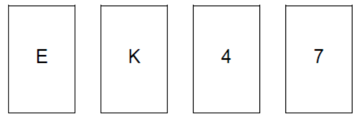
und das *Enseignement secondaire* (vergleichbar mit dem deutschen Gymnasium); 67% davon besuchten die 9. Klasse, 33% die 10. Klasse.

Instrumente

P wurde mit Aufgaben aus den deutschen Bildungsstandards zur Leitidee „Daten und Zufall“ erfasst. L wurde mit Figurengleichungen und Zahlenreihen aus dem Berliner Intelligenzstruktur-Test gemessen (Jäger, Süß & Beauducel, 1997). Zur Erfassung von T bearbeiteten die Schüler „klassische Täuschungsaufgaben“ (Linda-Aufgabe, Ziegenproblem, Geburtenquote im Krankenhaus, Wason-Aufgabe). Tabelle 2 präsentiert Beispielaufgaben für die drei untersuchten Bereiche.

Tabelle 2: Beispielitems für die drei untersuchten Bereiche P, L und T

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Beispielaufgaben</th></tr>
<tr><td>*P*</td><td colspan="2">*Spielsteine:*
Eine Kiste enthält 45 farbige Spielsteine: blaue, grüne, gelbe. Wenn die Wahrscheinlichkeit einen gelben Spielstein zu ziehen, 2/5 beträgt, wie viele gelbe Spielsteine sind dann in der Kiste?
Antwortoptionen: 2 5 9 18 25</td></tr>
<tr><td>*L*</td><td colspan="2">*Figurengleichungen:*
Welche der fünf Figuren muss man anstelle des Fragezeichens einsetzen, damit zwischen den Figuren vor dem Gleichheitszeichen dieselbe Beziehung besteht wie zwischen den Figuren hinter dem Gleichheitszeichen?
</td></tr>
<tr><td>*T*</td><td>*„Linda-Aufgabe“*
Linda ist 31 Jahre alt, alleinstehend, sehr intelligent und sagt offen ihre Meinung. Sie hat Philosophie studiert. Während der Studienzeit beschäftigte sie sich mit Fragen der Gleichberechtigung und nahm auch an Anti-Atomkraft-Demonstrationen teil.

Welche Aussage ist wahrscheinlicher?
a) Linda ist eine Bankangestellte
b) Linda ist eine Bankangestellte und ist in der feministischen Bewegung aktiv</td><td>*„Wason-Aufgabe“*
Überprüfe die folgende Regel: Wenn auf der einen Seite der Karte ein Vokal steht, dann befindet sich auf der anderen Seite eine gerade Zahl.

Welche dieser vier Karten können die obige Regel verletzen?</td></tr>
</table>

In Tabelle 2 können leider nur wenige Beispielaufgaben (teilweise nur in Kurzform) präsentiert werden. Der Erstautor (georg.bruckmaier@mathematik.uni-regensburg.de) informiert gerne ausführlicher über die eingesetzten Aufgaben sowie deren Lösungen.

4. Ergebnisse

Zu Fragestellung 1:

Die Auswertung der Daten ergab für die insgesamt 5 Items, die wir zur Messung von T eingesetzt haben, eine Reliabilität von .15. Der niedrige Wert von Cronbachs α bedeutet, dass die einzelnen kognitiven Täuschungen nur sehr schwach miteinander zusammenhängen und keine allgemeine Fähigkeit zum „Durchschauen kognitiver Täuschungen" identifiziert werden konnte. P und T dagegen konnten – mit Werten von $\alpha = .81$ beziehungsweise $\alpha = .71$ – erwartungsgemäß reliabel erfasst werden.

Zu Fragestellung 2:

Für die wechselseitigen Interkorrelationen der drei Bereiche ergaben sich folgende Werte:

Tabelle 3: Interkorrelationen r (nach Spearman) zwischen P, L und T

	P	L	T
Probabilistisches Denken P	--	.59	.26
Logisches Denken L	--	--	.24
„Kompetenz" bei kognitiven Täuschungen T	--	--	--

Da T jedoch nicht reliabel erfasst werden konnte, sind die Korrelationen in der letzten Spalte mit Vorsicht zu interpretieren. Obschon die von Tversky und Kahneman diskutierten Aufgaben offensichtlich mit probabilistischem und logischem Denken zu tun haben, besteht nämlich *kein systematischer* Zusammenhang mit den entsprechenden Kompetenzen P und L. Für die Korrelationen der *einzelnen Items* von T mit den Konstrukten P und L ergaben sich vielmehr sehr differentielle Befunde (diese werden ausführlich diskutiert in Bruckmaier, Krauss & Brunner, eingereicht).

Literatur

Bruckmaier, G., Krauss, S. & Brunner, M. (eingereicht). Erste Ergebnisse aus dem PROLOG-Projekt zum probabilistischen und zum logischen Denken.

Jäger, A. O., Süß, H.-M., & Beauducel, A. (1997). *Berliner Intelligenzstruktur - Test, Form 4*. Göttingen: Hogrefe.

Kahneman, D., Slovic, P. & Tversky, A. (Hrsg.). 1982. *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases.* Cambridge University Press: New York.

Regina BRUDER, Darmstadt

Stand und Perspektiven mathematikdidaktischer Theoriebildung

Untersuchungsgegenstände der Fachdidaktik Mathematik und Theorieverständnis

Die Fachdidaktiken als Vermittlungswissenschaften sind sehr junge Disziplinen verglichen mit ihren Mutterdisziplinen, den Fachwissenschaften. Sie erarbeiten und reflektieren deklaratives und prozedurales Wissen zur Gestaltung und Evaluation von fachspezifischen Lernumgebungen. Dabei sind die Fachdidaktiken abhängig vom Erkenntnisstand in den Bezugsdisziplinen (päd. Psych., Erziehungswiss., Soziologie u.a.). Aktuell heisst das z.B., dass man dann, wenn man Teilhandlungen des Modellierens beschreiben möchte, ein Handlungskonzept als Hintergrund benötigt (vgl. dazu das Tätigkeitskonzept Giest & Lompscher 2006), oder dass sich die Unterscheidung von vier kognitiven Stilen (Gregory 2005) als Planungsfaktor für erfolgreichen Mathematikunterricht herausstellt. Auf der Ebene der Methoden erweist sich z.B. die Repertory-Grid Technik (Kelly 1955, Bruder et al 2003) als effektiv zur Erfassung individueller Vorstellungen von Lehrkräften. Dies alles sind Beispiele dafür, dass die Mathematikdidaktik auf Erkenntnisse in ihren Bezugsdisziplinen angewiesen ist, diese aber auch immer in spezifischer Weise einsetzen und transferieren muss.

Die Mathematikdidaktik beschäftigt sich auch international i.w. übereinstimmend mit *Zielen des Lehrens und Lernens von Mathematik und deren Begründung sowie der Inhaltsauswahl für den Mathematikunterricht* (z.B. Standardentwicklung, „rechnerfreies" Können) sowie mit *Invarianten, Bedingungen und Einflussfaktoren des Lehrens und Lernens von Mathematik allgemein.* Dazu gehört z.B. eine Modellierung von *Unterrichtssituationen* als Strukturierung und Vernetzung von Methoden und Organisationsformen des Unterrichts in fachspezifischer Konkretisierung. Ferner geht es um *spezifische Gestaltungsmöglichkeiten zur Realisierung der jeweiligen Ziele und Inhalte des Mathematikunterrichts in den einzelnen Altersstufen.* Wege zum Problemlösenlernen, Modellieren, Argumentieren… mit fachspezifischen Mitteln und Konzepte zum langfristigen Kompetenzaufbau gehören hier dazu. Und schließlich geht es um die kritische *Reflexion und Evaluation der Untersuchungsergebnisse und –methoden zu diesen Aspekten.*

Anliegen jeglicher Theoriebildung ist es, zu einem bestimmten Bereich des Gegenstandes der Wissenschaftsdisziplin ein solches Abbild zu schaffen, mit dessen Hilfe es gelingt, die Vielfalt der Beziehungen im *Gegenstands-*

konkreten geistig zu durchdringen und praktisch zu beherrschen. Zentrale Untersuchungsobjekte der Fachdidaktik Mathematik sind die *Persönlichkeitsentwicklung beim Lernen von Mathematik* (Bruder 1989) sowie die *Professionalisierung des Lehrens von Mathematik.*

In der geisteswissenschaftlichen und empirischen Pädagogik, einer zentralen Bezugsdiszipin der Fachdidaktiken, wird unterschieden zwischen „objektiven" (wissenschaftlichen) und „subjektiven" Theorien. Während in der geisteswissenschaftlichen Pädagogik Theorie als ein Wissen, eine Reflexion oder eine planende Vorstellung von der zu gestaltenden Realität angesehen wird, betrachtet die Empirische Pädagogik Theorien als dokumentierbare Systeme von Aussagen über die Realität (Beck 1995).

In der didaktischen Literatur werden verschiedene Theorietypen unterschieden. Nach Euler & Hahn (2004) sind das *Didaktische Modelle, Didaktische Partialtheorien* und *Prinzipiengeleitete didaktische Handlungskonzepte,* wie z.B. schülerzentrierter Unterricht. Beispiele für solche Modelle sind die lerntheoretische Didaktik von Heimann, Otto & Schulz oder das Modell einer kritisch-konstruktiven Didaktik nach Klafki. In der Mathematikdidaktik wären hier ein Modell der „typischen Unterrichtssituationen" (Bruder 1991) ebenso zu nennen wie Phasenmodelle zum Problemlösenlernen oder eine Theorie des Arbeitens mit Aufgaben.

Didaktische Partialtheorien stellen sich dar in Form von *Beschreibungen,* z.B. zeigen Ergebnisse aus Schülerprotokollen im Projekt CAliMERO von Kl.8-10, dass in ca. 60% des Unterrichts CAS-Rechner eingesetzt werden. Zu didaktischen Partialtheorien kann man auch Kompetenzstufenmodelle zählen oder Fehlvorstellungen zu Bruchzahlen. Eine andere Form sind *Erklärungen,* die als empirische Regelmäßigkeiten (deterministisch, statistisch) in einer wenn-dann-Form notiert werden und es gibt sogenannte *Rezeptologien als Alltagstheorien,* z.B. kann man erfahrungsbasiert davon ausgehen, dass ein elementares Mathematik-Verständnis gefördert wird mit Beispielen „dafür" und „dagegen". Erkenntnisse im Range von Erfahrungswissen und Defektwissen gibt es meist in Form von Beobachtungsergebnissen, wenn z.B. (immer wieder) über Defizite in der Verfügbarkeit elementarer mathematischer Grundlagen berichtet wird.

Theoretischer Erkenntnisgewinn entsteht gerade in den Fachdidaktiken insbesondere auch durch Erkenntnissynthese über die Disziplingrenzen hinweg *(z.B. Evaluationsverfahren, Gestaltung von Lernmedien)* durch gegenstandsspezifische Interpretationen vorliegender Erkenntnisse der Bezugsdisziplinen *(z.B. Tätigkeitstheorie)* und als „gesicherte" Erkenntnis durch Verallgemeinerungen von Erfahrungswissen in Form von Annahmen und Hypothesen und deren empirische Prüfung. Die Theoretische Erkenntnisebene umfasst Begriffe, Zusammenhänge, Hypothesen, Annahmen und Erkenntnismethoden sowie offene Fragen. Beispiele für empirisch prüfbare Hypothesen, deren Aussage noch nicht von vorneherein gesichert erscheint, weil z.B. subjektive Erfahrungen oder gar Vorurteile dagegen sprechen könnten, sind: „Deutliche Leistungssteigerungen im MU sind möglich durch eine geeignete Verknüpfung von Problemlösen mit Selbstregulation.“ Oder: „Defizite im rechnerfreien mathematischen Basiskönnen sind nicht eine zwingende Folge eines Rechnereinsatzes im MU sondern auf fehlende Lerngelegenheiten zum Wachhalten zurückzuführen.“

Dem gegenüber stehen Annahmen, die eine starke Überzeugungskraft an sich besitzen, weil sie subjektiv plausibel erscheinen und oft mit mehrheitlich gemachten Erfahrungen übereinstimmen. Annahmen lassen sich i.a. noch weiter operationalisieren (in Form einer Hypothese) und schließlich partiell prüfen. Beispiele sind: „Lehrerpräferenzen für bestimmte Lösungswege beeinflussen die Lernchancen der Schüler/innen“ oder: „Spezifischer Lernzuwachs in der Lehrerbildung ist differenziert erfassbar - u.a. über die Repertory Grid-Technik“.

Perspektiven mathematikdidaktischer Forschung

Fachdidaktische Forschung kann sich nicht auf abstrakte Theoriebildung als höchstes wissenschaftliches Ziel beschränken sondern muss Konzepte zur Überleitung der wissenschaftlichen Erkenntnisse in die Praxis mit entwickeln, z.B. zum Umgang mit Reflexionswissen bzw. Rahmenorientierungen. NEUNER benennt als notwendige Zielrichtung pädagogischer Theorie *„die gegebene Realität nicht nur zu erklären, sondern auch eine neue, weiterentwickelte zu prognostizieren“* (NEUNER 1985, S.34). Derzeit produzieren fachdidaktische Theorien noch zu selten handlungspraktische Regeln oder gar Partialtheorien. Sie vermitteln vorwiegend Reflexionswissen bzw. bieten Rahmenorientierungen (Prinzipien - Beispiele).

Neue Entwicklungsrichtungen für die fachdidaktische Theoriebildung lassen sich aus einer historischen Perspektive auf alternative Zugänge und ihre spätere Synthese (hier nur extrem verkürzt dargestellt) ableiten. Z.B. orientierte sich die Fachdidaktik wechselseitig an der Fachwissenschaft oder es kamen realitätsbezogene Anwendungen stärker ins Blickfeld. Heute hat die Ziel- und Inhaltsausrichtung des MU in den drei allgemeinbildenden Grunderfahrungen von WINTER breiten Konsens gefunden.

Früher wurden Lehrpläne als Inhaltskataloge (wissensbasiert, Input) entwickelt, jetzt entstehen Kerncurricula als Kompetenzkataloge (handlungsbasiert, Output). Es lässt sich antizipieren: Notwendig wird eine (erneute) Zusammenführung von Wissen und Handeln (Können) z.B. mit Basiswissenskatalogen und prototypischen mathematischen Anwendungsfeldern.

Eine zweite Perspektive: Eine Differenzierung zwischen Prozessen und Produkten/Ergebnissen beim Lernen und Lehren war und ist noch notwendig für den fachdidaktischen und auch schulpolitischen Diskurs zu den Zielen und „Ergebnissen“ mathematischer Allgemeinbildung und zur Frage der (begrenzten) Messbarkeit von Lernergebnissen. Hier zeichnet sich jedoch eine konstruktive Auflösung in Richtung „Diagnose-Förder-Modellen“ ab, wenn über kompetenzorientierten Unterricht genauer nachgedacht und das allfällige Testen mehr in Richtung Individual-Diagnose entwickelt wird. Praxisrelevante Ziele von Forschungen zur Kompetenzmessung könnten sein eine Unterstützung der Lehrkräfte beim Aufdecken von Fehlvorstellungen in Diagnosephasen, beim Lokalisieren und Management von solchen Diagnosephasen im Unterrichtsalltag sowie eine lerntheoretisch begründete Entwicklung und Prüfung von Kompetenzstufenmodellen als Konstruktionsheuristik für (binnendifferenzierende) Lernumgebungen zum langfristigen Kompetenzaufbau.

Literatur

Beck, K.(1995): Theorieansätze. In: R. Arnold & A. Lipsmeier (Hrsg.): Handbuch der Berufsbildung. Opladen: Leske + Budrich, S. 457-464

Bruder, R.(Hrsg.) (1989): Standpunkte und Probleme zur Entwicklung der Methodik des Mathematikunterrichts als pädagogischer Wissenschaftsdisziplin.- Diskussions- und Arbeitsmaterial zur Tagung am 3./4. Mai 1989 in Potsdam zu Grundfragen der Theorienbildung in der Methodik des Mathematikunterrichts.- Manuskriptdruck Potsdam 1989, 65 S.

Bruder, R. (1991): Unterrichtssituationen - ein Modell für die Aus- und Weiterbildung zur Gestaltung von Mathematikunterricht. In: Wiss. ZS der Brandenburgischen Landeshochschule Potsdam Heft 2 1991, S. 129-134

Bruder, R., Lengnink, K., Prediger, S.(2003): Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? Ein methodischer Ansatz zur Erfassung subjektiver Theorien mittels Repertory-Grid-Technik. In: mathematica didactica 26(2003) Bd.1, S. 63-85

Euler, D. & Hahn, A. (2004): Wirtschaftsdidaktik. Bern: Haupt Verlag

Giest, H. & Lompscher, J. (2006). Lerntätigkeit – Lernen aus kultur-historischer Perspektive. Berlin: Lehmanns.

Gregory, G. H. (2005): Differentiating Instruction With Style. Aligning Teacher and Learner Intelligences for Maximum Achievement. Thousand Oaks

Kelly, G. A. (1955). The psychology of personal constructs. New York: Norton.

Neuner, G.(1985): Synthese als methodologisches Problem der pädagogischen Forschung. In: Päd. Forschung 26 (1985) 3, S.15-36

Franco CALUORI, Liestal, Ernst RÖTHLISBERGER, Liestal

@rs - eine Selbstlernarchitektur in der mathematikdidaktischen Ausbildung

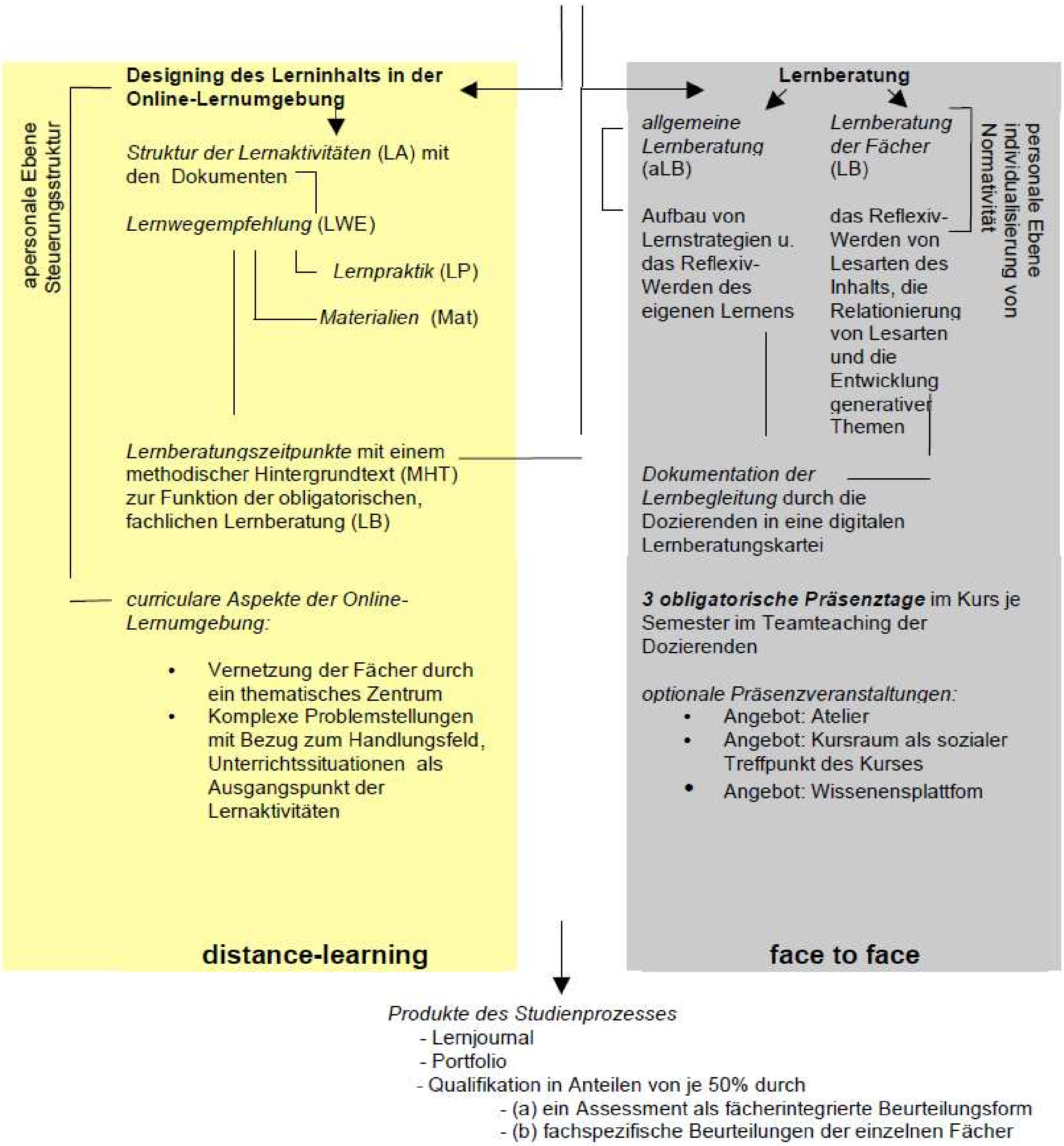
1. Konzept und Durchführung der Selbstlernarchitektur @rs

Im Bachelorstudiengang mit Studienziel Diplom als Lehrperson für die Primarsstufe (1.-6. Klasse) an der PH der Fachhochschule Nordwestschweiz wurde das 2. Semester seit 2005 auch mit einem speziellen Ausbildungssetting mit hohem Selbststeuerungsanteil angeboten. Sieben Fachbereiche, darunter Didaktik der Mathematik, integrieren ihre Studieninhalte in eine fächervernetzte, didaktisch strukturierte Lernumgebung für selbstorganisiertes Lernen. Kernelement dieser Selbstlernarchitektur ist eine Online-Umgebung, die mit Präsenzveranstaltungen funktional verschränkt ist. Das Selbstlernkonzept mit reduzierter Präsenzzeit für die Studierenden nimmt für sich in Anspruch, den Blick vom Lehren auf das Lernen zu verschieben. Wesentliche Dimensionen der didaktischen Entscheidung, wie z.B. Studienzeiten oder Abfolge der Studieninhalte, gehen in die Verfügbarkeit der Studierenden über. Gleichzeitig verändert sich das professionelle Selbstverständnis der Dozierenden, weil die Vermittlung des Inhalts - die traditionelle Lehre - in apersonale Medien verlagert wird. Sie befassen sich schwerpunktmässig mit dem Designing einer Selbstlernumgebung und mit der Begleitung individualisierter Lernprozesse. Durch die Entlastung von der Instruktionsfunktion gewinnen sie Kapazitäten für die Lernberatung, die an vorbestimmten Stellen des Lernsettings im Sinne von Lernentwicklungsgesprächen eingeplant ist.

Konkret gliedert sich das Semester in zwei Phasen von je 6 Wochen individualisiertem Studium mit den zwei thematischen Teilen „Individualisierung“ und „Neue Lernkultur“. Die wöchentlichen Lehrveranstaltungen der sieben teilnehmenden Fachbereiche finden in diesem Semester nicht statt. An drei Präsenztagen am Anfang, in der Mitte und am Schluss des Semesters treffen sich alle Dozierenden und Studierenden. Hier werden die Spezifika des selbstgesteuerten Studiums erörtert, Problemstellungen der einzelnen Fächer im Bezug auf das gemeinsame Thema eröffnet und ein Assessement zum Studienerfolg durchgeführt. Der Hauptteil der Studienaktivitäten findet als distance-learning in der Online-Lernumgebung statt. die Studierenden dokumentieren ihre Studienergebnisse in einem Portfolio und begleiten den eigenen Studienprozess reflexiv mit einem Lernjournal.

Für die Dozentinnen und Dozenten bedeutet das aber nicht verminderten Kontakt mit den Studentinnen und Studenten; im Gegenteil. Die Studentinnen und Studenten sind gehalten, sich mit den jeweiligen Dozentinnen und Dozenten zu Lernberatungsgesprächen zu treffen. Dies sind Fachgespräche mit dem Ziel, Lesarten der Studieninhalte reflexiv zu machen und zu relationieren (vgl. Barbra Ryter Krebs: Reflexivität und Lernberatung in: Forneck et al. 2006). In der ersten 6-wöchigen Phase wurde zum Beispiel im Fach Mathematikdidaktik mit jeder Studentin, jedem Studenten zweimal ein halbstündiges Lernberatungsgespräch geführt. In der zweiten Phase dann nochmal eines in derselben Art. Bei einer Kursgrösse von 20 Studentinnen und Studenten sind das 60 Einzelgespräche.

Die professionelle Tätigkeit der Dozierenden und die hochschuldidaktischen Komponenten der Selbstlernarchitektur @rs (Maier, Wrana 2008, Abb. 6)



Wir konnten beobachten, dass dieses Setting von Selbststudium in Kombination mit intensiven Einzelgesprächen mit den Dozierenden auf der Basis von Portfolio und Lernjournal zu einer wesentlich vertiefteren Auseinandersetzung mit den Inhalten der beiden Schwerpunktthemen „Individualisierung“ und „Neue Lernkultur“ führte als im üblichen Präsenzunterricht.

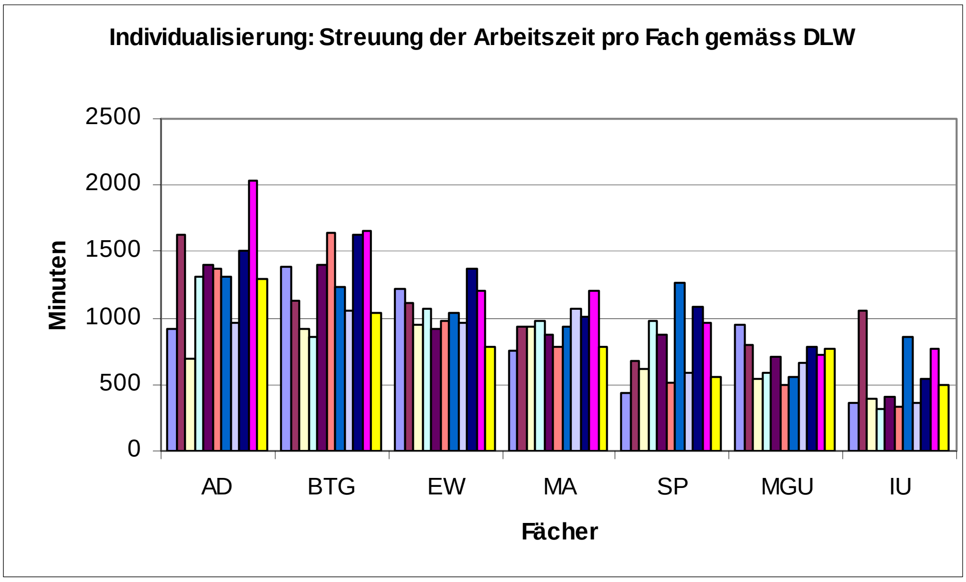
Die beiden Online-Phasen sind je nach Fach in einer Folge von ca. 12 sog. Lernaktivitäten strukturiert. Eine Lernaktivität bildet einen in sich abgeschlossenen Lernschritt. Dazu gehören eine Lernwegempfehlung, eine Lernpraktik und das Studienmaterial. Die Studentinnen und Studenten werden durch die Lernwegempfehlung geleitet; denn sie enthält alle relevanten Informationen über die Problemstellung, die zu erarbeitenden Produkte, den Zugang zu den erforderlichen Materialien, die empfohlenen Lernpraktiken, den Verweis auf die nächste Lernaktivität und auf die Lernberatung.

Die Studentinnen und Studenten begleiten in allen Lernaktivitäten den eigenen Lernprozess mit zwei Planungsinstrumenten, der „Dokumentation der Lernwege“ und der „Lernwegplanung“. Diese beiden Dokumente sind geeignet, die individuellen Lernwege, das Zeitmanagement, das Verhältnis von Arbeitsvorhaben und –realisierung, die Intentionen bei der Auswahl von Lernaktivitäten und Lernwege zu dokumentieren. Damit werden Strategien der Selbstorganisation zugänglich.

2. Forschung im Projekt @rs: Selbstlernarchitekturen in der Primarlehrerausbildung

Ein Teil der beteiligten Dozierenden arbeitete auch im Forschungsteil des Projekts mit. (Neben diese interne Begleitforschung tritt eine externe Evaluation durch Joachim Ludwig, Universität Potsdam). Im zweiten Projektbericht (Maier, Wrana 2008) wurden empirische Studien der ersten Projektphase (2004-2007) publiziert. Geplant ist eine dritte Publikation (ca. 2010-11) deren Fokus auf der Funktion der Lernberatung in Selbstlernarchitekturen liegen wird. Die explorativen Studien der Begleitforschung basieren auf den Dokumenten der Studierenden, sowie auf Audioaufzeichnungen der Lernberatungsgespräche. Exemplarisch für die verschiedenen Forschungsperspektiven der Dozierenden sei hier ein Einblick in den Beitrag "Lernwege und Lernplanung beim selbstsorgenden Lernen" (Röthlisberger, E. in: Maier, Wrana, 2008) gegeben. Aus den Eintragungen im Formular «Dokumentation der Lernwege» wurden der Zeitaufwand, die Sequenzierung der Zeit und die Verteilung der Zeit auf die einzelnen Fächer und Lernaktivitäten rekonstruiert.

Projekt @rs: Wie verteilen die Studierenden (je 11 Studierende in den Fächern Allg. Didaktik, Bildn.-techn. Gestalten, Erz.Wissenschaft, Mathematik, Mensch-Umwelt, Instrumentalunterricht) ihre Studienzeit auf die einzelnen Fächer?



Die Unterschiede beim Zeitaufwand lassen sich auf individuellen Gründe einerseits und strukturellen Gründe anderseits zurückführen. Strukturelle Gründe geben den Dozierenden Anlass, ihre Lernarchitektur zu optimieren. Dass individuelle Gründe wie z.B. Vorkenntnisse und Präferenzen für bestimmte Studieninhalte, die Beherrschung von Studientechniken, die Art der Planung und Organisation der Lernzeit, Einwirkungen des individuellen Umfeldes sich auf das Zeitmanagement auswirken, liegt in der Intention der Selbstlernarchitekturen, die mehr Freiheitsgrade und damit auch mehr individuelle Differenz beim Studieren ermöglichen wollen mit dem Anspruch, die Qualität des Studienprozesses zu verbessern. Individuelle Unterschiede bei der Zeitgestaltung und individuelle inhaltliche Schwerpunktsetzungen sind somit grundsätzlich erwünscht und ein Hinweis darauf, dass «Selbstsorge» auch tatsächlich realisiert wurde.

Literatur

Forneck, Hermann H., Gyger, Mathilde, Maier Reinhard, Christiane (Hrsg.), (2006): Selbstlernarchitekturen und Lehrerbildung. Zur inneren Modernisierung von Lehrerbildung. Bern, 2006.

Maier Reinhard, Christiane, Wrana, Daniel (Hrsg.), (2008). Autonomie und Struktur in Selbstlernarchitekturen. Empirische Untersuchungen zur Dynamik von Selbstlernprozessen. Beiträge der Schweizer Bildungsforschung Band 1:Leverkusen-Opladen.

www.selbstlernarchitektur.ch (Maier Reinhard, Christiane, Wrana, Daniel, 30.3.2010)

Janine CAPPELL, Rudolf STRÄSSER, Claudia VON AUFSCHNAITER, JLU Gießen

Diagnose- und Förderkompetenzen zukünftiger Lehrkräfte der Naturwissenschaften und Mathematik

In der aktuellen Bildungsdebatte wird immer mehr gefordert, dass sich die Bildungsqualität von (Fach-)Unterricht (weiter) verbessern muss. Dabei spielen die Kompetenzen von Lehrkräften, vor allem deren Diagnose- und Förderkompetenzen, eine wesentliche Rolle. Die Ausbildung an der Hochschule zeigt jedoch, dass es gegenwärtig kaum eine koordinierte und systematische Förderung des Aufbaus dieser Kompetenzen gibt. Terhart beschreibt dies folgendermaßen: „Die Fachstudien, die fachdidaktischen Studien, die erziehungs-wissenschaftlichen Studien sowie die schulpraktischen Studien (Praktika) stehen unverbunden nebeneinander. Die Lehrangebote sind fächerübergreifend, z.T. sogar fachintern nicht koordiniert, statt der Einheit eines Studienganges existiert ein weithin unkoordinierter lückenhafter Flickenteppich.“ (Terhart, 2000, S. 27)

Das Projekt „Professionsorientierte Lehrerbildung“, welches vom BMBF gefördert wird (1PH08007), beschäftigt sich mit diesem „lückenhaften Flickenteppich“.

Die drei übergeordneten **Projektziele** sind dabei:

(I) Aufbau von fachspezifischer Diagnosekompetenz im Rahmen der ersten Ausbildungsphase durch horizontal und vertikal vernetzte Angebote in der Lehrerbildung in Kooperation von Mathematikdidaktik, naturwissenschaftlichen Fachdidaktiken und der Pädagogischen Psychologie.

(II) Erkenntnisse über die Wirkung des vernetzten Lehrangebotes über formative und summative Evaluationen (Diagnose) gewinnen und damit auch

(III) Einen Beitrag zur Grundlagenforschung liefern (bzgl. Kompetenzentwicklung von angehenden Lehrkräften).

Der Fokus des Projektes wird dabei auf Studierende des Gymnasialbereiches (Gy), des Haupt- und Realschulbereiches (HR) sowie des Förderschulbereiches (LS) gerichtet, welche zwei Fächer aus den Naturwissenschaften bzw. eine Kombination von Mathematik und einem naturwissenschaftlichen Fach gewählt und im Wintersemester 08/09 bzw. im Wintersemester 09/10 ihr Studium begonnen haben.

Die Diagnosekompetenz wird innerhalb des Projekts auf zwei unterschiedlichen Ebenen modelliert. Eine Eben stellt der *Fachunterricht* dar, da die angehenden Lehrkräfte lernen müssen, die Kompetenzen von Schülern zu diagnostizieren und Lern-/Förderangebote angemessen anzulegen. Die zweite Ebene ist die *Hochschulausbildung,* wo die Kompetenzen der Studierenden diagnostiziert werden müssen, um so die Lernangebote gemäß der Verläufe der Kompetenzentwicklung anzulegen.

Für die Etablierung als auch für die Evaluation angestrebter Kompetenzen wurde ein Kompetenzmodell entwickelt, das sich an die von Shulman (u.a. 1987) getroffene Unterscheidung von Fachwissen (Content Knowledge, CK), Fachdidaktischem Wissen (Pedagogical Content Knowledge, PCK) und Pädagogischem Wissen (Pedagogical Knowledge, PK) anlehnt (Abb. 1). Hierbei wird allerdings der Begriff „knowledge" weiter gefasst und im Sinne von Kompetenzen interpretiert. Ergänzend werden die in der Literatur oft genannten Einflussfaktoren auf den Kompetenzaufbau modelliert (vgl. auch Baumert & Kunter, 2006).

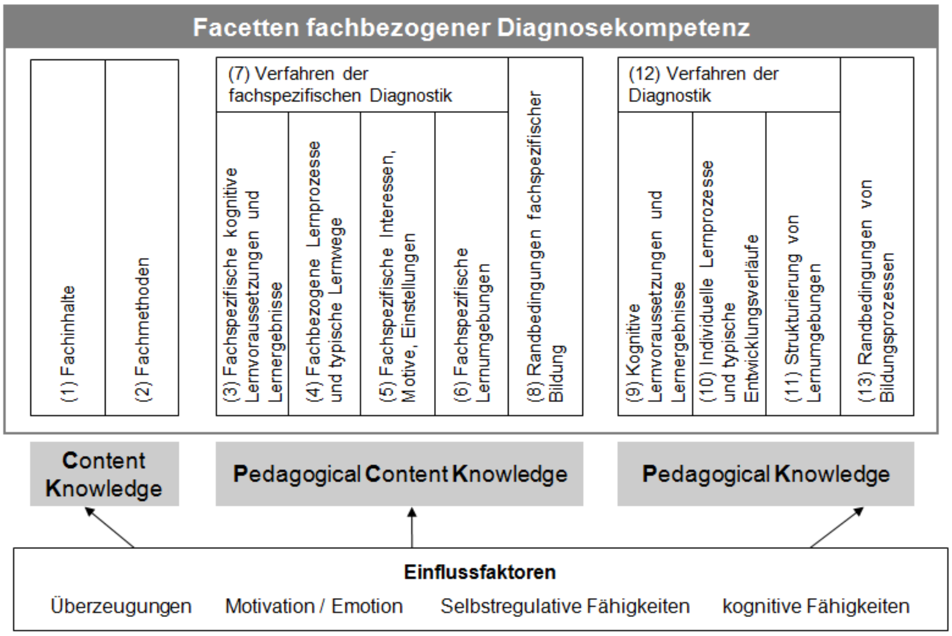


Abb. 1: Kompetenzmodell diagnostischer Kompetenz

In allen Teilbereichen (CK, PCK, PK) werden die für die Studierenden angestrebten Kompetenzen als Standards formuliert. Beispiele hierfür sind:

Tabelle 1: Beispiele für Standards für diagnostischer Kompetenz

(1) Fachinhalte	**(3) Fachspezifische kognitive Lernvoraussetzungen und Lernergebnisse**
Die Studierenden… (1b) erläutern wesentliche fachbezogenen Kompetenzen und Theorien an für Schule typischen Beispielen.	Die Studierenden… (3b) können Aufgabeninhalte, -typen sowie Kontexte hinsichtlich ihres Schwierigkeitsgrades für Schüler einschätzen.

Um die jeweils vorliegenden Kompetenzen der Studierenden und deren Entwicklung theoriebasiert zu erfassen, werden, abgestimmt auf das Modell, verschiedene Erhebungsinstrumente eingesetzt. Die folgende Abbildung 2 zeigt den Arbeitsplan und die darin verorteten Evaluationen:

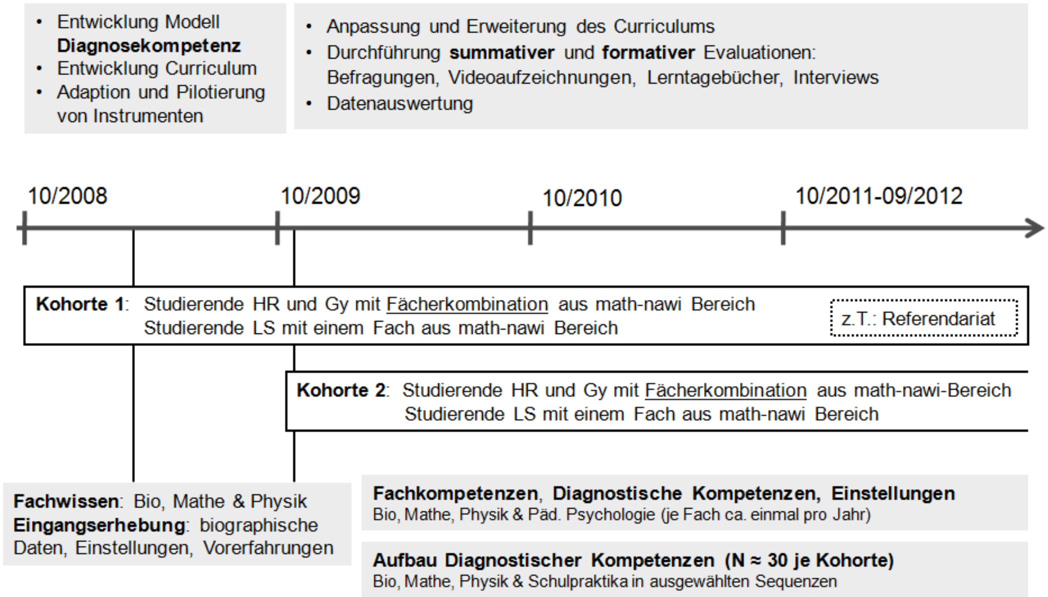


Abb. 2: Arbeitsprogramm

Um die Wirksamkeit der Ausbildung zu evaluieren, wurden in den beteiligten Fächern unterschiedliche Schwerpunkte bei den summativen und formativen Evaluationen gelegt. Die summativen Erhebungen werden ein- bis zweimal im Jahr pro Fach durchgeführt und dabei die Fachkompetenz, die diagnostische Kompetenz sowie die Einstellungen der Studierenden erhoben (mit fortschreitend etwas unterschiedlichem Schwerpunkt). Bei den formativen Evaluationen sollen ca. 30 Studierende pro Kohorte während ihres Studiums begleitet werden, um detaillierter mit speziellen Aufgaben, Videobeobachtungen und Lerntagebüchern die Entwicklung ihrer Diagnose- und Förderkompetenzen zu dokumentieren.

Die Mathematikdidaktik beschäftigt sich dabei schwerpunktmäßig mit den Fachinhalten und zugehörigen Diagnosen. Als erstes pilotiertes Instrument wurde ein „Mathematiktest“ eingesetzt, der sich aus zwei Teilen, einem fachlichen und einem didaktischen Teil, zusammensetzt. Der fachliche Teil wurde aus TIMSS II und III Aufgaben zu den Themengebieten Algebra und Geometrie zusammengestellt (Baumert, 1996, 1999). Diese Aufgaben sollte von den Studierenden zunächst fachlich gelöst werden. Im Anschluss an die jeweilige fachliche Aufgabe, mussten sich die Studierenden in einem didaktischen Teil mit Schülerproblemen und Lösungswahrscheinlichkeiten beschäftigen. Aufgaben in diesem Teil lauteten unter anderem: „Stellen Sie sich vor, 15jährige Schülerinnen und Schüler würden diese Aufgabe bearbeiten. Welche Lösungswahrscheinlichkeit würde sich ungefähr ergeben? Begründen Sie kurz Ihre Einschätzung.“ oder „Welche Probleme könnten Schülerinnen und Schüler in der Oberstufe beim Bearbeiten dieser Aufgabe haben?“ Durch diesen Test sollte zunächst ein Überblick über die fachlichen und didaktischen Kenntnisse der Studierenden zu Beginn ihres Studiums geschaffen werden. Der Test wurde an insgesamt 84 Studierenden des 2. und 4. Fachsemesters (überwiegend Kohorte 1) pilotiert. Aus den Ergebnissen lässt sich folgendes schließen:

(1) Die Studierenden zeigen zu Beginn ihres Studiums stellenweise fachliche Probleme im Bereich Algebra und Geometrie.
(2) Im didaktischen Bereich zeigen sich deutliche Schwierigkeiten, eine fachbezogene Diagnose zu stellen (weniger als 30% angemessene Antworten).
(3) Zwischen den Lehrämtern gibt es zu Beginn des Studiums keine erheblichen Unterschiede im Bereich CK und PCK.

Aufgrund dieser ersten Befunde stellen sich folgende weiterführende Fragen:

(1) Werden die Kompetenzen der eher leistungsschwachen Studierenden (merklich) besser in Bezug auf schulspezifische Aufgaben?
(2) Wird diagnostische Kompetenz aufgebaut? Wird der Aufbau dieser Kompetenz durch ein hohes / niedriges Fachwissen beeinflusst?
(3) Gibt es Unterschiede zwischen HR-, Gy- und LS-Studierenden in der *Entwicklung* von Fachwissen und diagnostischer Kompetenz?

Zu diesen Fragen sollen im Verlauf des nächsten Jahres erste Befunde in beiden Kohorten dokumentiert werden.

Am Projekt beteiligt sind: C. von Aufschnaiter (Physikdidaktik), J. Mayer & G. Dübbelde (Biologiedidaktik), R. Sträßer (Mathematikdidaktik), M. Ennemoser, J. Stiensmeier-Pelster & A. Wolgast (Pädagogische Psychologie).

Literatur

Baumert, J. et al. (1996). *Testaufgaben Mathematik TIMSS 7./8. Klasse (Population 2).* Berlin: MPI.

Baumert, J. et al. (1999). *Testaufgaben zu TIMSS/III Mathematisch-naturwissenschaftliche Grundbildung und voruniversitäre Mathematik und Physik der Abschlußklassen der Sekundarstufe II (Population 3).* Berlin: MPI.

Baumert, J., & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 9*(4), 469-520.

Shulman, L. S. (1987). *Knowledge and teaching: Foundations of the New Reform.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Terhart, E. (2000). *Perspektiven der Lehrerbildung in Deutschland. Abschlussbericht der von der Kultusministerkonferenz eingesetzten Kommission*. Weinheim: Beltz.

NORBERT CHRISTMANN, Kaiserslautern

Stochastik und Musik: Grundideen der Stochastischen Musik im Unterricht

Im 20. Jahrhundert Jahrhundert kam zu den schon immer bei Aufführungen stattfindenden zufälligen Fehlern eine wesentlich neue Qualität von Zufall bei der Gestaltung von Musik (und Kunst generell) hinzu: Auch bei den „objektiven“ Teilen, z. B. **bei** den **Partituren** der Musik, wird der **Zufall als gestaltendes Element** zugelassen, z. B. durch unscharfe Tonhöhenvorgaben in Bildpartituren oder durch Bestimmung der Partitur mittels Algorithmen vor jeder Aufführung. Für eine detaillierte Übersicht wird auf Christmann (2008, 2009, auch 1998) verwiesen. In diesem Beitrag befassen wir uns mit einer speziellen Form von Zufallsprinzipien benutzender Musik, der Stochastischen Musik von Iannis XENAKIS.

1. Iannis Xenakis

Iannis XENAKIS wurde 1922 als Sohn griechischer Eltern in Rumänien geboren, die Eltern übersiedelten 1932 mit ihm nach Griechenland. Dort begann er 1934 mit ersten musikalischen Studien. In den Jahren 1940 – 1947 absolvierte er ein Ingenieurstudium am Polytechnikum in Athen. Er war während des Krieges im Widerstand tätig. Nach dem Krieg wurde er zur Armee eingezogen, entzog sich dieser durch Flucht und wurde deshalb zum Tode verurteilt. Er flieht 1947 nach Paris, findet dort eine Anstellung bei LE CORBUSIER als Ingenieur, bleibt bei ihm bis 1959, wobei er mit fortschreitender Dauer der Anstellung immer mehr auch eigenständige Projekte entwickelt.

Parallel zu dieser Tätigkeit studierte er Komposition bei A. HONNEGER, D. MILHAUD und O. MESSIAN. Er erweist sich als Wanderer zwischen Musik, Architektur und Mathematik. Er gründet 1966 in Paris die Equipe de Mathématique et d’Automatiques Musicales (EMAMu), die 1972 in Centre des Etudes Mathematiques Automatiques Musicales (CEMAMu) umgetauft wurde. Er starb 2001 in Paris. In seinem musikalischen Werk nutzt er die Geometrie (Regelflächen) und besonders die Stochastik.

2. Prinzipien der Stochastischen Musik von I. Xenakis

Wir wollen uns hier nur mit dem Entstehen einer Partitur zur Stochastischen Musik von I. Xenakis befassen, für sein Musikverständnis (Begriff Komposition) verweisen wir auf Xenakis (1972) und Baltenberger (1996).

Beim Kompositionsprozess zur Stochastischen Musik erzeugt Xenakis unter Nutzung des FORTRAN-Programmes ST für stochastische Berechnungen eine klassische Partitur (Z: Nutzung von Zufallsvariablen mit ST, V: Vorgabe durch den Komponisten; SU: Setzung im Unterricht, vgl. 3.):

- Zunächst wird die **Gesamtbesetzung** und die **Zahl der Sequenzen** des Stückes festgelegt (V).
- Für die Sequenzen werden deren **mittlere Dauern** (Taktzahl T) und die Verteilung der Dauern bestimmt. (Z/SU)
- Danach werden die **Dauern** der einzelnen Sequenzen festgelegt (berechnet). (Z/SU)
- Für jede Sequenz ist die **mittlere Tondichte** (Zahl der Töne durch die Sequenzdauer) (Z) und die **Besetzung** (d.h. die aus der Gesamtbesetzung beteiligten Instrumente) zu bestimmen. (V)
- Danach ist die **Verteilung der Töne auf** die einzelnen **Instrumente** (Verteilung der Dichte) zu klären. (V/Z)
- Danach sind die **Einsatzzeitpunkte** (Z) der Töne zu bestimmen, die **Instrumente** (Klangfarben) (Z/SU) für die einzelnen Töne und deren **Tonhöhe** (Z).
- Falls zuvor (als „Klangfarbe") ein **„Glissando"** (eine Spezialität von Xenakis für die Streicher) auftritt, wird dessen **Geschwindigkeit** ermittelt (Z).
- Für die Töne ist noch die **Dauer** (Z) und die **Lautstärke (Dynamik)** zu ermitteln (Z).

Xenakis hatte um 1960 noch keine Notendruckprogramme zur Verfügung, er übertrug die Ergebnisse von ST in eine Partitur. Dabei konnte er nachbessern, wenn Unspielbarkeiten u. ä. entstanden. Die Kompositionen werden mit „ST/N – L, TTMMJJ" bezeichnet, wobei N die Zahl der Instrumente, L die Nummer und TTMMJJ das Datum des Programmlaufs bezeichnen, Beispiele aus dem Jahr 1962 sind ST/10 – 1, 080262; ST/48 – 1, 240162; ST/4 – 1, 080262. Manche Werke werden von ihm auch mit zusätzlichen Titeln versehen. Der Zufall als gestaltendes Element wird so nur dem Komponisten, nicht den ausübenden Musikern überlassen.

3. Ansatzpunkte für den Mathematikunterricht

Im Mathematikunterricht können die in der Stochastischen Musik verwendeten Methoden aus der Stochastik geklärt werden. Dabei kann man sich auf Teilbereiche, z. B. die Erstellung einer Sequenz mit wenigen (eventuell nur einem Instrument) beschränken, Teile der ursprünglich über Zufallsvariablen bestimmten Größen kann man dann einfach festsetzen (SU in der Übersicht). Bei den Berechnungen zur Stochastischen Musik werden unterschiedliche Verteilungen genutzt (u. a. Exponential-, Poisson- und Normalverteilung). Sofern diese bekannt sind (Abschluss Leistungskurs), können sie zur Berechnung der entsprechenden Zufallsvariablen eingesetzt werden. Es ist aber auch möglich und vielleicht sogar interessanter, über empirische Befunde selbst erstellte diskrete Verteilungen zu nutzen. Für ein ausgearbeitetes kleines Beispiel wird auf Christmann (2008) verwiesen.

4. Nutzung musikalischer Software

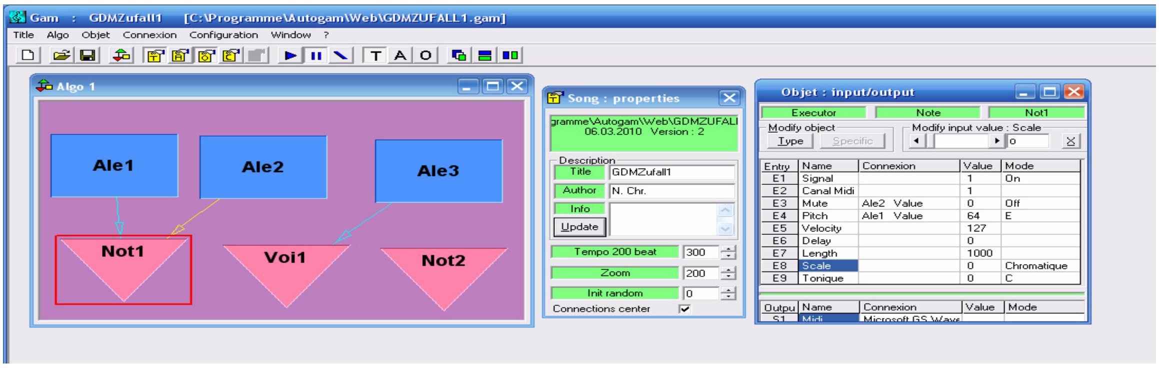
Komponierte Musik sollte auch gehört werden, das gilt auch für durch Zufallsprozesse erzeugte. Nach Erstellung der Partitur kann sie natürlich wie üblich aufgeführt werden. Moderene Musiksoftware ermöglicht aber auch direktes Hören mit der Soundkarte des Computers. Es kann so interaktiv an der Komposition gebastelt werden, zugleich erfahren die Schüler damit eine Einführung in einen wesentlichen Zweig des heutigen Musikgeschehens, der bewussten Musikerzeugung (Komposition) mittels Computer. Im Vortrag werden dazu zwei frei verfügbare Programme angesprochen:

Pd (Pure Data) ist eine professionelle, leistungsstarke Programmiersprache zur elektronischen Klangverarbeitung. Sie ist open source, also frei im Internet erhältlich. Zu diesem Programm bietet Kreidler (2009) ebenfalls frei verfügbar ein Tutorium für das Selbststudium an, darauf sei hier verwiesen.

Aus Frankreich stammt der algorithmisch arbeitende MIDI-Musik-Generator **Autogam** von Bachmann (2001). AutoGam erlaubt musikalische Kompositionen ohne Kenntnisse der Musiktheorie, die Fähigkeit zum Spielen von Instrumenten ist nicht erforderlich. Der Computer wird als „universelle Musikmaschine“ (Prof. Enders, Osnabrück in einem Vortrag in KL) genutzt. Diese völlig freie Software kann mit vielen Beispielen aus dem Netz geladen werden. Dort ist auch eine (teilweise etwas holprige) englische Übersetzung verfügbar, für die Programmanweisungen kann also beim Start Englisch oder Französisch als Sprache gewählt werden. Sobald das (gehörte) Ergebnis zufriedenstellend ist, kann man dieses mittels MIDI-Export in ein Notendruckprogramm übertragen und dann die Partitur des entsprechenden Programmlaufes ausdrucken lassen.

Eine Komposition mit Autogam besteht aus einem oder mehreren „Algos“, die über eine grafisch orientierte Benutzeroberfläche erzeugt werden. Innerhalb der Algorithmen treten 4 Typengruppen von Objekten auf (*Trigger* zur Steuerung, *Generatoren* erzeugen z. B. Zufallszahlen, Zyklen, Sequenzen, Markovketten, *Operatoren* erlauben das Rechnen mit Werten, *Executoren* liefern z. b. die Töne). Diese kann man über Pfeile miteinander verbinden und dabei festlegen, welche Daten zu welchem Zweck von der Quelle ins Ziel des Pfeiles geschickt werden. Die Nutzung der Objekte setzt teilweise mathematisches Verständnis voraus, z. B. über Wahrscheinlichkeiten und Zufallsgeneratoren (Bedeutung von Reset). Dies gilt insbeondere auch wegen der lückenhaften Dokumentation für das Erschließen der Eigenschaften von Objekten. Es wird empfohlen, anhand der zahlreichen verfügbaren Beispiele das Programm zu erkunden.

Hier ein einfaches Beispiel zur Erzeugung einer Zufallsmelodie:



Mittels Ale1 wird eine MIDI-Nummer (60-90) für die Tonhöhe erzeugt, Ale2 legt mit einem {0,1}-Generator fest, ob die Note gespielt wird, Ale3 liefert das zugehörige MIDI-Instrument (0-127), Not2 liefert einen festen Rhythmus. Die Einstellungsfenster für die Objekte werden mittels Mausklick geöffnet (Beispiel Not1 rechts), bei den Song-Eigenschaften kann auch das Tempo reguliert werde.

Weitere Materialien können beim Verfasser per Mail angefordert werden: christmann@mathematik.uni-kl.de

Literatur

Baltenberger, A.(1996). *I. Xenakis und die stoch. Musik*, Haupt Bern usw. 1996

Bachmann, Th. (2001).Autgam, Homepage: http://autogam.free.fr/a_index.htm

Christmann, N. (1998). Skripten zur Fachdidaktik Band 6 des Fachb. Mathematik der Universität Kaiserslautern*: Mathematik in Verbindung mit Literatur, Philosophie und Musik*, darin: *Unterrichtsprojekte zum Themenkreis Stochastik und Musik,* 97-173

Christmann, N. (2008). *Stochastik und Musik, einige Ansätze für fachübergreifenden Unterricht* in: Eichler, A./Meyer J. Anregungen zum Stochastikunterricht Bd.4 (AK Stochastik in der Schule), Franzbecker Bad Salzdetfurth

Christmann, N. (2009). MNU Tagung Regensburg: *Zufall und Musik*, TagungsCD (zus. mit Tagung der DPG) bei Lehmanns Fachbuchhandlung Berlin

Kreidler, J. (2009): Programmierung Elektronischer Musik in PD, http://www.pd-tutorial.com/german/index.html (6. März 2010)

PD-extended, siehe http://puredata.info/ (6. März 2010)

Xenakis, I. (1972). *Formalized Music, Thought and Mathematics in Compostion,* Indiana University Press, Bloomington, London

CD’s Xenakis Chamber Music mit ST/4 und ST/10 bei EMI Classics 2010

Peter COLLIGNON, Erfurt

Zur Erweiterung der Perspektiven auf die Analysis in der Grund- und Regelschullehrerausbildung

Der Beitrag erläutert das Konzept der Analysis-Module für angehende Grund- und Regelschullehrer mit mathematischem Studienschwerpunkt an der Universität Erfurt. Die betreffenden Lehrveranstaltungen richten sich auch an Studierende anderer Hauptstudienrichtungen, die aufgrund der Wahl der „Nebenstudienrichtung Mathematik" bis zum Bachelor-Abschluss mathematische Lehrveranstaltungen besuchen. Mit Ausnahme einiger Fachhochschüler verfügen die Studierenden nicht über einen naturwissenschaftlichen Hintergrund. Kernpunkte sind eine relativierende Einordnung des Schulstoffes sowie die Auswahl weiterführender Themen, die von der üblichen Fachsystematik abweicht und raumgeometrische Aspekte betont.

Analysis in der Orientierungsphase: Kompetenzorientierte Einordnung

Im Verlauf des ersten Studienjahres absolvieren die Teilnehmer eine vierstündige Pflichtveranstaltung zur Analysis. Der Schulstoff soll durch die Eröffnung zusätzlicher Perspektiven ergänzt werden. Eine Orientierung geben die in Danckwerts (2006) dargelegten fundamentalen Ideen des *Messens*, des *funktionalen Zusammenhangs*, der *Änderungsrate*, des *Approximierens* und des *Optimierens*. Bereits in dieser „Orientierungsphase" spielt auch die Idee des *lokalen Linearisierens* eine Rolle. Sachaufgaben bzw. Modellierungen berücksichtigen die vergleichsweise geringen naturwissenschaftlichen Ambitionen der Teilnehmer. Dies eröffnet die Möglichkeit, jenseits (physikalischer) Standardmodelle eigene Modellierungskontexte zu finden. Beispiele dafür sind Wachstumsprozesse in ökonomischen oder sozialwissenschaftlichen Zusammenhängen (vgl. Tietze et al. (2000, S. 210 ff)). Wichtige innermathematische Ziele sind das Verständnis der Aussageverbindung, die den Grenzwertbegriff definiert, die Behebung häufig auftretender Missverständnisse im Zusammenhang mit dem Stetigkeitsbegriff sowie die begriffliche Trennung von Definitionen, allgemeingültigen Aussagen und Teilen des Kalküls, die an spezielle Voraussetzungen gebunden sind.

Beispiel: Die meisten Studierenden erinnern sich an die partielle Integration und die Integration durch Substitution im Sinne einer „Produkt-" bzw. „Kettenregel" der Integralrechnung. Gründe für die vermeintlich umständliche Formulierung („warum jetzt $f' \cdot g$ und nicht einfach $f \cdot g$?") sind nicht mehr gegenwärtig. In diesem Zusammenhang wird die Aufgabe gestellt, aus den bekannten *Differentiations*regeln *selbst Integrations*regeln herzuleiten. Auf diese Weise werden partielle Integration und Substitution als Umkehrung bekannter Ableitungsregeln „wiederentdeckt"; zuweilen wird auch die Quotientenregel in eine Integrationsregel überführt:

$$\int_a^b \frac{f'(x)g(x)}{g^2(x)}\,dx = \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]_a^b + \int_a^b \frac{f(x)g'(x)}{g^2(x)}\,dx\,.$$

Selbstverständlich wird diese Formel selten „gebraucht", setzt sie doch eine sehr spezielle Gestalt der Integranden voraus. Jedoch haben Studierende, die diese Beziehung „entdecken", das Gefüge gewisser Differentiations- und Integrationsregeln an dieser Stelle oft erstmal verstanden.

Ein *weiteres Beispiel* liefert die Relativierung des Konzepts des lokalen Linearisierens: Gibt es Alternativen zur Linearisierung als lokaler Anpassung? Diese Frage führt schnell auf die Idee eines besten lokalen quadratischen oder kubischen Abgleichs und damit – allgemeiner – auf Taylorpolynome. Weitere Variationen ergeben sich aus der Frage nach „geeigneten" Anpassungen im Falle spezieller Funktionsklassen, etwa periodischer Funktionen. An dieser Stelle kann auch der Krümmungskreis an allgemeine Kurven bereits heuristisch behandelt werden.

Analysis in der Qualifizierungphase: Betonung des geometrischen Aspektes

Das weiterführende Lehrangebot ab dem 3. Semester besteht aus zwei Wahlpflichtveranstaltungen zu Volumenintegralen und Differentialgeometrie. Beide Veranstaltungen sollen unabhängig voneinander besucht werden können und eröffnen nach jeweils eigener Art einen Ausblick auf eine analytische Behandlung *raum*geometrischer Themen. Hinsichtlich des Funktionsbegriffs gibt es zwei wichtige Veränderungen: Zum einen können Definitions- bzw. Zielmenge nun ein zwei- oder dreidimensionaler Euklidischer Raum sein. Zum anderen – noch wichtiger – sind die Objekte der Anschauung jetzt nicht mehr *Funktionsgraphen*, sondern *Definitions*- bzw. *Bildmengen*.

Im Falle der Volumenintegrale kann eine räumliche Figur Definitionsmenge einer charakteristischen Funktion (Indikatorfunktion) sein. Die Arithmetik des Integrationsvorgangs richtet sich auf eine geeignete Beschreibung des Integrationsbereiches oder ggf. der Integrationsgrenzen und deren funktionale Abhängigkeiten voneinander.

Besonderer Stellenwert kommt dem Prinzip von Cavalieri zu, welches allgemein besagt, dass unter „geeigneten Bedingungen" das *n*-dimensionale

Maß (Volumen) einer Figur durch ein Integral über die $(n-1)$-Maße geeigneter $(n-1)$-dimensionaler Schnitte bestimmt werden kann. Die Bestimmung des Kugel- oder Kegelvolumens per Integration der Flächeninhalte der Schnittkreise ist vergleichsweise elementar und führt zu einer Bestätigung bekannter Formeln. Die Grundidee des Cavalierischen Prinzips kann sogar ohne Rückgriff auf den Integralbegriff formuliert werden:

Zwei räumliche Figuren F und G haben gleiches Volumen, wenn Ihre Schnittmengen „in gleicher Höhe" gleiche Flächeninhalte besitzen.

Das Cavalierische Prinzip steht nicht nur in Analogie zum systematischen *Abzählen*; es ist mit diesem *identisch*, wenn man einen Integralbegriff zulässt, der auf dem Zählmaß basiert.

Ebenfalls leicht zu formulieren ist der Satz von Fubini, der die Vertauschbarkeit mehrfacher Integrationen betrifft und von den Studierenden – analog zum Satz von Cavalieri – auch als *Prinzip* formuliert werden kann. Beide Prinzipien – Cavalieri und Fubini – stehen in engem Zusammenhang mit der Additivität, der Kommutativität und der Assoziativität von Zählvorgängen.

Die Lehrveranstaltung „Elemente der Differentialgeometrie" behandelt ebene und räumliche Kurven sowie Flächen im $\mathbb{R}^3$ in parametrisierter Form. Die Objekte der Anschauung sind jetzt nicht Graph von Abbildungen, sondern deren *Bilder*, hier auch *Spuren* genannt. Funktionsgraphen treten lediglich als Spezialfälle auf. Dies eröffnet u.a. neue Perspektiven auf Abbildungseigenschaften wie „Injektivität". Der (gezeichneten) Spur sieht man im Gegensatz zum Funktionsgraphen nicht an, ob sie aus einer injektiven Abbildung hervorgeht. Hier sind neue Vorstellungsinhalte von Bedeutung, z.B. die Anzahl der „Passagen" eines Punktes der (Bahn-) Kurve.

Eine „echte" Kurvendiskussion hat nur wenig mit dem Extremwertkalkül der Schulmathematik gemein. Die erste Ableitung führt auf Tangentialvektoren, der Anschauungsinhalt der Steigung spielt eine nachgeordnete Rolle. Weitaus wichtiger ist die *Krümmung* als Kehrwert des Radius des Krümmungskreises. Die allgemeine Formel wird über Plausibilitätsbetrachtungen begründet, ebenso das Bogenlängenintegral. Den Studierenden wird die Aufgabe gestellt, Kurven zu finden, deren Bogenlängen sie berechnen können. Dies führt zu einer intensiven Beschäftigung mit Integralen der Form $\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$, oder – im Falle von Funktionsgraphen – mit Integralen des Typs $\int_a^b \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$. Durch Einsetzen bekannter Funktionsterme für f

stoßen die Studierenden auf Schwierigkeiten, die eine auf den ersten Blick einfache Formel in sich bergen kann. Als rektifizierbarer Funktionsgraph wird meist ein Zweig der Neilschen Parabel $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = x^{3/2}$, entdeckt. Ein überraschendes Ergebnis besteht darin, dass sich die Bogenlängen gewisser Kurven, die allenfalls im Sinne impliziter Funktionen lokal als Funktionsgraphen interpretierbar sind, leichter berechnen lassen. Beispiele sind der Kreis und die logarithmische Spirale.

Anders als in der klassischen Differentialgeometrie üblich, werden auch Flächen zunächst in parametrisierter Form betrachtet („Flächenstücke"). Ziel ist ein qualitatives Verständnis der Gauß-Abbildung, die den ersten wichtigen Krümmungsbegriff für Flächen vorbereitet, vgl. Bär (2001, S. 118 ff). Von besonderer Bedeutung sind Rotationsflächen, die von einer um eine Achse rotierenden Kurve erzeugt werden. Sobald eine gewisse Sicherheit im Umgang mit parametrisierten Kurven besteht, stellt die Generierung von Rotationsflächen mithilfe solcher Kurven das räumliche Vorstellungsvermögen und die analytischen Fähigkeiten vor zumeist lösbare Aufgaben. An dieser Stelle stoßen die Studierenden auf aus der Geographie bekannte Begriffe, die nun präzisiert und verallgemeinert werden (Breitenkreise, Meridiane; Geometrie der Kugeloberfläche).

Bemerkungen zur Didaktik

Selbstständiges Modellieren und „Entdecken" erfordern Kompromisse hinsichtlich der formalen Behandlung der Themen, vgl. Danckwerts et al. (2006, S. 9); im Vordergrund stehen (fundamentale) Ideen. Eine – zum Teil propädeutische – Einführung in Themen der Analysis, die nicht in der Schule behandelt werden, relativiert den dort erlernten Kalkül in dem Sinne, dass seine Stellung innerhalb der Mathematik erkannt wird. Die Themenauswahl kann so erfolgen, dass das für Grund- und Regelschullehrer wichtige räumliche Vorstellungsvermögen geschult wird. Die analytische Behandlung geometrischer Motive ermöglicht eine Auseinandersetzung mit topologischen Grundkonzepten. Ausblicke auf Themen der weiterführenden Analysis, verbunden mit Hinweisen auf die Genese des jeweiligen Gebietes, sind mathematisch und mathematikdidaktisch bildungsrelevant.

Literatur

Bär, C.: Elementare Differentialgeometrie. Berlin, New York, 2001

Danckwerts, R.; Vogel, D.: Analysis verständlich unterrichten. München, Heidelberg, 2006

Jahnke, H. N. [Hrsg.]: Geschichte der Analysis. Heidelberg, Berlin, 1999

Tietze, U.P.; Klika, M.; Wolpers, H.: Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Bd. 1 – Didaktik der Analysis. 2. Aufl.; Braunschweig, Wiesbaden, 2000

JULIA CRAMER, Bremen

Induktion durch vollständiges Zeigen. Schlussweisen in Argumentationsprozessen

In diesem Beitrag soll mit Hilfe einer qualitativen Fallstudie ein Analyseinstrument vorgestellt werden, mit dem nicht nur die Struktur von Argumentationsprozessen, sondern auch ihre „mathematische Qualität“ anhand der genutzten Schlussregeln beschrieben und rekonstruiert werden kann.

Theoretischer Hintergrund

In vielen Untersuchungen über Argumentations- oder Beweisprozesse hat sich das Toulmin-Schema als geeignet erwiesen, um die Struktur und die Tiefe mathematischer Argumentation zu beschreiben (Knipping 2003). Das Toulmin-Schema (Toulmin 1996) unterscheidet Bestandteile von Argumentationsprozessen hinsichtlich ihrer Funktion in Datum, Konklusion, Schlussregel, Stützung, und Operator. Die Konklusion ist die Aussage, die in der Argumentation hergeleitet werden soll. Daten sind unbestrittene Fakten, auf die die Behauptung zurückgeführt wird. Schlussregeln erklären den Schritt von den Daten auf die Konklusion. Stützungen geben an, wieso eine Schlussregel angewendet werden kann. Operatoren schränken die Gültigkeit einer Aussage ein oder nennen Ausnahmebedingungen. Konklusionen, die im Argumentationsprozess als geltend akzeptiert werden, können als neue Daten verwendet werden. Werden geäußerte Daten, Schlussregeln, Stützungen oder Operatoren in Frage gestellt, werden diese Bestandteile ebenfalls zu Behauptungen, die begründet und von den (meisten) anderen Teilnehmern des Argumentationsprozesses akzeptiert werden müssen.

Um die Arten der Schlussregeln zu beschreiben, erweist sich ein Blick in die Rhetorik als nützlich. Ottmers (2007) stellt einen Katalog topischer Schemata zusammen, die er in die zwei Großklassen der alltagslogischen und konventionalisierten Schlussweisen einteilt. Die alltagslogischen Schlussweisen ähneln logischen Schlussweisen stark. Hier beschreibt Ottmers fünf Subklassen: Kausal-, Vergleichs-, Gegensatz- und Einordnungsschlüsse sowie Beispielargumentationen. In den ersten vier Schlussweisen wird von allgemeinen Aussagen auf das Spezielle geschlossen, im letzten Typus von konkreten Beispielen auf das Allgemeine. Kausalschlüsse nutzen Relationen zwischen Ursache und Wirkung, zwischen Grund und Folge menschlicher Handlungen oder zwischen Mittel und Zweck. Vergleichsschlüsse stellen Beziehungen her zwischen gleichen, verschiedenen oder mehr oder wenige ähnlichen Situationen her. Gegensatzschlüsse beziehen sich auf eine Situation, in der nicht gleichzeitig gegensätzliche Bedingungen oder Eigenschaften vorliegen können. In einem Einordnungsschluss wird von einer Definition auf die Eigenschaften des Definierten geschlossen. Bei Beispielargumentationen unterscheidet Ottmers illustrative und induktive Beispiele. Illustrative Beispiele sind solche, an denen gezeigt wird, dass die Behauptung für verschiedene Fälle gilt. Unter einem induktiven Beispiel versteht Ottmers das, was oft auch als generisches Beispiel bezeichnet wird: Obwohl es sich um ein Beispiel handelt, ist ein allgemeiner Charakter erkennbar oder eine allgemeine Strategie, wie die Behauptung auf andere Fälle übertragen werden kann.

Für die zweite Großklasse der konventionalisierten Schlussweisen kann kein vollständiger Katalog angegeben werden, weil es sich hierbei um rein konventionell festgelegte Schlussmuster handelt. Ottmers beschreibt eine Auswahl von konventionalisierten Schlussweisen, die im Alltag oft vorkommen. Für den Schulunterricht ist dabei der Autoritätsschluss von großer Bedeutung. Hierbei wird eine Konklusion dadurch begründet, dass eine anerkannte Autorität ebenfalls diese Behauptung vertritt.

Methodologische Überlegungen

Schwarz et al. (2003) betonen: „*constructing is a never-ending process of marshalling evidence that the chosen belief is (a) supported by the available evidence and (b) more warranted than plausible rival beliefs*“ (Schwarz et al. 2003, 222). Meine Analysen basieren auf der Auffassung, dass Argumentieren eine epistemische, d.h. eine bewusste, auf Erkenntnis ausgerichtete Handlung ist. Der Erkenntnisgewinn entsteht durch das Einlösen und Überprüfen von aufgestellten Geltungsansprüchen. Als Argumente werden hier Aussagen aufgefasst, die eine Behauptung wahrscheinlicher machen.

Die hier analysierten Daten stammen aus der Pilotphase des Forschungsprojekts „Effective knowledge construction in interest-dense situations“, das an den Universitäten Bremen, Tel-Aviv und dem Jerusalem College of Technology durchgeführt und von der German-Israeli-Foundation (Projektnr. 946-357.4/2006) gefördert wird. In dieser Fallstudie bearbeiten zwei leistungsstarke Schülerinnen (10. Klasse, Gymnasium) eine logische Aufgabe (s. unten). Das Transkript dieser Situation wurde in zwei Schritten analysiert. Zunächst wurde der Bearbeitungs- und Erkenntnisprozess in Turn-by-turn-Analysen rekonstruiert. In einem zweiten Schritt wurden die Bestandteile der Argumentationsprozesse sowie die Schlussweisen mit Hilfe des Toulmin-Schemas und von Ottmers Katalog topischer Schemata identifiziert. Es soll den folgenden Fragen nachgegangen werden:

- Welche Schlussweisen verwenden die Schülerinnen?

- Gibt es Schlussweisen, die sich nicht mit Hilfe des Katalogs topischer Schemata von Ottmers beschreiben lassen?

Die Aufgabe: Die Berater des Königs

Stell dir vor, du möchtest Berater eines Königs werden und musst zu diesem Zweck eine Aufnahmeprüfung bestehen, in der deine logische Kompetenz geprüft wird. Zu dieser Aufnahmeprüfung werden alle Berater des Königs eingeladen, die diese Aufnahmeprüfung selbst bereits bestanden haben und die Regeln kennen. Auf diesem Treffen bittet der König alle seine Berater und den Prüfling, in einem Kreis Platz zu nehmen. Er setzt jedem im Kreis einen Hut auf und sagt: „Mindestens einer von euch trägt einen Hut, der mit einem `X´ markiert ist. Jeder von euch hat die Aufgabe, herauszufinden, ob sein Hut mit einem X markiert ist oder nicht. Im Fünfminutentakt ertönt jeweils ein Gong, bis alle im Kreis wissen, ob sie einen markierten Hut tragen. Jeder von euch, der zu der Schlussfolgerung gekommen ist, dass sein Hut mit einem X markiert ist, hebt beim nächsten Gong die Hand.“ Durch die kreisförmige Sitzordnung sieht jeder Berater und auch der Prüfling die Hüte aller anderen, aber nicht seinen eigenen. Niemand darf sprechen.

Du hast einen Tag Zeit dir zu überlegen, wie du dich in der Prüfung verhalten wirst. Wie gehst du vor?

Erste Ergebnisse und ein kurzer Ausblick

Die beiden Schülerinnen Anja und Frauke gehen sehr strukturiert vor. Sie besprechen zuerst den Fall, dass es genau einen markierten Hut und insgesamt vier Berater gibt. Sie malen eine Skizze der Situation und denken sich abwechselnd in Perspektiven der verschiedenen Berater hinein. Auf diese Weise lösen sie diesen ersten Fall innerhalb weniger Minuten. Sie nennen zuerst die gegebenen Bedingungen der Aufgabe und sammeln damit Datenmaterial für die Argumentation. Unter Rückgriff auf das Diagramm klären sie, welcher Berater wie viele markierte und nicht markierte Hüte sieht. Verknüpft mit der Bedingung, dass es mindestens einen markierten Hut gibt, schließen Anja und Frauke kausal, dass derjenige Berater mit markiertem Hut keinen anderen markierten Hut sieht und somit weiß, dass er selbst einen markierten Hut hat und sich meldet. Dieser Kausalschluss wird als ein neues Datum verwendet. Wenn sich dieser Berater beim ersten Gongschlag meldet, erkennen alle anderen Berater, dass es nur diesen einen markierten Hut geben kann. Auch hierbei handelt es sich um einen Kausalschluss. Der Argumentationsstrang für den Fall genau eines markierten Hutes wird mehrfach durchlaufen. Dabei werden in den ersten Wiederholungen Bestandteile wie die Schlussregel oder Operatoren (dass dieser Schluss nur für genau einen markierten Hut gilt) hinzugefügt oder modifiziert, bis beide Schülerinnen mit der Argumentation zufrieden sind. Doch auch im Folgenden wird der Argumentationsstrang noch ein paar Mal durchlaufen, ohne dass weitere Veränderungen vorgenommen werden. Dies zeigt das hohe Bedürfnis der beiden Schülerinnen nach Absicherung und Prüfung der Argumentation. Je öfter die Argumentation durchlaufen wird, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlschlusses. Dieses Phänomen ist auch beim Durchsprechen späterer Fälle immer wieder beobachtbar.

Anja und Frauke gehen danach systematisch die Fälle von zwei, drei und vier markierten Hüten durch. Dabei nutzen sie jeweils den zuvor besprochenen Fall und lösen die einzelnen Fälle durch Kombinationen aus Kausal- und Gegensatzschlüssen. Die Verknüpfung dieser Fälle ergibt ein induktives Beispiel, anhand dessen Anja und Frauke allgemein das Vorgehen in dieser Prüfung erläutern können. Diese Struktur erkennen sie nach dem Fall genau drei markierter Hüte. Zur Absicherung sprechen sie den Fall vier markierter Hüte durch und springen dann zum Fall genau 10 markierter Hüte. Dieser Sprung zeigt, dass es sich zwar um ein konkretes Beispiel handelt, es aber als induktives Beispiel in der Argumentation genutzt wird. An nur einer Stelle des gesamten Argumentationsprozesses nutzen Anja und Frauke einen konventionalisierten Schluss. Zwischen dem Fall von einem und zwei markierten Hüten glauben sie, die Aufgabe mit Wahrscheinlichkeitsrechnung lösen zu können, denn *„es gibt ja immer so nen Trick“*. Diese Schlussregel bezeichne ich als Schluss aus der Erfahrung und füge sie der Auswahl konventionalisierter Schlussregeln hinzu.

Das Analyseinstrument hat sich in dieser Fallstudie als geeignet erwiesen, die Struktur und die Tiefe des Argumentationsprozesses sowie die Art der verwendeten Schlussregeln zu rekonstruieren. Der konventionalisierte Schluss war hier mathematisch nicht angemessen, die verwendeten Kausal- und Gegensatzschlüsse sowie die Argumentation durch ein induktives Beispiel dagegen schon. Das ständige Durchlaufen von Argumentationssträngen zur Prüfung ist ein erster Hinweis auf Zusammenhänge zwischen Erkenntnis- und Argumentationsprozess. Gleichwohl muss dieses Analyseinstrument erst noch in weiteren Situationen und vor allem über verschiedene Aufgaben hinweg erprobt werden. Vor allem die Art der Aufgabe war in dieser Fallstudie sehr speziell.

Literatur

Knipping, C. (2003). *Beweisprozesse in der Unterrichtspraxis. Vergleichende Analysen von Mathematikunterricht in Deutschland und Frankreich*. Hildesheim: Franzbecker.

Ottmers, C. (2007). *Rhetorik*. Stuttgart: Metzler.

Schwarz B., Neuman, Y., Gil, J. & Ilya, M. (2003). Construction of collective and individual knowledge in argumentative activity. *The Journal of the Learning Sciences*, *12(2)*, 219 – 256.

Toulmin, S. (1996). *Der Gebrauch von Argumenten*. Aus dem Englischen übersetzt von U. Berk. Weinheim: Beltz.

Ervin DEÁK, Budapest

Kritische Untersuchungen über den Tangentenbegriff in mathematischer, didaktischer und mathematikhistorischer Sicht

1. Dies ist eine Auffrischung meines Beitrags zur 34. Jahrestagung der GDM in Potsdam, 2000, über Probleme des Tangentenbegriffes. Es handelt sich um Untersuchungen über die traditionelle und allgemein verbreitete Inkonsequenz der Behandlung dieses Begriffes in der Schulmathematik. Die Erweiterungen des schon 2000 vorgeführten Materials basieren auf neuen Erkenntnissen anhand der Höherentwicklung meiner seit zwanzig Jahren abgehaltenen Serie von Spezialvorlesungen als Wahlfach für Lehramtskandidaten und auf das 2009 eingeführte Pflichtfach Mathematikgeschichte für Lehramtskandidaten in der Master-Ausbildung an der budapester Universität ELTE.

Durch meinen letztgenannten Kurs zieht sich als roter Faden die Erkenntnis hindurch, dass gewisse begriffliche Unzulänglichkeiten in mehreren Gebieten der Schulmathematik auf starren Traditionen beruhen, die sich auf einige wichtige mathematikhistorische Entwicklungsvorgänge zurückführen lassen. Als Motiv des mathematikgeschichtlichen Studiums hat sich das für diesen Hörerkreis als faszinierend erwiesen.

2. Bestimmend für das „Schicksal" des Tangentenbegriffs in der gesamten Schulmathematik ist die Grundschulphase, weil mit der Kreistangente über ihre Definition hinaus einige Vorstellungen verbunden sind, die sich dem Schüler stark einprägen und in der Schule niemals kritisch überprüft werden. Die spontane Übertragung dieser (zum Teil offen formulierten, zum anderen Teil unterschwelligen) Vorstellungen auf den allgemeinen Tangentenbegriff wirkt sich in den späteren Phasen negativ aus. Wir gründen unsere Betrachtungen auf eine Zusammenstellung solcher Vorstellungen.

Sei E ein Punkt einer Linie l. Die <u>*Tangente*</u> e zu l im Punkt E ist eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und

- (I) eine Stützgerade von l in E ist;
- (I*) die einzige Gerade mit der Eigenschaft (I) ist;
- (II) mit l nur den Punkt E gemeinsam hat;
- (II*) die einzige Gerade mit der Eigenschaft (II) ist.

(Das sind andeutungsweise Formulierungen; für mathematische Definitionen bedarf es einer gewissen Lokalisierung, d. h. der Einschränkung, dass diese Verhältnisse von e zu l nur in einer Umgebung von E zu gelten brauchen.)

Die Urquelle dieser Vorstellungen liegt gewiss im gewohnten Bild einer Kreistangente. Bei dieser sehr speziellen Linie muß allerdings diese Aufzählung um eine fünfte Vorstellung erweitert werden:
Sei O der Mittelpunkt eines Kreises. *Die Tangente zum Kreis* in einem Punkt E ist eine Gerade, die durch diesen Punkt geht und

(O) orthogonal zu OE steht.

(Bei der Kreislinie entfällt für (I)−(II*) und (O) die Notwendigkeit der erwähnten Lokalisierung.)

3. In den Vorstellungen (I)−(II*) kommt nur der *Berührungs-Aspekt* des Tangentenbegriffes zum Ausdruck. Dem *Anschmiegungs-Aspekt* wird die folgende Tangentenvorstellung gerecht:

(III) Zu jedem − noch so engen − offenen Winkelbereich e_1Ee_2 mit dem Scheitel E, der e enthält, gibt es eine Umgebung U von E, so dass jener Teil von l, der in U fällt, völlig in diesem Winkelbereich verläuft.

Das ist eine geometrische Fassung eines wichtigen Begriffes der Analysis, der *Besten Linearen Approximation* (BLA). (Für den Fall, dass l der Graph einer Funktion f in der Koordinatenebene und e eine Gerade durch E nicht orthogonal zur x-Achse sind, bedeutet die Existenz der BLA bzw. ihre Steigung genau die Differenzierbarkeit von f im Punkt E bzw. den Wert des Differentialquotienten in diesem Punkt.)

Eine wichtige Quelle der Tangenten-Vorstellung (III) ist die Erfahrung, dass die „Tangenten" im Sinne von (O), (I) und (II) *der Kreislinie* auch noch im Sinne dieser „Anschmiegungs-Eigenschaft" mit dem Kreis verbunden sind. Überhaupt sind bei der Kreislinie alle erwähnten Tangenten-Vorstellungen gleichwertig. (Die entsprechenden Beweise können mit den elementarsten Mitteln der Dreiecksgeometrie geführt werden.) Der Anschmiegungs-Aspekt wurde aber jahrtausendelang wenig beachtet; im Vordergrund stand der Berührungs-Aspekt (und diese Tradition wirkt sich noch heute auf die Schulmathematik ungünstig aus).

4. Die Tangentenvorstellungen (I) bis (II*) waren schon in der griechischen Mathematik tief verwurzelt. Die 2. Definition im III. Buch von *Euklids Elementen* lautet: "*Daß sie den Kreis berühre (Tangente sei), sagt man von einer geraden Linie, die einen Kreis trifft, ihn aber bei Verlängerung nicht schneidet*." (Im Wesentlichen dieselbe Vorstellung deutet sich auch in der 3. Definition des III. Buches an: "*Daß sie einander berühren, sagt man von Kreisen, die einander treffen, ohne einander zu schneiden*." Dieser Begriff wird in den Sätzen 11-13 dieses Buches benutzt.) Das ist eine Kombination der Vorstellungen (I) und (II) über die *Kreistangente*, die dann tatsächlich (in den Sätzen 17-19 und 36-37 des III. Buches) benutzt wird.

In der Schulmathematik wird eben diese Vorstellung – meistens aber die Vorstellung (II) an sich – ohne jede Analyse oder Erklärung auf *beliebige Kurven* erstreckt, wodurch sie mit dem Tangentenbegriff der Differentialrechnung in Konflikt gerät, was wiederum nicht analysiert, sogar überhaupt nicht erwähnt wird.

Die andere wichtige Quelle der antiken Tangentenbegriffe ist die "Kegelschnittlehre" (*Conica*), das Hauptwerk des *Apollonios*. In der Auffassung des Apollonios (die sich durch das ganze Werk hindurchzieht) ist eine Tangente g an einen Kegelschnitt k eine Gerade, die mit k genau einen gemeinsamen Punkt hat *und* von diesem abgesehen gänzlich "außerhalb von k" verläuft. Das ist im Wesentlichen die von Euklid zitierte Definition, also die Kombination von (II) und (I). Im Abschnitt 35 des I. Buches wird zusätzlich gezeigt, dass eine gewisse Tangente an einen gewissen Kegelschnitt *die einzige* mit demselben Berührpunkt ist; hier erscheint also die Vorstellung (II*), u. zw. als *Verschärfung* des Tangentenbegriffes.

Sogar die Vorstellung (III) hat ihr Urbild in diesem Buch. was hier nicht nur bedeutet, dass g eine Tangente (im obigen Sinn) von k ist, sondern dass obendrein "*zwischen g und k keine von g verschiedene Gerade liegt*". Dieser Gedanke erscheint – als eine andere *Verschärfung* des Tangentenbegriffes – an mehreren Stellen des Buches. Das ist – abgesehen von der etwas naiven Formulierung – die dem Fehlen des quantorenreichen Apparats der modernen Analysis zuzuschreiben ist – unverkennbar eine treffende Beschreibung des Begriffs der BLA.

Auch in den *Elementen* Euklids erscheint die BLA. Im § 16 des III. Buches wird nämlich der folgende Satz bewiesen: *Eine rechtwinklig zum Kreisdurchmesser vom Endpunkt aus gezogene derade Linie muß außerhalb des Kreises fallen, und in den Zwischenraum der geraden Linie und des Bogens läßt sich keine weitere gerade Linie nebenhineinziehen; …* . Der zitierte Teil des Satzes ist von höchster Wichtigkeit für unsere Auffassung des Tangentenproblems, da er eine Urform des Begriffs der BLA darstellt.

5. Die folgenden Sätze bringen eine mathematische Analyse des Äquivalenzproblems, das in der Schulmathematik (aber auch vielerorts in der Universitätsmathematik) kritiklos oder überhaupt nicht behandelt wird.

SATZ (a). *Seien f der Graph einer Funktion in der Koordinatenebene, e eine Gerade (nicht orthogonal zur x-Achse) und* $(x_0; f(x_0)) = (x_0; e(x_0))$ *ein gemeinsamer Punkt von f und e. Ist f an der Stelle* x_0 *lokal streng konvex, so gilt auf f und e bezogen* (I*)$\Leftrightarrow$(III) $\Leftrightarrow$(II*). (Auch (1*) und (2*) sollten eigentlich lokalisiert werden.)

SATZ (b). *Seien f der Graph einer Funktion in der Koordinatenebene, für die an einer Stelle* x_0 *die BLA existiert, und e eine Gerade durch den Punkt* $(x_0; f(x_0))$, *die in einer Umgebung von* x_0 *untere oder obere Stützgerade von f ist. Dann ist e diese BLA.*

SATZ (c). *Sei f an einer Stelle* x_0 *lokal streng konvex, und es existiere die BLA für f an dieser Stelle. Sei weiter e eine Gerade durch den Punkt* $(x_0; f(x_0))$. *Dann gilt auf f und e bezogen* (I) $\Leftrightarrow$ (I*) $\Leftrightarrow$ (III) $\Leftrightarrow$ (II*) .

In diesen Sätzen finden wir eine Erklärung der sonderbaren Tatsache, dass die inadäquaten Tangentenvorstellungen Jahrtausende hindurch benutzt worden sind (und auch heute noch in der Schulmathematik und in gewissen Gebieten der höheren Mathematik wie z. B. analytische Geometrie, projektive Geometrie u.dgl.m. vorwiegen), ohne auf mathematische Diskrepanzen zu führen. Diese Tradition geht auf die griechische Mathematik zurück, wo eine nicht-gerade Linie meistens einen Kegelschnitt bedeutete. Allerdings wurden auch einige weitere Linien (z. B. die Archimedische Spirale) behandelt. Allen diesen Linien ist aber gemeinsam, dass sie die Bedingungen der obigen Sätze erfüllen. – Merkwürdigerweise ist jedoch die Eigenschaft (II) – die meistbenutzte Tangentenvorstellung in der Schulmathematik – in die Äquivalenz-Behauptung des Satzes (c) nicht mit einbezogen. Unter den Bedingungen des Satzes gilt nämlich nicht (II)$\Rightarrow$(III) (obwohl (III)$\Rightarrow$(II)).

6. Dies ist eine Kostprobe des einführenden Teils einer größeren Arbeit. In dieser wird die didaktische Tendenz verfolgt, einen völlig neuartigen, konstruktiv-genetischen Erkenntnisweg zur Differentialrechnung aufzubauen. Dabei ist das Grundmotiv das Tangentenproblem. Der Anschmiegungsaspekt wird von Anfang an (auch in der elementaren Geometrie und in der elementaren Algebra) herausgestellt. Der reelle Zahlkörper wird nicht vorausgesetzt, sondern „unterwegs" als notwendig erkannt. Der Weg zu Konvergenzbegriffen führt über die fundamentale Idee der „Kleinheit".

Diese Konzeption ist nicht nur theoretisch tiefgründig und detailliert ausgearbeitet; ich praktiziere sie seit 25 Jahren in Schulexperimenten und in den anfangs erwähnten Spezialkursen für die universitäre Lehrerausbildung.

Bruno DEJON, Erlangen

Syntaxbasierte Meldungen zur Unterstützung selbständigen Lernens mit einem kombinierten Lern-Übungs-Programm

1. Fehlermeldungen

Das Lern- und Übungsprogramm (LuÜP) **Mathe besser verstehen - Negative Zahlen, Brüche und mehr** ist nicht als CD erhältlich, sondern wird im WorldWideWeb auf www.mathemathe.de runtergeladen und ohne weitere Installationsmaßnahmen sofort gestartet.
Das Programm ist für den häuslichen Selbstunterricht gedacht, vor allem aber auch als Werkzeug für die Einzel- und die Partnerarbeit im Unterricht (begleiteter Selbstunterricht!).
Die 28 konsequent aufeinander aufbauenden Kapitel des LuÜP sind durchgängig vertikal vernetzt und gewährleisten ein kohärentes, tieferes Verständnis der vier Grundrechenarten auf **Q**. Zudem bietet das LuÜP in den Lerntexten und den rund 290 großenteils kommentierten Übungen zahlreiche Beispiele horizontaler Vernetzung. *Betr. Vernetzung siehe z.B. Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur, Rheinland-Pfalz (2007).*
Gleichzeitig – und das zeichnet das LuÜP vor anderen vergleichbaren Programmen aus – unterstützt es Lernende beim Einüben der eher mechanischen Techniken des Rechnens auf **Q** durch die besondere Art seiner Fehlermeldungen bei den ärgerlichen, weil allzu leicht übersehbaren **Flüchtigkeitsfehlern**.
Damit sind, technisch gesprochen, **syntaktische Fehler** gemeint, Fehler, die in der Verwendung syntaktisch **unzulässiger Zeichenpaare**, wie z.B. +/ oder +] , bestehen oder aber in der Verwendung eines öffnenden Klammerzeichens ohne zugehöriges schließendes – bzw. umgekehrt. Syntaktisch unzulässig wäre es auch, einen intendierten Dezimalbruch mit dem Kommazeichen enden zu lassen, ohne nachfolgende Dezimalen – oder umgekehrt, in einem Dezimalbruch versehentlich mehrere Kommazeichen zu verwenden.
Solche Fehler sind motivationshemmend, wenn der/die Lernende zu ihrer Aufklärung die Hilfe Dritter in Anspruch nehmen muss. Das entfällt beim Arbeiten mit dem LuÜP. Da kann der/die Lernende mit dem „Was-ist?“-Schalter ein Meldefenster öffnen, in dem in einer ausführlichen Fehlermeldung mitgeteilt wird, an welcher Stelle welcher Fehler vorliegt.
Damit der/die Lernende es überhaupt bemerkt, wenn ihm/ihr beim Schrei-

ben ins Eingabefenster ein Flüchtigkeitsfehler unterlaufen ist, so wird das im sog. Signalfenster durch ein rotes Fragezeichen angezeigt!

Eine zweite Sorte von Fehlern – die das LuÜP durch ein buntes Ausrufungszeichen im Signalfenster anzeigt – kann man als **semantische Fehler** bezeichnen. Ein solcher liegt vor, wenn nach einer Termumformung zwar wieder ein syntaktisch zulässiger Ausdruck vorliegt, dieser aber mit dem ursprünglichen Ausdruck nicht äquivalent ist (was einfach Wertverschiedenheit bedeutet, wenn es in dem Ausdruck keine Variablen gibt).
In der Situation ist der „Was ist?“-Schalter weniger hilfreich, insofern er nur eine freundliche Empfehlung im Meldefenster bewirkt, nachzuprüfen, ob man vielleicht ein nur vermeintlich gültiges Rechengesetz angewandt hat, das es aber in Wirklichkeit gar nicht gibt.
In einer nächsten Phase der Programmentwicklung kann man daran denken, mit dem „Was ist?“-Schalter ein Expertensystem aufzurufen, das qualifiziert ist, mit semantischen Fehlern der beschriebenen Art umzugehen.
Aktuell ist es so, dass der/die Lernende auf der mathemathe.de–Website eine Anfrage an das Benutzerforum richten und da seine Schwierigkeit darlegen kann.
Solch eine Anfrage ist, nebenbei bemerkt, eine sehr nützliche Verbalisierungsübung!

2. 2D-Meldungen

Im LuÜP gibt es einen weiteren Typ von syntaxbasierten Meldungen, die für das selbständige Lernen sehr wichtig sind.
Es sind keine Fehlermeldungen!
Die Meldungen bestehen vielmehr darin, dass im sog. **2D-Fenster** Bauelemente eines Terms farblich hervorgehoben werden.
Wir nennen diese Meldungen **2D-Meldungen**.

Zunächst Folgendes zum 2D-Fenster: Das ist ein nach Wunsch zu öffnendes und zu schließendes Fenster, in dem der Term, d.h. der syntaktisch zulässige Ausdruck, der gerade im (relativ schmalen einzeiligen) Eingabefenster steht, in merklich größerer und daher leichter lesbarer Schrift wiedergegeben wird und vor allem,
in dem Brüche 2-dimensional – soll heißen: mit horizontalen Bruchstrichen – dargestellt sind.
Auf mathemathe.de kann man übrigens unterm Menüpunkt „Features“ die Momentaufnahme eines 2D-Fensters sehen!

Die Bauelemente, um die es bei 2D-Meldungen geht, sind im wesentlichen Terme, (additive) Glieder eines Terms, ferner Brüche, Dividenden, Divisoren, Produkte, Faktoren, Klammern sowie deren Inneres (das seinerseits stets auch ein Term ist).

Beispiel: Zur Hervorhebung eines Bauelements vom Typ „Faktor" klickt man im 2D-Fenster zunächst den Schalter „Faktor" an. Wenn man dann irgendeines der Zeichen des im 2D-Fenster dargestellten Ausdrucks anklickt, so wird der Faktor, zu dem das Zeichen gehört (wenn es denn einen gibt), farblich hervorgehoben.
Wenn das Zeichen zu mehr als einem Faktor gehört, so wird der von der flächenmäßigen Ausdehnung her kleinste der Faktoren hervorgehoben.
In $1 + 2 \cdot (3 + 4 \cdot [5 + 6])$ z.B. wird $[5 + 6]$ farblich hervorgehoben, wenn man 5 oder 6 oder eine der eckigen Klammern anklickt.

Bei den anderen Bauelementen eines Terms ist die Vorgehensweise entsprechend.

Da der/die Lernende im Laufe der zahlreichen Übungen immer wieder aufgefordert wird, dieses oder jenes Bauelement eines vorliegenden Terms farblich hervorzuheben, wird das Auge des/der Lernenden im Laufe des Kurses zuverlässig geschult, auch ohne farbliche Hervorhebung die Bauelemente eines Terms wahrzunehmen.
Diese Kompetenz ist von nicht zu unterschätzender Bedeutung, wenn es darum geht, komplexere Terme umzuformen oder auszurechnen.
Vgl. z.B. Vollrath & Weigand (2007), S. 101 u. 156.

3. Das Stichwortverzeichnis

Da das selbständige Lernen sehr im Mittelpunkt unserer Überlegungen steht, soll hier nicht zuletzt als extrem wichtiges und hilfreiches Funktionselement des LuÜP das **Stichwortverzeichnis** angeführt werden.
Mit seinen mehr als 600 ausführlichen Einträgen erlaubt es dem/der Lernenden, praktisch jeden Begriff zu lokalisieren, der im Zusammenhang mit einer Meldung oder aus sonstigem Anlass nachzuschlagen ist.
Sehr praktisch ist dabei, dass das Stichwortverzeichnis sich gleich an der richtigen Stelle öffnen lässt, indem man den Anfangsbuchstaben des interessierenden Begriffes eingibt.

4. Zusammenfassung

Das LuÜP wird zu Recht als **Lernprogramm** bezeichnet:

Die Lerntexte der 28 Kapitel schreiten in moderaten Schritten voran, die dem jeweiligen Schwierigkeitsgrad angepasst sind.

Die vertikale Vernetzung ist sehr stark und wird durch ein umfangreiches und leicht zu handhabendes Stichwortverzeichnis unterstützt. Zudem gibt es viele Beispiele horizontaler Vernetzung.

Das LuÜP wird zu Recht als **Übungsprogramm** bezeichnet:

Es gibt rund 290 großenteils kommentierte und diskutierte Übungsaufgaben.

So wie die Lerntexte sind sie sehr stark vertikal und horizontal vernetzt.

Bei den ärgerlichen Flüchtigkeitsfehlern (Syntaxfehlern) kann der/die Lernende eine ausführliche Fehlermeldung anfordern, die es ihm/ihr erlaubt, auf die Hilfe Dritter zu verzichten.
Das ist motivationsfördernd und regt dazu an, sich eigenverantwortlich und selbständig und handlungsorientiert die ansonsten eher mühsamen mechanischen Techniken des Rechnens auf **Q** anzueignen.
Das Verständnis dessen, was dabei geschieht, braucht dabei nicht zu leiden! Denn die Übungsaufgaben laufen streng parallel zum Lerntext: am rechten Rande der Lerntexte der einzelnen Kapitel werden jeweils die Aufgaben mit ihren Nummern angegeben, die an der Stelle zu bearbeiten sind.

Das wichtige und zwingend gebotene Verständnis für die Struktur von Termen wird mithilfe jederzeit abrufbarer 2D-Meldungen entwickelt.

Literatur

Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur, Rheinland-Pfalz, *Rahmenlehrplan Mathematik (Klassenstufen 5 – 9/10)* , Stand: Mai 2007.

Vollrath, H.-J & Weigand, H.-G. (3. Auflage, 2007). *Algebra in der Sekundarstufe*. München: Elsevier; Spektrum Akademischer Verlag.

Theresa DEUTSCHER, Dortmund

Der Umgang von Schulanfängern mit dekadisch-strukturierten Anzahlen

1. Theoretisch-empirischer Hintergrund

Vom ersten Schuljahr an dienen dekadisch-strukturierte Punktefelder zur wesentlichen Veranschaulichung unseres Zehnersystems. Als Handlungsfelder und Repräsentanten können konkrete Handlungen an ihnen durchgeführt werden und sich vom Material losgelöste Zahl- und Operationsvorstellungen entwickeln (vgl. Krauthausen 1995, 92). Dabei lässt „die Regularität der Anordnung die simultane Erfassung von Teilen und ihre Gruppierung“ (vgl. Lorenz 1992, 145) auf verschiedene Weise zu. Hierdurch wird den Kindern eine Alternative zum Abzählen einzelner Objekte geboten und somit ein Beitrag zur Ablösung vom zählenden Rechnen geleistet (vgl. Wittmann 1994, 45). Des Weiteren bilden die verschiedenen Sichtweisen eine Verständnisbasis für Gesetzmäßigkeiten, die weiterführenden Lerninhalten, wie z. B. der Multiplikation, zugrunde liegen (vgl. Krauthausen 1995, 103).

Studien, die den Umgang von Kindern mit Punktedarstellungen betrachten, liegen ausschließlich für den Hunderterzahlenraum vor (vgl. Scherer 1995, Rottmann & Schipper 2002, Benz 2005, Söbbeke 2005). Die Untersuchungsergebnisse lassen sich in drei zentralen Befunden zusammenfassen:

- den Vorgehensweisen der Kinder liegen oft unterschiedliche und nicht selten unkonventionelle Materiallösungen zugrunde,
- leistungsschwache Kinder, die in besonderem Maße auf das Material angewiesen sind, haben oft Schwierigkeiten im Umgang mit diesem,
- eine nicht geringe Anzahl an Kindern bearbeitet die Aufgaben am Hunderterfeld mittels zählenden Rechnens.

Als Konsequenz für den Unterricht betonen die Autoren die Notwendigkeit einer intensiven Beschäftigung mit dem Hunderterfeld, bei der die individuellen Vorgehensweisen der Kinder Berücksichtigung finden und ein flexibler, rechnender Umgang mit dem Punktefeld angestrebt wird.

2. Eine Untersuchung mit 108 Schulanfängern

Für den Anfangsunterricht, in dem eine inhaltliche Verständnisbasis für das Anschauungsmaterial gelegt wird, ist diese Forderung gleichermaßen richtungsweisend. Der Frage, an welche diesbezüglichen Vorerfahrungen der Schulanfänger der Unterricht anknüpfen kann, wird in diesem Beitrag nachgegangen. Basierend auf einer empirischen Studie, in der klinische Interviews mit 108 Schulanfängern in der 2. bis 4. Schulwoche durchgeführt wurden, werden die Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler bei der Anzahlermittlung der Punkte im Zwanziger-, Hunderter- und Tausenderfeld dargestellt. Neben den Erfolgsquoten der Kinder werden insbesondere unterschiedliche Vorgehensweisen herausgearbeitet und der Umgang der Schulanfänger mit den Punktefeldstrukturen analysiert.

3. Erfolgsquoten

Die Schulanfänger zeigen sich bei den Anzahlermittlungen, die den Inhaltsbereich des ersten Schuljahres teilweise weit überschreiten, zu einem nicht unerheblichen Teil erstaunlich erfolgreich. Die Anzahlermittlung der Punkte im Zwanzigerfeld gelingt mit 65% fast zwei Drittel aller Schülerinnen und Schüler. Die Erfolgsquoten im Hunderterfeld liegen mit 21% überraschenderweise unter dem hohen Prozentsatz von 37% der Kinder, die die Punkteanzahl im Tausenderfeld mit ‚tausend' bzw. ‚zehnhundert' korrekt ermitteln.

4. Vorgehensweisen

Die Vorgehensweisen der Schulanfänger können über die drei Punktefelder hinweg vier verschiedenen Strategien zugeordnet werden:

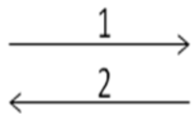
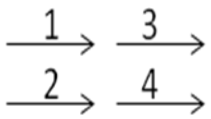
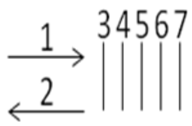
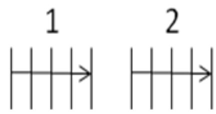
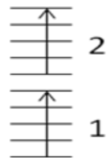
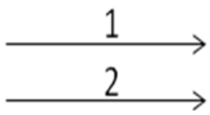
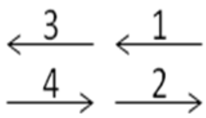
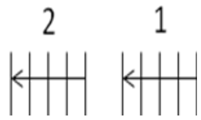
Strategien	20er-Feld		100er-Feld		1000er-Feld	
	Häuf.	**Erfq.**	**Häuf.**	**Erfq.**	**Häuf.**	**Erfq.**
Abzählen in Einerschritten	69,4%	60,0%	18,5%	10,0%	0,0%	-
Abzählen in größeren Schritten	3,7%	75,0%	0,9%	100,0%	33,3%	69,4%
Rechnen	21,3%	78,3%	4,7%	40,0%	0,0%	-
Schätzen	1,9%	0,0%	72,2%	21,8%	65,8%	21,1%
nicht erkenntlich	3,7%	100,0%	3,7%	25,0%	0,9%	0,0%

Tab. 1: Häufigkeiten und Erfolgsquoten der Vorgehensweisen bei der Anzahlermittlung

Die Schulanfänger passen ihre Vorgehensweisen den unterschiedlich großen Punktefeldern tendenziell sinnvoll an. So nimmt das *Abzählen in Einerschritten* bei größeren Punktefeldern ab, während das *Abzählen in größeren Schritten* gleichzeitig zunimmt. Ein Drittel aller Schulanfänger zählt im Tausenderfeld die Punkte in größeren Schritten ab, während die Anzahlermittlung durch das *Abzählen in Einerschritten* entfällt. Der Rückgang des *Rechnens* beim Hunderter- und Tausenderfeld kann auf die geringere Vertrautheit der Schulanfänger mit diesen Zahlenräumen zurückgeführt werden. Bei allen drei Strategien nutzen die Schulanfänger die Punktefeldstrukturen, um den Punkten einzeln oder gruppenweise in einer bestimmten Reihenfolge nachzugehen. Das *Schätzen* – eine Vorgehensweise, die den Kindern immer dann vorgeschlagen wird, wenn ihnen keine Anzahlermittlung möglich ist – verfolgen sie im Hunderterfeld zu 79% auf Anfrage der Interviewerin. Im Tausenderfeld wählen 86% der schätzenden Schulanfänger diese Vorgehensweise von sich aus.

5. Heterogener Umgang mit den Punktefeldstrukturen

Der Umgang der Schulanfänger mit den Punktefeldstrukturen stellt sich auch innerhalb der einzelnen Strategien als sehr heterogen heraus, wie sich an einer Auswahl der verschiedenen Lesearten des Zwanzigerfelds beim *Abzählen in Einerschritten* verdeutlichen lässt:

Reihenweise (10er-Reihe)	**Reihenweise (5er-Reihe)**	**Mischform**	**Spaltenweise**	**andere**
 **8**	 **3**	 **2**	 **14**	 **1**
 **7**	 **3**		 **6**	

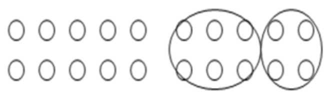
Tab. 2: Strukturnutzung des Zwanzigerfelds beim Abzählen der Punkte in Einerschritten

Die Nummerierung der Strukturelemente gibt die Reihenfolge an, in der die Kinder den Punkten nachgehen. Die Zahlen rechts unten in den Zellen geben die absolute Häufigkeit wieder, mit der die entsprechenden Strukturen verfolgt werden. Insgesamt sind 19 verschiedene Strukturierungen des Zwanzigerfelds beim *Abzählen in Einerschritten* zu beobachten. Dabei nutzen alle Kinder die Strukturen des Zwanzigerfelds bei der Anzahlbestimmung, doch entsprechen die Vorgehensweisen oft nicht der Konvention.

6. Flexibler Umgang mit den Punktefeldstrukturen

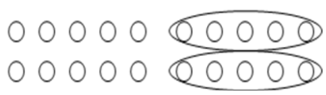
Der flexible Umgang einiger Schulanfänger mit den Punktefeldstrukturen kann anhand von Julias Vorgehen verdeutlicht werden. Wie auch andere Kinder nutzt sie die Strukturen auf unterschiedliche Weise, um die Anzahl der Punkte rechnerisch zu ermitteln:

J: „Also, da sind einmal vier *(zeigt auf die vier äußeren Punkte rechts)* und da sind einmal sechs *(zeigt auf die sechs Punkte links daneben)*.“



I: „Und wie viele sind das insgesamt?“

J: „Fünf *(Punkte in der oberen Reihe auf der rechten Seite)* plus fünf *(Punkte in der unteren Reihe*



auf der rechten Seite) sind zehn."
I: „Und wie viele sind das alle zusammen?" *Umkreist das Zwanzigerfeld.*
J: „Zehn plus zehn ist zwanzig."

7. Umgang mit der dekadischen Struktur der Punktefelder

Dass Schulanfänger auch in hohen Zahlenräumen bereits auf Strukturen des Zehnersystems zurückgreifen, zeigt beispielsweise David als eines von insgesamt 11 Kindern, die die Punkte im Tausenderfeld in Hunderterschritten zählen und die zehn Hunderter zu einem Tausender bündeln:

I: "Wie viele Punkte sind das denn *(zeigt auf das Tausenderfeld)*, wenn das *(zeigt auf das Hunderterfeld)* hundert Punkte sind."
D: *Zählt die zehn Felder leise, denkt kurz nach und antwortet:* „Tausend."
I: „Ja und wie bist du darauf gekommen?"
D: „Weil einhundert, zweihundert, dreihundert, … aber es gibt hier ja nicht zehnhundert"
I: „Genau. Und deswegen…"
D: „…ist das tausend."

8. Schlussfolgerung

Die Vorerfahrungen der Schulanfänger zeichnen sich als fruchtbare Ausgangsbasis für die Behandlung strukturierter Punktefelder im Anfangsunterricht ab. Ihr Strukturverständnis sowie individuelle und flexible Zugänge zum Material bieten die Möglichkeit, als Gesprächsanlässe aufgegriffen, weiterentwickelt und anderen Kindern zugänglich gemacht zu werden.

Literatur

Benz, Ch. (2005). *Erfolgsquoten, Rechenmethoden, Lösungswege und Fehler von Schülerinnen und Schülern bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100.* Hildesheim: Franzbecker.

Krauthausen, G. (1995). Die ‚Kraft der Fünf' und das denkende Rechnen. In G. N. Müller & E. Ch. Wittmann, *Mit Kindern rechnen* (S. 87 - 108). Frankfurt a. M.: Arbeitskreis Grundschule.

Lorenz, J. H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung.* Göttingen: Hogrefe.

Rottmann, T. & Schipper, W. (2002). Das Hunderter-Feld – Hilfe oder Hindernis beim Rechnen im Zahlenraum bis 100? *Journal für Mathematikdidaktik, 23 (1),* 51 - 74.

Scherer, P. (1995). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht der Schule für Lernbehinderte.* Heidelberg: Winter, Programm Ed. Schindele.

Söbbeke, E. (2005). *Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern.* Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. Ch. (1994). Legen und Überlegen. Wendeplättchen im aktiventdeckenden Rechenunterricht. *Die Grundschulzeitschrift, 72,* 44 - 46.

Ernestina DITTRICH, Karlsruhe

Neue Wege bei der Begabtenförderung in der Mathematik Ein fachdidaktisches Gesamtkonzept

Hinter den Aktivitäten für Schulen der Abteilung für Didaktik der Mathematik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT), vormals Universität Karlsruhe, steht das Bestreben, das Interesse der Schülerinnen und Schüler für das Fach Mathematik zu wecken. Die Aktivitäten beruhen auf zwei Schwerpunkten: Förderung von interessierten und hochbegabten Schülerinnen und Schülern und Angebote aus der Fachdidaktik für Studierende und Lehrende. Im Folgenden wird größtenteils über die Förderung der Lernenden berichtet. Die Verzahnung zwischen der Weiterentwicklung der theoretischen Grundlagen und der Umsetzung in die Praxis bei der fachdidaktischen Ausbildung wird hier nur am Rande vorgestellt und reflektiert.

Bei der Förderung der Lernenden sind je nach Neigungen und Vorkenntnissen unterschiedliche Strategien nötig. Neben der Förderung hochbegabter Schülerinnen und Schüler im Schülerstudium sollte nun gerade auch bei denjenigen das Interesse für Mathematik geweckt werden, die dem Fach vielleicht sogar ablehnend gegenüberstehen. Dieses Ziel kann nur erreicht werden, wenn ein neuer Zugang gefunden wird.

Die Lernenden bringen in der Regel unterschiedliche Voraussetzungen mit, die von folgenden Punkten beeinflusst werden: Kognitive und geistige Leistungsfähigkeit, Motivation und Lernbereitschaft, Wissensbasis und Lösestrategien, Belastbarkeit und Konzentrationsfähigkeit, Freizeitinteresse und Sozialverhalten.

Eine Differenzierung nach Begabungen der außerschulischen Förderung erfolgt in drei Stufen:

- wenig Interessierte/Begabte → Interesse wecken durch neue Zugänge
- Durchschnittsbegabte → Anreize zur Vertiefung
- Leistungsstarke → Anreize zur Leistungssteigerung

An Beispielen wird im Folgenden das Gesamtkonzept erklärt.

Schülerlabor Mathematik

Das Schülerlabor Mathematik mit seinen über 70 Exponaten unterstützt das entdeckende Lernen, ohne die Mathematik auf eine nur spielerische Ebene einzuschränken.

Das Motto des Schülerlabors ist: Mathematik erleben, entdecken und begreifen außerhalb des Schulunterrichts. Hier kann man sich nicht verrechnen, man braucht keine Taschenrechner, keine Formeln und keine Gleichungen. Man muss neugierig sein, beobachten, knobeln und experimentieren. Alle wichtigen Informationen für die Schulen sind auf der Homepage veröffentlicht unter http://www.zdmka.uni-karlsruhe.de/.

Bis zum Ende des Schuljahres 2009/10 haben über 400 Schulklassen das Labor besucht. Es kommen Kinder von der dritten bis zur dreizehnten Klasse aus allen Schularten. Sie verbringen in der Regel 90 Minuten mit dem Experimentieren.

Projekt Workshops im Schülerlabor

Im Schülerlabor können interessierte Schülergruppen auch ein mathematisches Thema in einem Workshop vertiefen. Ein Workshop dauert in der Regel 90 Minuten und vermittelt sowohl einen experimentellen als auch einen theoretischen Zugang zu nichtschulischen Themen der Mathematik.

Im Schuljahr 2008/09 startete das Projekt „Verbesserung der fachdidaktischen Ausbildung durch praxisnahe Zusammenarbeit von Schülern und Studenten“. Das Projekt richtet sich an begabte Schülerinnen und Schüler aus den Klassen sieben bis neun und wird von einer Lehrerin, die durch Lehramtsstudierende unterstützt wird, durchgeführt. Als Projektthemen werden Gebiete der Mathematik ausgewählt, die nicht primär in der Schule behandelt werden. In den angebotenen Workshops stehen zunächst als didaktisches Konzept entdeckendes Lernen und schülerzentriertes Arbeiten im Vordergrund. Die Fragestellung wird einer mathematischen Modellierung unterworfen. Dieses Modell kann je nach Entwicklungsstufe in der Mathematik bis zu sehr hoher Abstraktion weiterverfolgt werden.

Bei der Entwicklung neuer Workshops erstellen die Schülerinnen und Schüler unter Anleitung der Lehrkraft und der Studierenden aktiv ein Produkt für andere Schüler. In der Fortsetzung findet unter fachkundiger Betreuung eine behutsame Heranführung an das wissenschaftliche Arbeiten und an Abstraktion statt. Dies schließt ein Erwerben der Fähigkeiten im Umgang mit Präsentationstechniken und neuen Medien, die für die Mathematik geeignet sind, ein.

Da an diesem Projekt sowohl Personen aus der Schule als auch aus der Universität zusammenarbeiten, erfahren die Schülerinnen und Schüler schon frühzeitig einen Einblick in die Wissenschaft Mathematik auf einem für sie maßgeschneiderten Niveau. Für die beteiligten Studierenden verbessert sich das Angebot in der Lehre, da sie eine praxisorientierte Ausbildung erhalten.

Schülerstudium

Das Projekt Schülerstudium am KIT ist eine gemeinsame Initiative der Universität Karlsruhe (TH) und des Regierungspräsidiums Karlsruhe zur Förderung besonders leistungsstarker und motivierter Schülerinnen und Schüler. Seit dem Wintersemester 2006/2007 bietet die Fakultät für Mathematik interessierten, motivierten und leistungsstarken Schülerinnen und Schülern die Möglichkeit, reguläre Vorlesungen und Übungen zu besuchen.

Die Ziele des Projektes Schülerstudium sind:

- Lernen auf höchstem Niveau: Mehr wissen und verstehen, die eigenen Grenzen kennen lernen.
- Orientierungshilfe: Die Wahl des Studienfachs vor Beginn des eigentlichen Studiums testen.
- Selbstständiges Lernen frühzeitig üben.
- Studienzeitverkürzung.

Grundsätzlich sollten nur die Schülerinnen und Schüler teilnehmen, die durchweg gute bis sehr gute Schulleistungen zeigen und sich im besonderen Maße für Mathematik interessieren.

Die Schule, das heißt der Fachlehrer oder die Fachlehrerin und die Schulleitung, muss die Teilnahme befürworten. Über die Zulassung entscheidet dann die Universität. Bei minderjährigen Schülerinnen und Schülern ist auch die Zustimmung der Eltern erforderlich.

Die Schülerinnen und Schüler sind verpflichtet, die Teilnahme an den Universitätsveranstaltungen formal wie die Unterrichtsteilnahme in der Schule zu handhaben. Sie werden teilweise vom Unterricht freigestellt, um die Veranstaltungen an der Universität besuchen zu können. Die Schülerinnen und Schüler arbeiten den durch die Unterrichtsbefreiung versäumten Schulstoff selbstständig nach. Sie können sich jederzeit wieder von dem Projekt abmelden, wenn der Arbeitsaufwand zu viel werden sollte oder die Leistungen in der Schule abfallen.

Hector-Seminar

Das Hector-Seminar ist ein bisher einmaliges Projekt zur Hochbegabtenförderung in den Fachbereichen **M**athematik, **I**nformatik, **N**aturwissenschaft und **T**echnik (MINT), das durch die Hector-Stiftung in Kooperation mit dem Regierungspräsidium Karlsruhe möglich wurde.

Das Hector-Seminar führt jeweils im Herbst standortübergreifende Projekte für die Jahrgangsstufe zwölf durch, die an einem der Standorte Heidelberg, Karlsruhe oder Mannheim stattfinden. Seit 2005 beteiligt sich die Abteilung für Didaktik der Mathematik regelmäßig an diesen Projekten. Es wurden sowohl Semesterarbeiten angefertigt als auch Seminare durchgeführt. Darüber hinaus wurden Projektphasen zur Gruppentheorie am Rubiks Zauberwürfel, Billard und Fibonacci Zahlen erfolgreich durchgeführt. Auch dieses Jahr läuft ein Projekt zu mathematischen Zaubereien.

Schnupperkurse

Der Schnupperkurs findet jährlich im Sommersemester statt. Es ist ein Angebot der Fakultät für Mathematik für Schülerinnen und Schüler der Oberstufe, um einen Einblick in die Universitätsmathematik zu bekommen. In sechs Vorlesungen, die speziell für Schüler aufgearbeitet werden, haben sie die Möglichkeit, ein mathematisches Thema kennen zu lernen. Die Schnupperkurse sind sehr gut besucht, vereinzelt nehmen hochbegabte jüngere Schüler teil. Durch den Schnupperkurs konnten auch schon einige Schülerstudenten gewonnen werden. Bereits angebotene Themen waren unter anderem: Graphentheorie, Knotentheorie, Béziersplines, Problemlösestrategien, Gruppentheorie am Rubiks Zauberwürfel, Mathematische Modelle der Populationsdynamik.

Fachdidaktik für Lehramtsstudierende

Zurzeit werden vier Veranstaltungen aus dem Gebiet der Fachdidaktik angeboten: eine Vorlesung „Fachinhaltliche Didaktik des Mathematikunterrichts“, fachdidaktische Seminare mit Vorträgen von Studierenden oder mit Unterrichtspraxis sowie ein Arbeitskreis „Medien- und Werkzeugeinsatz im MU“ mit praktischen Übungen aus dem Unterricht“.

Angebote für Lehrende und Schulen

Die Abteilung für Didaktik der Mathematik führt im Rahmen einer Zusammenarbeit mit dem Regierungspräsidium Karlsruhe zahlreiche Projekte durch: Didaktikkolloquium, Tagungen und Fortbildungen, Forumsgespräche Mathematik sowie Tagungen des Arbeitskreises Fachdidaktik und.

CHRISTINA DRÜKE-NOE, Kassel

Lernstandserhebungen (VERA 8) – Testaufgaben als Basis der Unterrichtsentwicklung?

Im Fach Mathematik werden bundesweit u. a. in der achten Jahrgangsstufe Lernstandserhebungen, genannt „Vergleichsarbeiten“ (kurz: VERA), durchgeführt. Dieser Beitrag beschreibt den Prozess der Aufgabenentwicklung, skizziert die Testkonzeption, stellt mögliche Vorgehensweisen bei der qualitativen und quantitativen Auswertung der Testergebnisse vor und zeigt auf, wie VERA zur Unterrichtsentwicklung beitragen kann.

1. Grundlagen von VERA

Der in 2006 von der KMK beschlossenen Gesamtstrategie zum Bildungsmonitoring folgend, werden in allen Bundesländern Lernstandserhebungen geschrieben, um Lehrkräften, Schülerinnen und Schülern sowie Eltern eine Orientierung bzgl. des Grades der Standarderreichung bzw. des Kompetenzentwicklungsstandes zu geben. Die auf der Grundlage der Bildungsstandards Mathematik entwickelten normierten Testaufgaben bieten i. S. einer kriterialen Orientierung Anhaltspunkte für Individualdiagnosen und Ansätze zur Förderung. Ergebnisse herkömmlicher Klassenarbeiten, die von Lehrkräften i. A. selbst konzipiert werden, orientieren sich lediglich an einer sozialen Bezugsnorm, und enthaltene Aufgaben sind nicht normiert.

Die Aufgaben in VERA werden von erfahrenen Lehrkräften verschiedener Bundesländer im Auftrag des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) in Kooperation mit der Universität Kassel (Arbeitsgruppe Prof. Blum) und externen fachdidaktischen Bewertern entwickelt. Die Aufgabenentwicklung gliedert sich in die beiden Phasen vor und nach der Pilotierung der Aufgaben. Während der ersten Phase werden die Aufgaben zusammen mit ihren Kodieranweisungen in der Entwicklergruppe erstellt, von Bewertern aus fachdidaktischer Perspektive kommentiert und dann weiter überarbeitet, bevor sie an kleinen Stichproben präpilotiert werden. Die Sichtung der Schülerlösungen führt zu weiteren Präzisierungen der Aufgabenformulierungen und der Kodieranweisungen. Vor Abschluss dieser ersten Phase werden diese Aufgaben von einem am bisherigen Entwicklungsprozess nicht beteiligten Fachdidaktiker final begutachtet. Nach der Pilotierung der Aufgaben werden in Kooperation zwischen IQB und Kassel Vorschläge für die Testhefte erstellt, auch unter Berücksichtigung der empirischen Kennwerte der Aufgaben. Diese Hefte werden allen Bundesländern zur Begutachtung vorgelegt, danach werden unter Beachtung der Länderrückmeldungen die endgültigen Testhefte erstellt. Diese zweite

Phase schließt mit dem Verfassen der zum Test gehörigen didaktischen Materialien durch die Universität Kassel ab. Die Lernstandserhebungen werden bundesweit Anfang März durchgeführt.

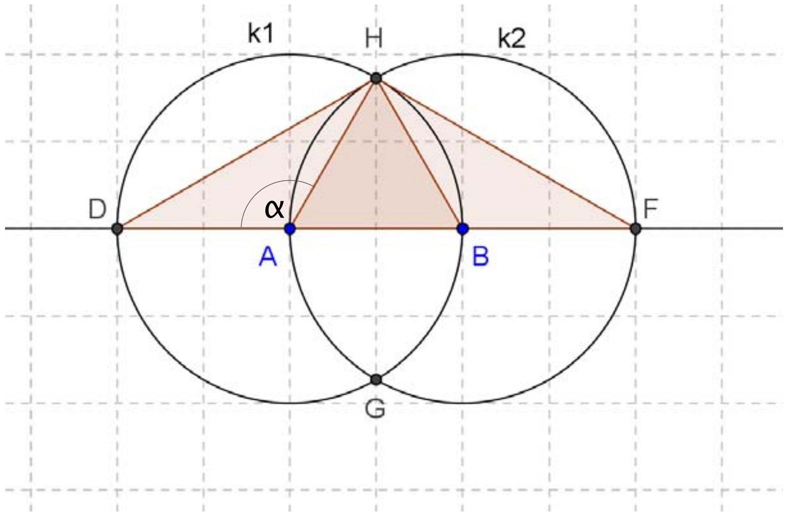
2. Konzeption der Testhefte

Die Testhefte sind für eine Testdauer von 80 min konzipiert. Die Aufgaben sind abhängig von ihrem Schwierigkeitsgrad (Logit-Werte) systematisch im Test angeordnet und in vier Blöcke à 20 min zu den Leitideen Zahl, Messen & Raum und Form, Funktionaler Zusammenhang sowie Daten und Zufall gegliedert. In den drei unterschiedlich schwierigen Testheftvarianten sind alle sechs Kompetenzen und die drei Anforderungsbereiche ausgewogen repräsentiert. Die Zuweisung einer Testheftvariante zu einer Klasse bzw. Schulform erfolgt bundesland- und schulformabhängig. Die Aufgaben sind im geschlossenen, offenen oder Multiple Choice-Aufgabenformat gestellt. Während die Antwortalternativen der MC-Aufgaben stets typische Fehlvorstellungen abbilden, mit dem Ziel, dass die angekreuzten Antworten zur Diagnose genutzt werden können, sollen insbesondere offene Aufgaben Auskunft darüber geben, welche Lösungswege gewählt wurden bzw. ob die konzise schriftliche Darlegung eines Gedankenganges gelingt.

3. Umgang mit den Testergebnissen – Unterrichtsentwicklung

Die Bewertung der – aus testtheoretischen Gründen dichotomen – Items eignet sich nicht unbedingt als Grundlage für eine individuelle Benotung der Testergebnisse. Stattdessen lassen sich auf der Ebene einer Schule, einer Klasse bzw. auch von Einzelschülern (offizielle) quantitative Rückmeldungen mit schul- und klasseninternen qualitativen Auswertungen kombinieren, um eine möglichst umfassende, diagnostisch breit nutzbare Basis für die Feststellung von Förderbedarf zu erhalten und Rückschlüsse für die weitere Unterrichtsgestaltung ziehen zu können. Die Landesinstitute der Bundesländer melden den Schulen zum schul*internen* Gebrauch vielfältige quantitative Testauswertungen zurück, die es jeweils mit Bezug zu korrigierten Landesmittelwerten erlauben, z. B. einen Klassenmittelwert im fairen Vergleich einzuordnen. Einzelne Bundesländer geben neben sozialvergleichenden Rückmeldungen weitere, die einen Bezug zu Kompetenzstufen herstellen.

Eine Einschätzung der Leistung einer Klasse mit Bezug zu korrigierten Landesmittelwerten liefert Hinweise, die deutlich über den Informationsgehalt einer regulären schulinternen Klassenarbeit hinausgehen, da deren Aufgaben zumeist auf der Basis eines subjektiven Empfindens für ihren Schwierigkeitsgrad zusammengestellt werden und prinzipiell keinen Vergleich zu anderen Lerngruppen zulassen. Betrachtet man beispielsweise im fairen Vergleich alle Klassenergebnisse jener VERA-Aufgaben, die die Kompetenz Argumentieren zum Gegenstand haben, so lässt sich mit hoher Wahrscheinlichkeit darauf schließen, ob diese Kompetenz hinreichend entwickelt ist oder ob Förderbedarf besteht. Hinweise auf eine Konkretisierung des Förderbedarfs liefern ergänzende qualitative Auswertungen der Schülerlösungen, wie nachfolgend exemplarisch anhand der Aufgabe „Zwei Kreise“ aus VERA 2010 gezeigt werden soll:



In der oben stehenden Skizze ist A der Mittelpunkt des Kreises k1 und B der Mittelpunkt des Kreises k2. Beide Kreise haben den gleichen Radius $r = |AB|$.

Sonja behauptet: „Der Flächeninhalt des großen Dreiecks DFH ist dreimal so groß wie der Flächeninhalt des kleinen Dreiecks ABH.“ Hat sie recht?

Kreuze an.

☐ Ja, sie hat recht. ☐ Nein, sie hat nicht recht.

Begründe deine Entscheidung.

☒ Ja, sie hat recht. ☐ Nein, sie hat nicht recht.

Begründe deine Entscheidung.

Die Dreiecke haben jeweils 2 gleichlange Seiten und müssen deshalb auch den gleichen Flächeninhalt haben.
(gemeint sind die Dreiecke DAH, AHB, FHB)

Die zugehörige Schülerlösung (s. o.) zeigt Defizite im Argumentieren. Die Eigenschaften der Teildreiecke werden richtig erkannt, aber der Schluss von Seitenlängen auf Flächeninhalte ist nicht gerechtfertigt. Diese Fehlvorstellung kann im Unterricht durch Betrachtung von kontrastierenden Beispielen, durch den Einsatz dynamischer Geometriesoftware oder durch gedankliches Operieren mit solchen Figuren problematisiert werden.

Für solche Analysen können die didaktischen Materialien zu VERA genutzt werden. Diese haben in einem ersten übergreifenden Teil eine Kompetenz als Schwerpunktthema (2009: Modellieren, 2010: Argumentieren) und enthalten in einem zweiten Teil kognitive Analysen aller Testaufgaben einschließlich ihrer typischen Schwierigkeiten und formulieren darauf abgestimmte unterrichtliche Anregungen. Das Testergebnis einer Klasse kann so vor dem Hintergrund einer Reflexion der Aufgabenkultur des eigenen Unterrichts und der eigenen Klassenarbeiten reflektiert und für eine Unterstützung der Schülerinnen und Schüler bei der schrittweisen Entwicklung des Kompetenzaufbaus genutzt werden.

4. Ausblick

VERA kann einen Beitrag zur Unterrichtsentwicklung leisten, wenn der Test und seine Ergebnisse adäquat als Reflexionsinstrument für den Unterricht, die Fachschaftsarbeit sowie für Fortbildungen und zum Aufdecken von Förderbedarf aktiv genutzt wird und wenn gleichzeitig weiterhin kontinuierlich an der Verbesserung des diagnostischen Potenzials von VERA gearbeitet wird. All dies gelingt nicht, wenn die Gefahr der öffentlichen Auswertung (Ranking) besteht und der diagnostische Wert ungenutzt bleibt, wenn eine Verknüpfung mit Unterrichtsentwicklungsmaßnahmen fehlt und Förderkonzepte nicht konsequent weiterentwickelt werden.

Literatur

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) 2004, *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand: München.

Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) 2006, *Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring*. Wolters Kluwer: München.

www.iqb.hu-berlin.de/vera/lernstandsvergleich

Christoph DUCHHARDT, Eva KNOPP, Kiel

Mathematische Kompetenz von Erwachsenen – Ergebnisse einer Vorstudie im Rahmen des Nationalen Bildungspanels

Das Nationale Bildungspanel (NEPS) ist eine Längsschnittstudie im deutschen Bildungswesen. Gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung hat sie das Ziel, individuelle Lebensläufe vom Kindergarten- bis ins Erwachsenenalter unter bildungswissenschaftlichen Fragestellungen zu dokumentieren (Blossfeld, 2008). Um dieses Ziel zu verfolgen, wurde ein interdisziplinäres Cluster aus verschiedenen Forschungseinrichtungen und -gruppen in Deutschland gebildet, das zentral vom Institut für bildungswissenschaftliche Längsschnittforschung (INBIL) an der Universität Bamberg koordiniert wird.

Eingebettet in einen übergeordneten theoretischen Rahmen sollen insbesondere die Zusammenhänge zwischen fünf theoretischen Dimensionen – der Kompetenzentwicklung, den Lernumwelten, den Bildungsentscheidungen, dem Migrationshintergrund und den Bildungsrenditen – beleuchtet werden. Das NEPS ist als Multi-Kohorten-Sequenz-Design angelegt. Es werden ab 2010 gleichzeitig verschiedene Alterskohorten befragt, welche dann über mehrere Jahre im Längsschnitt untersucht werden. Die Struktur des NEPS (Abb. 1) ist demzufolge einerseits auf die theoretischen Dimensionen, andererseits auf die verschiedenen Altersstufen, welche die kritischen Übergangsphasen im Bildungsverlauf darstellen, ausgerichtet.

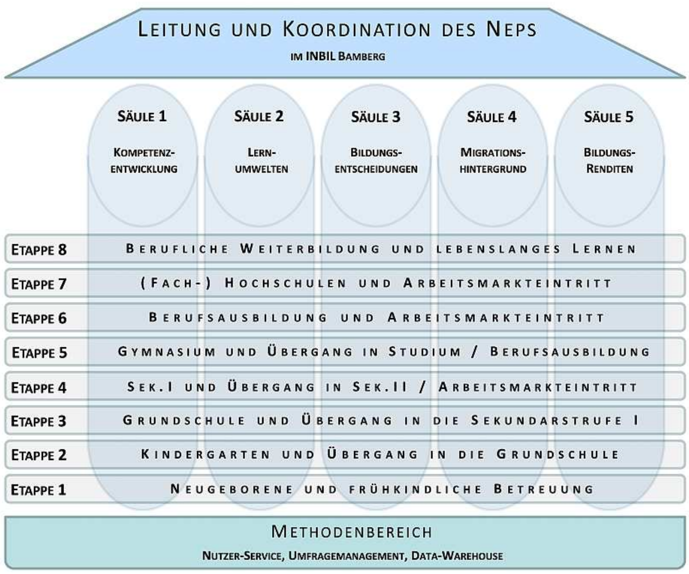


Abbildung 1: Die Struktur des Nationalen Bildungspanels

Das Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik (IPN) in Kiel war hierbei zunächst zuständig für die Ausarbeitung von Rahmenkonzeptionen zur Erfassung der mathematischen, naturwissenschaftlichen Kompetenzen und der Kompetenzen im Umgang mit Computern (Information and Communication Technology Literarcy), die die gesamte Lebensspanne abdecken. Darauf basierend werden nun am IPN Testitems für die verschiedenen Altersgruppen entwickelt. Eine der Gruppen, die ab 2010 getestet werden, sind Erwachsene im Alter zwischen 24 und 65 Jahren.

Betrachtet man den Forschungsstand zur mathematischen Kompetenz Erwachsener, sind als internationale Studien mit deutscher Beteiligung die International Adult Literacy Survey (IALS) und das Programme for the International Assessment of Adult Competencies (PIAAC) zu erwähnen, wobei die IALS-Studie bereits abgeschlossen ist, während die erste Haupterhebung von PIAAC 2011 stattfindet. Einen Überblick über Studien, die im deutschsprachigen Raum stattfanden, liefern u.a. Jungwirth, Maaß und Schlöglmann (1995) sowie Maaß und Schlöglmann (2000). Eine Studie, die die mathematische Kompetenz von Erwachsenen im Rahmen der PISA-Studie untersuchte, ist die Elternstudie von Ehmke und Siegle (2006).

Die Erfassung der mathematischen Kompetenz im Nationalen Bildungspanel basiert in Anlehnung an die PISA-Literarcy Definition auf einer Rahmenkonzeption, die zwischen inhaltlichen Bereichen und kognitiven Komponenten unterscheidet (vgl. Ehmke, Duchhardt, Geiser, Grüßing, Heinze & Marschik, 2009) Strukturell unterscheidet die NEPS-Rahmenkonzeption zwischen vier Inhaltsbereichen – „Quantität“, „Veränderung und Beziehungen“, „Raum und Form“ sowie „Daten und Zufall“ – und verschiedenen kognitiven Komponenten – „mathematisches Argumentieren“, „mathematisches Kommunizieren“, „Modellieren“, „Repräsentieren“, „Lösen mathematischer Probleme“ und „Anwenden technischer Fertigkeiten“. Die Testitems, die diese Konzeption umsetzen, sind dabei in authentische, alltagsnahe Situationen eingebettet und entsprechen somit dem Literacy-Ansatz (vgl. OECD, 2003).

In der von uns durchgeführten Vorstudie wurde auf Basis dieser Rahmenkonzeption ein Instrument mit insgesamt 65 Items zur Erfassung der mathematischen Kompetenz Erwachsener erstellt und erprobt. Jede teilnehmende Person hat ein Testheft mit etwa 40 Aufgaben in 60 Minuten bearbeitet. Um Positionseffekte zu vermeiden, wurde ein Rotationsdesign mit insgesamt neun Testheften verwendet.

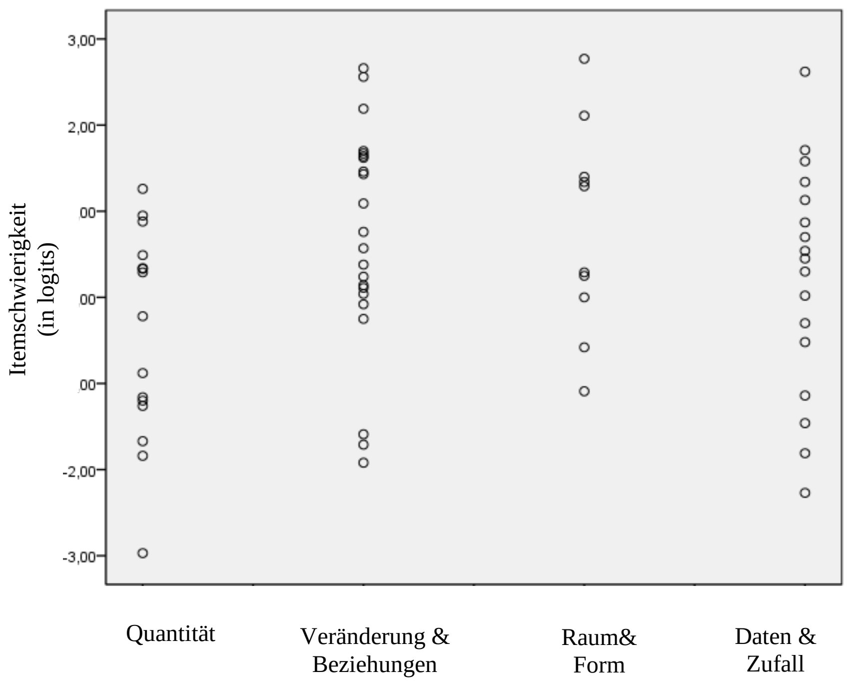
Anhand der Anzahlen der Probanden pro Altersgruppe bzw. pro Bildungsabschlussgruppe sieht man, dass Probanden aus allen Altersgruppen sowie mit verschiedenen Berufsabschlüssen in der Stichprobe vertreten sind (Tabelle 1).

	Anzahl der Probanden
gesamt	179
aufgeteilt in Altersgruppen	
20 - 29	43
30 - 39	33
40 - 49	35
50 - 59	21
60+	46
aufgeteilt in Gruppen unterschiedlicher Bildungsabschlüsse	
1 (HS, RS)	20
2 (Ausbildung, Abitur)	95
3 (Studium, Meister)	63

Tabelle 1: Die Zusammensetzung der Stichprobe

Allerdings war die Stichprobe nicht repräsentativ. Sie enthielt viele junge Erwachsene mit hohem Bildungsabschluss und viele ältere Erwachsene aus den Abschlussgruppen 1 und 2; die Variablen „Bildungsabschluss“ und „Altersgruppe“ waren signifikant (negativ) korreliert. Inwieweit diese Korrelation auf den Effekt der Bildungsexpansion zurückgeht oder in der Zusammensetzung der genutzten Stichprobe begründet ist, lässt sich schwer abschätzen.

Eine erste Analyse der Ergebnisse erfolgte durch eine Sortierung der Items entsprechend ihrer Itemschwierigkeiten. Es zeigte sich, dass die Items in allen Inhaltsbereichen gut über die Spannbreite unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade streuen. Das Verfahren wies eine mittlere Itemschwierigkeit von 0,31 bei einer Streuung von 1,66 auf der Logit-Skala auf. Die Reliabilität des Verfahrens ist mit 0,915 (EAP/PV Reliablity) als hoch einzuschätzen. Die Trennschärfen der einzelnen Items fallen sehr unterschiedlich aus. Einige sind als sehr niedrig einzustufen (<0,30). 56 der insgesamt 64 Items weisen aber mindestens akzeptable Trennschärfen (>0,30) auf, davon zeigten 29 Items als sehr gut einzuschätzende Trennschärfen von 0,50 bis 0,71.



Im Herbst/Winter 2010/11 wird die Haupterhebung in der Erwachsenenkohorte stattfinden. Das mittels dieser Vorstudie und einer weiteren Pilotierung optimierte Instrument wird dann in einer repräsentativen Stichprobe zum Einsatz kommen.

Literatur

Blossfeld, H.-P. (2008). *Education as a Lifelong Process. A Proposal for a National Educational Panel Study (NEPS) in Germany. Part A: Overview.* Unveröffentlichter BMBF-Antrag. Bamberg: Universität Bamberg.

Ehmke, T., Duchhardt, Ch., Geiser, H., Grüßing, M., Heinze, A. & Marschick, F. (2010). Kompetenzentwicklung über die Lebensspanne – Erhebung von mathematischer Kompetenz im Nationalen Bildungspanel. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.). *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium.* (S. 313 – 327). Münster: Waxmann.

Ehmke, T. & Siegle, T. (2006). Mathematical Literacy bei Erwachsenen. Über welche Kompetenz verfügen die Eltern von PISA-Schülerinnen und Schülern? In M. Prenzel, L. Allolio-Näcke, (Hrsg.). *Untersuchungen zur Bildungsqualität von Schule: Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms.* (S. 84-99). Münster: Waxmann.

Jungwirth, H., Maaß, J. & Schlöglmann, W. (1995). *Abschlussbericht zum Forschungsprojekt: Mathematik in der Weiterbildung.* Linz: Universität Linz.

Maaß, J. & Schlöglmann, W. (2000). Erwachsene und Mathematik. Mathematica Didactica. *Zeitschrift für Didaktik der Mathematik*, *23*(2), 95-106.

OECD (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills.* Paris: OECD.

Andreas EICHLER, Freiburg, Markus VOGEL, Heidelberg

Schülervorstellungen zu Begriffen aus dem Bereich Daten und Zufall

Das Einende der Leitidee Daten und Zufall besteht darin, dass jeder Verallgemeinerungswunsch ausgehend von Daten oder kurz die Schülerfrage: „Ist das eigentlich immer so?“ die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Inferenzstatistik mit der rein deskriptiven Datenanalyse verbindet (Eichler & Vogel, 2009). Gibt es aber auch basale Vorstellungen, die gleichermaßen Aspekte der beiden Teilideen Daten *und* Zufall berühren? Diese Frage war der Ausgangspunkt zu einem Forschungsansatz, der im Folgenden nach der Klärung eines theoretischen Rahmens anhand der Ergebnis-Skizze einer Pilotierung diskutiert werden soll.

Bestehende Forschungsansätze zu Daten und/oder Zufall

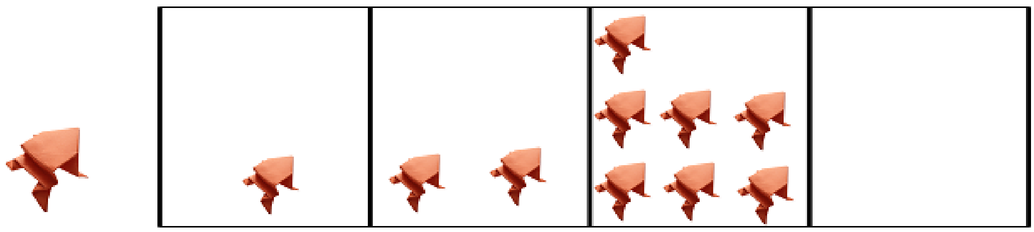
Es gibt eine Fülle von Arbeiten, die Vorstellungen von Schülerinnen und Schülern zum Zufall (bzw. dem Wahrscheinlichkeitsbegriff) umfassen (vgl. Jones, Langrall & Mooney, 2007), Viele dieser Forschungsansätze stehen in der Tradition von Piaget und Inhelder (1958) und versuchen, Ergebnisse dieser nachhaltigen Forschungsarbeit zu replizieren oder zu modifizieren (z.B. Green, 1979). Entscheidender Gedanke dieser Modifizierungsversuche ist es, die gelingende Einschätzung stochastischer Situationen von Schülerinnen und Schülern nicht allein auf deren Alter, sondern auf die Art der Repräsentation von Aufgaben zu beziehen und – im Gegensatz zu Piaget und Inhelder – Entscheidungen zwischen zwei Zufallsgeneratoren in einer bestimmten Situation vorzulegen.

Auf der anderen Seite gibt es wiederum eine Fülle von Arbeiten zum statistischen Denken, die verschiedene Aspekte der deskriptiven Analyse von Daten betreffen (Shaughnessy, 2007). Während ein größerer Anteil dieser Arbeiten ohne offensichtliche Verbindung zum Zufall agieren, besteht dieser, wenn im Zusammenhang mit dem proportionalen Denken eine Verallgemeinerung von wenigen Fällen auf eine größere Menge von Fällen durchdacht werden muss (Jones et al., 2007). Insbesondere dort kommt die Verbindung von Daten und Zufall dann zum Tragen, wenn von einem zufälligen Ereignisses bei wenigen Versuchen bei der Prognose des Ereignisses für viele Versuche der Fokus auf die Variabilität statistischer Daten geschlossen werden muss, die wiederum im Kern den Zufall enthält (Daten = Muster + Variabilität/Zufall; vgl. Eichler & Vogel, 2009).

Für die Beurteilung der Schülerantworten verschiedener Testaufgaben wurden in der Pilotierung allgemein zwei Dimensionen festgelegt, eine Dichotome Unterscheidung von richtig und falsch, andererseits eine Unterscheidung der eingeforderten Begründungen nach einem Modell von Biggs und Collis (1982) in der Adaption von Watson und Callingham (2003). In dieser Dimension wurden folgende fünf Kategorien bei der Bearbeitung stochastischer Aufgaben definiert:

0. keine Bearbeitung.
1. Begründung anhand irrelevanter Informationen (praestructural mode).
2. Begründung anhand einer relevanten Information (unistructural mode)
3. Begründung anhand mehrere relevanter Informationen (multistructural mode)
4. Begründung anhand mehrere relevanter Informationen, die mit anderen, nicht in der Aufgabe vorhandenen Informationen vernetzt werden (relational mode)

Bei der folgenden Betrachtung einer Aufgabe, die die vorher genannten Aspekte des proportionalen Denkens sowie der Variabilität aufnimmt, ist zu beachten, dass noch keine Unterscheidung zwischen der Kommunikationsfähigkeit und der stochastisch geprägten Vorstellungen vorgenommen wurde. Die Aufgabe selbst wurde in verschiedenen Altersstufen in gleicher Weise formuliert:



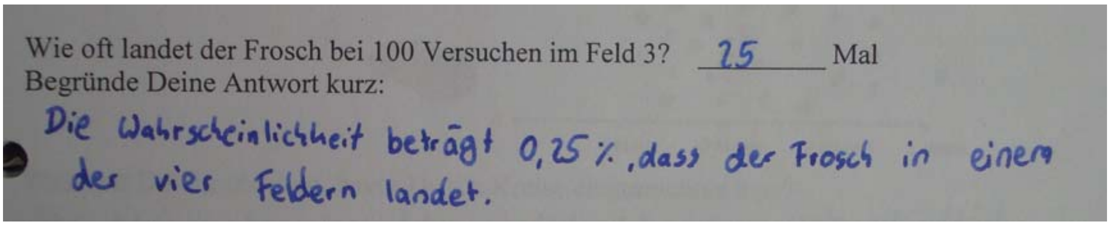
Andrea lässt einen Papierfrosch 10 Mal springen. Der Frosch landet sieben Mal im Feld 3, zwei Mal im Feld 2 und ein Mal im Feld 1.

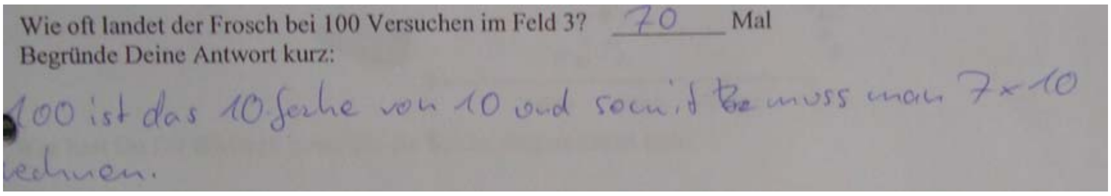
Die Schülerinnen und Schüler (jeweils etwa 25 einer 4., einer 10, einer 12. und einer 13. Jahrgangsstufe) sollten eine Schätzung der Verteilung für 100 und 1000 Versuche für das Feld 3 sowie bei 1000 Versuche für das Feld 4 machen und eine Begründung für diese Schätzung geben.

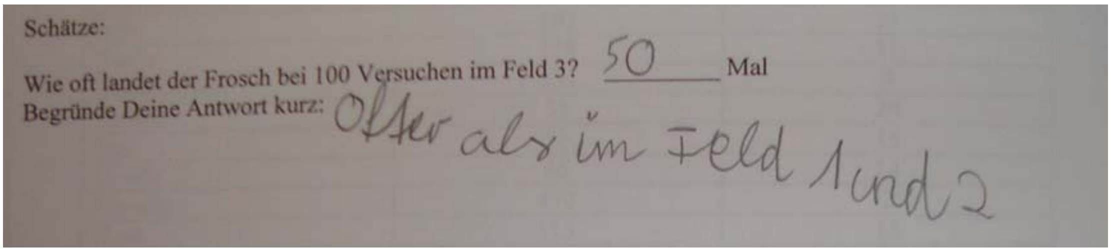
Ergebnis-Skizze

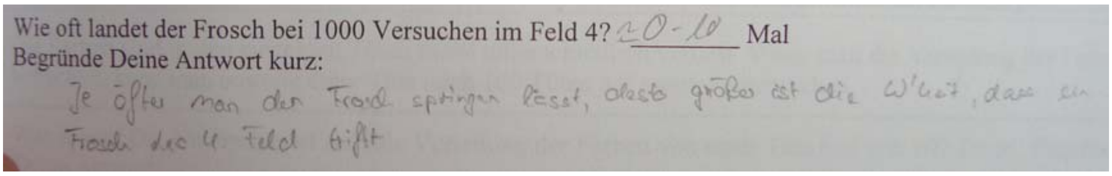
Unabhängig von einer altersbedingten Entwicklung der Fähigkeit, Begründungen zu kommunizieren, haben sich auch in einer Alterstufe erhebliche

Unterschiede bei der Bearbeitung der Aufgaben ergeben, wie die folgenden Antworten von Schülerinnen und Schülern einer 10. Jahrgangsstufe zeigen.


Wie oft landet der Frosch bei 100 Versuchen im Feld 3? 25 Mal
Begründe Deine Antwort kurz:
Die Wahrscheinlichkeit beträgt 0,25 %, dass der Frosch in einem der vier Feldern landet.


Wie oft landet der Frosch bei 100 Versuchen im Feld 3? 70 Mal
Begründe Deine Antwort kurz:
100 ist das 10fache von 10 und somit ~~be~~ muss man 7×10 rechnen.


Schätze:
Wie oft landet der Frosch bei 100 Versuchen im Feld 3? 50 Mal
Begründe Deine Antwort kurz: Öfter als im Feld 1 und 2


Wie oft landet der Frosch bei 1000 Versuchen im Feld 4? 20-10 Mal
Begründe Deine Antwort kurz:
Je öfter man den Frosch springen lässt, desto größer ist die W'keit, dass ein Frosch das 4. Feld trifft

Bei der ersten Antwort fließen irrelevante Informationen, die möglicherweise auf ein Primat der Gleichverteilung in stochastischen Situationen hinweist, in die Begründung ein (prästructural). Die zweite Antwort zeigt (auch bezogen auf die nicht gezeigten Antworten) eine strenge proportionale Fortsetzung der Anfangssituation (unistructural), die in der dritten Antwort durch eine erste Beachtung der Variabilität aufgeweicht wird (multisturctural) und schließlich in der letzten Antwort deutlicher zum Tragen kommt (relational).

Betrachtet man alle befragten Schülerinnen und Schüler, so ergibt sich das in der folgenden Tabelle prozentual dargestellte Ergebnis.

	K4	K10	K12	K13	Summe
n.B	0	3	0	0	1
Prä	33	10	13	0	14
Uni	47	41	47	20	41
Multi	20	38	27	40	32
Relational	0	7	13	40	12

Tabelle 1: Prozentuale Zuordnung zu den Kategorien der Erklärungsgüte

Es zeigt sich (wie auch bei anderen Aufgaben) insgesamt im Vergleich der Jahrgangsstufen eine ansteigende Fähigkeit, stochastische Situationen zu beurteilen und diese zu kommunizieren. Dabei ist es allerdings erstaunlich, dass – ohne die Fähigkeit des Kommunizierens von Begründungen zu beachten – der Anteil derjenigen Schülerinnen und Schüler, die eine unistrukturale Begründungsvariante anbieten, nahezu identisch ist.

Unabhängig von der hier vorgestellten Aufgabe ist allerdings auch auffallend, dass – wenn es eine richtige und falsche Lösung bei den Aufgaben gab – es eine deutliche Korrelation zwischen richtigen Antworten und elaborierten Begründungen gab. Die noch vielen, schwer zu kontrollierenden Variablen sollen in einer Folgeuntersuchung eingeschränkt werden, um den Einfluss einer der als relevant erachteten Variablen (Alter, Schulform, Repräsentation der Aufgabe) auf die basalen Vorstellungen zu Daten und Zufall beurteilen zu können.

Literatur

Biggs, J. B. & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Heidelberg: Vieweg.

Green, D.R. (1979). The chance and probability concepts project. *Teaching Statistics, 1*, 3, 66-71.

Jones, G.A., Langrall, C.W., & Mooney, E.S. (2007). Research in probability. In F.K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 909-956). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1958). The origin of chance.

Shaughnessy, M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 957-1010). Charlotte, USA: Information Age Publishing.

Watson, J. & Callingham (2003). Statistical literacy: A complex hierarchical construct. *Statistics Education Research Journal, 2,* 3-46.

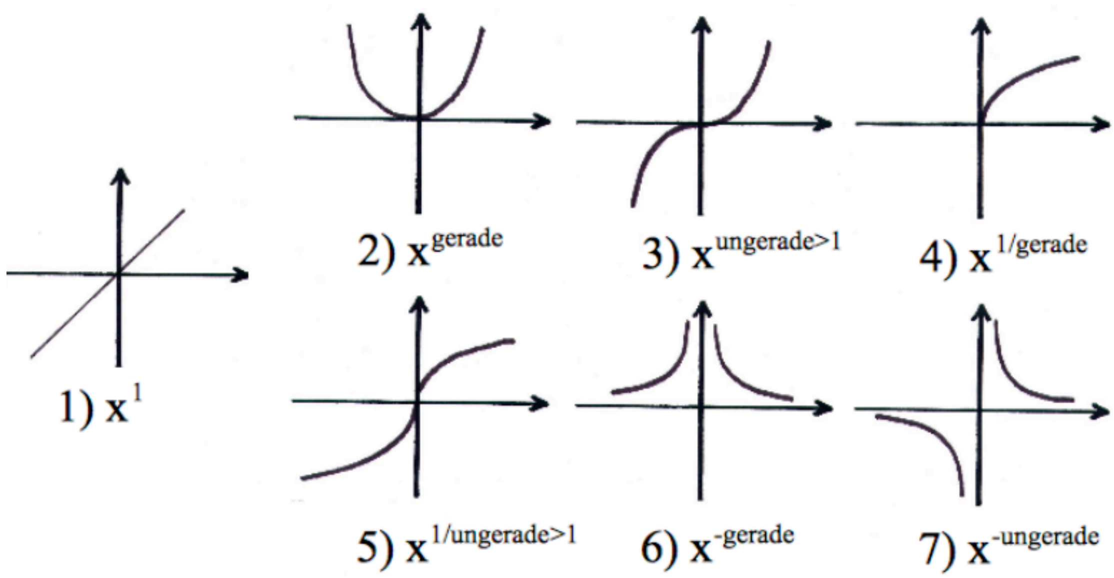
ULRICH EICHMANN, Frankfurt

Ableitung ohne Differentialrechnung

Ich stelle einen alternativen Zugang zum Begriff der lokalen Steigung in der Eingangsstufe der gymnasialen Oberstufe vor. Ziel ist, die Schülerinnen und Schüler (SuS) auf intuitive, graphisch-anschauliche Weise die wesentlichen Ideen erarbeiten und erfahren zu lassen. Verständnis wird zunächst auf sprachlicher Ebene erlangt, zahlreiche Vorstellungen und Vorerfahrungen können so aufgegriffen werden.

1. Einstieg

Die SuS werden aufgefordert, auf kleinen Folienstückchen die Graphen bestimmter Potenzfunktionen in die vorgegebenen Koordinatensysteme einzuzeichnen. Das Fehlen jeglicher Skalierungen stellt für viele zunächst ein Hindernis dar, doch wird so der Blick auf den Verlauf der Funktionen gelenkt wodurch die SuS in der nachfolgenden Besprechung der Skizzen ohne weiteren Impuls die folgenden Gruppierungen vornehmen – eine star-



ke Komplexitätsreduktion, die selbstständiges Weiterarbeiten ermöglicht.

2. Skizzieren einfacher Funktionen

Der Übergang vom Zuordnungs- zum Kovariationsaspekt wird mit der Frage, wie sich eine zusammengesetzte Funktion bei großen und kleinen Argumenten verhält, vorangetrieben. In diesem Zusammenhang werden die Rollen der jeweils dominierenden größten bzw. kleinsten Potenz geklärt. Graphen einfacher Funktionen, die aus zwei Potenzen bestehen, lassen sich nun rasch skizzieren, da hier der Betrag der Koeffizienten keine Rolle spielt.

Der Verlauf von Funktionen mit mehr als zwei Potenzen kann von den SuS begründet prognostiziert werden, für die genaue Untersuchung dieser Funktionen bietet sich wegen der Bedeutung der Koeffizienten der Einsatz von Computeralgebrasystemen an.

In der Synthese von Funktionen durch ihre einzelnen Bestandteile wenden die SuS fortwährend unbewusst das Superpositionsprinzip an und gelangen auch hier zu einem vertieften Verständnis.

Die SuS sind nun in der Lage, ohne Rechnung zahlreiche Funktionseigenschaften erkennen und beschreiben zu können.

3. MacLaurin – Entwicklung glatter Funktionen

War zunächst die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionsterm den zugehörigen Funktionsgraphen zu erstellen, übt man mit den SuS nun umgekehrt das Zuordnen von Funktionstermen zu Funktionsgraphen, genauer: zu bestimmten Merkmalen eines Funktionsgraphen in der Umgebung von x=0.

Anders als mit einem „Funktionenmikroskop“ wird im Unterricht die betrachtete Umgebung immer weiter vergrößert und man erhält immer mehr Informationen über die Funktion. Diese sind: Funktionswert, Steigung, Krümmung und eine mögliche Symmetrie. Mit diesen Angaben können die SuS begründete Aussagen über die Exponenten und die Vorzeichen der Koeffizienten machen.

In gleicher Weise können auch transzendente Funktionen für kleine x-Werte durch Potenzen dargestellt werden. Die SuS verstehen jetzt die Näherung $\sin(x) \approx x$, die im Physikunterricht bei der Behandlung der Schwingungen eines Fadenpendels meist ohne Begründung genutzt wird.

Das Verhalten trigonometrischer Funktionen bei großen Argumenten wirft die für die SuS interessante Fragestellung nach der größten, den Sinus und den Kosinus beschreibenden Potenz auf.

4. Skizzieren einer Funktion mithilfe von Null- und Polstellen

Durch Faktorisieren vertrauter Funktionen und mithilfe von Verschiebungen können die Graphen von Funktionen verstanden und skizziert werden, deren Linearfaktordarstellung vorliegt. Betrachtet wird hier nicht das Verhalten bei kleinen x-Werten, sondern in der Umgebung der Null- und Polstellen. Die einzelnen Linearfaktoren können jeweils als verschobene Geraden, Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung identifiziert werden. Die entsprechende Klassifizierung der Nullstellen führt auf einfache Nullstellen bzw. mehrfache Nullstellen gerader und ungerader Ordnung, analog erfolgt eine Einteilung der Polstellen.

5. Ableitung ohne Differentialrechnung

Die bisherigen Arbeiten versetzen die SuS in die Lage, das Verhalten einer Funktion in der Umgebung eines beliebigen x-Wertes $x=a$ zu bestimmen: Nach Verschiebung der Funktion um a und anschließender Analyse für kleine x-Werte kann mit dem Koeffizienten des linearen Terms die Steigung der Funktion bei $x=a$ direkt angegeben werden. So erhält man beispielsweise $3a^2$ als Steigung der Funktion $f(x)=x^3$ bei $x=a$ nach Verschiebung um a und anschließender Entwicklung von $(x+a)^3$.

Die ersten Ableitungsregeln können von den SuS direkt angegeben werden. So folgt die Potenzregel aus dem binomischen Lehrsatz, die Summenregel aus dem Superpositionsprinzip, die Faktorregel aus der Verschiebungsvorschrift und die Konstantenregel aus der Forminvarianz unter Verschiebungen in y-Richtung.

Mit der Anweisung: „Isoliere den Koeffizienten des linearen Terms der MacLaurin-Entwicklung der um a nach links verschobenen Funktion“ kann später der Differentialquotient als Ausdruck für die lokale Steigung als Verfahren gewonnen werden. Die geometrische Deutung als infinitesimales Steigungsdreieck knüpft das Konzept der lokalen Steigung an die Kenntnisse aus der Jahrgangsstufe 7 an.

6. Linearisierung

Die Linearisierbarkeit einer Funktion ist das Wesen der Differentialrechnung, die Linearisierung selbst gehört zu den bedeutendsten Näherungen und soll daher im Unterricht umfangreich behandelt werden. Linearisierungen sind so präsent, dass sie im Einstieg zahlreiche Möglichkeiten bieten, an Vorwissen und Vorerfahrungen der SuS anzuknüpfen: Das Bauen eines „runden“ Turms mit quaderförmigen Bauklötzen, ein geschälter Apfel oder schlicht eine Landkarte. Eigenschaften dieser Näherungen sind den SuS bekannt: So muss man für einen „runderen“ Turm kleinere Bauklötze benutzen oder entsprechend einen größeren, weniger gekrümmten Turm bauen. Dort, wo der Apfel stark gekrümmt war, ist das abgeschnittene Schalenstück schmaler als an Stellen, an denen der Apfel flacher war – der Gültigkeitsbereich der Linearisierung ist um so größer, je flacher die Funktion ist. Diese Einsicht ist wesentlich bei der Beantwortung der Frage, was die Formulierung „in der Nähe eines beliebigen Punktes“ konkret bedeutet.

In der Nähe ...	x	
… eines beliebigen Punktes ...	a	(a+x)
… verhält sich ...	≈	

… jede glatte Funktion ... f

… wie eine Gerade. $m \cdot x + b$

Mit dem y-Achsenabschnitt $b = f(a)$ und der Steigung $m = f'(a)$ lautet die Linearisierung der Funktion f: $f(a+x) \approx f'(a) \cdot x + f(a)$

Die Linearisierung entspricht der Tangente an die um a nach „links“ (dies entspricht automatisch einer Verschiebung um $|a|$ nach rechts, sollte $a<0$ sein) verschobene Funktion in $x=0$. Durch das Zurückverschieben dieser Linearisierung um a nach „rechts“ erhält man direkt die Gleichung der Tangente an die ursprüngliche Funktion $f(x)$ in $x=a$: $T_a(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$

7. Einsatz der Linearisierung

Beispielhaft zunächst die näherungsweise Berechnung von Wurzeln über $\sqrt{(a+x)} \approx \sqrt{a} + 1/(2\sqrt{a}) \cdot x$, die über ihre praktische Bedeutung hinaus sehr anschaulich für verschiedene a den Begriff der „Nähe zu a“ verdeutlicht.

Als weitere Anwendungen der Linearisierung im Unterricht seien die den SuS bekannten Ausdrücke für die potentielle Energie ($m \cdot g \cdot h$) und die kinetische Energie ($\frac{1}{2}\, m \cdot v^2$) genannt, die aus dem Gravitationsgesetz bzw. der Einsteinschen Masse – Energie – Beziehung $E = mc^2$ folgen.

Durch konsequente Anwendung der Linearisierung sind auch die weiteren Ableitungsregeln (Produkt-, Quotienten- und Kettenregel und Ableitung der Umkehrfunktion) zügig, sogar von den Schülern selbstständig herleitbar.

8. Zusammenfassung

Die Betonung des Kovariationsaspektes im vorgestellten Konzept bedeutet für viele SuS zunächst ungewohnte Fragestellungen und Sichtweisen. Der handwerkliche Umgang mit Funktionen und die starke Versprachlichung sind für die SuS jedoch schon bald stark motivierend: Die SuS werden sehr sicher im Umgang mit Funktionen und können durch das aufgebaute Verständnis früh – auch in anderen Disziplinen – funktionale Zusammenhänge beschreiben.

Bewusst wird zunächst auf inhaltliche und sprachliche Strenge verzichtet. So kann an gewohnte Denk- und Wahrnehmungsweisen der SuS angeknüpft werden, die SuS werden nicht entmündigt und es lässt sich eine fehlerfreundliche Atmosphäre schaffen. In den bisherigen Erprobungen dieses Konzepts war die Beteiligung der SuS sehr hoch. Intelligentes Wissen konnte aufgebaut werden, wobei die zunächst neuen Sichtweisen zur Erweiterung der Handlungsfähigkeit der SuS führten.

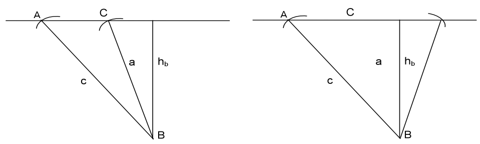
Wolfram Eid, Magdeburg

Niveaubestimmende Aufgaben – (nicht nur) ein Mittel zur Implementierung curricularer Vorgaben

Die Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss beschreiben die durch die Lernenden zu erwerbenden allgemeinen mathematischen Kompetenzen zum Ende der zehnjährigen Schulzeit. Die Illustration der Vorgaben erfolgt vermittels ausgewählter Aufgabenbeispiele und deren Kommentierung bez. ihrer Wirkung hinsichtlich des Kompetenzgefüges (vgl. Bildungsstandards für den mittleren Bildungsabschluss, S.35 ff.). Diesen Aufgaben gemein ist einerseits das Erfassen eines relativ breiten Kompetenzspektrums wie andererseits auch in jeder der Aufgabenbeispiele die drei Anforderungsbereiche (I: *Reproduzieren*, II: *Zusammenhänge herstellen* und III: *Verallgemeinern und reflektieren*) überstrichen werden.
Für den Unterricht vorhergehender Schuljahre kann der praktizierend Lehrende nicht auf eine solche Untersetzung zurückgreifen sondern orientiert sich für seinen Unterricht allein an curricularen Vorgaben in Form von Lehrplänen oder Rahmenrichtlinien. Diese geben in jedem Falle Auskunft über zu behandelnde Inhalte, häufig aber nur ansatzweise über die zu erreichende Tiefe oder Möglichkeiten der Differenzierung. Im Allgemeinen erfolgt die notwendige Interpretation durch verwendete Lehrbücher.
Insofern liegt der Gedanke nahe, auch hier eine vermittels Schüleraufgaben zum Ausdruck gebrachte Niveaubeschreibung zu wagen. Dabei ist zu bedenken, dass einer Schüleraufgabe zumeist vielfältige Potenzen der Kompetenzentwicklung innewohnen, was nebenstehendes Beispiel verdeutlichen soll.

Kompetenzanalyse einer Aufgabe

Von einem Dreieck ABC üblicher Bezeichnung sind folgende Stücke gegeben:



$a = 4\ cm,\ c = 6\ cm,\ h_b = 3\ cm.$

Zwei Vorschläge werden für dieKonstruktion des Dreiecks durch die Abbildungen unterbreitet. Was meinst du dazu?

„Lesen“ der Abbildung – grafische Darstellungen interpretieren – D 2
Umgehen mit „Namen“ a, h_b . – vertr symbolsprachliche Darstellungen verwenden- D 3
Verfahrensbeschreibung – nutzen informativer Figuren – P 2
Reflektieren über eine Lösungsidee nach Aufforderung – P 5
Nachvollziehen und Beurteilen mehrschrittiger Argumentationen – A 5
Verstehen und Überprüfen von Äußerungen anderer – D 5

Quelle: NBA 8 Sachsen-Anhalt

Niveau beschreibende Aufgaben sollten daher zwei Anforderungen gerecht werden:

1. *Jede einzelne Aufgabe soll die Entwicklung* ***ausgewählter*** *allgemeiner mathematischer Kompetenzen akzentuiert bedienen.*

Die aus den niveaubestimmenden Aufgaben abgeleiteten Aufgaben für den Unterricht sollten eine ausgeglichene Beförderung aller allgemeinen mathematischen Kompetenzen bewirken. Daher sollten die niveaubestimmenden Aufgaben in ihrer Gesamtheit demzufolge so zusammengesetzt sein, dass sie das Erreichen dieses Zieles unterstützen.

2. *Eine niveaubestimmende Aufgabe sollte im Allg. einen der drei Anforderungsbereiche präferieren.*

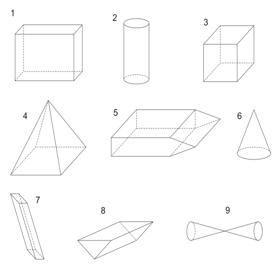
Die in den Bildungsstandards aufgeführten Beispiele als Beschreibung eines Schulausgangsniveaus inkludieren zu Recht breitere Spektren mathematischer Kompetenzen wie auch alle drei Anforderungsbereiche erfasst werden. Die Lernenden sollen kompetenzorientierte Aufgaben der beschriebenen Art mit hinreichender Sicherheit am Ende ihrer Schulzeit bewältigen können. Die Aufgaben führen dabei in vorhergehenden Schuljahren zu legende elementarere Grundlagen zusammen. Dementsprechend müssen niveaubestimmende Aufgaben für vorhergehende Schuljahre folgerichtig auch unterschiedliche Reifegrade der Entwicklung allgemeiner mathematischer Kompetenzen zum Ausdruck bringen, indem sie auch elementare Anforderungen widerspiegeln. Die Differenzierung im Anforderungsniveau kann mit einer relativ engen Bindung der Aufgabe an einen der drei Anforderungsbereiche am ehesten nachvollziehbar zum Ausdruck gebracht werden.

Beispiel: Die Lernenden sollen u. a. auch zur Verwendung mathematischer Darstellungen befähigt werden. Für den Geometrieunterricht kann sich dieses in der als D1 beschriebenen Weise äußern. Graduierungen in enger Verbindung zu den drei Anforderungsbereichen sollen die gegebenen drei Beispiele offerieren.

Mathematische Darstellungen verwenden (I)

D 1

Die Lernenden können Verfahren zur Darstellung geometrischer Gebilde insbesondere des Raumes anwenden und umgekehrt aus derartigen Darstellungen eine Vorstellung von den räumlichen Objektengewinnen.



AFB I
Gib an, welche der dargestellten Körper Prismen sind. D 1

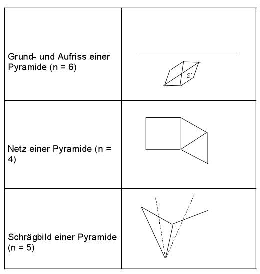
Quelle: NBA 8 Sachsen-Anhalt

Mathematische Darstellungen verwenden (II)

D 1

Die Lernenden können Verfahren zur Darstellung geometrischer Gebilde insbesondere des Raumes anwenden und umgekehrt aus derartigen Darstellungen eine Vorstellung von den räumlichen Objektengewinnen.

Quelle: NBA 8 Sachsen-Anhalt

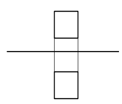


AFB II
Ergänze die Abbildungen, so dass es sich jeweils um die Darstellung einer nseitigen Pyramide handelt. P 1 D 1

Mathematische Darstellungen verwenden (III)

D 1

Die Lernenden können Verfahren zur Darstellung geometrischer Gebilde insbesondere des Raumes anwenden und umgekehrt aus derartigen Darstellungen eine Vorstellung von den räumlichen Objektengewinnen.



AFB III
- *In der Abbildung siehst du Grund und Aufriss eines Körpers bei senkrechter Parallelprojektion.*
- *Stelle solche Körper als Schrägbild dar.* D 1

Quelle: NBA 8 Sachsen-Anhalt

Das Verwenden von Aufgabentripeln erweist sich zur Umsetzung der erklärten Absicht als zweckmäßig. Unter einem Aufgabentripel versteht man dabei drei Aufgaben zum gleichen Gegenstand, wobei die erste Aufgabe zum AFB I, die zweite Aufgabe zum AFB II und die dritte Aufgabe zum AFB III gehört.

Beispiel 1: Aufgabentripel zum Abstandsbegriff (*Leitidee Raum und Form*)

Aufgabe AFB_{I}:

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ABC mit einer Seitenlänge von 3 cm. Welche Aussage über den Abstand des Punktes C von Seite c ist richtig? Begründe.

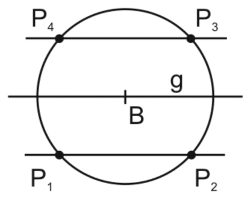
(1) Der Abstand ist größer als 3 cm.

(2) Der Abstand ist kleiner als 3 cm.

(3) Der Abstand beträgt genau 3 cm.

Aufgabe AFB_{II}: *Auf einer Geraden g liege ein Punkt B. Es sind alle die Punkte gesucht, die vom Punkt B den Abstand 3 cm haben und 2 cm von der Geraden g entfernt liegen.*

Die Abbildung zeigt eine Lösungsidee zur Konstruktion dieser Punkte.
Konstruiere die gesuchten Punkte entsprechend den in der Aufgabe gegebenen Abständen.



(Abbildung nicht maßstabsgerecht)

Aufgabe AFB_{III}:

Auf einer Geraden g liege ein Punkt B. Durch Konstruktion sollen alle die Punkte ermittelt werden, die von B den Abstand 3 cm haben und 2 cm von der Geraden g entfernt liegen.
Welche der folgenden Zeichnungen kann nicht die Lösung der Aufgabe sein? Begründe.

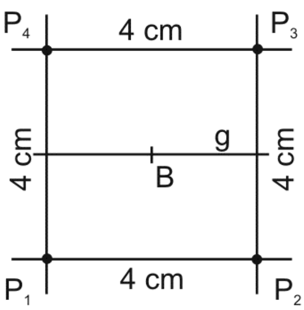


Abb. 1

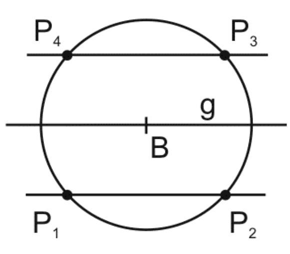


Abb. 2

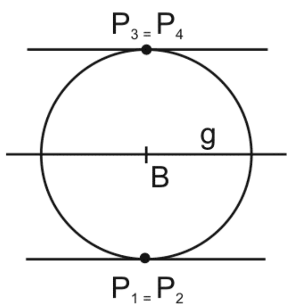


Abb. 3

(Abbildungen nicht maßstabsgerecht)

Beispiel 2: Aufgabentripel zur Teilbarkeit (*Leitidee Zahl*)

Aufgabe AFB_{I}: *Gib alle Teiler der Zahl 42 an und unterstreiche die Primzahlen.*

Aufgabe AFB_{II}: *Bilde unter einmaliger Verwendung jeder der Ziffern 1, 0, 5, 8, 2 und 7 alle durch fünf teilbaren Zahlen zwischen 100 000 und 110 000.*

Aufgabe AFB_{III}: *Verändere in der Zahl 105827 jeweils eine Ziffer so, dass keine Ziffer doppelt vorkommt und eine durch 9 teilbare Zahl entsteht. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*

Ausführungen in Lehrplänen und Rahmenrichtlinien unterliegen in einem nicht unerheblichen Maße der Interpretation der Lehrenden. Änderungen in diesen Dokumenten können nicht selten zu überzogenen und unerwarteten Interpretationen führen. Der Entwurfslehrplan für den Mathematikunterricht an Sekundarschulen Sachsen-Anhalts führt für den Unterricht in Klasse 6 als grundlegenden Wissensbestand die Teilbarkeitsregeln für 2, 3, 5 und 10 aus. Das ist eine im Zuge der Konzentration durch Verzicht auf bisher im Unterricht behandelte weitere Teilbarkeitsregeln bewusste Reduzierung reproduzierbaren Wissens, die schnell zu Fehlinterpretationen insofern Anlass gibt, als weiterführende Teilbarkeitsuntersuchungen gänzlich dem Unterricht vorenthalten werden. Sehr wohl vermitteln die Ausführungen des Lehrplans eine Konzentration auf reproduzierbares und eben auch abprüfbares Wissen und Können. Es würde jedoch zu einer Verarmung des Unterrichts führen, würde dieser darauf beschränkt bleiben. Diese Intention kann durch ein geeignetes Aufgabentripel vermittelt werden:

Aufgabe AFB_{I} : *Ermittle jeweils die Teilermenge der Zahlen 8, 16 und 66.*

Aufgabe AFB_{II}: *Prüfe 24, 42 und 88 auf die Teilbarkeit durch 2, 3 und 6. Wie könnte eine Regel für die Teilbarkeit durch 6 lauten?*

Aufgabe AFB_{II}: *Ordne die Ziffern 1, 2, usw. bis 9 so zu einer natürlichen Zahl an, dass jede der Ziffern genau einmal vorkommt und die beiden ersten Ziffern aus der gebildeten Zahl eine durch zwei teilbare Zahl bilden, die ersten drei Ziffern eine durch drei teilbare Zahl usw.*

Der erste der genannten Aufträge zielt auf die unmittelbare und isolierte Anwendung der im Lehrplan als grundlegendes Können ausgewiesenen Teilbarkeitsregeln ab. Der zweite Auftrag deutet an, wie die Elementarforderung des ersten Auftrages in weiterführende Betrachtungen eingewoben werden kann. Eine tiefgehendere Ausprägung der vom Lehrplan geforderten Kompetenzen erfolgt hier durch Anwenden. Im dritten Auftrag spielen zusätzlich heuristische Elemente (z. B. geschickter Zugang) eine Rolle.

Literatur

Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsabschluss, KMK 2003

Lehrplan Sekundarschule (Erprobungsfassung); Kultusministerium Sachsen-Anhalt, 2009

Niveaubestimmende Aufgaben für den Mathematikunterricht Schuljahrgang 8; Landesinstitut für Lehrerfortbildung Sachsen-Anhalt 2005

Rolf BIEHLER, Paderborn, Katja EILERTS, Kassel, Martin HÄNZE, Kassel, Reinhard HOCHMUTH, Kassel

Mathematiklehrerausbildung zum Studienbeginn: Eine empirische Studie zu Studienmotivation, Vorwissen und Einstellungen zur Mathematik (BMBF-Projekt LIMA)

Die vorgestellte Untersuchung wird im Rahmen des Projekts LIMA[1] (Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium“ – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation), durchgeführt. LIMA ist ein Gemeinschaftsprojekt der Universitäten Paderborn (Projektleitung Rolf Biehler) und Kassel (Projektleitung Reinhard Hochmuth, Martin Hänze) und wird im Rahmen der Hochschulforschung als Beitrag zur Professionalisierung der Hochschullehre (`Zukunftswerkstatt Hochschullehre`) vom BMBF finanziert

1. Stand der Forschung

Aus den Resultaten der empirischen Bildungsforschung und der Fachdidaktik werden aktuell zahlreiche (durchaus konträre) Forderungen im Hinblick auf die Mathematiklehrerausbildung abgeleitet. Eine zentrale offene Frage betrifft die Inhalte und den relativen Umfang des Fachwissens – im Vergleich zu fachdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Komponenten im Rahmen der Ausbildung zukünftiger Lehrerinnen und Lehrer. Ergebnisse des COACTIV-Projektes bestärken, dass Fachwissen eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für qualitätsvollen Unterricht ist: „Fachwissen ist die Grundlage, auf der fachdidaktische Beweglichkeit entstehen kann.“ (Baumert und Kunter, 2006). Weitgehend offen sind die weitergehenden Fragen, wie weit und in welcher Weise das Fachwissen in der Ausbildung über das in der Schule vermittelte Wissen hinausgehen soll, wie es mit anderen Wissenskomponenten vernetzt werden kann, um die fachdidaktische Beweglichkeit zu erhöhen, und welche Unterschiede und Gemeinsamkeiten hinsichtlich verschiedener Lehramtsstudiengänge (Grund-, Haupt- und Realschule und Gymnasium) in Betracht zu ziehen sind. Das Projekt LIMA setzt an diesen Fragen an.

Der Fachbereich Mathematik der Universität Kassel hat eine lange Tradition im Anbieten lehramtsspezifischer fachwissenschaftlicher Ausbildungsinhalte, die mit fachdidaktischen Erfordernissen abgestimmt sind. Ferner wird seit einigen Jahren ein Multimedialer Vorkurs Mathematik (Biehler und Fischer 2006, Biehler und Hochmuth et al. 2009) für alle mathematik-

[1] http://www.lima-pb-ks.de/

haltigen Studiengänge inklusive spezifischer Varianten für die Lehramtsstudiengänge angeboten, der den Übergang von der Schulmathematik zur Hochschulmathematik erleichtern soll.

2. Forschungsfragen und Projektziele

Das Projekt verfolgt u.a. die folgenden Forschungsfragen:

- Welche fachlichen, motivationalen und volitionalen Voraussetzungen und Einstellungen bringen die Studierenden mit und wie entwickeln sich diese in der Studieneingangsphase?
- Welches spezifische Fachwissen benötigen Lehramtsstudierende und Mathematiklehrer? Wie kann die Vermittlung dieses Fachwissens didaktisch optimiert werden?
- Durch welche Lehr- und Lerninnovationen kann der Studienerfolg im Fachstudium Mathematik unter Berücksichtigung von individuellen Eingangsvoraussetzungen verbessert werden?

Die Lehrinnovationen sollen insbesondere fehlende Wissensvoraussetzungen, lernstrategische Defizite und motivational-volitionale Startschwierigkeiten berücksichtigen. Sie betreffen curriculare Veränderungen, die Gestaltung von Mentorien, den Einsatz von E-Learning-Modulen und didaktisch optimierte Tutorien.

Charakteristisch für LIMA sind u.a. die folgenden Punkte:

- Interdisziplinäre Zusammenarbeit von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Pädagogischer Psychologie.
- Kompetenzorientiertes Curriculum – Aufarbeitung, Entwicklung und Rekonzeptualisierung des Fachwissens Mathematik im Hinblick auf die Lehramtsausbildung.
- Fachlich angebundene und auf Änderung der organisatorischen Rahmenbedingungen und des Lehr-Lernsystems zielende sowie auf eine individuelle Diagnostik gestützte Einführung von Lehrinnovationen in der Hochschuleingangsphase.

3. Lehrinnovation und experimentelle Untersuchung im WS 2009/10

Die Lehrinnovation bezog sich im WS 2009/10 exemplarisch auf die Lehrveranstaltung `Grundzüge der Mathematik I` (4 SWS Vorlesung und 2 SWS Übung) für Erstsemester in dem Lehramtsstudiengang Mathematik für Haupt- und Realschulen an der Universität Kassel. Begleitend dazu wurden in Kassel und an der Universität Paderborn Erhebungen zu Wissensvoraussetzungen, lernstrategischen und motivational-volitionalen

Orientierungen und zur Studienmotivation von Erstsemesterlehramtsstudierenden durchgeführt.

Lehrinnovation und experimentelle Untersuchung sind in die Gesamtuntersuchung von LIMA eingebettet. Diese erfolgt in einem quasi-experimentellen Design mit zwei Kohorten von Erstsemestern über einen Zeitraum von insgesamt 3 Jahren Projektlaufzeit (vgl. die Zeitachse [Abb. 1]) :

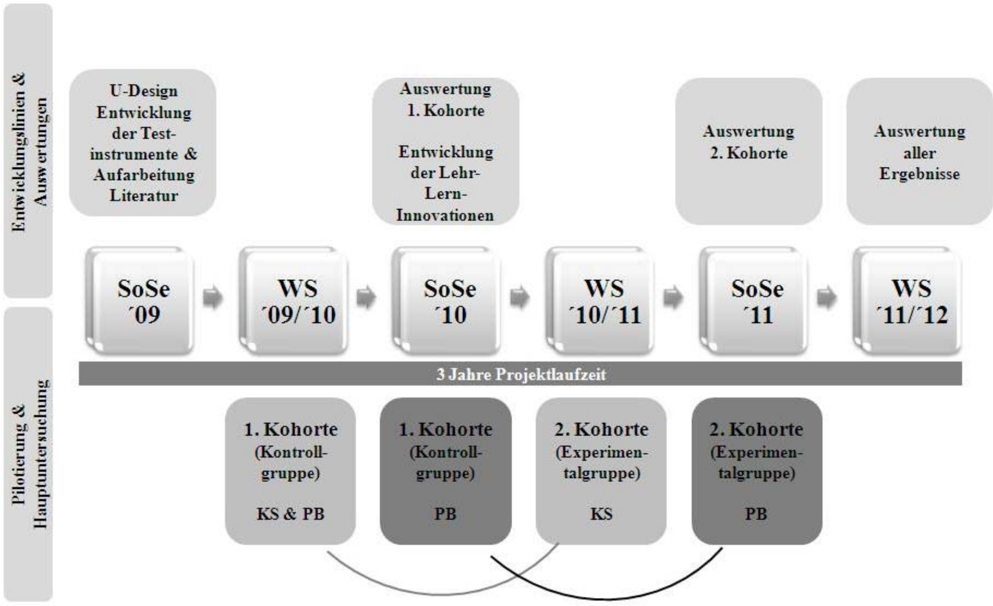


Abb. 1: BMBF-Projekt LIMA – Zeitachse Projektlaufzeit

Im WS 2009/10, bezogen also auf die Kontrollgruppe, beschränkte sich die Lehrinnovation auf eine didaktische Optimierung der Lehrveranstaltung. Facetten dieser Optimierung waren:

- Die Nutzung von Moodle als Kommunikationsplattform.
- Veränderungen der Vorlesungsinhalte (inkl. teilweise induktivem Vorgehen, Gestaltung von Explorationsphasen, Präsentation von Irrwegen, Explizite Reflexionen des Inhalts und des Vorgehens, teilweise schulbezogen).
- Veränderungen der Übungen (u.a. intensive fachliche Arbeit mit Tutoren, Nachkorrekturen).
- Bewusste Kompetenzorientierung (Kompetenzpotential von Aufgaben, Reflektion der Erwartungen an Lernende, Einordnung und Beurteilung von Aufgabenbearbeitungen).

Die Erhebungen wurden in Kassel in den Grundzügen I und zur Pilotierung der Testinstrumente auch in Paderborn in der Lehrveranstaltung Elemente der Geometrie (Studiengang GHR) durchgeführt [vgl. Abb.2]. Insgesamt sind es knapp N=500 Testteilnehmer über alle Messzeitpunkte und Standorte. In Kassel lag das N bei 68, davon 58 Haupt/Realschul-Studierende und in Paderborn bei N = 419, davon 121 Haupt/Realschul-Studierende.

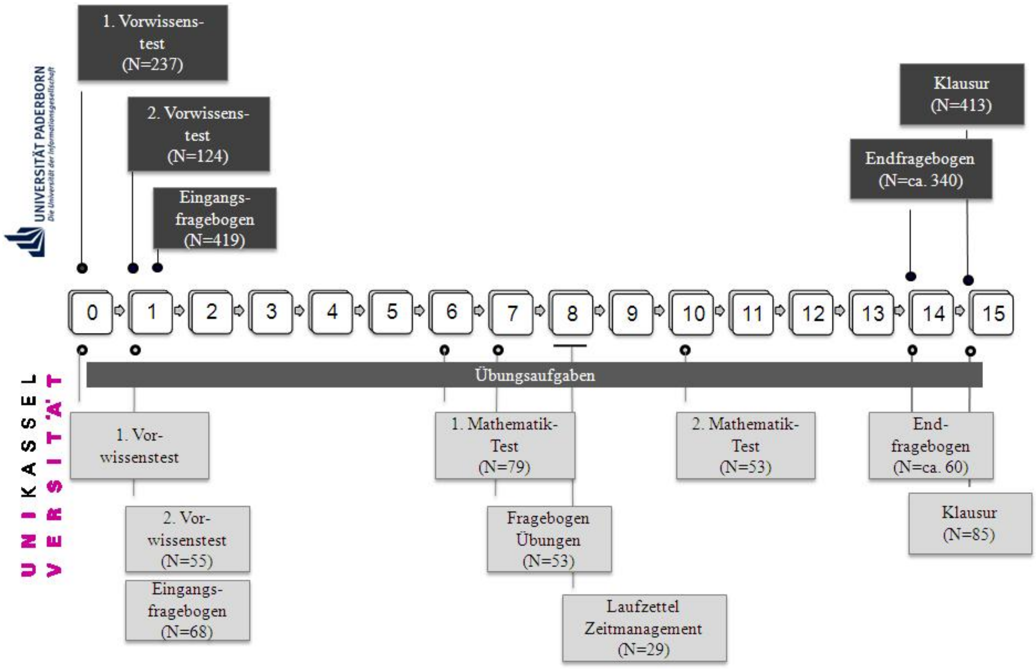


Abb. 2: Zeitachse der Erhebungen im WS 2009/2010

Über Ergebnisse der Auswertungen wird an anderer Stelle berichtet. Im Sommersemester werden entsprechende Daten in der Vorlesung Arithmetik und Zahlentheorie in Paderborn erhoben. Für das WS 10/11 in Kassel und SS 11 in Paderborn werden in den Experimentalgruppen (-kohorten) die neuen Lehr-Lern-Innovationen implementiert und vergleichend evaluiert.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, *9*, 469 - 520.

Biehler, R. & Fischer, P.R. (2006). VEMA - Virtuelles Eingangstutorium Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 195 – 199). Hildesheim und Berlin: Franzbecker.

Biehler, R. & Hochmuth, R. et al. (2009). Multimedialer Vorkurs Mathematik Kassel. Version 3.1. CDROM, Kassel: Universität Kassel, FB Mathematik.

Eilerts, K. (2009). Kompetenzorientierung in der Mathematik-Lehrerausbildung. Empirische Untersuchung zu ihrer Implementierung. In der Reihe: *"Paderborner Beiträge zur Unterrichtsforschung und Lehrerbildung", Band 14*. Münster: LIT Verlag.

Hänze, M. & Moegling, K. (2004). Forschendes Lernen als selbständigkeitsfördernde Unterrichtsform: Persönliche Voraussetzungen und motivationale Wirkmechanismen. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, *51*, 113 - 125.

PETR EISENMANN, Usti n. L., Tschechische Republik

Ein toller Körper und eine komische Kurve

Bei der Behandlung der Themen *Zahlenfolgen* und *Der Grenzwertbegriff* in der gymnasialen Oberstufe werden die Schüler auch mit der geometrischen Reihe bekannt gemacht (s. z. B. das Lehrbuch Jahnke, 1991). Der folgende Beitrag schildert zwei Aufgaben, bei deren Lösung wir zu einem komischen Paradox gelangten, der in der Klasse eine lebhafte Diskussion hervorrief.

Die Aufgabe 1:

Es sei ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 1 (die Figur K_0 in Abb. 1). Teilen wir jede Seite dieses Dreiecks in drei gleich lange Strecken und über der mittleren Strecke errichten wir ein neues gleichseitiges Dreieck. Die mittlere Strecke lassen wir dann weg. So entsteht die Kurve K_1. An allen zwölf Strecken dieser Kurve führen wir denselben Vorgang durch. So entsteht die Kurve K_2. Dieses Verfahren können wir weiterhin wiederholen. Bestimmen Sie die Länge l_1 der Kurve K_1, l_2 und l_n (der Kurve K_n).

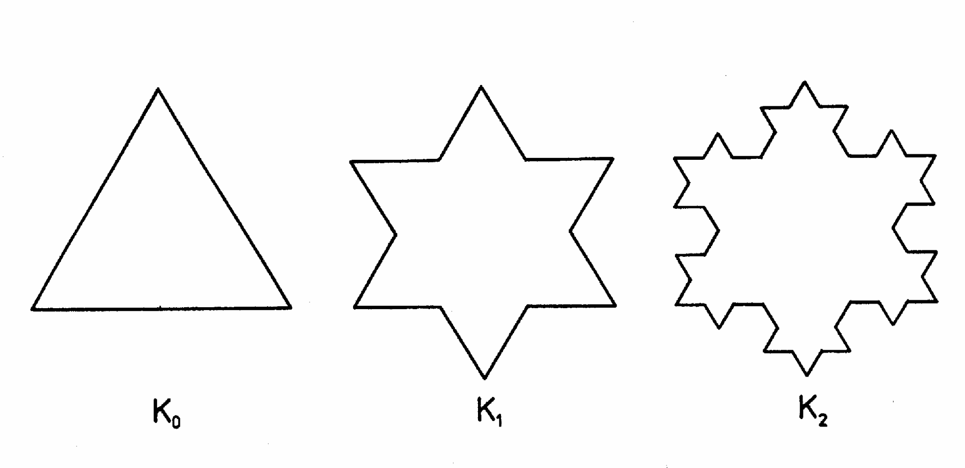


Abb.1

Den Schülern bereitete die Lösung dieser Aufgabe keine große Schwierigkeiten. Es gilt

$$l_0 = 3$$

$$l_1 = 3 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$l_2 = 3 \cdot \left(4 \cdot \left(4 \cdot \frac{1}{9}\right)\right) = 3 \cdot \frac{16}{9} = \frac{16}{3}$$

$$l_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n$$

Mit den Schülern diskutierten wir über die Eigenschaften der Folge l_n. Schon aus der Konstruktion der Folge der Kurven K_n ist offensichtlich, dass jede nächste Kurve eine größere Länge als die vorhergehende hat – die Folge l_n sollte streng monoton steigend sein. Das stimmt - l_n ist eine geometrische Folge und ihr Faktor ist größer als 1. Das bedeutet aber, dass l_n beliebig groß sein kann. Wenn das Ausgangsdreieck K_0 die Seitenlänge 1m hätte, wäre z. B. die Kurve K_{10} ungefähr 53 m lang und K_{69} hätte die Länge cca 1,2 Million km. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} l_n = \lim_{n \to \infty} 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n = \infty .$$

Wenn man in dem oben beschriebenen Vorgang weiter unbegrenzt fortfährt, wird als Grenzwert der Folge K_n eine komische Kurve entstehen. Sie hat eine unendliche Länge und dabei ist sie geschlossen und liegt in einem begrenzten Teil der Ebene!

Dazu meldete sich Stefan mit einer Frage:

Wenn aber diese Kurve eine unendliche Länge haben soll, muß sie unedlich viele Strecken enthalten. Oder nicht?

Einige Schüler stimmten mit ihm überein, aber Lisa opponierte:

Nein, wir zerdritteln doch nach und nach jede von ihrer Strecken und immer errichten wir über ihr in der Mitte ein kleines Dreieck.

Da entstehen Dir aber doch wieder Strecken – vier neue Strecken

reagierte Stefan erregt.

Na ja, aber diese Strecken teile ich wieder in drei neue und über der mittleren … und so weiter und so weiter

unterbrach ihn Lisa schroff. Da eilte dem Stefan sein Freund Fritz zu Hilfe:

Und woraus setzt sich also eigentlich die Kurve zusammen? Wenn nicht aus den Strecken, woraus denn dann?

Lisa schwieg betroffen und so sprach Fritz, schon etwas linder, weiter:

Da bleiben dort also nur die Punkte, in denen die Kurve bricht? Da setzt sie sich nur aus diesen Punkten zusammen, sie hat also nur diese Brüche und Stacheln? Das wäre eine komische Kurve, nicht wahr?

Nun musste ich schon in die Diskussion eingreifen. Ich erklärte den Schülern, dass die Kurve wirklich überraschende Eigenschaften hat. Im Jahre

1906 publizierte sie der schwedische Mathematiker Niels Fabian Helge von Koch (1870 – 1924). Es handelt sich um eine ebene, geschlossene Kurve unendlicher Länge, zu der in keinem Punkt eine Tangente angebracht werden kann. Sie enthält also wirklich keine Strecken, sie ist überall stachelig.

Die Aufgabe 2:

Berechnen Sie das Volumen eines Körpers, der in Abb. 2 von der Seitensicht angedeutet ist. Der Körper besteht aus Zylindern, wobei der erste den Halbmesser $\frac{1}{2}$ und die Höhe 2 hat. Der zweite Zylinder hat den halben Halbmesser und die doppelte Höhe, und so geht es unbegrenzt weiter.

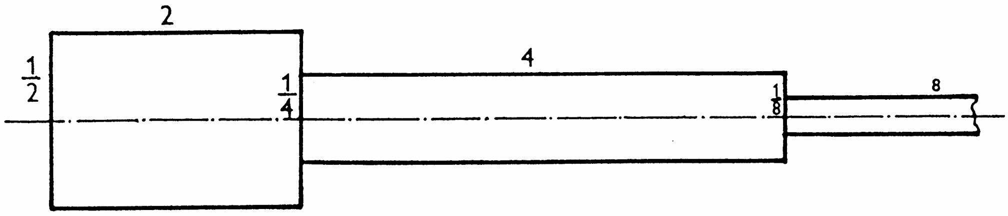


Abb. 2

Der Halbmesser des n-ten Zylinders gleicht 2^{-n}, die Höhe 2^n und das Volumen

$$V_n = \pi \cdot \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \cdot 2^n = \frac{\pi}{2^n}.$$

Der ganze Körper hat also das Volumen

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n = \pi \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = \pi.$$

Das Ergebnis rief in der Klasse Verwunderung hervor. Dieser unendlich lange Körper hat ein endliches Volumen! Das ist komisch. Ein Mädchen meldete sich mit folgender Frage: „Und der Oberflächeninhalt? Hat der Körper auch einen endlichen Oberflächeninhalt?“

Das stellten wir schnell fest:

Der Mantelflächeninhalt des n-ten Zylinders ist

$$S_n = 2\pi \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^n = 2\pi.$$

Der Oberflächeninhalt des ganzen Körpers ist also größer als

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi = 2\pi + 2\pi + 2\pi + ... \quad ,$$

was keine endliche reelle Zahl ist. Darauf reagierte ein Junge:

Das ist ein toller Körper! Er hat einen unendlichen Oberflächeninhalt. Wir könnten ihn zum Beispiel nie färben, weil es in der Welt so viel Farbe einfach nicht gibt. Aber – wenn der Körper hohl wäre, könnten wir doch sein Inneres einfach durch Eingießen von π *Liter Farbe färben. Das ist unglaublich!*

Genauere Reaktionen der Gymnasialschülern beschreiben die Ergebnisse der Forschung (Eisenmann 2000).

Literatur

Eisenmann, P. (2000). Test des infinitesimalen Denkens. *mathematica didactica*, *23*, 63 – 71.

Jahnke, Th. (1991). *Mathematik, Vorstufe des Kurssystems*. Düsseldorf: Cornelsen.

Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Von Daten zur Funktion: Vernetzungen zwischen Modellierungskompetenzen, Geometrie und Statistical Literacy

1. Vom Wechselspiel theoriegeleiteter und datenbezogene Modellierungen

Während das dialektische Verhältnis zwischen Kontext und mathematischem Modell charakteristisch für jegliche Anwendung von Mathematik ist, so gibt es unterschiedliche Ansätze dafür, wie man Mathematik zu Fragestellungen außerhalb der Mathematik in Beziehung setzen kann. Viele Anwendungen von Mathematik sind durch einen theoriegeleiteten Ansatz bestimmt, bei dem prinzipielle Überlegungen, eine Strukturanalyse oder eine umfassende Theorie schon vorhanden ist, die die Wahl des mathematischen Modells weitgehend festlegt. Zur Validierung des Modells bietet es sich dann an, die Vorhersagekraft des Modells zu prüfen, indem z.B. Messungen vorgenommen und Daten gesammelt werden, die dann entweder mit dem Modell kompatibel sind oder eine Anpassung des Modells bzw. einen erneuten Durchlauf im Modellbildungskreislauf erfordern.

Ein anderer Modellierungsansatz schließt Daten schon von Anfang an mit ein. Diese Idee entspricht einer induktiven Vorgehensweise, die methodisch den empirischen Wissenschaften entspricht. Zu Beginn der Problemlösung wird das interessierende Phänomen zunächst genauer und möglichst unbeeinflusst von a priori erstellten Theorien betrachtet. Es werden zielgenaue Fragen formuliert, dann werden Beobachtungen gemacht, die in Form von Messungen quantifiziert werden. Erst graduell wird ein mathematisches Modell entwickelt, das die beobachteten Phänomene beschreibt und darstellt. Hier steht also zunächst ein exploratives Vorgehen im Vordergrund. Spätestens bei der Validierung des Modells kommen bei einem datenorientierten Ansatz auch theoriegeleitete Überlegungen ins Spiel: Macht das aufgestellt Modell überhaupt Sinn? Ist es kompatibel mit dem, was eine theoretische Analyse erwarten lässt? Über 50 Beispiele, Projekte und Aufgaben zu einer datenorientierten Modellierung funktionaler Abhängigkeiten finden sich in einem kürzlich erschienen Lehrbuch zur angewandten Mathematik für Lehramtsstudierende (Engel 2009).

Egal ob zunächst orientiert an theoretischen Überlegungen oder an einer Analyse erhobener Daten– die Darstellung eines außermathematischen Problems in der Sprache der Mathematik ist ein kreativer Schritt des modellbildenden Subjekts, der im Gegensatz zur Ausführung von Berechnungen nicht von Maschinen abgenommen werden kann. Bei datenbasierten Herangehensweisen liegen Modellierungskompetenzen einerseits und *statistical literacy* als die Fähigkeit, aus Daten Sinn zu erschließen, andererseits nahe beieinander und scheinen schwer voneinander abzugrenzen, worauf empirische Untersuchungen mit Lehramtsstudierenden (Engel, Sedlmeier und Wörn, 2008) sowie Untersuchungen im Projekt RIKO-STAT (Kuntze, Engel, Martignon & Gundlach, 2010) hinweisen.

2. Geometrie und Datenanalyse

Die engen Verknüpfungen zwischen Geometrie und Algebra durchziehen die Geschichte der Mathematik. Ein guter Schulunterricht ist sich dieser Tatsache bewusst und wird an vielen Stellen auf den vernetzten Charakter mathematischen Wissens hinweisen. Weniger präsent sind Verknüpfungen zwischen Datenanalyse und Geometrie. Dabei legt der Ursprung des Wortes „Geo-metrie" als Vermessung der Erde eine Verbindung mit Messwerten und deren Analyse nahe.
Bei Einführung der Winkelsumme im Dreieck kann man zunächst durch Messen der Innenwinkel und Addieren zur bekannten Winkelsummen-Formel gelangen. Wenn jeder Schüler diese Aktivität mit seinem individuell gezeichneten Dreieck durchführt, liegen Messdaten im Umfang der Klassenstärke vor, die sich –aufgrund von Ungenauigkeiten – wohl nicht in jedem Fall exakt zu einem gestreckten Winkel addieren, aber dennoch den Winkelsummensatz für beliebige Dreiecke vermuten lassen. Ein anderes populäres Beispiel ist die empirische Feststellung der Konstanz des Verhältnisses von Umfang zu Durchmesser von Kreisen. Viele Schulbücher führen in dieses Thema ein, indem Schüler zunächst aufgefordert sind, bei kreisrunden Objekten von der Konservendose bis zum Fahrradreifen z.B. mit einem Bindfaden den Umfang und den Radius zu messen. Gewiss werden bei diesem Messvorgang einige Ungenauigkeiten entstehen, die dennoch der Entdeckung der Proportionalität des Zusammenhangs zwischen Radius und Kreisumfang nicht im Wege stehen. Ähnlich handlungsbezogen geht der Unterricht vor, wenn das Kugelvolumen zunächst durch Umfüllversuche enaktiv ermittelt wird, bevor theoretische Überlegungen die Volumenformel exakt herleiten und begründen.

Dies sind allseits bekannte und bewährte Zugänge, die geometrische Sachverhalte zunächst von den Schülerinnen und Schülern „entdecken" lassen, bevor theoretische Überlegungen – in der Regel vom Lehrer vorgetragen – die gewonnenen Erkenntnisse präzisieren und festigen. Allen diesen Beispielen ist in der Regel gemeinsam, dass man im Unterricht (zunächst noch) nicht die Möglichkeiten für exakte Herleitungen hat *und* dass die Messungen zu einer besseren Veranschaulichung beitragen. Ansätze zu Datenorientierung sind somit im Geometrieunterricht nicht unbekannt. Sie werden allerdings selten konsequent im Sinne einer Datenerhebung und Datenanalyse ausgeführt und als datengestütztes Arbeiten explizit thematisiert.

Biehler, Prömmel & Hofmann (2007) diskutieren ein Beispiel, bei dem am Anfang eine systematische Datenerhebung und Datenanalyse steht, bevor dann auch theoretische Überlegungen der datenbezogenen Modellierung kontrastierende gegenüber gestellt werden. Die Aufgabe bezieht sich auf das Falten eines Dreiecks aus einem rechteckigem Blatt Papier und besteht darin, einen Zusammenhang zwischen Grundseite und Flächeninhalt des resultierenden Rechtecks zu modellieren. Biehler et al. (2007) behandeln diese Aufgabe detailliert und stellen einer empirischen, d.h. datenbezogenen Modellierung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Fläche F und Grundseite g eine theoriegeleitete Modellierung gegenüber. Ein vergleichbares Beispiel, das in Engel (2010) in ähnlicher Weise sowohl aus empirischer wie theoretischer Perspektive behandelt wird, ist die Bestimmung des optimalen Winkels zum Tor eines Fußballspielers der parallel zur Außenlinie auf das gegnerische Tor zu läuft.

Auch ein datenbezogener Mathematikunterricht wird nicht auf der Ebene von empirischen Entdeckungen stehen bleiben, sondern wird die gewonnene Hypothese durch strukturorientierte Überlegungen zu einer gefestigten Erkenntnis werden lassen. Der empirische Einstieg ermöglicht jedoch auf handlungsorientierte Weise eine Hypothese herzuleiten, die im weiteren Verlauf des Unterrichts theoretisch zu begründen ist. Geometrische Fragestellungen sind hier besonders interessant, da sie oft beide Formen der Modellierung erlauben: Zunächst können geo-metrische Fragen auf der Basis von Messungen erkundet werden, die dann die empirische Herleitung eines Modells ermöglichen. Andererseits gibt es – zumindest im Kontext der Schulmathematik – für geometrische Fragestellungen eine etablierte Theorie, auf deren Grundlage ein Modell deduziert werden kann. Der durch Messungen und Modellierungen empirisch entdeckte Zusammenhang provoziert ja gerade die theoretische Reflexion: Warum ist das denn so? Ist das entdeckte Resultat allgemeingültig, bzw. unter welchen Bedingungen besitzt es Gültigkeit?
Das populäre Zitat von George Box (1987, S. 424) „*All models are wrong, but some are useful*“ mag im geometrischen Kontext gar nicht mehr zutreffen, da die Theorie ein bestimmtes Modell als das „richtige Modell“ deduzieren lässt. Allerdings sollte man nicht vergessen, dass auch die theoriegeleiteten Modelle der Geometrie nur unter bestimmten Annahmen wie z.B. der Gültigkeit der Axiome der Euklidischen Geometrie Bestand haben

3. Explorativ und konfirmatorisch: Von der Synergie zweier Heransgehensweisen

Im Gegensatz zu vielen deskriptiven Modellierungen wie z.B. in der Populationsdynamik hat man bei geometrischen Fragestellungen (zumindest im Kontext der Schulmathematik) in der Regel ein rein theoriegeleitetes Modell verfügbar. Wohl wäre es frevelhaft, die Geometrie auf eine empirische Wissenschaft zu verkürzen. Die Eleganz ihrer Argumentationen und die Allgemeingültigkeit ihrer Aussagen basiert ja gerade auf theoretischen Erwägungen. In diesem Sinne scheint eine empirische Modellierung geometrischer Fragestellungen vor allem aus datenanalytischer Perspektive interessant zu sein. Denn für die Datenanalyse ist es instruktiv, eine

Situation mit empirischen Methoden anzugehen, zu der es außerdem ein theoriebasiertes Modell gibt. Im Gegensatz zu den allermeisten Anwendungen von Datenanalyse lässt sich hier die empirisch gewonnene Lösung mit der theoriegeleiteten Lösung vergleichen: Wir haben somit ein Gütekriterium für die empirische Lösung verfügbar.

Beide Zugänge zum Modellieren – sowohl der datenbezogene auf empirischen Methoden beruhende Zugang wie auch das theoriegeleitete Herangehen –bedürfen der Validierung. Gewiss gibt es – je nach Problemkontext – verschiedene Zugänge, theoriegeleitete Modelle zu validieren. Jedoch eine nahe liegende Methode zur Validierung theoretischer Modelle besteht darin, ihre Vorhersagekraft mittels neuer Daten zu prüfen. Dann entscheidet sich, ob sich das das Modell bei neuen Beobachtungen bewährt oder ob es durch ein neues Modell ersetzt werden sollte. Ein theoriegeleitetes Modell, das bei dieser Erprobung zu nicht-akzeptablen Abweichungen zu erhobenen Daten führt, ist genauso wenig zu akzeptieren wie ein empirisch gewonnenes Modell, das unplausibel erscheint und überzeugenden Theorien widerspricht.

Literatur:

Biehler, R., A. Prömmel & T. Hofmann (2007): Optimales Papierfalten – Ein Beispiel zum Thema Funktionen und Daten *Der Mathematikunterricht*, Heft 3, 23 - 32.

Box, G. E. P. &R. Draper, N. (1987). *Empirical Model-Building and Response Surfaces*. Wiley.

Engel, J. (2009): *Von Daten zur Funktion: Anwendungsorientierte Mathemtaik. Eine Einführung in die mathematische Modellbildung für Lehramtstudierende.* Springer: Heidelberg

Engel, J. (2010): Datenanalyse und Geometrie: Vom Zusammenspiel theoriegeleiteter und datenbezogener Modellierungen. Unveröffentlichtes Manuskript

Engel, J., Sedlmeier, P & Wörn, C. (2008). Modeling scatter plot data and the signal-noise metaphor..: In: C. Batanero (Ed): *Proceedings of ICMI/ IASE Study Statistics Education in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education.*

Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (2010): Aspects of statistical literacy between competency measures and indicators for conceptual knowledge – Empirical research in the Project "RIKO-STAT". In.: C. Reading (Ed) Proceedings of 8th International Conference of Teaching Statistics, IASE. (to appear)

INGO ENGERT-OOSTINGH, Salzburg, STEFAN G   TZ, Wien, KARL JOSEF FUCHS, Salzburg

Ein genetisch orientierter Lehrgang zur Wahrscheinlichkeitsrechnung

Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist ein relativ junges Teilgebiet der Mathematik. Deswegen ist sie erst Anfang des 20.Jahrhunderts in die Lehrpläne der allgemein bildenden Schulen in Deutschland aufgenommen worden. Seit der zweiten Hälfte des 20.Jahrhunderts existiert eine Diskussion über die Ausrichtung des zukünftigen Stochastikunterrichts, welche noch bis heute nicht abgeschlossen ist (Kütting 1994). In der Unterrichtspraxis lassen sich zurzeit vier verschiedene Grundkonzepte für den Stochastikunterricht erkennen, die auf unterschiedliche didaktische Ziele ausgerichtet sind.

Das menschliche Denken ist sehr häufig logisches und kausales Denken. Dies ist aber nicht immer möglich, da auf Grund fehlender Rahmenbedingungen, Entscheidungen unter Unsicherheiten zu treffen sind. Um in solchen Situationen handlungsfähig zu sein, ist es wichtig eine besondere Denkform, die ein Beurteilen und Entscheiden ermöglichen, das stochastische Denken, zu erwerben. Für diese Denkweise sind die folgenden Grundvoraussetzungen wichtig (Tietze, Klika et al. 2002):

Erkennen von zufälligen Vorgängen

Analyse der Bedingungen solcher Vorgänge

Konstruktion von mathematischen Modellen

Anwendung von Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Interpretation von Ergebnissen

Es ist also von sehr großer Bedeutung, dass die Grundlagen, dieser Art des Denkens, in der Schule erlernt werden können, um so die Schüler(innen) auf ihr späteres Leben bestmöglich vorzubereiten. Hiermit kann ein großer Beitrag zur allgemein Bildung der jungen Menschen geleistet werden.

Ausgangssituation

Zurzeit kann ein(e) Lehrer(in) sich für einen der vier idealtypischen Wege zur Behandlung der Wahrscheinlichkeitsrechnung entscheiden (Tietze, Klika et al. 2002).

Klassischer Aufbau

Ein Stochastikunterricht nach dem klassischen Aufbau orientiert sich sehr stark an den universitären Lehrgängen, fängt zumeist mit dem Axiomensystem von Kolmogoroff an und geht von hieraus weiter. Den Schüler(innen) wird damit das eleganteste und mathematisch effektivste Fundament für die Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Beginn aufgezeigt. Dies kann das Bild eines abgeschlossenen Gebäudes hervorrufen. Die Möglichkeit, einen eigenen Zugang zu entwickeln, ist damit nicht gegeben. Die verschiedenen Inhalte des Lehrgangs werden damit nur schlecht verinnerlicht. Die fehlenden Möglichkeiten, selbstständig geeignete Verknüpfungen zu entwickeln, können ein schlechteres Verständnis zur Folge haben.

Anwendungsorientierter Aufbau

Ein Unterricht, der dem anwendungsorientierten Aufbau zu zuordnen ist, orientiert sich mehr an der Begriffs- und Methodenentwicklung anhand von konkreten Beispielen aus Bereichen wie Marktforschung oder Versicherungsstatistik. Bei diesem Konzept sollen die Themen induktiv durch miteinander verbundene Beispiele und bungsaufgaben, mit einem zumeist geringen Maß an mathematischer Formalisierung, von den Schüler(innen) entwickelt werden. Man geht davon aus, dass dieser Zugang gutes stochastisches Denken ermöglicht, da die Schüler(innen) sich mit handlungs- und anwendungsorientierten Problemstellungen auseinandersetzen müssen und so den Bezug zur realen Welt erkennen können.

Datenorientierter Aufbau

Der Datenorientierte Aufbau eines Lehrgangs wird hauptsächlich im englischsprachigen Raum angewendet. Ziel dieses Konzeptes ist es, dass die Schüler(innen) eine „Datenkompetenz" entwickeln. Dabei geht man gleichsam via Praxis zur dahinter liegenden Theorie. Dabei sollen Techniken entwickelt werden, in vorliegenden Daten Strukturen zu erkennen. Die Modellbildung als Leitidee sowie die Methoden der explorativen Datenanalyse stehen dabei im Fokus. Die rein mathematische Wahrscheinlichkeitsrechung rückt eher in den Hintergrund. Um schließlich zur „Datenkompetenz" zu gelangen, arbeiten die Schüler(innen) an anwendungsorientierten Problemen, die sie und durch eigenständiges Handeln lösen müssen. Bei dieser Art des Unterrichtens kommen der Wahrscheinlichkeitsbegriff und die verschiedenen Verteilungsmodelle zumeist zu kurz. Meiner Ansicht nach handelt es sich dabei jedoch um wichtige Elemente stochastischen Denkens.

a esianischer Aufbau

Dem Bayesianischen Aufbau liegt die „induktive Logik" zugrunde. Die Bayes - Statistik kehrt die Blickrichtung der klassischen Statistik um, das heißt, sie versucht von der Wirkung auf die Ursache zurück zu schließen. Die Schüler(innen) sollen an Hand von anwendungsorientierten Beispielen und Problemen eigenständig auf mögliche „Auslöser" kommen, womit ein solcher Unterricht immer handlungsorientiert ist und ein großes Maß an Schüler(innen)aktivität zulässt. Auf diese Weise können die Schüler(innen) mögliche Grenzen einer probabilistischen Modellierung eines Problems erfahren und alternative Möglichkeiten kennen lernen. In verschiedenen Situationen ist dabei zumeist anspruchsvolle Mathematik anzuwenden. Auf die berforderung einzelner Schüler(innen) ist dabei durchaus zu achten.

Lehrgang

Eine Besonderheit der Mathematik ist das so genannte „Mathematisieren". Damit ist die besondere Art und Weise des Anwendens und der Weiterentwicklung der Mathematik gemeint. Für die Schule bedeutet das, den Schüler(innen) im Unterricht vielerlei Gelegenheit zu geben, das Mathematisieren selbst zu erfahren, es (weiter) zu entwickeln, um dabei die Genese zentraler Idee der Mathematik selbst nachzuvollziehen.

Nur wenige Konzepte zur Gestaltung des Stochastikunterrichts berücksichtigen das Mathematisieren und die mathematisch historische Entwicklung in ihren Darstellungen. Zumeist sind die angesprochenen Konzepte auch nicht auf eine längere Unterrichtszeit ausgerichtet. Ein Grund liegt sicherlich darin, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung als drittes bedeutendes Teilgebiet neben der Analysis und der Geometrie im normalen Regelunterricht ihre neue Rolle erst behaupten muss. An vielen Gymnasien überwiegen noch die klassischen Lehrgänge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dadurch ergeben sich in diesem Teilgebiet häufig viele Zugangs- und Verständnis - Probleme für Schüler(innen).

Die Entwicklung eines umfassenderen Konzepts für die Wahrscheinlichkeitsrechnung, dass auf eine Unterrichtsdauer von acht Jahren ausgerichtet ist, erscheint damit mehr als notwendig und gerechtfertigt.

Die Leitidee dafür ist das Genetische Lernen, das sich an der historischen Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung orientiert.

Zudem soll es anwendungs- und schülerorientierter sein, um so das Teilgebiet für Schüler(innen) leichter zugänglich zu machen.

Ein solcher Lehrgang kann auch den angeborenen Spieltrieb der Schüler(innen) nutzen. Erfahrungsgemäß fällt den Schüler(innen) leichter ein Gebiet der Mathematik zu erschließen und die erworbenen Kenntnisse danach zu vertiefen, da sie die Entwicklung des Teilgebietes nacherleben und einen eigenen Zugang finden können (Heidenthaler 2008).

Dabei ist es wichtig, dass der neue Lehrgang nicht als weiteres konkurrierendes Konzept anzusehen ist. Vielmehr möchte ich verschiedene Elemente aus den bisherigen Vorschlägen aufgreifen und in einem neuen Modell vereinen. Die Längsschnittbetrachtung, d. h. mein Grundanliegen der Formulierung eines umfassenden Konzepts auf eine Unterrichtsdauer von acht Jahren, soll dabei im Mittelpunkt stehen.

Um die verschieden Ansätze aus den unterschiedlichen Konzepten zu verbinden, sollen die Fundamentalen Ideen der Stochastik (Führer 1997 Tietze, Klika et al. 2002) als strukturierendes Element aufgegriffen werden. Dabei sollen sowohl fachspezifische Strategien und Techniken als auch fachdidaktische und methodische Prinzipien berücksichtigt werden.

Literatur

Führer, L. (1997). *Pädagogik des Mathematikunterrichts.* Braunschweig Wiesbaden: Vieweg Verlag.

Heidenthaler, C. (2008). *Spiele im Mathematikunterricht – Eine methodisch didaktische Reflexion*. Diplomarbeit zur Erlangung des Magisters der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Salzburg.

Kütting, H. (1994). *Didaktik der Stochastik.* Mannheim Leipzig: BI-Wissenschaftsverlag.

Tietze, U.-P., M. Klika, et al. (2002). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II Didaktik der Stochastik*. Braunschweig Wiesbaden: Vieweg Verlag.

JOACHIM FELS, Biberach

Empirische Evaluation von Übergangsproblemen im Mathematikunterricht

1. Der Kontext

Beim Wechsel von der Jahrgangsstufe 10 in das berufliche Gymnasium sind in bezug auf das Unterrichtsfach Mathematik häufig Übergangsprobleme auf Schülerseite zu bemerken. An einer beruflichen Schule in Baden-Württemberg wurde versucht, im Hinblick auf das Wirtschaftsgymnasium empirische Ursachenforschung zu betreiben und die auftretenden Übergangsprobleme zu reduzieren. An anderer Stelle wurde bereits etwas ausführlicher über diese Untersuchung berichtet (Fels 2010), ein detaillierter Bericht folgt im Herbst 2010.

Mit der Studie „Transformation des Sekundarschulsystems und akademische Karrieren (TOSCA)“ (Köller, Watermann & Trautwein 2004) wurden die allgemein bildenden mit den beruflichen Gymnasien in Baden-Württemberg verglichen. Hierbei ergab sich u.a., dass ungefähr ein Drittel aller Abiturienten in Baden-Württemberg ihre Hochschulreife an einem Beruflichen Gymnasium erwerben . Mittlerweile kann die These, dass die im Rahmen der gymnasialen Oberstufe in Baden-Württemberg angebotene berufliche Profilbildung nicht mit Qualitätseinbußen, sondern mit der Ermöglichung von Durchlässigkeit und sozialen Aufstiegschancen einher geht, als empirisch abgesichert angesehen werden (vgl.: ebd.: 87, 155).

2. Die Forschungslage

Obwohl die Bildungsforscher in ihrer TOSCA-Studie die Relevanz mathematischer Bildung als fundamental für die Ausbildung von Studierfähigkeit betrachten, ist es doch überraschend, dass gerade in Bezug auf diese zentrale Stellung des Mathematikunterrichts offensichtlich nur wenige Erkenntnisse vorliegen: „Für den Mathematikunterricht (…) liegen klare und an konkreten Leistungsanforderungen orientierte Mindeststandards noch nicht vor. Auch mangelt es an methodisch gut abgesicherten empirischen Untersuchungen, aus denen hervorgeht, über welche mathematischen Qualifikationen Teilnehmer (…) verfügen müssen, um auf ein Hochschulstudium hinreichend vorbereitet zu sein“ (ebd., 206). Mittlerweile wurde herausgearbeitet, wie gravierend die Leistungsabfälle im Fach Mathematik beim Übergang in das berufliche Gymnasium sind und wie diese Leistungsabfälle mit der Ausrichtung des zu vermittelnden Stoffes im beruflichen Gymnasium zusammenhängen (vgl.: Haasis 2008). Unklar bleibt jedoch, wie die bestehenden Übergangsprobleme im Mathematikunterricht aufgefangen und reduziert werden können.

3. Entwicklung und Evaluation eines Unterrichtsansatzes zur Reduzierung von Übergangsdefiziten

Angesichts dieser Forschungslücke wurde für das Wirtschaftsgymnasium ein Unterrichtsansatz konzipiert und empirisch evaluiert, mit dessen Hilfe die ansonsten auftretenden Übergangsprobleme signifikant reduziert werden konnten. Gegenstand der empirischen Studien waren neben Leistungsvergleichen im Fach Mathematik auch motivationale Aspekte, die interessante Aufschlüsse bezüglich der Schülersituation im Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien ermöglichen. Zunächst wurde der Ist-Stand des Faches Mathematik am Ende der Eingangsklasse des Beruflichen Gymnasiums mittels einer Schülerbefragung evaluiert.

Hierbei konnte in allgemeiner Hinsicht auf Schülerseite eine äußerst hohe Leistungsbereitschaft festgestellt werden. Der nach Schülermeinung zentrale Bildungsauftrag, eine möglichst optimal Vorbereitung für die berufliche Zukunft zu bieten, wird gemäß den Angaben der Schüler von den einzelnen Hauptfächern erfüllt, allerdings mit einer Ausnahme: Mathematik. In Bezug auf das Fach Mathematik geben die Schüler an, am Ende der Jahrgangsstufe 10 erwartet zu haben, dass sie auch durch dieses Fach Qualifikationen für ihre spätere berufliche Laufbahn erwerben könnten. Rund 70 % der befragten Schüler geben an, dass sie ursprünglich ein Studium oder einen Beruf ergreifen wollten, der mit Mathematik etwas zu tun hat, dieses unter anderem mathematisch geprägte Berufsbild hätten sie ihren Aussagen zufolge jedoch im Laufe der Eingangsklasse aufgrund überwiegend frustrierender Erfahrungen im Unterrichtsfach Mathematik weitestgehend verworfen. Allein das mathematische Vorwissen– so die Mehrheit der Schüler – sei entscheidend, ob man in Mathematik „absackt“ oder die Chance hat, an die ehemals guten Noten aus der Jahrgangsstufe 10 anschließen zu können.

Rund 80 % der Schüler gaben bezüglich des Faches Mathematik eine desolate Einschätzung ab. Dies waren vor allem diejenigen Schüler, die aus der Realschule oder aus der Berufsfachschule in das berufliche Gymnasium gewechselt hatten. Diejenigen Schüler hingegen, die vorher das Gymnasium besucht hatten oder eine überdurchschnittlich hohe mathematische Motivation bekunden, geben an, mit dem Fach Mathematik gut zurecht zu kommen und dementsprechend später eine berufliche Zukunft einschlagen zu wollen, in der „Mathematik gebraucht wird“.

4. Integration von Routinebildung

Um die auftretenden Übergangsprobleme zu reduzieren, wurde versucht, den Schülern bessere Anschlussmöglichkeiten an den Stoff der Eingangsklasse des beruflichen Gymnasiums dadurch zu bieten, dass während der ersten drei Monate der Eingangsklasse der Schwerpunkt des Unterrichts besonders stark auf die Schulung von Rechentechnik und auf das Lösen von Gleichungen gelegt wurde. Die Rechentechnik wurde geschult, dass zunächst auf grundlegende algebraische Begriffe (Summe, Differenz, etc.), die damit verbundenen Rechenregeln, das Rechnen mit Brüchen, den Umgang mit Bruchtermen sowie mit Logarithmen weitaus ausführlicher als im traditionellen Unterricht eingegangen wurde. Während der dreimonatigen Versuchsphase wurde besonders das schriftliche Rechnen eingeübt, der Taschenrechner wurde erheblich weniger als im traditionellen Unterricht benutzt. Die Fähigkeit, Gleichungen lösen zu können, wurde dadurch zu verbessern versucht, dass lineare (Un-) Gleichungen, Lineare Gleichungssysteme, Quadratische Gleichungen sowie Polynomgleichungen 3. Grades sehr detailliert im Unterricht besprochen wurden. Insbesondere das Umformen von Gleichungen wurde stark geübt, die Schüler wurden ferner mit Gleichungen konfrontiert, die nicht in der Normalform gegeben waren. Insbesondere die im Zusammenhang mit der Lösung von Gleichungen notwendigen algebraischen Umformungen wurden verstärkt eingeübt. Die umfangreich durchgeführten Übungen waren zunächst über weite Strecken anwendungsfrei formuliert, erst später wurden die vermittelten Kenntnisse in realen Kontexten angewandt. Man erhoffte sich durch diese dreimonatige Versuchsphase routiniertere Fähigkeiten auf Schülerseite insbesondere im Hinblick auf die nötigen rechentechnischen Grundfertigkeiten. Daher wurde der konzipierte Unterrichtsansatz auch als „integrativ" bezeichnet, weil mit ihm eine stärker als ansonsten übliche Integration von Routinebildung in den Unterricht intendiert wurde. Man erhoffte sich durch diesen Ansatz die Bildung von größerer mathematischer Sicherheit sowie eine Konsolidierung der für die Bewältigung der Unterrichtsinhalte der Jahrgangsstufen nötigen Grundkenntnisse auf Schülerseite.

Bei der überwiegenden Mehrzahl der Schüler, die traditionell beschulten Kontrollgruppen zugewiesen waren, konnten die oben beschriebenen Übergangs- und Frustrationsprobleme festgestellt werden. Insbesondere war festzustellen, dass diese Schüler angaben, Angst davor zu haben, im späteren beruflichen Leben Nachteile aufgrund ihrer schlechten Leistungen im Fach Mathematik in Kauf nehmen zu müssen. Innerhalb der integrativ beschulten Schülergruppen konnte jedoch festgestellt werden, dass nur diejenigen Schüler, welche die Jahrgangsstufe 10 an einer Real- oder Berufsfachschule besuchten und darüber hinaus dem Fach Mathematik von Be-

ginn der Eingangsklasse an motivational negativ gegenüber standen, das Fach Mathematik wie oben beschrieben negativ bewerteten.
Innerhalb der integrativ unterrichteten Schülergruppen schnitten diejenigen Schüler, die die Jahrgangsstufe 10 auf einem allgemein bildenden Gymnasium besucht hatten und gleichzeitig eine hohe mathematische Motivation mitbrachten, am besten ab. Der große Unterschied bestand allerdings darin, dass die Schüler, welche die Jahrgangsstufe 10 auf einer Real-oder Berufsfachschule absolviert hatten und darüber hinaus dem Fach Mathematik mindestens durchschnittlich motiviert gegenüberstanden (ca. 65 %) – insofern sie integrativ unterrichtet wurden – mit ihren Mathematikleistungen in der Eingangsklasse zufrieden waren und angaben, später durchaus ein Studium bzw. einen Beruf ergreifen zu wollen, bei dem mathematische Kenntnisse angewandt werden müssen. Diese große Schülergruppe konnte im Rahmen des traditionell geführten Unterrichts nicht zu derartigen positiven Aussagen bewegt werden. Dieses positive Abschneiden des integrativen Unterrichtsansatzes wurde insbesondere durch den mathematischen Test am Ende des Schuljahres bestätigt: Während die integrativ beschulten Schüler durchschnittlich gut abschnitten, erzielten die traditionell beschulten Schüler im Mittel lediglich 61,36 % der von den integrativ beschulten Schülern durchschnittlich erreichten Punktzahl.
Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich die oftmals geforderte starke Betonung von Verständnis- und Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht bei der großen Anzahl der Schüler der Eingangsklasse, die die Jahrgangsstufe 10 nicht auf einem allgemein bildenden Gymnaisum besucht haben, aber dennoch von vornherein dem Fach Mathematik nicht negativ gegenüberstehen, keineswegs positiv auswirkt. Gerade dieses Schülerklientel benötigt ein Training der rechentechnischen Baiscs. Dann entsteht die Chance, die ansonsten bei weitem gravierender auftretenden Übergangsprobleme in den Griff bekommen zu können. Weitere Untersuchungen bezüglich einer möglichst optimalen fachdidaktischen Annäherung an den Mathematikunterricht an beruflichen Gymnasien scheinen angebracht zu sein.

Literatur

Fels, Joachim (2010) (Zur Publikation eingereicht). Empirische Evaluation von Übergangsproblemen im Mathematikunterricht beim Wechsel von der Jahrgangsstufe 10 in das berufliche Gymnasium. *Lehren und Lernen*, 04/2010.

Haasis, Vanessa (2008). *Die Übergangsproblematik beim Schulwechsel nach der Sekundarstufe I.* Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.

Köller, Olaf; Watermann, Rainer & Trautwein, Ulrich (Hrsg.) (2004). *Wege zur Hochschulreife in Baden-Württemberg. TOSCA – Eine Untersuchung an allgemein bildenden und beruflichen Gymnasien.* Opladen: Leske und Budrich.

Andreas FEST, Schwäbisch Gmünd

Prozessorientiertes Lernen mit interaktiver Geometrie

1. Aktivierende Lernumgebungen

Das Lösen mathematischer Aufgaben initiiert einen komplexen Lernprozess, der verschiedene mathematische Kompetenzen erfordert. Um diesen Lernprozess optimal zu fördern, bedarf es einer begleitenden individuellen Rückmeldung, die diesen Prozess als Ganzes analysiert und bewertet.

Die Mathematikausbildung an der Hochschule sollte im Idealfall dem Konzept des geleiteten entdeckenden Lernens folgen (Mayer, 2004). Die Studierenden untersuchen mathematische Probleme und entwickeln eigene Lösungen. Dabei haben sie die Freiheit, ihre individuellen Lernpfade, Lösungsstrategien und Werkzeuge selbst zu wählen, um eine tiefere Einsicht in die mathematischen Beziehungen und Strukturen zu gewinnen. Die Rolle der Lehrkraft in solch einer aktivierenden Lernumgebung liegt darin, den Lernprozess zu unterstützen, indem sie den Studierenden hilft und ihnen Rückmeldungen liefert. Allerdings kann die Lehrkraft nicht den Lernprozess jedes einzelnen Studierenden begleiten. Der Einsatz einer interaktiven Software mit semiautomatischem Feedback kann hierbei helfen.

2. Semiautomatisches Assessment

In dem BMBF-Projekt „SAiL-M – Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik“ werden didaktische Beschreibungsmuster für aktivierende, kompetenzorientierte Umgebungen zum Mathematiklernen an der Hochschule formuliert und implementiert. Es werden (computer-basierte) Tools zur Dokumentation und Auswertung von Lernprozessen konzipiert und implementiert sowie die Wirksamkeit der entwickelten Modelle zu Lehr-/Lernszenarien und der Nutzen prozessbezogenen Feedbacks evaluiert (Bescherer, Kortenkamp, Müller, & Spannagel, 2009).

Semiautomatisches Assessment basiert auf der Einsicht, dass es einige wenige Standardlösungswege gibt, die von den meisten Studierenden verfolgt werden. Ebenso lässt sich häufig eine kleine Menge von Standardfehlern identifizieren. Standardlösungen und -fehler können von einer Software erkannt und ausgewertet werden. Das ermöglicht unmittelbares Feedback und Hilfen (Bescherer und Spannagel, 2009), wobei das Feedback den gesamten Lösungsprozess (und nicht nur das Ergebnis) beurteilt. Unübliche Lösungen, die nicht automatisch bewertet werden können, werden erkannt und dem Lehrenden zur individuellen Beurteilung gemeldet. Darüber hinaus erhält der Dozent eine statistische Auswertung über das Auftreten von Standardlösungen und -fehlern.

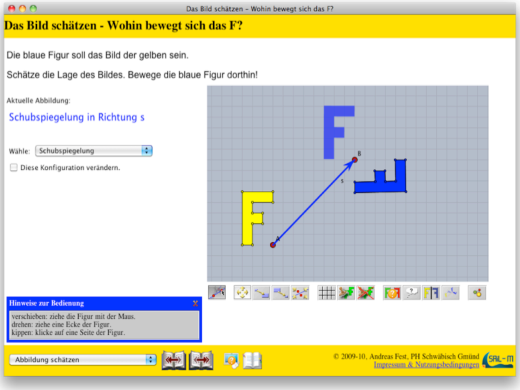
3. Die geometrische Lernumgebung MoveIt!-M

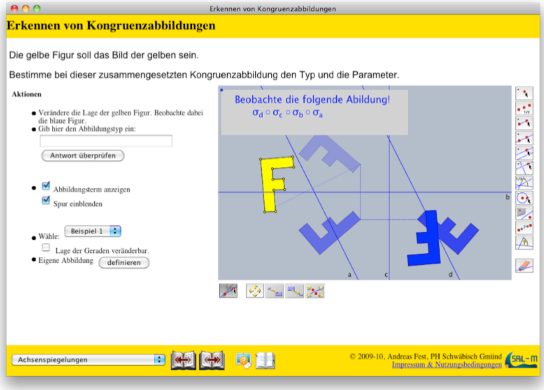
Interaktive Geometrie-Systeme wie Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp, 2010) haben sich als ein geeignetes Werkzeug zum entdeckenden und erforschenden Lernen von Geometrie erwiesen (Hölzl, 1994). Für ein zielgerichtetes Lernen kann ein solches Tool jedoch zu komplex sein, z.B. durch die eventuell irreführende Auswahl der zur Verfügung stehenden Werkzeuge. Diese Schwierigkeiten werden üblicherweise durch vorbereitete interaktive Arbeitsblätter umgangen (vgl. Elschenbroich, 2000).

Weiterhin kann kein IGS zu jeder denkbaren (Forschungs-)Aufgabe jeden denkbaren Lösungsweg analysieren. Bei einem klassischen Geometrie-System ist eine solche automatische Analyse zwar teilweise möglich, vgl. hierzu z.B. den automatischen Beweiser und den darauf basierenden Aufgabeneditor von Cinderella. Durch zahlreiche Erweiterungen moderner IGS in Richtung vollwertiger Computer-Algebra-Systeme, mathematischer Simulations-Werkzeuge und mathematischer Programmierumgebungen (Kortenkamp & Fest, 2009) ist eine universelle automatische Analyse jedoch faktisch undenkbar geworden. Abhilfe kann hier die Einbettung in eine problemspezifische Analyse-Software schaffen. Spannagel & Kortenkamp (2009) schlagen die Verwendung der Capture-&-Replay-Software Jacareto vor, die um angepasste Analyse-Algorithmen erweitert werden kann.

Die Lernsoftware MoveIt!-M basiert auf einem selbst entwickelten Analyse-Framework, in das Cinderella-Applets eingebettet werden können. MoveIt!-M[1] ist eine Sammlung offener, interaktiver Experimentierlabore zum Thema Kongruenzabbildungen. Die Leitidee der Software ist der Reduktionssatz, nach dem jede Kongruenzabbildung als Verkettung von maximal drei Achsenspiegelungen dargestellt werden kann. Zentrale Lernziele sind: Kennen lernen und Erkennen verschiedener Typen von Kongruenzabbildungen, ein Gefühl für Kongruenzabbildungen entwickeln, Kongruenzabbildungen als Komposition von Achsenspiegelungen darstellen, die Konstruktion der definierenden Achsen sowie die Vereinfachung gegebener Kompositionen von Achsenspiegelungen (Reduktionssatz). Bisher stehen acht Lernlabore sowie drei Einführungslabore zur Verfügung.

Die Software stellt Kongruenzabbildungen auf verschiedene Arten dar: verbal-symbolisch, mathematisch-symbolisch sowie visuell in Form von Urbild und Bild einer gegebenen Figur. Je nach Intention der Labore kann die Urbild-Figur interaktiv verschoben, gedreht oder gekippt werden, um den Effekt einer Kongruenzabbildung auf verschiedene Situationen zu beobachten. Darüber hinaus stehen in jedem Labor geeignete, angepasste Werkzeuge zur Bearbeitung der Aufgabe oder weitergehender Untersuchungen zur Verfügung.





Die Software generiert auf Verlangen der Lernenden ein Feedback über ihren Lernprozess. Wenn das automatische Feedback nicht weiterhelfen kann, so kann ein persönliches Feedback vom Lehrenden auch per E-Mail erfragt werden (Herding & Zimmermann, 2010). Dafür können sämtliche Benutzer-Interaktionen von der Software auf einem Server geloggt und bei Bedarf vom Lehrenden abgefragt werden.

4. Erfahrungen mit MoveIt!-M

Im Sommersemester 2009 wurde die Usability der Software in einer Vorstudie untersucht. Dazu wurde ein Prototyp der Software in den Geometrie-Lehrveranstaltungen an den Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg und Schwäbisch Gmünd eingesetzt. Sämtliche User-Aktionen wurden auf einem Server zur späteren Analyse protokolliert. Zusätzlich wurde ein Fragebogen zu der Software an die Studierenden ausgeteilt. Die Studie wurde im Dezember 2009 durch die Videoaufzeichnung der Lernprozesse zweier Studierenden-Paare an der TU Berlin ergänzt.

Basierend auf den Ergebnissen dieser Vorstudie konnte die Bedienbarkeit der Software in vielen Aspekten verbessert werden. So wurden z.B. zentrale Bedienelemente wie das Kippen einer Figur durch Klicken auf eine Seite zum Teil von den Studierenden zunächst nicht entdeckt. Entsprechende Tutorials und semantische Bedienungshinweise wurden eingebaut. Weiterhin wurde die Zahl neu eingeführter Bedienelemente pro Labor reduziert und die Möglichkeit eigene Beispiele zu generieren in einigen Laboren eingeschränkt. Stattdessen werden mehr vorgefertigte Beispiele angeboten, die in geringem Maße variiert werden können.

Eine konzeptionelle Schwierigkeit ergab sich durch die zwei Arten von Bewegungen, die in den Lernlaboren simultan auftreten: zum Einen die Bewegung, die durch die gegebene Kongruenzabbildung definiert wird, zum Anderen die Lageveränderung der Urbildfigur durch den Benutzer. Dies führte bei einigen Studierenden zu anfänglicher Verwirrung, die jedoch in den beobachteten Fällen zu Denk- und Diskussionsanregungen bei den Studierenden sorgte und durchaus als positiver Effekt für den Lernprozess gesehen werden kann. Es muss jedoch darauf geachtet werden, dass diese Verwirrung in eine konstruktive Bahn geleitet wird. Dazu könnte ein weiteres Labor entwickelt werden, das diese Problematik aufgreift.

Insgesamt wurde die Software von den Studierenden jedoch überwiegend positiv bewertet, insbesondere das individuelle Feedback wurde als sehr hilfreich für den eigenen Lernprozess gesehen.

Im Sommersemester 2010 ist eine umfassendere Studie an den Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg, Schwäbisch Gmünd und Karlsruhe geplant, bei der das Nutzungsverhalten der einzelnen Labore in Korrelation zu den Leistungen in darauf abgestimmten Testaufgaben gestellt wird.

Literatur

Bescherer, C., Kortenkamp, U., Müller, W., & Spannagel, C. (2009). Intelligent Computer-Aided Assessment in Mathematics Classrooms. In McDougall, A. (Hrsg.), *Researching IT in Education: Theory, Practice and Future Directions*. (S. 200-205). Routledge.

Bescherer, C. & Spannagel, C. (2009). Design Patterns for the Use of Technology in Introductory Mathematics Tutorials. To appear in: *Proceedings of the 9th IFIP World Conference on Computers in Education (WCCE 2009)*. Brazil.

Elschenbroich, H.-J. (2000). Computergestützter Geometrie-Unterricht mit elektronischen Arbeitsblättern. In Weth, T., Herget, W., Weigand, H.-G. (Hrsg.), *Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht*. Hildesheim: Franzbecker.

Herding, D., & Zimmermann, M. (2010). Entwicklung eines Frameworks für semi-automatisches Feedback zur Unterstützung bei Lernprozessen. Vorabversion, eingereicht bei DeLFI 2010, Duisburg.

Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie*. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Kortenkamp, U. & Fest, A. (2009). From CAS/DGS Integration to Algorithms in Educational Math Software, *The Electronic Journal of Mathematics and Technology, 3(3).*

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist*, 59(1), 14-19.

Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (2010). *The Interactive Geometry Software Cinderella*, Version 2.1. Online unter http://cinderella.de.

Spannagel, C. & Kortenkamp, U. (2009). Demonstrating, Guiding, and Analyzing Processes in Dynamic Geometry Systems. In: Bardini, C., Fortin, P., Oldknow, A. & Vagost, D. (Hrsg.). *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Metz: ICTMT 9.

[1] Die Software kann unter http://www.sail-m.de/ heruntergeladen werden.

HEIKO FEY, REGINA BRUDER, Darmstadt

Messung diagnostischer Kompetenz in der Lehramtsausbildung Mathematik

Ziel des vom BMBF geförderten Projektes ist die Entwicklung und Erprobung eines Instrumentes zur Messung diagnostischer Kompetenzen von zukünftigen Lehrerinnen und Lehrern für Mathematik an Gymnasien und an beruflichen Schulen. Das Instrument soll in der ersten und in der zweiten Phase der Lehrerausbildung eingesetzt werden, um das individuelle diagnostische Wissen und Können der Studierenden und Referendare zu beschreiben und Entwicklungsfortschritte sichtbar zu machen.

1. Forschungsrahmen und Forschungshintergrund

In den KMK Standards (2004) für die Lehrerausbildung im Kompetenzbereich *Beurteilen* wird gefordert: „Lehrerinnen und Lehrer diagnostizieren Lernvoraussetzungen und Lernprozesse von Schülerinnen und Schülern; fördern Schülerinnen und Schüler gezielt und beraten Lernende und deren Eltern".

Zur Bedeutung der diagnostischen Kompetenz wurde eine Befragung hessischer Mathematikfachleiter (n = 40) durchgeführt. Diese wurden aufgefordert, Anforderungen und Erwartungen an Absolventen mit Erstem Staatsexamen einzuschätzen. Die Einschätzungen wurden aufgrund von 68 Teilkompetenzen, die den Modulbeschreibungen und der Studienordnung der 2. Phase der Lehrerausbildung entnommen wurden, erhoben. Zum einen sollten die Fachleiter auf einer fünfstufigen Skala einschätzen, wie wichtig bzw. notwendig der Erwerb einzelner Teilkompetenzen bereits im Studium ist, und des weiteren sollten sie auf einer vierstufigen Skala einschätzen, wie viel Prozent der Studienabsolventen diese Teilkompetenzen nach ihrer Wahrnehmung bereits besitzen.

Eine erste Betrachtung der sich aus der Auswertung ergebenden Boxplots und der Mittelwerte lässt einen großen Unterschied zwischen der eingeschätzten Wichtigkeit und den tatsächlich vorhandenen relevanten Kompetenzen erkennen.

Die abgefragten Teilkompetenzen werden von den Fachleitern als wichtig ($\bar{x}$=3,9) empfunden (siehe Abb. 1).

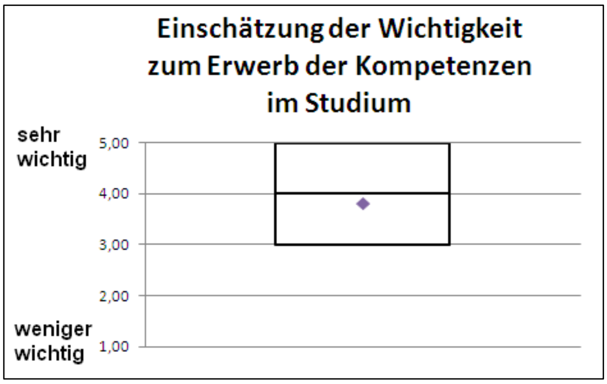


Abb. 1

Hingegen beherrschen nach Meinung der Fachleiter im Durchschnitt etwa nur 25% bis 50% der Absolventen mit 1. Staatsexamen diese Teilkompetenzen (siehe Abb. 2).

Der Kompetenzbereich *Mathematisches Wissen* wird von den Fachleitern erwartungsgemäß als überdurchschnittlich

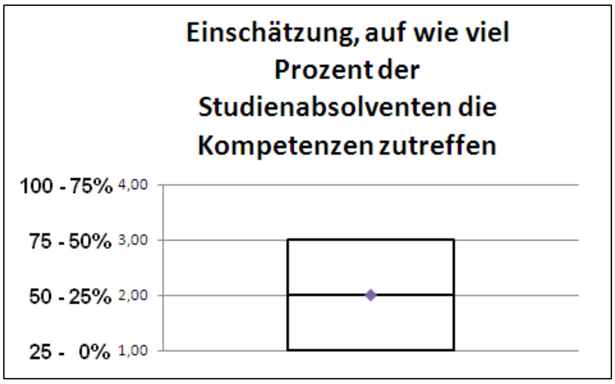
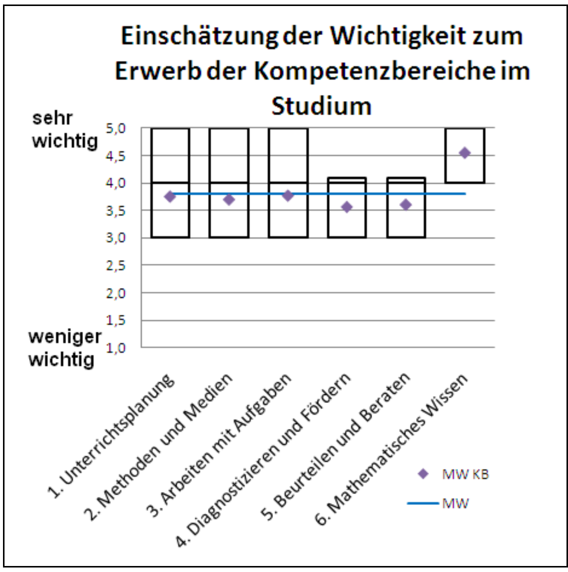


Abb. 2

wichtig empfunden. Hingegen wird der Erwerb der Kompetenz *Diagnostizieren und Fördern* und der Kompetenz *Beurteilen und Beraten* als unterdurchschnittlich wichtig für die erste Ausbildungsphase angesehen (siehe Abb.3).



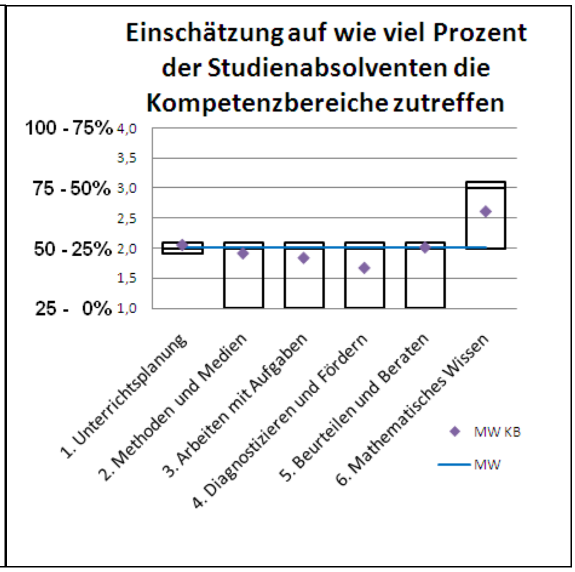


Abb. 3

Abb. 4

Die tatsächlich wahrgenommenen Kompetenzen der Studienabsolventen werden allgemein niedrig eingeschätzt ($\bar{x}$=2) (siehe Abb. 4). Hierbei fällt wieder besonders das *Mathematische Wissen* auf, welches noch vergleichsweise breit vorhanden ist (bei etwa 50% der Absolventen) und die Kompetenz *Diagnostizieren und Fördern*, deren Vorhandensein als unterdurchschnittlich niedrig eingeschätzt wird.

Als erstes Fazit lässt sich Folgendes festhalten: Die Erwartungen an die Absolventen mit Erstem Staatsexamen sind deutlich höher, als die nach Meinung der Fachleiter tatsächlich vorhandenen und beherrschten Kompetenzen. Dass die Erwartungen höher liegen als die Realität, ist weniger überraschend als die Höhe dieser Differenz, die doch nachdenklich macht.

2. Diagnostische Kompetenz

Die diagnostische Kompetenz (Weinert und Schrader 1986, Helmke 2009) enthält Elemente der pädagogischen und psychologischen Diagnostik. Die grundlegende Definition von Ingenkamp (2008) vereint alle relevanten Elemente der diagnostischen Kompetenz und soll im Forschungsprojekt Verwendung finden.

3. Messung diagnostischer Kompetenz

Zur Messung diagnostischer Kompetenz wird ein theoretisch begründetes Kompetenzprofil zugrunde gelegt, welches auf Aufgaben als zentrales didaktisches Element des Mathematikunterrichtes (Bruder 2003) ausgerichtet ist. Das Bearbeiten von Aufgaben kann als Mittel (Weg), als Könnensziel und als Diagnoseinstrument sowohl im Unterricht eingesetzt werden als auch in der Ausbildung der künftigen Lehrkräfte.

Für eine Messung diagnostischer Kompetenz sind mit Bezug auf Weinert und Schrader (1986) folgende Aspekte relevant:

- Wahrnehmung und Beschreibung des *Ausgangsniveaus* der Lernenden,

- Erfassung des *Potenzials zur Kompetenzmessung* und –förderung in Aufgaben und Lernmaterialien – spezifiziert im Anforderungsprofil einer Aufgabe und in den relevanten Schülertätigkeiten,

- *Analyse von Schülerleistungen* anhand von Schülerlösungen und Identifizieren von Fehlvorstellungen

- Entwicklung von Checklisten und Aufgaben von themenspezifischen Kompetenzzielen.

In unserem Projekt werden die beiden Kompetenzaspekte *Potenzial zur Kompetenzmessung* und *Analyse von Schülerleistungen* fokussiert.

4. Verwendung und Verwertung von Ergebnissen aus Kompetenzmessungen

Eine Pilotstudie zum Kompetenzaspekt *Potenzial zur Kompetenzmessung* wurde mit der Methode des Repertory Grid (Bruder et al. 2003) durchgeführt. Die Methode sieht vor, Objekte miteinander zu vergleichen, um persönliche Konstrukte erfassen zu können. Zu diesem Zweck haben Studierende in aufeinander folgenden didaktischen Lehrveranstaltungen jeweils zwei Mathematikaufgaben miteinander verglichen. Hierbei nannten sie Aufgabenmerkmale, welche die beiden Aufgaben unterscheiden.

Die Studierenden nannten im Mittel sieben Aufgabenmerkmale. Maximal wurden bei der Befragung 15 Aufgabenmerkmale genannt. Ordnet man die Aufgabenmerkmale äußeren Aspekten, inneren Aspekten und übergeordneten Aspekten zu, so ergeben sich im Durchschnitt jeweils drei Nennungen der äußeren und inneren Aspekte und eine Nennung der übergeordneten Aspekte. Die Ergebnisse zeigen auch, dass Studierende mit steigender Anzahl von didaktischen Lehrveranstaltungen mehr Aufgabenmerkmale nennen können.

Die Ergebnisse des Repertory Grid wurden den Studierenden in einem allgemeinen und einem individuellen Teil zurückgemeldet. Diese Rückmeldung kann in das Prüfungsportfolio, aber auch in das phasenübergreifende Portfolio, welches gerade in Hessen pilotiert wird, aufgenommen werden.

Die Ergebnisse der Kompetenzmessung sollen nicht nur individuelle Entwicklungsfortschritte sichtbar machen und weitere unterstützen, sondern auch verallgemeinerte Aussagen über die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz liefern. Diese Ergebnisse sollen zur Verbesserung der Lehrerausbildung an der TU Darmstadt genutzt werden.

Literatur

Bruder, R.(2003): Konstruieren - auswählen - begleiten. Über den Umgang mit Aufgaben. In: Friedrich-Jahresheft "Aufgaben. Lernen fördern - Selbstständigkeit entwickeln", Friedrich Verlag 2003, S. 12 – 15

Bruder, R.; Lengnink, K.; Prediger, S. (2003): Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? Ein methodischer Ansatz zur Erfassung subjektiver Theorien mittels Repertory-Grid-Technik. In: mathematica didactica 26 (2003) Bd.1, S. 63-85

Helmke, A. (2009): Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts. Franz Emanuel Weinert gewidmet. 1. Aufl. Seelze: Klett Kallmeyer.

Ingenkamp, K. & Lissmann, U. (2008): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. 6., neu ausgestattete Aufl. Weinheim: Beltz.

KMK Standards für die Lehrerbildung (2004). Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2004) Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften Kompetenzen und Standards für die Lehrerbildung

Siemes, A.: Diagnosetheorien In: Kliemann, S. (2008): Diagnostizieren und Fördern in der Sekundarstufe I. Schülerkompetenzen erkennen, unterstützen und ausbauen. Berlin: Cornelsen-Scriptor.

Weinert, F. E.; Schrader, F.-W.: Diagnose des Lehrers als Diagnostiker. In: Petillon, H.; Auffenfeld, A.; Ingenkamp, K. (1986): Schülergerechte Diagnose. Theoretische und empirische Beiträge zur pädagogischen Diagnostik ; Festschrift zum 60. Geburtstag von Karlheinz Ingenkamp. Weinheim: Beltz

Pascal Rolf FISCHER, Kassel, Rolf BIEHLER, Paderborn

Ein individualisierter eVorkurs für 400 Studierende und mehr - Ein Lösungsansatz für mathematische Brückenkurse mit hohen Teilnehmerzahlen

1. Einleitung

Das in diesem Artikel thematisierte Vorkurs- und Evaluationskonzept baut auf dem interaktiven Lernmaterial des Projekts VEMA auf (www.mathematik.uni-kassel.de/vorkurs). Bereits im letzten Jahr wurde hierüber und über den Einsatz der neu entwickelten selbstdiagnostischen Tests berichtet (vgl. [1]). Kurz gesagt umfasst das Vorkurskonzept zwei alternative Kursvarianten, so genannte P-Kurse und E-Kurse, zwischen denen die Teilnehmer wählen können. Wir vergleichen diese Kurstypen didaktisch, stellen Ergebnisse der Begleitstudie aus den Jahren 2008 und 2009 vor und diskutieren die Übertragbarkeit auf über 1000 Teilnehmer.

2. Aspekte des Lernens im Vergleich von P- und E-Kursvariante

Die Kurse erstrecken sich in beiden Varianten über vier Wochen, wobei in der E-Kursvariante die Zahl der Präsenztage zugunsten ausgedehnter Phasen selbstständigen Lernens mit dem interaktiven Material auf 6 Tage reduziert wurde. Bei der **Gruppenaufteilung** sind beide Kurse vergleichbar. Es werden je 4 Gruppen nach Studiengängen gebildet (P1/E1: Elektrotechnik & Informatik, P2/E2: Ingenieurwissenschaften, P3/E3: Bachelor Math., Lehramt Gym. & Naturwiss., sowie L4: Lehramt Grund-, Haupt- und Realschule). Während die P-Gruppen als getrennte Lerngruppen unterrichtet werden, betreut eine Lehrperson im E-Kurs diese als vier Teilgruppen in einem gemeinsamen Moodle –Kurs. So wird zur **Betreuung** für jeden der 4 P-Kurse je ein Dozent pro Gruppe P1-P4 sowie mehrere Tutoren für die Übungen benötigt. Die 4 E-Kursgruppen werden hingegen lediglich durch einen Dozenten, einen Übungsgruppenleiter sowie einen Online-Tutor betreut. Dieser effizientere Einsatz des Personals wird durch die Reduzierung der Präsenztage möglich.

Die **Lernplattform Moodle** wurde in den P-Kursen nur marginal genutzt, obwohl jeweils ein eigener Kursbereich mit Materialien, Foren und Chat, jedoch ohne diagnostische Tests zur Verfügung stand. Im E-Kurs wurde die Plattform als zentraler Ort des Lernens eingesetzt: Im gemeinsamen Kursbereich waren diagnostische Tests und das interaktive Lernmaterial verlinkt. Es fand eine rege Nutzung der Plattform zur Kommunikation miteinander wie mit Dozent oder Online-Tutor statt.

Die **Präsenzlehre** umfasste in den P-Kursen vormittägliche Vorlesungen und nachmittägliche Übungen an drei Tagen pro Woche. In den Übungen wurden Aufgaben gemeinsam bearbeitet und die Hausaufgaben besprochen. Im E-Kurs wurde nach zwei einführenden Tagen ein wöchentlicher Präsenztag pro Kursgruppe angeboten. Diese Kursgruppentage starteten mit einer Fragestunde für alle inhaltlichen oder sonstigen Fragen, die der Dozent ad hoc beantwortete. Danach wurde eine zweistündige Vorlesung zu Themen gehalten, die die Studierenden mit dem Dozenten im Vorfeld durch Forendiskussionen oder ad hoc festlegten. In den nachmittäglichen Übungen wurden Aufgaben zu den Themen der Vorlesung bearbeitet.

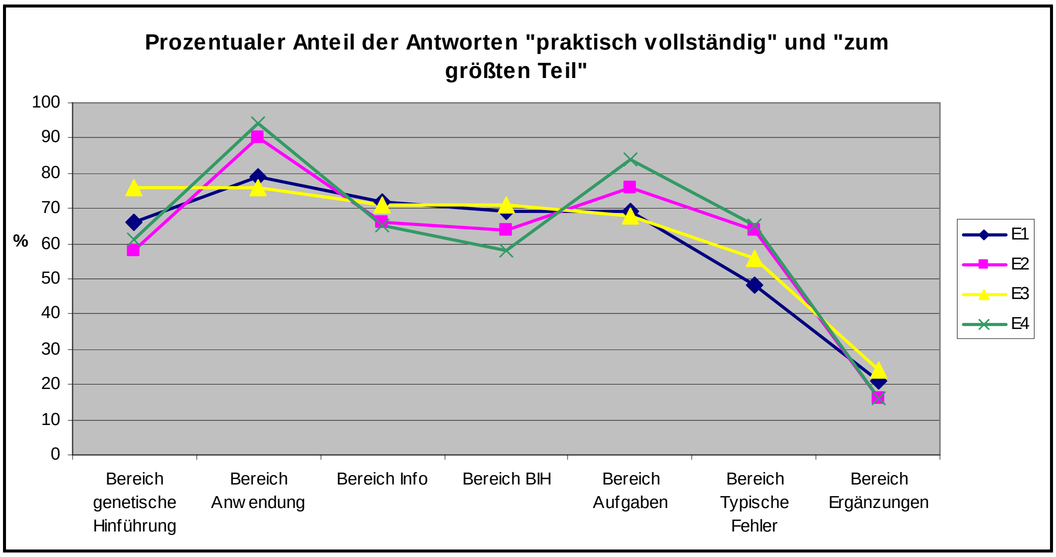
Die **curricularen Entscheidungen** trifft in den P-Kursen der Dozent. Dieser orientiert sich inhaltlich an den Anforderungen der Studiengänge und strukturiert dementsprechend den Kurs für seine Teilnehmer. In den E-Kursen ist der Lernende hierfür selbst verantwortlich, wozu er vielfältige Unterstützung benötigt. Daher werden im E-Kurs sowohl studiengangsspezifische Inhaltsempfehlungen als auch diagnostische Tests zur Selbstdiagnose in elektronischer Form in Moodle bereitgestellt (vgl. [1]). Zudem stehen Dozent und (Online-)Tutor bei Fragen zum Lernen bereit. Der Lernende kann so das Lernen individuell an den eigenen und den studiengangsspezifischen Bedürfnissen orientieren und gestalten. Die **Rolle des Dozenten** verschiebt sich damit im E-Kurs zum Lernbegleiter, Experten und Ansprechpartner für inhaltliche oder didaktische Fragen.

Eine differenzierte **Individualdiagnostik** ist in klassischen Vorlesungen rein praktisch nicht möglich: Mangelnde Zeit steht einer großen Anzahl von Lernenden gegenüber und lässt daher nur ein allgemeines Feedback zu. Durch den Einsatz der elektronischen diagnostischen Selbsttests die für das selbstständige Lernen bereit stehen, wird den E-Kursteilnehmern hingegen eine gezielte Individualdiagnostik ermöglicht. Durch die zusätzliche Online-Betreuung, die Fragestunde und die Möglichkeit des Peer-Feedbacks in Foren ist damit ein hohes Maß an **individuellem Feedback** auch bei größeren Teilnehmerzahlen gewährleistet. Während das **selbstständige Lernen** im E-Kurs der zentralste Aspekt ist, wurde dies in den P-Kursen nur in Form von Hausaufgaben umgesetzt, die der Dozent zur gezielten Vor- und Nachbereitung der Vorlesungen klar vorgab.

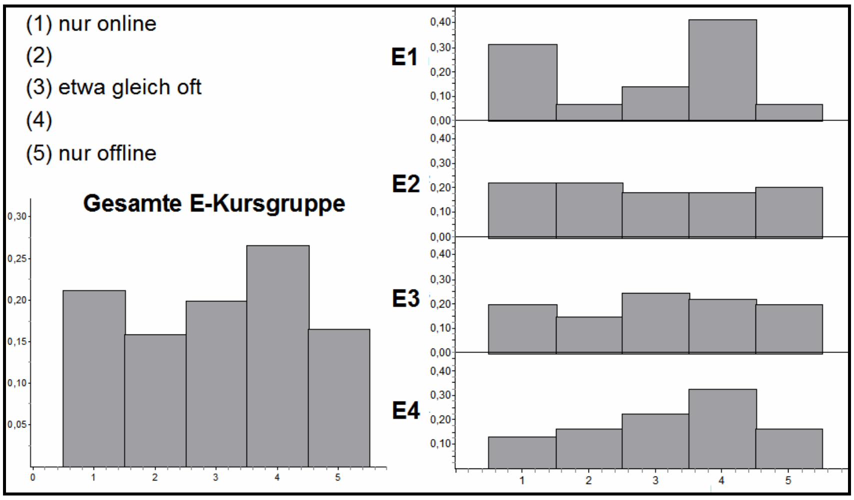
3. Neue Untersuchungsergebnisse

Das Untersuchungskonzept umfasste in 2008 drei Befragungen sowie einen Ein- und Ausgangstest in elektronischer Form (vgl. [1]). Die Daten des E-Kurses aus der Hauptstudie 2008 wurden hinsichtlich der Nutzungsstrategien detaillierter analysiert. Dabei zeigte sich, dass für die Gruppen E1-E4 sowohl **gruppenspezifische** als auch **gruppenübergreifende** Nutzerprofile identifiziert werden können.

Alle E-Kursteilnehmer wurden bei der Zwischenbefragung gefragt, wie intensiv sie die einzelnen Unterbereiche eines Moduls bearbeitet haben. Dabei zeigte sich, dass die Profile der Gruppen E1 und E3 sowie die Profile der Gruppen E2 und E4 vergleichbar sind. So geben die Lerner aus E2 und E4 u. a. an, die Bereiche „Anwendungen" und „Aufgaben" intensiver zu nutzen als z.B. die Bereiche „Info" und „BIH", in denen die zentralen Definitionen und Sätze einschließlich ihrer Beweise und Erklärungen zu finden sind. Die jeweilige Ähnlichkeit der Gruppenprofile war so nicht erwartet worden, da die Gruppen mit ähnlichen Profilen völlig unterschiedliche Ausrichtungen in ihrem Studiengang haben.



Bei der Frage, ob die Lerner eher online in der Lernplattform oder offline mit CD gelernt haben, streuen die Ergebnisse der E-Kursgruppe sehr stark.



Betrachtet man die einzelnen Teilgruppen zeigt sich für die Gruppe E4, dass diese tendenziell eher offline lernt. Für die Gruppe E1 ergibt sich dafür eine interessante bimodale Verteilung, die sich bei weiteren Analysen weder durch den Studiengang noch durch das Geschlecht erklären ließ.

Für die Vorkurse 2009 wurde in Kassel erneut ein Ein- und Ausgangstest durchgeführt. Der Eingangstest basierte auf ein im Rahmen des Projekts „LIMA“ (www.lima-pb-ks.de) entwickelten Test, der Ausgangstest wurde studiengangsspezifisch gestaltet und zur Vergabe eines Zertifikats genutzt. Die Ergebnisse der Tests zeigten wie schon in 2008 keine wesentlichen Unterschiede zwischen E- und P-Kursen.

4. Fazit und Ausblick

Die Kursgestaltung und der didaktisch optimierten Einsatz elektronischer Unterstützung zum selbstständigen Lernen ermöglicht einen Vorkurs, der trotz großer Teilnehmerzahlen eine individuellere Unterstützung bietet als es in klassischen Präsenzkursen möglich wäre. Das Kurskonzept lässt sich in dieser Form leicht auf Veranstaltungsgrößen von weit mehr als 400 Teilnehmern übertragen. Bei Einsatz eines einzigen Dozenten und lediglich einer Erweiterung des Teams um zusätzliche Tutoren ist damit ein Kurs mit mehr als 1000 Teilnehmern denkbar ohne Einschnitte bei der individuellen Betreuung in Kauf zu nehmen.

Hinsichtlich der empirischen Untersuchung lässt sich zunächst feststellen, dass die Testergebnisse aus 2009 die Ergebnisse aus 2008 bestätigen. Neue Analysen der Befragungen zeigen bei den Gruppen E1-E4 sowohl kursgruppenspezifische als auch kursgruppenübergreifende Nutzungsstrategien, die noch weiter analysiert werden. Ausgehend hiervon sind im Rahmen des Dissertationsprojekts des ersten Autors weitere Datenauswertungen geplant, auch im Hinblick auf Auffälligkeiten im Lernverhalten, auf Zusammenhänge mit Persönlichkeitsmerkmalen sowie eine Untersuchung lernmotivierender Merkmale. Durch die Anbindung an das neu entstehende Kompetenzzentrum Hochschuldidaktik Mathematik (www.khdm.de) sowie an das EU-Vorkursprojekt Math-Bridge (www.math-bridge.org) wird ein tiefer gehender hochschuldidaktischer Austausch und die Weiterentwicklung des Kurskonzeptes möglich.

Literatur

[1] Fischer, P.R. E-Learning zwischen Schule und Universität? Ergebnisse einer empirischen Studie zum Einsatz einer E-Variante mathematischer Brückenkurse: In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Oldenburg 2009.

Malik FNDY, Darmstadt

Problemlösestrategien im kulturellen Kontext

Projektziele

Im Rahmen eines Forschungsprojekts wird das Problemlöseverhalten von Schülerinnen und Schülern 10. Klassen in Syrien(Damaskus) und Deutschland (Darmstadt) verglichen. Problemlösekompetenz ist ein zentrales Ziel des Unterrichts nach dem Konzept des modernen Mathematiklehrplans in Syrien. Deshalb versucht die aktuelle Studie Problemlösekompetenzen im Mathematikunterricht zu erfassen anhand von geeigneten Aufgaben für Klasse 10. Es wird davon ausgegangen, dass man Problemlösekompetenz anhand von Aufgaben mit entsprechendem Potential messen kann, insbesondere an verschiedenen Lösungswegen, vgl. Bruder 1992 und Collet 2009.

Mit dieser Studie werden folgende Forschungsfragen untersucht:
1. Welchen Stand hat die Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht bisher erreicht?
2. Welches Problemlösepotenzial steckt in einer Aufgabe?
3. Welche Lösungswege schlagen Schülerinnen und Schüler bei schwierigen Aufgaben in Syrien und Deutschland ein und was können wir aus den Lösungswegen und aus falschen Lösungen lernen?
Ziel der Studie ist die Weiterentwicklung von Problemlösekompetenzen in syrischen Schulen in Verbindung mit entsprechenden Verbesserungen der Lernbücher und der Aufgaben für den Mathematikunterricht.

Anlage und Ergebnisse einer Vergleichsarbeit in Klasse 10 in Damaskus und Darmstadt

Die Vergleichsarbeit über 80min wurde für die Jahrgangsstufe 10 an Gymnasien konzipiert und besteht aus zehn Aufgaben, die sich im Schwierigkeitsgrad unterscheiden. Der Test ist zur einen Hälfte aus algebraischen, zur anderen Hälfte aus geometrischen Aufgaben aufgebaut und besteht aus verschiedenen Aufgabenformaten einschließlich Multiple- Choice- Fragen. Es sind sowohl Aufgaben enthalten, die ein grundlegendes mathematisches Verständnis abfragen, als auch komplexere Aufgaben, die das Einsetzen von heuristischen Strategien erfordern. Technische Hilfsmittel waren nicht zugelassen.
Vor der Durchführung der Studie wurde eine Kompetenzeinstufung der Aufgaben als Potenzialanalyse vorgenommen. Hierbei orientierten wir uns bzgl. der zu erwartenden Lösungswege an den Kompetenzen K1bis K6 und den Anforderungsbereichen I-III der KMK-Bildungsstandards (2004). Da

es in Syrien noch keine Bildungsstandards gibt, wurden nur die deutschen Standards herangezogen. Der Test und die Kompetenzeinstufung stehen unter http://www.mathematik.tu-darmstadt.de/fbereiche/didaktik/research/projekte.php zur Verfügung. Das theoretisch bestimmte Anforderungsniveau als Mittelwert über die drei Anforderungsbereiche in den sechs Kompetenzen sagt grob den Verlauf der empirisch bestimmten Schwierigkeit voraus. Den Schwierigkeitsniveau-grenzen auf der Achse von 0 bis 3 in der Abb1. entspricht eine Skalierung der prozentualen Erfüllung von 100% am unteren Rand bis zu 0% am oberen Rand.

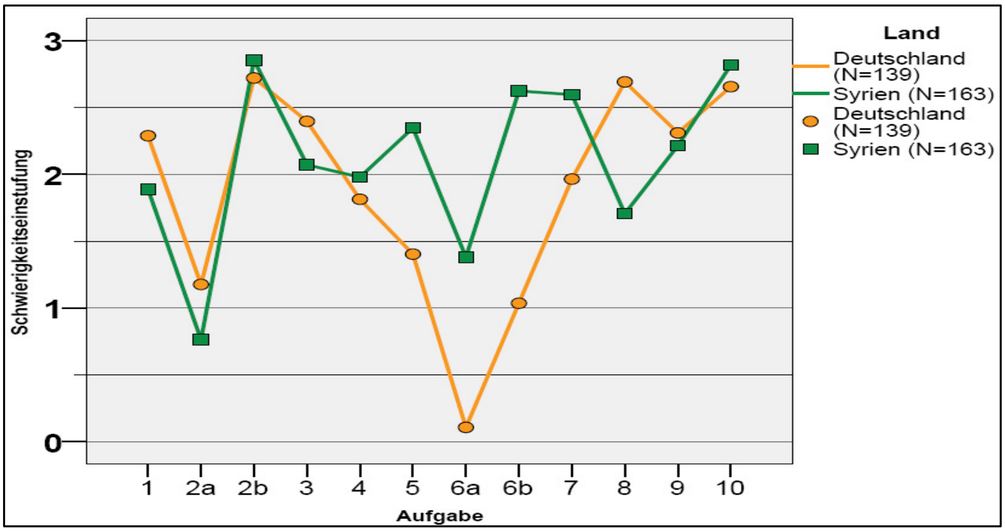


Abb. 1 Empirische Schwierigkeit der Testaufgaben im Vergleich

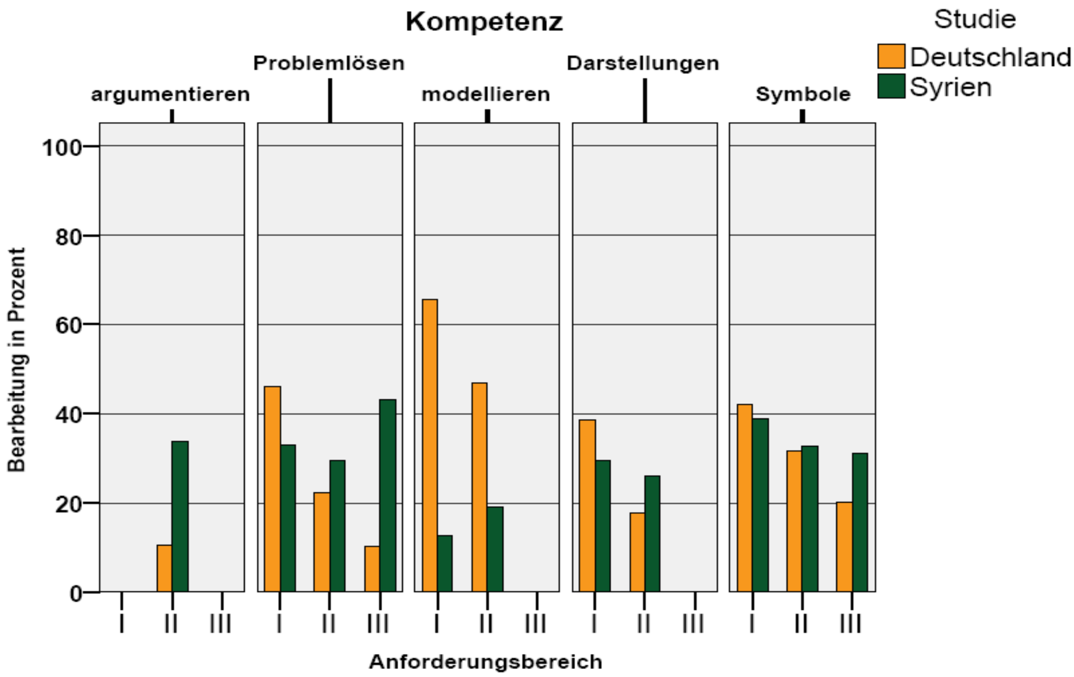


Abb. 2 Empirische Schwierigkeit bezogen auf das Kompetenzpotenzial

Es fällt auf, dass bei insgesamt recht niedrigem Bearbeitungserfolg die syrischen Schüler und Schülerinnen bei vielen Aufgaben schlechter als erwartet abgeschnitten haben. In Syrien gibt es bisher kaum Erfahrung mit solchen Tests ähnlich wie in Deutschland vor PISA.

Im Folgenden sollen die Ergebnisse einer Aufgabe vorgestellt werden, um markante Unterschiede in den beiden Ländern exemplarisch zu verdeutlichen. Die Aufgabe 6 lautet:

Max und Moritz wollen ihre Computer aufrüsten und gehen in das „Elektroland“, das heute mit einem Aktionstag und vielen Angeboten wirbt.

a) Am Eingang sehen die beiden, dass alle CDs 20% reduziert sind. Max nutzt diese Gelegenheit und kauft sich eine CD, die normalerweise 15€ kostet. Wie viel Euro hat er durch den Aktionstag gespart?

1€ 1,50€ 3€ 0,15 14,80€

b) Moritz hat eine Festplatte mit 200 GB entdeckt, deren Preis um 5% gesenkt wurde. Sie soll jetzt noch 190€ kosten. Wie teuer war sie ursprünglich?

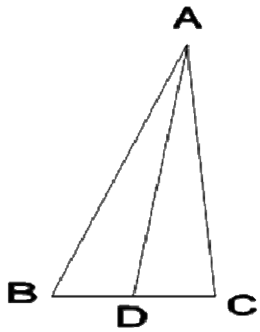
Die im Folgenden vorgestellten Lösungswege zu Aufgabe 6b) sind in Syrien aufgetreten, Nr.1und 2 in jeweils ca. 5%, Nr.3 in 65% und Nr.4 in 20% der fehlerhaften Lösungen.

Preis nach der Senkung 190€ 5% = 50 d.h. 190 + 50 = 240 d.h. Festplatte Preis war = **240€** 1	Senkung Prozent = $\frac{190\ .\ 5}{100} = \frac{950}{100} = 9{,}5$ d.h. Festplatte Preis war= **9,5€** 3
190 – 5 = 185% Weil die Senkung größer als 100% ist. d.h. Festplatte Preis war = **180€** 2	**Preis nach der Senkung 190€ mit Senkung 5%** **Preis vor der Senkung X€ mit Senkung 100%** **d.h.** $X = \frac{190\ .\ 100}{5} = \frac{19000}{5} = 3800$ **d.h. Festplatte Preis war= 3800€** 4

Für die Darmstädter Schülerinnen und Schüler war die Teilaufgabe 6b) sehr leicht, wie die prozentuale Erfüllung in Abb.1 zeigt. Für die syrischen Lernenden war diese Aufgabe dagegen schwer. Diese Differenzen lassen sich mit kulturellen Unterschieden begründen. Prozentrechnung ist in Deutschland ein wichtiger Bestandteil des alltäglichen Lebens (Rabatte, Angebote...), wohingegen in Syrien nur wenig lebensnaher Bezug zu dieser Thematik existiert. Durch die fehlende Verknüpfung mit dem Lebensalltag fällt es den Schülerinnen und Schülern doch schwerer als erwartet mit Prozenten umzugehen und sie zu verstehen.

Mit Blick auf solche Aufgaben, die Gleichungen und geometrische Formen enthalten, sehen wir, dass die Ergebnisse der syrischen Schüler deutlich besser sind als die Ergebnisse der Schüler in Deutschland, vgl. Aufgabe 8:

ABC ist ein Dreieck mit AB=16, BC=12 und CA =15.
Eingezeichnet ist noch die Winkelhalbierende des Winkels BAC.
D ist der Schnittpunkt dieser Winkelhalbierenden mit der Seite BC .
Bestimme die Längen der Strecken BD und DC .



Ein Grund hierfür kann in der großen Zahl dieser Aufgaben in den Lehrbüchern von Syrien bestehen. Deutsche Schüler scheinen in diesen Aufgaben weniger geübt zu sein.

Die Ergebnisse der deutschen Schüler sind jedoch im Mittel deutlich besser als die ihrer Altersgenossen von Syrien in den Kontext-Aufgaben. Die Ursachen dafür könnten darin liegen, dass der Mathematikunterricht in Deutschland nach PISA und den Bildungsstandards umstrukturiert wurde und sich in Richtung des Einsatzes von realitätsbezogenen Aufgaben weiter entwickelt hat.

Daher sollten für die syrischen Schulen Lehrbücher entwickelt werden mit solchen Kontextaufgaben. Die Zahl dieser Aufgaben sollte wegen ihrer Bedeutung für die Entwicklung des logischen und problemlösenden Denkens bei den Schülern erhöht werden und weil damit Alltagsbezug im Unterricht hergestellt werden kann.

Literatur

Bruder, R. (1992). Problemlösen - aber wie? In: mathematiklehren, Heft 52, S. 6 – 12

Collet, C. (2009). Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation. Waxmann

KMK (Hrsg.) (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 4.12.2003. München: Wolters Kluwer.

Raphael FOCKEL, Paderborn

Data Mining und Knowledge Discovery in Databases

Data Mining (engl.: „Daten schürfen“) als Kern des Knowledge Discovery in Databases („Wissensentdeckung in Datenbanken“) kennzeichnet die Identifikation von Mustern, Zusammenhängen und Trends in Datenbeständen. Es handelt sich um eine eigenständige Disziplin, die sich insbesondere aufgrund des Phänomens der Datenflut (Informationsflut) entwickelt hat. Im täglichen Arbeitsumfeld sammeln sich fortlaufend große Mengen an strukturierten und unstrukturierten Daten, in denen häufig interessante und wertvolle Informationen versteckt sind, die jedoch mit bloßem Auge kaum noch zu erkennen sind. Beim Data Mining wird nun versucht mithilfe bestimmter mathematisch-statistischer Verfahren in akzeptabler Rechenzeit valide, neuartige, potenziell nützliche und verständliche Muster in diesen Daten zu suchen und verwertbar zu machen.

Im Rahmen eines Projektes an der Universität Paderborn versuchen wir uns in zweierlei Hinsicht der Wissenschaftsdisziplin des Data Mining zu nähern. Einerseits unter einer *Forschungsperspektive*. Hier geht es um die kritische Analyse von Einsatzpotenzialen des Data Mining bei der Entscheidungsunterstützung in Lehre und Forschung & Entwicklung unter besonderer Berücksichtigung des Datenschutzes, z.B. bei der Evaluation von Lehrveranstaltungen (Scientific Data Mining, Educational Data Mining). Hierbei handelt es sich um einen Bereich, der in der Schnittstelle zwischen Statistik, Wirtschaftsinformatik und Mathematikhochschuldidaktik steht. Andererseits versuchen wir in einer *didaktischen Perspektive* herauszufinden, inwiefern das Themengebiet „Data-Mining-Methoden“ im Rahmen von Lehrveranstaltungen zur „Angewandten Mathematik“ einen Mehrwert bieten kann. Im Folgenden sollen zunächst typische Anwendungsgebiete und Ausprägungen des Data Mining vorgestellt werden, anschließend sollen Data-Mining-Methoden in der Lehre thematisiert werden.

Anwendungsgebiete des Data Mining

Data Mining hat sich als eigenständige Wissenschaftsdisziplin etabliert, die in der Schnittstelle mit benachbarten Disziplinen wie Statistik (insbesondere multivariate Datenanalyse), Maschinelles Lernen, Künstlicher Intelligenz und Visualisierungstechniken anzusiedeln ist. Der Einsatz der Methoden in der Praxis ist dabei in den vergangenen Jahren sprunghaft angestiegen. In naher Zukunft wird es vermutlich kaum noch Bereiche in Wissenschaft, Technik, Medizin, Handel, Banken, Verwaltung usw. geben, die sich nicht Data Mining bedienen werden. Klassische Beispiele für die Anwendung des Data Mining (die durchaus auch unter einer didaktischen Perspektive interessant sein können) finden sich bei der *Segmentierung* von Kunden durch Unternehmen aufgrund ähnlicher Eigenschaften, um neue Erkenntnisse über die Kunden herauszufinden. Solche grundlegenden Data-Mining-Methoden zur Segmentierung finden sich vielfach auch bei Internet-Suchmaschinen wie Google oder in Bilderportalen wie flickr.de (Clustern von Bildern bei der Bildersuche). Ein weiteres Anwendungsbeispiel findet sich bei *Assoziationsanalysen*. So kann ein Handelsunternehmen aufgrund der Einkäufe der Kunden mithilfe von Assoziationsregeln herausfinden, welche Produkte häufig zusammen, d.h. im Verbund, gekauft wurden. Eine so gefundene Regel kann dabei z.B. wie folgt aussehen: „In 80% aller Einkäufe, bei denen Wein und Tomaten gekauft wurden, wurden auch Spaghetti gekauft“. Aufgrund solcher Informationen können Händler ihre Waren im Geschäft sinnvoll anordnen oder dementsprechend ihre Werbung ausrichten. Typisch sind solche Assoziationsanalysen mittlerweile in vielen Internetshops. So findet sich beispielsweise bei amazon.de bei Bücherangeboten die Produktempfehlung „Kunden, die diesen Artikel gekauft haben, kauften auch: …“, die auf Data-Mining-Analysen beruht.

Ausprägungen des Data Mining

Beim Data Mining gibt es mittlerweile eine Vielzahl an Ausprägungen. Beispielsweise kennzeichnet das *Web Mining* die Anwendung von Data-Mining-Methoden auf Internetdaten. So können Data-Mining-Verfahren eingesetzt werden, um das Nutzerverhalten von Webseitenbesuchern auf interessante Muster zu analysieren. Mithilfe des *Text Mining* können aus digital vorliegenden Texten neue und relevante Zusammenhänge entdeckt werden. Mit dem Aufkommen digitaler Medien durch Bilder-, Video- oder Audiodateien kommt auch dem *Multimedia Data Mining* eine immer größere Bedeutung zu. Hierzu gehört z.B. die Klassifizierung von Fotos, Sprache oder Musik. Im *Scientific Data Mining* geht es um die Anwendung von Data-Mining-Methoden an Datensätzen speziell aus Bereichen von Wissenschaft und Technik. Hieran anknüpfend hat sich in den letzten Jahren, insbesondere in der englischsprachigen Literatur der Wirtschaftsinformatik und Informatikdidaktik, eine Disziplin entwickelt, die sich mit dem Einsatz des Data Mining im Bildungsbereich beschäftigt. Beim sog. *Educational Data Mining* werden Daten auf Muster untersucht, insbesondere um Lernende und ihre jeweilige Lernumgebung besser verstehen zu können. Beispiele für das Educational Data Mining finden sich in der Prognose des Studienerfolgs und des Studienverhaltens, der Auswertung des Nutzerverhaltens in E-Learning-Kursen, beim Erkennen von schwer verständlichen Inhalten in Materialien, beim Erkennen von Hürden in Lernprozessen oder auch bei der Evaluation von Lehrveranstaltungen.

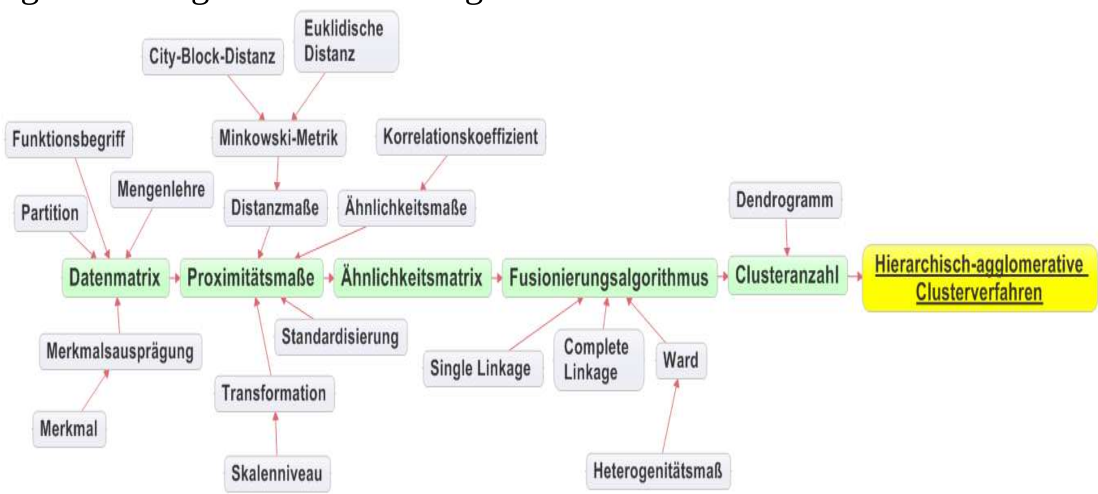
Data Mining in der Lehre

Neben der zuvor genannten Forschungsperspektive ist je nach Zielgruppe die Thematisierung grundlegender Methoden des *Data Mining in der universitären Mathematikausbildung* (auch im Bereich des schulischen Mathematikunterrichts) durchaus denkbar. Es existieren einige Data-Mining-Methoden, die zum Teil durch einen verblüffend einfachen Algorithmus gekennzeichnet sind und interessante Zusammenhänge zur Elementaren Statistik liefern können. Methoden wie Clusteranalysen, Naive-Bayes-Verfahren, Nearest-Neighbor-Verfahren, Assoziationsanalysen oder Entscheidungsbäume können in vereinfachter Form in der Lehre thematisiert werden. (Exemplarisch versucht der unten abgebildete stark vereinfachte Netzplan, wesentliche Zusammenhänge und Voraussetzungen aufzuzeigen, die grundlegend für das Verständnis einer hierarchisch-agglomerativen Clusteranalyse sind.) Es gibt dabei verschiedene Ziele, die man mit dem Einsatz des Themengebiets „Data-Mining-Methoden" im Rahmen von Lehrveranstaltungen zur Angewandten Mathematik oder Statistik erreichen kann. Exemplarisch seien die folgenden Ziele genannt:

- *Interdisziplinäres Arbeiten:* Erkennen von Zusammenhängen z.B. zur Linearen Algebra, Elementarer Statistik, Informatik ,Wirtschaft, usw.
- *Entdeckendes Lernen* und Förderung von *Problemlösefähigkeit*. An idealtypischen Datensätzen können selbständig Muster entdeckt werden. Es bieten sich verschiedene Aufgaben (z.B. Segmentierungen, Prognosen, Assoziationen) und Lösungswege an, um Informationen aus Daten zu extrahieren.
- Kenntnisse zu webbezogenen *Anwendungsgebieten/Internettechnologien*. So kann an verschiedenen Problemstellungen thematisiert werden, wie Unternehmen wie z.B. Google, Yahoo, Amazon oder Vodafone Data-Mining-Methoden einsetzen.
- *Kritikfähigkeit* im Umgang mit Daten (Welche Daten kann man im Internet, z.B. in sozialen Netzwerken über sich preisgeben? Was können Unternehmen damit anfangen?).
- *Arbeiten mit Werkzeugen:* Statistik- und Data-Mining-Software (Potenziale bietet Software wie XLMiner, Statistica, SPSS, R Commander).

In den von uns durchgeführten und ausgewerteten Mathematikseminaren (gekennzeichnet durch Vorträge und Ausarbeitungen der Studierenden) zeigte sich, dass die verschiedenen Anwendungsgebiete und Methoden von den Studierenden zumeist als recht interessant bewertet wurden. Es zeigten sich vielschichtige Diskussionen, beispielsweise zu Methoden und Algorithmen oder es wurden Vermutungen über Prognoseergebnisse aufgestellt. Die zunächst recht komplex und fremdartig anmutenden Methoden und

Problemstellungen konnten im Wesentlichen von den Studierenden erarbeitet und erklärt werden, was häufig zu Erfolgserlebnissen führte. Es zeigte sich in den Seminaren jedoch auch, dass die Beziehungen zu Bereichen der Elementaren Mathematik und Statistik nicht immer von alleine hergestellt und erkannt wurden, z.B. Skalenniveaus bei Proximitätsmaßen. Ursache für solche Problemstellungen kann u.a. darin gefunden werden, dass die zu bearbeitende Literatur aus Gebieten der Informatik oder Wirtschaftswissenschaften einen anderen Adressatenkreis und andere Zielsetzungen hat. Fachmathematische Zusammenhänge, wie sie insbesondere für Mathematikseminare wichtig sind, werden dabei verständlicherweise weniger deutlich angesprochen. So konzentriert sich beispielsweise Literatur aus dem informatischen Bereich eher auf die Programmierung von Algorithmen, Literatur aus dem wirtschaftswissenschaftlichen Bereich eher auf Anwendungspotenziale. Bedarf liegt daher in einem adressatengerechten didaktischen Gesamtkonzept, das dementsprechend, je nach Zielgruppe, Data Mining eher aus einer fachmathematischen und mathematikdidaktischen Perspektive betrachtet und zusätzlich, so weit wie möglich, einen Praxisbezug zum späteren Berufsfeld deutlich werden lässt. Insbesondere aufgrund der rasanten Entwicklung von Internettechnologien, der zunehmenden Datenflut sowie der Marktentwicklung der Statistiksoftware kann eine frühzeitige Auseinandersetzung mit dem Themengebiet „Data Mining“ gleichermaßen gewinnbringend für Forschung und Lehre sein.



Literatur

Fahrmeir, L., Hamerle, A., Tutz, G. (Hrsg.) (1996). Multivariate statistische Verfahren, 2. Auflage; Berlin; New York: de Gruyter

Han, J., Kamber, M. (2006). Data mining. Concepts and Techniques. 2. Auflage, Amsterdam: Elsevier/Morgan Kaufmann

Otte, R.; Otte, V.; Kaiser, V. (2004). Data Mining für die industrielle Praxis, München, Wien: Carl Hanser Verlag

Romero, C., Ventura, S. (2007). Educational Data Mining. A Survey from 1995 to 2005. In: Expert Systems with Applications 33(1), S. 135-146

Okka FREESEMANN, Ina MATULL, Susanne PREDIGER,
Stephan HUßMANN, Dortmund, Elisabeth MOSER OPITZ, Zürich

Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern – Entwicklung und Evaluation eines Förderkonzepts für die Sekundarstufe I

1. Einleitung

Leistungsstudien wie TIMSS und PISA zeigen, dass etwa jeder fünfte Jugendliche in Deutschland lediglich über mathematische Kompetenzen auf Grundschulniveau verfügt (Frey et al., 2007 u.v.a.). Gleichwohl gibt es bislang kaum fachdidaktisch fundierte Förderkonzepte, deren Wirkung auf die Mathematikleistungen empirisch nachgewiesen sind. Auch ist die Frage noch offen, wie eine solche Förderung in den Unterrichtsalltag integriert werden kann.

2. Grundidee des Förderkonzepts SimBa (Sicher im mathematischen Basisstoff)

Empirische Studien zeigen, dass die Schwierigkeiten schwacher Rechnerinnen und Rechner in der Sekundarstufe I bis weit in den Grundschulstoff zurückreichen (Moser Opitz, 2007; Schäfer, 2005). Besondere Hürden bilden dabei das Verständnis des Dezimalsystems (Cawley et al., 2007; Humbach, 2008; Moser Opitz, 2007; Schäfer, 2005), das Verständnis der Grundoperationen und der Umgang mit Textaufgaben (Montague & Applegate, 2000) sowie das Zählen in Schritten (Moser Opitz, 2007; Schäfer, 2005). Moser Opitz (2007) konnte nachweisen, dass das Verständnis der genannten Inhalte (sog. mathematischer Basisstoff) einen zentralen Prädiktor für die aktuelle Schulleistung im Fach Mathematik in Klasse 5 und 8 darstellt. Auch in anderen Studien (z.B. Humbach, 2008) zeigte sich das Basiswissen als notwendige Voraussetzung für das Weiterlernen in der Sekundarstufe I. Die Grundidee des von uns entwickelten Förderkonzepts *SimBa* (Sicher im mathematischen Basisstoff) besteht darum – im Gegensatz zu anderen Förder- und Nachhilfekonzepten – nicht darin, mit schwachen Rechnerinnen und Rechnern in der Sekundarstufe I am aktuellen Schulstoff zu arbeiten, sondern die Lücken und Schwierigkeiten im Basisstoff aufzuarbeiten. Dabei sind der Aufbau und die Konsolidierung eines inhaltlichen Verständnisses für die grundlegenden Konzepte der Grundschulmathematik zentral (Woodward & Brown, 2006). Dies umfasst vor allem eine Erarbeitung angemessener Vorstellungen und den verständigen Umgang mit Darstellungen bei folgenden Inhalten: dezimales Stellenwertsystem (zentrale Veranschaulichungen, Bündeln, Entbündeln, Stellenwertschreibweise, Orientierung am Zahlenstrahl), Verständnis der Grundoperationen und Mathematisierungen, Zählen in Schritten sowie das Automatisieren von Zahlzerlegungen im Hunderterraum.

Weitere didaktische Leitideen betreffen das Initiieren eigenständiger Aktivitäten mit ausgewählten Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen, das Anregen und Begleiten eigenständiger Erkenntnisprozesse, eine gezielte Fördern von Abstraktionsprozessen und Darstellungsvernetzungen sowie eine transparente und verlässliche Strukturierung der Einheiten.

3. Interventionsstudie

Fragestellung und Zielsetzung

Die Effektivität des Förderkonzeptes *SimBa* wird im Rahmen der vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Interventionsstudie „Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie zur Förderung von Schülerinnen und Schülern mit schwachen Mathematikleistungen an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen" geprüft (2009-2012). Vor dem Hintergrund der oben aufgeführten Forschungsergebnisse ergeben sich für die Studie folgende Fragestellungen:

- Inwieweit können mathematische Basiskompetenzen im Rahmen einer spezifischen Intervention gefördert werden?
- Inwieweit führt eine spezifische Intervention im mathematischen Basisstoff zu einer Verbesserung der Mathematikleistung im 5. Schuljahr?
- Inwieweit beeinflusst die Interventionsform die Leistungsfortschritte?

Ziel der Interventionsstudie ist es zum einen, ein empirisch evaluiertes und wirksames Konzept zur Förderung schwacher Rechnerinnen und Rechner in der Sekundarstufe I bereit zu stellen, zum anderen soll das Förderprogramm im Schulalltag umsetzbar sein. Darum wird im Rahmen des Projektes die Effektivität von zwei verschiedenen Interventionsformen geprüft: Einer Kleingruppenförderung und einer Förderung im Rahmen eines individualisierten Klassenunterrichts.

Dementsprechend lauten die mit dieser Studie zu prüfenden Hypothesen wie folgt:

Hypothese 1: Schwache Rechnerinnen und Rechner, die in Kleingruppen eine spezifische Förderung im mathematischen Basisstoff erhalten sowie schwache Rechnerinnen und Rechner, die im individualisierten Unterricht eine spezifische Förderung im mathematischen Basisstoff erhalten, machen im Verlauf eines Schuljahres größere Leistungsfortschritte im Fach Mathematik als Lernende, die keine spezifische Förderung erhalten.

Hypothese 2: Schwache Rechnerinnen und Rechner, die in Kleingruppen eine spezifische Förderung im mathematischen Basisstoff erhalten, machen im Verlauf eines Schuljahres größere Leistungsfortschritte im Fach Mathematik als Lernende, die im individualisierten Unterricht eine spezifische Förderung im mathematischen Basisstoff erhalten.

Stichprobe

Im Sommer 2009 wurden aus der Ausgangsstichprobe von N = 607 (Gesamt-, Haupt- und Förderschule) schwache Rechnerinnen und Rechner für die Teilnahme an der Interventionsstudie ausgewählt. Diese Stichprobe (N = 143) wurde in drei Interventionsgruppen aufgeteilt: 1) Kleingruppenförderung (N = 51), 2) Förderung im Rahmen eines individualisierten Klassenunterrichts (N = 47), 3) Kontrollgruppe (N = 45; keine spezifische Intervention). Die Interventionsgruppen wurden hinsichtlich der Variablen Mathematikleistung (F [2,140] = .872, $p < .05$), IQ (F [2,140] = .262, $p < .05$), Alter (F [2,140] = .972, $p < .05$) und Geschlecht parallelisiert.

Instrumente

Für die mathematische Leistungsmessung wurde ein bereits bestehender Test (Moser Opitz, 2007) für das Projekt angepasst und in einer Vor- und Nachtestform validiert. Der Mathematiktest zielt auf die Kenntnisse im mathematischen Basisstoff und ausgewählter Inhalte des 5. Schuljahres, die nicht Teil der Förderung sind. Für die Messung der Kontrollvariable „Intelligenz“ wurde der CFT 20-R eingesetzt.

Intervention

Die Förderung, fand von November 2009 bis März 2010 in 14 wöchentlichen Einheiten statt und wurde von spezifisch ausgebildeten Förderkräften durchgeführt.

Die Kleingruppenförderung (3-6 Kinder pro Gruppe, 90 min pro Einheit) enthält didaktische Elemente, die sich in der Förderung bei Lernschwächen als effektiv erwiesen haben (z.B. häufiges und unmittelbares Feedback durch die Lehrperson bei der Aufgabenlösung; Grünke, 2006). Die Förderstunden gliederten sich jeweils in folgende Abschnitte: Aufwärmphase (Automatisierungsübungen), Besprechen der Wochenaufgabe, Erarbeitung und Vertiefung eines neuen Lerninhalts, Einführung in die neue Wochenaufgabe, Abschluss. In jeder Stunde erhielten die Schülerinnen und Schüler eine Wochenaufgabe, die bis zur nächsten Förderstunde bearbeitet werden und der Vertiefung dienen sollte.

In der Förderung im individualisierten Klassenunterricht wurde eine Interventionsform evaluiert, die sich unter den üblicherweise gegebenen Bedingungen etwas einfacher in den Unterrichtsalltag integrieren lässt. 3-6 Schülerinnen und Schüler arbeiteten pro Einheit in einer Förderstunde (45 min) mit einer spezifisch ausgebildeten Förderkraft. Jede Förderstunde begann mit einer diagnostischen Aufgabe, der sich eine Erarbeitung sowie die Verabredung eines individuellen Übungsprogramms anschloss. Im Anschluss daran arbeiteten sie selbständig in zwei individualisierten Klassenunterrichtsstunden am Material. Sie wurde in Kooperation mit dem Projekt KOSIMA durchgeführt (langfristig angelegtes Forschungs- und Entwicklungsprojekt *Kontexte für sinnstiftendes Mathematiklernen;* Projektleitung: Barzel, Leuders, PH Freiburg; Hußmann, Prediger, TU Dortmund).

Die Schülerinnen und Schüler der Kontrollgruppe erhielten keine spezifische Förderung im mathematischen Basisstoff.

Nach Abschluss der Intervention im März 2010 wurde der Nachtest Mathematik durchgeführt, um die Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler im mathematischen Basisstoff und ausgewählten Inhalten des 5. Schuljahres erneut zu überprüfen. Eine weitere Überprüfung der Mathematikleistungen wird im Juni 2010 erfolgen.

6. Literatur

Cawley, J.F., Parmar, R.S., Lucas-Fusco, L.M., Kilian, J.D., Foley, T.E. (2007). Place value and mathematics for students with mild disabilites: data and suggested practices. *Learning Disabilities,* 5(1)*,* 21-39.

Frey, A., Asseburg, R., Carstensen, C. H., Ehmke, T. & Blum, W. (2007). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel et al. (Hrsg.), *PISA 2006. Die Ergebnisse der dritten internationalen Vergleichsstudie* (S. 249-276). Münster: Waxmann.

Grünke, M. (2006). Zur Effektivität von Fördermethoden bei Kindern und Jugendlichen mit Lernstörungen. Eine Synopse vorliegender Metaanalysen. *Kindheit und Entwicklung,* (15), 239-254.

Humbach, M. (2008). *Arithmetisches Basiskompetenzen in der Klasse. 10.* Berlin: Dr.Köster.

Montague, M. & Applegate, B. (2000). Middle school student`s perceptions, persistence and performance in math. probl. solving. *Learning Disabilities Quarterly,* 23, 215-226.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche / Dyskalkulie. Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern.* Bern: Haupt.

Schäfer, J. (2005). *Rechenschwäche in der Eingangsstufe der Hauptschule. Lernstand, Einstellungen und Wahrnehmungsleistungen.* Hamburg: Kovac.

Woodward, J. & Brown, C. (2006). Meeting the curricular needs of academically low-achieving students. *The Journal of Special Education,* 40 (3), 151-159.

Anja FRIED, Hildesheim

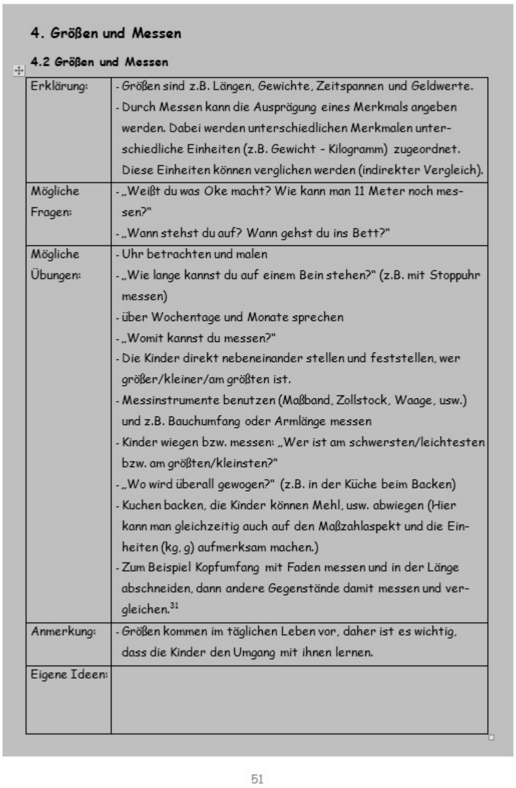
Mathematische Erfahrungen im Kindergarten – Erzieherinnen und Erzieher schärfen ihren Blick

Zur Umsetzung mathematischer Bildung im Kindergarten ist eine Beschäftigung der Erzieherinnen und Erzieher mit Mathematik notwendig. Dazu spielt auch die Wahrnehmung der Mathematik in den Situationen des alltäglichen Lebens der Kinder eine wichtige Rolle. Im folgenden Beitrag wird als erstes ein Fortbildungskonzept beschrieben, in der genau dies im Mittelpunkt steht. Im zweiten Teil wird das Projekt Mathematische Erfahrungen im Kindergarten (MEiK) vorgestellt, um schlussendlich im Fazit zusammenfassende Aussagen zur Mathematik im Kindergarten in Verbindung zur Fortbildung und Studie vornehmen zu können.

1. Die Fortbildung *Das Mathematische Bilderbuch*

In einer zweiteiligen Fortbildung zum Thema *Das Mathematische Bilderbuch* sollen die Erzieherinnen und Erzieher lernen, den Blick für mathematische Inhalte des (Kindergarten-)Alltags zu öffnen. Weiterhin entsteht mit dem Mathematischen Bilderbuch ein Material, mit dem die Erzieherinnen und Erzieher in ihrer Einrichtung arbeiten können.

Die Idee des Mathematischen Bilderbuchs stammt ursprünglich von einem Projekt aus Oldenburg. Dort haben Eltern 3 Monate lang Fotos von ihren Kindern gemacht, wenn sich diese im weitesten Sinne mit Mathematik beschäftigen. Diese wurden von Studierenden mit den Kindern gemeinsam ausgewertet und zu einem Bilderbuch zusammengestellt (vgl. Peter-Koop 2006). Die Motivation der Kinder ist durch den Wiedererkennungswert ihrer eigenen Person und befreundeter Kinder sehr hoch. Innerhalb der Masterarbeit von Farina Grote von der Universität Hildesheim wird diese Thematik aufgegriffen und adaptiert. Die Studentin verbrachte 6 Wochen im Kindergarten und fotografierte Kinder in „mathematischen Situationen". Diese ordnete sie 5 verschiedenen Bereichen zu (Zahlen und Operationen, Raum und Form, Muster und Strukturen, Größen und Messen, Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit). Im Bilderbuch besteht jede Doppelseite aus einem Informations- bzw. Erklärungsteil und der Bilderseite. Auf der linken Hälfte befinden sich Erklärungen des jeweiligen Bereiches, mögliche Fragen zu den Bildern, Hinweise für Materialien, die für weitere mathematische Bildung nutzbar sind und Platz für eigene Notizen. (siehe Abb. 1) Dieser Aufbau erleichtert den Einsatz des Buches. Die Erzieherinnen und Erzieher können, immer bezogen auf den jeweiligen Bereich, die Informationen schnell einsehen und überblicken. Die Konzentration auf die Kinder und ihre Reaktionen wird so erleichtert. Der Einsatz kann spontan von den Kindern aus oder geplant und vorbereitet geschehen. In der Evalutation von Farina Grote stellte sich eine kleine Gruppe von 4-5 Kindern als praktisch heraus.



4. Größen und Messen

4.2 Größen und Messen

Erklärung:	- Größen sind z.B. Längen, Gewichte, Zeitspannen und Geldwerte. - Durch Messen kann die Ausprägung eines Merkmals angeben werden. Dabei werden unterschiedlichen Merkmalen unterschiedliche Einheiten (z.B. Gewicht - Kilogramm) zugeordnet. Diese Einheiten können verglichen werden (indirekter Vergleich).
Mögliche Fragen:	- „Weißt du was Oke macht? Wie kann man 11 Meter noch messen?" - „Wann stehst du auf? Wann gehst du ins Bett?"
Mögliche Übungen:	- Uhr betrachten und malen - „Wie lange kannst du auf einem Bein stehen?" (z.B. mit Stoppuhr messen) - über Wochentage und Monate sprechen - „Womit kannst du messen?" - Die Kinder direkt nebeneinander stellen und feststellen, wer größer/kleiner/am größten ist. - Messinstrumente benutzen (Maßband, Zollstock, Waage, usw.) und z.B. Bauchumfang oder Armlänge messen - Kinder wiegen bzw. messen: „Wer ist am schwersten/leichtesten bzw. am größten/kleinsten?" - „Wo wird überall gewogen?" (z.B. in der Küche beim Backen) - Kuchen backen, die Kinder können Mehl, usw. abwiegen (Hier kann man gleichzeitig auch auf den Maßzahlaspekt und die Einheiten (kg, g) aufmerksam machen.) - Zum Beispiel Kopfumfang mit Faden messen und in der Länge abschneiden, dann andere Gegenstände damit messen und vergleichen.[31]
Anmerkung:	- Größen kommen im täglichen Leben vor, daher ist es wichtig, dass die Kinder den Umgang mit ihnen lernen.
Eigene Ideen:	

51

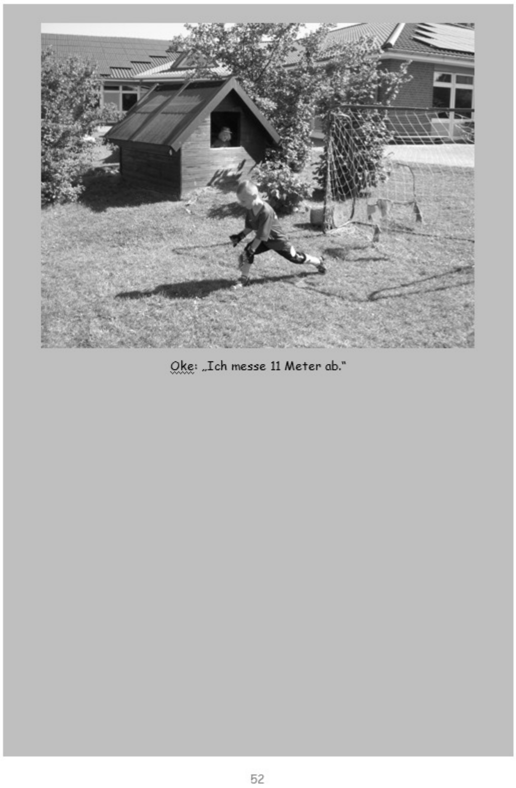


Abbildung 1 Beispielseite des Mathematischen Bilderbuchs

Innerhalb des Fortbildungskonzepts ist die Weitergabe des gewonnenen Wissens und Materials direkt an die Erzieherinnen und Erzieher vorgesehen. Der zweiteilige Aufbau ist notwendig, um die Fotos der eigenen Einrichtung herstellen zu können. Im ersten Teil der Fortbildung steht die Theorie mathematischer Bildung im Kindergarten im Mittelpunkt der Betrachtung. Dementsprechend werden entwicklungspsychologische Aspekte, Möglichkeiten der Umsetzung mathematischer Bildung im Kindergarten und Inhalte des Mathematischen Bilderbuchs erläutert und erarbeitet. Die Erzieherinnen und Erzieher verlassen die Sitzung mit der Aufgabe, Fotos von den Kindern ihrer Einrichtung zu machen, wenn sich diese im weitesten Sinne mit Mathematik beschäftigen. Im zweiten Teil gilt es dann die Erfahrungen auszutauschen, Fotos zu sortieren, ihren Bereichen zu zuordnen und schlussendlich den Einsatz des Mathematischen Bilderbuches zu erarbeiten.

Der erste offenen Austausch ergab bei allen ähnliche Erfahrungen: die Kamera war zu langsam; die Kamera war oft nicht zur Hand, wenn man sie brauchte; Erstaunen, wie viel mathematische Erfahrungen Kinder im Spiel und im täglichen Leben machen. Beim Sortieren der Bilder entstand ein weiterer Austausch über Materialien, die vorhanden sind, aber länger nicht benutzt wurden. Die Zuordnung zu den einzelnen Bereichen fiel den Erzieherinnen und Erzieher nicht schwer.

Zum Schluss werden der Einsatz und die Erweiterbarkeit des Buches besprochen. Dem Konzept von Farina Grote folgend kann das Buch einerseits als Gesprächsanlass über Mathematik und damit als Einstieg für mathematische Bildung genutzt werden. Andererseits können Kinder von allein fordern sich dieses Buch gemeinsam anzusehen. Dieser spontane Einsatz ist durch die jeweilige „Informationsseite" des Buches problemlos möglich.

Schlussendlich konnte mit der Evaluation der Fortbildung gezeigt werden, dass die Erzieherinnen und Erzieher der Meinung sind Mathematische Bildung im Kindergarten zu machen und auch Fortbildungsangebote gern annehmen. Insgesamt wurde das Gelernte als „nutzbares Wissen" beschrieben. Fast alle bekundeten Interesse an Fortbildungen zu fachdidaktischen wie auch fachwissenschaftlichen Fortbildungen.

2. Das Projekt Mathematische Erfahrungen im Kindergarten (MEiK)

Die Fortbildung ermöglichte einen ersten Einblick in das Interesse und die Einstellung zur Mathematik bei Erzieherinnen und Erziehern. Die Erfassung von Einstellungen zur Mathematik im Kindergarten und allgemein zu Fortbildungen in diesem Bereich erfolgte durch eine Evaluation am Ende der Veranstaltung. Zu dem konnten erste Kontakte geknüpft werden, um hildesheimer Einrichtungen für die Fragebogenstudie zu akquirieren. Letztendlich wird diese Veranstaltung nicht in Beziehung zu Parametern der Fragebogenstudie gesetzt. Sie diente lediglich als ersten Blick ins Forschungsfeld.

Ziel der Studie sind einerseits Aussagen über Konsequenzen zu Aus- und Fortbildungsmaßnahmen im mathematikdidaktischen wie mathematischen Bereich treffen zu können. Andererseits sollen Aussagen zur Integration mathematischer Bildung in den (Kindergarten-)Alltag getroffen werden.

Demnach ist eine Bestandsaufnahme und Analyse der mathematischen Umgebung im Kindergarten momentan aus Sicht der Erzieherinnen und Erzieher notwendig. Durch die Betrachtung der Voraussetzungen und Möglichkeiten und die Erfassung der Einstellung und des Interesses der Erzieherinnen und Erzieher zur Mathematik im Kindergarten können Aussagen über die Umsetzung bzw. Ansatzstellen für Aus- und Fortbildungsmaßnahmen getroffen werden. Weiterhin sind Korrelationen zu stabilen einrichtungsbezogenen Parametern wie beispielsweise Standort und Träger zu überprüfen und aufzudecken.

Die Datenerfassung wird innerhalb Niedersachsens über eine Fragebogenstudie erfolgen. Zusätzlich werden stichprobenartig Interviews mit Erzieherinnen und Erziehern geführt und Beobachtungen in einzelnen Einrichtungen vorgenommen.

Der großen niedersächsischen Studie geht eine Pilotstudie im nördlichen Sachsen-Anhalt voraus. Diese wird Anfang April 2010 in 21 Kindergärten durchgeführt. Anschließend gilt es den Fragebogen auf seine Gütekriterien hin zu überprüfen und gegebenenfalls anzupassen. Die niedersächsische Studie wird im September/Oktober 2010 laufen.

3. Fazit

Durch die Aussagen der Erzieherinnen und Erzieher innerhalb der Fortbildung kann also angenommen werden, dass mathematische Bildung in natürlicher Weise im Kindergarten vorkommt. Dies gilt es durch die Fragebogenstudie zu überprüfen und Aussagen über die Umsetzung zu präzisieren. Die Ansiedlung mathematischer und mathematikdidaktischer Inhalte in die Ausbildung könnte den Blick schärfen. Auch in Fortbildungen sollte es vermehrt um die Betonung der Mathematik im Alltag gehen. Die Erzieherinnen und Erzieher sollen die Kinder in mathematischen Erfahrungen unterstützen. Dazu müssen sie diese als solche wahrnehmen und wissen, dass auch elementare Tätigkeiten wie das „Tisch decken“ oder „einen Turm bauen“ zur Mathematik in der Lebenswelt der Kinder gehört.

Literatur

Peter-Koop, A. (2006): Mathematische Bilderbücher - Kooperation zwischen Elternhaus, Kindergarten und Grundschule. In Grüßing, M.; Peter-Koop, A. (Hrsg.*): Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten - Fördern – Dokumentieren* (S. 150–159). Offenburg: Mildenberger.

Karl Josef FUCHS, Salzburg, Peter FEJES TOTH, Debrecen

Lehren und Lernen von Mathematik mit Learning Management Systemen (LMS)

0. Prolog und Motive

Immer stärker werden Learning Management Systeme (LMS) bei der Planung und Durchführung von Kursen an den Universitäten eingesetzt. Zum einen sehen wir einen gewissen Druck von außen , zum anderen intrinsische Motive der Lehrenden verantwortlich für diese Entwicklungen. Mit den organisatorischen Einflüssen sprechen wir Kooperationsmöglichkeiten an wie sie etwa in den Richtlinien zur ualitätsentwicklung in Lehre und Studium an der Universität Salzburg formuliert sind. Darin wird der Austausch von Erfahrungen bei der Nutzung von Blackboard für die interne Kommunikation und Kooperation sowie für eine intensivere Kommunikation unter und mit den Studierenden gefordert (http: www.uni-salzburg.at portal page? pageid 747,398260 dad portal schema PORTAL (Letzter Aufruf: 22.3.2010)). Die Einbettung von LMS an sterreichs Universitäten wird überdies von differenzierten Evaluationsstudien Baumgartner, P. et al 2002 vom Bundesministerium für Wissenschaft begleitet. Seitens der Lehrenden wird vor allem das Bedürfnis nach Weiterentwicklung der Lehre im Lichte der Möglichkeiten Neuer Medien (Ergänzung der Präsenzlehre, LMS als Kommunikations- und Administrationswerkzeug) als Motiv genannt.

1. Lehr- / Lernplattformen: Strukturen und Funktionen

Allen LMS gemeinsam sind die Möglichkeiten zu synchroner (zeitgleicher) bzw. asynchroner (zeitversetzter) Kommunikation über Ankündigungen, Verständigungen per Email oder Chat- Diskussionsformen, zur Präsentation und Verteilung von Lehr- Lernmaterialien sowie zur Lernkontrolle über Notencenter . Auf die spezielle Implementierung dieser Optionen in Blackboard sowie deren Handhabung werden wir hier nicht näher eingehen (s. dazu Blackboard Academic Suite Instructor Manual http: library.blackboard.com docs r6 6 1 instructor bbls r6 1 instructor (Letzter Aufruf: 22.3.2010)).

Sind die grundlegenden Fertigkeiten im Umgang mit dem LMS gesichert, hat sich der Blick auf die Funktionen, d. h. auf die Gestaltung des Lehr-Lernprozesses zu richten. Eine schöne Zusammenstellung der verschiedenen Funktionen finden wir bei Christian Schrack 2006 .

Demnach können LMS für folgende Funktionen genutzt werden:

(a) LMS als Tafel , d. h. vom Lehrenden werden Informationen nur für eine gewisse Zeit bereit gestellt (z. B. Hinweise zur Bewältigung von Aufgaben in einem aktuellen bungsblatt).

(b) LMS als (Schul)Buch , d. h. die Lehrenden machen Informationen für einen längeren Zeitraum für die Studierenden öffentlich (z. B. Unterlagen, Skripten zu einer Veranstaltung, die sich über ein gesamtes Semester erstreckt).

(c) LMS als (Schul)Heft , d. h. aktuelle Verschriftlichungen bzw. Präsentation werden auf der Plattform den übrigen Kursteilnehmern zur Verfügung gestellt.

(d) LMS als bungsmaschine , d. h. zum ben oder zur Vertiefung von Fertigkeiten und Kenntnissen werden zusätzliche bungs- Wiederholungs- oder Vertiefungsaufgaben vom Lehrenden angeboten.

(e) LMS als Austauschmedium , d. h. die Plattform dient für Ankündigungen bzw. zur Kommunikation zwischen den Studierenden sowie zwischen Lehrenden und Studierenden (gegebenenfalls auch unter Hinzuziehung weiterer Kolleg(inn)en oder Expert(inn)en).

(f) LMS als Koordinationsmedium, d. h. die organisatorische Abwicklung einer Lehrveranstaltung wird durch den Einsatz der Lehr- Lernplattform unterstützt (z. B. durch die Bekanntgabe der Einteilungen von Präsentationen einzelner Studierender oder Gruppen)

(g) LMS als Notenbuch , d. h. die Plattform unterstützt die Auswertungen von Student(inn)enleistungen (etwa im so genannten Notencenter , welche auch individuelle Einstellungen gestattet).

2. Lehr- / Lernplattformen und (Informatische) Kompetenzen

Um den Einsatz Neuer Medien in der Lehre zu rechtfertigen, wird es sicherlich notwendig sein, folgende Frage aus Sicht der Fachdidaktik zu stellen: Welche zusätzlichen Kompetenzen (d. h. Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten) erwerben die Studierenden durch den Einsatz von LMS in der Lehre?

Zur Beantwortung der Frage stützen wir uns zum einen auf das Kompetenzmodell von Siller und Fuchs 2009 sowie auf den Beitrag von Fuchs aus dem Jahr 2006. Ausführliche Darstellungen der genannten Konzepte finden sich in den genannten Publikationen.

Zunächst sehen wir Kompetenzen, die im PROZESS DER ENTWICKLUNG erworben werden. Explizit sind dies: Systemkompetenzen (Abrufen, (strukturiertes) Ablegen oder Ausdrucken von Informationen), Kommunikationskompetenzen (bei Einsatz des LMS als Austauschmedium) sowie Anwender- und Problemlösekompetenzen (sofern die Materialien im Einklang mit (nationalen) Bildungsstandards gestaltet sind werden Fuchs Landerer 2005 http: www.bmukk.gv.at schulen recht erk vo bildungs standards.xml - Aufbau und Entwicklung (Letzter Aufruf: 22.3.2010)).

Durch den Einsatz eines LMS gesellen sich Kompetenzen aus dem Bereich WIRKUNG AUF IM UNTERRICHT zu den zuvor genannten. Adressiert sind damit grundlegende Fertigkeiten und Fähigkeiten im Umgang mit Computern im Sinne einer Informations- und Kommunikationstechnischen Grundbildung in der Schule Reiter, A. Rieder, A. 1990 sowie darüber hinaus ein mündiger Umgang mit Computern in Wissenschaft, Industrie und Gesellschaft.

Mit den zuvor genannten Kompetenzen zusammenhängend sind Strategien und Techniken zu nennen, die aus dem PROZESS DER NUTZUNG gewonnen werden. Im Mittelpunkt steht dabei die Bereitschaft zum Einsatz des Computers als Lehr- und Lernmittel und somit der Beitrag eines LMS zu einer allgemeinen Medienbildung.

3. Student(inn)enbefragung – Exemplarische und bemerkenswerte Ergebnisse

Im Wintersemester 2009 2010 führten wir eine Umfrage zum Einsatz von LMS unter den Studierenden der Universität Salzburg durch.

Dabei wurden 39 Studierende im Lehramt Mathematik erfasst, 13 Studierende in den Erziehungswissenschaften, die von Kollegin Eva Vasarhelyi betreut wurden, dienten als Kontrollgruppe. Sämtliche Student(inn)en besuchten in mindestens einem Semester eine Lehrveranstaltung in der Blackboard eingesetzt wurde. Zwei Drittel der Studierenden verfügen zu Hause über einen Internetzugang und loggen sich ungefähr viermal von zu Hause in Blackboard ein. Dabei verbleiben mehr als die Hälfte der Befragten höchstens zehn Minuten eingeloggt. Vier Studierende machten erst im Studium mit einem LMS Bekanntschaft. Die Frage nach anderen Lehr- Lernplattformen wurde wie folgt beantwortet: e-learning (2), e-campus (1), Fronter (1) und Welearn (1).

Das Senden und Downloaden von Dokumenten sowie die regelmäßige Verwendung des Notencenters wurden als die am häufigsten verwendeten Funktionen des LMS genannt. Ungefähr einem Drittel der Befragten waren die Möglichkeiten einer synchronen Kommunikation unbekannt, Diskussionsforen sowie das Versenden von Emails über das LMS wurden kaum genannt, was wohl vermuten lässt, dass diese Funktionen ebenso selten benützt werden.

Bei Fragen, die sich auf die Handhabung, also die Struktur, von Blackboard bezogen, zeigten die Studierenden eine durchgängige Neigung zur Mitte einer bipolaren Skala. Zirka zwei Drittel der Student(inn)en stimmten jedoch den Fragen, ob der Einsatz des LMS das Management ihres Studiums bzw. die Kommunikation mit den Lehrenden erleichtern würde, zu. Während professionelle (häufige) Computernutzer kaum einen Zuwachs in ihren (informatischen) Kompetenzen sehen, sind Computer neulinge von Blackboard begeistert. Sie nennen das LMS sogar einzigartig , eine Software, die sehr nützlich ist und wesentlich zur Erweiterung ihrer (informatischen) Kompetenzen beiträgt.

4 Epilog

Im Bereich der Theorie, d. h. in der fachdidaktischer Forschung, sehen wir das LMS als interessanten Brücke ngegenstand, der seine Pfeiler in gleicher Weise in der Didaktik der Informatik Didaktik des Elearning wie in der Didaktik der Mathematik besitzt.

Auf Seiten der Praxis planen wir die Erweiterung in der Nutzung der verschiedenen Funktionen des LMS in der eigenen Lehre sowie eine intensivere berzeugungsarbeit bei Kolleg(inn)en für den Einsatz einer Lehr-Lernplattform in deren Lehre.

Literatur

Baumgartner, P. (2002). Evaluierung von Lernmanagement Systemen: Theorie - Durchführung – Ergebnisse. In Hohenstein, A. Wilbers, K. (Hrsg.), *Handbuch E-Learning*. Köln: Fachverlag Deutscher Wirtschaftsdienst.

Fuchs, K. J. (2006). Zur Entwicklung mathematischer und informatischer Kompetenzen mit Neuen Medien. In Caba, H. Dorninger, Chr. (Hrsg.), *elearning – Didaktik an Österreichs Schulen*. BMUKK, S. 60 – 65.

Fuchs, K. J. Landerer, C. (2005). Problembasiertes Lernen im Informatikunterricht. In Zumbach, J. et al (Hrsg.), *Problembasiertes Lernen – Konzepte, Werkzeuge und Fallbeispiele aus dem deutschsprachigen Raum*. Bern: h.e.p. – Verlag, S. 159 – 176.

Reiter, A. Rieder, A. (1990). Didaktik der Informatik. Informations- und kommunikationstechnische Grundbildung. Wien: Verlag Jugend Volk.

Siller, H.-S. Fuchs, K. J. (2009). Computer und Schule – Herausforderung, Notwendigkeit, Zukunftsperspektive. *IMST – Newsletter, 8, Ausgabe 31,* S. 2 – 5.

Schrack, Chr. (2006). Manifest elearning. In Caba, H. Dorninger, Chr. (Hrsg.), *elearning – Didaktik an Österreichs Schulen*. BMUKK, S. 9 – 30.

Michael GAIDOSCHIK, Wien

Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres

1. Problemlage und Forschungsfragen

Die Automatisation der additiven Grundaufgaben zumindest im Zahlenraum bis 10 wird in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik als ein wichtiges Unterrichtsziel bereits des ersten Schuljahres formuliert. Es existieren bis dato aber kaum Studien darüber, ob bzw. bis zu welchem Grad dieses Ziel im deutschen Sprachraum üblicherweise erreicht wird. Bei US-amerikanischen Schüler/inne/n ist zählendes Rechnen am Ende des ersten Schuljahres die bei weitem vorherrschende Lösungsstrategie (Henry & Brown 2008, S. 164ff). Die chinesischen Schüler/innen in der Vergleichsstudie von Geary, Bow-Thomas, Liu & Siegler lösten dagegen am Ende des ersten Schuljahres 91% der additiven Grundaufgaben im Zahlenraum bis 20 durch Faktenabruf, weitere 6% durch Ableitung aus einer bereits automatisierten Aufgabe auf Grundlage eines operativen Zusammenhangs , etwa als Nachbar- oder Umkehraufgabe (Geary u.a. 1996, S. 2034). Auch andere Studien machen deutlich, dass die Entwicklung von Rechenstrategien nicht nur individuell (mit großen Unterschieden zwischen in dieser Hinsicht leistungsstarken und leistungsschwachen Schüler/inne/n), sondern auch national höchst unterschiedlich verläuft.

Vor diesem Hintergrund verfolgte die hier vorgestellte Dissertation zwei Hauptinteressen: Zum einen wurde zum ersten Mal auch für die *österreichische* Schulwirklichkeit an einer repräsentativen Stichprobe erhoben, in welchen Varianten und Häufigkeiten Kinder schon zu Beginn ihres ersten Schuljahres Lösungsstrategien für additive Grundaufgaben mitbringen und wie sie diese im Laufe des ersten Schuljahres weiter entwickeln oder beibehalten. Dies wurde ins Verhältnis gesetzt zur parallel erhobenen didaktischen Qualität des Arithmetikunterrichts, den diese Kinder im Laufe ihres ersten Schuljahres erfahren haben. Angestrebt war also eine Erhebung des *Status Quo des (nieder-)österreichischen Arithmetikunterrichts im ersten Schuljahr* bezüglich „Input“ (Wie weit entsprechen Didaktik und Methodik des Arithmetikunterrichts den diesbezüglichen Empfehlungen der aktuellen Fachdidaktik?) und „Output“ (Wie weit erreichen die so unterrichteten Kinder die von der aktuellen Fachdidaktik mit Bezug auf Rechenstrategien formulierten Ziele?). Zum anderen ging es der Dissertation um die möglichst detailreiche *qualitative Erforschung der Entwicklung von Ableitungsstrategien* im Bereich der additiven Grundaufgaben, wozu bislang auch international nur wenige empirische Studien vorliegen.

2. Design und Stichprobe

Zur Erfassung der Rechenstrategieentwicklung wurden anfangs 160, durchgehend 139 Kinder (Zufallsauswahl) aus 20 unterschiedlichen niederösterreichischen Grundschulen in je drei qualitativen Interviews (zu Beginn, Mitte und gegen Ende ihres ersten Schuljahres) beim Lösen von ausgewählten Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum bis 10 und 20 beobachtet und zu ihren Lösungsstrategien befragt. Die didaktisch-methodische Qualität des Mathematikunterrichts dieser Kinder konnte nur indirekt erfasst werden. Zum einen erfolgte eine qualitative Inhaltsanalyse der fünf im Unterricht der Kinder verwendeten Mathematik-Schulbücher. Zum anderen wurden die Lehrkräfte der Kinder zur Gestaltung ihres Mathematikunterrichts im Allgemeinen, zum Umgang mit zählenden und nicht-zählenden Lösungsstrategien im Besonderen befragt.

3. Einige qualitative Ergebnisse

An dieser Stelle möglich ist lediglich ein *Überblick über die sechs Typen*, welche sich innerhalb der Kinder mit Bezug auf ihre Strategiepräferenzen am Ende des ersten Schuljahres empirisch begründen lassen (für Details dieser Typologie und weitere Ergebnisse zur Entwicklung von Ableitungsstrategien sowie eine umfassende Diskussion vgl. Gaidoschik, in Vorb.):

Typus „*Faktenabruf und fortgesetztes Ableiten*" (Häufigkeit innerhalb der Stichprobe: etwa 33%): Kinder dieses Typus lösen nicht-triviale additive Grundaufgaben im Zahlenraum bis 10 am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend (d.h. zu mehr als zwei Drittel) durch Nutzung von Zahlenfakten, wobei direkter Faktenabruf überwiegt. (Als „trivial" gewertet wurden die Verdoppelungsaufgaben und Aufgaben mit 1 als Summanden bzw. Subtrahenden.) Noch nicht automatisierte Aufgaben im Zahlenraum bis 10 sowie Aufgaben mit Zehnerübergang werden von den Kindern dieses Typus mehrheitlich durch Ableitungsstrategien gelöst.

Typus „*Hohe Merkleistung ohne Ableitung*" (Häufigkeit: etwa 2%): Kinder dieses Typus wissen die Grundaufgaben im Zahlenraum bis 10 am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend auswendig, setzen aber daneben keine Ableitungsstrategien ein. Nicht automatisierte Aufgaben (etwa solche mit Zehnerübergang) werden also zählend gerechnet.

Typus „*Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten*" (Häufigkeit: etwa 24%): Kinder dieses Typus wissen am Ende des ersten Schuljahres weniger als ein Drittel der nicht-trivialen Aufgaben auswendig. Sie wenden durchgehen *keine* Ableitungsstrategien an. Die nicht-trivialen Grundaufgaben im Zahlenraum bis 10 werden von diesen Kindern noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend (zu mehr als zwei Dritteln) zählend gelöst.

Typus „*Strategie-Mix mit hohem Anteil von Zählstrategien ohne Ableiten*“ (Häufigkeit: etwa 17%): Diese Kinder unterscheiden sich von jenen des Typus „Vorwiegend zählendes Rechnen ohne Ableiten“ im Wesentlichen durch einen höheren Anteil von *nicht-zählenden Fingerstrategien* und einen entsprechend niedrigeren Anteil von fingergestützten Zählstrategien. Auch sie wissen aber weniger als ein Drittel der nicht-trivialen Aufgaben auswendig und wenden keine Ableitungsstrategien an.

Typus „*Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen*“ (Häufigkeit: etwa 20%): Diese Kinder kombinieren am Ende des ersten Schuljahres im Zahlenraum bis 10 Faktenabruf und Ableitungsstrategien mit Zählstrategien (letztere bei mindestens einem Drittel der Aufgaben).

Typus *„Vorwiegend zählendes Rechnen mit Ableiten“* (Häufigkeit: etwa 3%): Diese Kinder unterschieden sich von jenen des Typus „Ableiten und persistierendes zählendes Rechnen“ im Wesentlichen dadurch, dass sie nur einzelne nicht-triviale Aufgaben im Zahlenraum bis 10 auswendig wissen und mehr als zwei Drittel zählend lösen. Daneben wenden aber auch diese Kinder Ableitungsstrategien an.

Die *qualitative Inhaltsanalyse* der fünf in den teilnehmenden Klassen verwendeten Mathematik-Schulbücher macht deutlich, dass alle fünf Schulbücher in wesentlichen Fragen der Didaktik und Methodik des arithmetischen Erstunterrichts gegen Empfehlungen verstoßen, die in der aktuellen deutschsprachigen Fachdidaktik weitgehend einhellig formuliert werden. So werden etwa in allen fünf Schulbüchern die Zahlen bis 10 kleinschrittig eingeführt; es wird nicht erkennbar auf nicht-zählende Rechenstrategien (Ableitungsstrategien) hin gearbeitet, im Gegenteil: zählendes Rechnen wird durch unstrukturierte Veranschaulichungen in Kombination mit Übungsaufgaben, denen keine operative Struktur zugrunde liegt, über weite Strecken geradezu provoziert; und unstrukturierte Übungsaufgaben überwiegen (mit Anteilen bis zu 91 Prozent) in allen fünf Schulbüchern.

Als ein wesentliches Ergebnisse der Lehrer/innenbefragung ist nun aber festzuhalten, dass die Lehrer/innen sich in didaktisch-methodischer Hinsicht jeweils eng an diesen Schulbüchern orientiert haben. Konsequenterweise gaben die Lehrer/innen an, dass sie zählendes Rechnen mehrheitlich zumindest bis zum Ende des ersten Schulhalbjahres (in zumindest sechs der 22 Klassen während des gesamten ersten Schuljahres) gezielt geübt, Ableitungsstrategien aber gar nicht oder nur am Rande behandelt haben.

4. Interpretation und Ausblick

Die in Kapitel 3. zusammengefasste Typologie macht deutlich, dass die von der aktuellen Fachdidaktik formulierte Zielvorgabe, dass *möglichst alle*

Kinder *möglichst alle* additiven Aufgaben zumindest im Zahlenraum bis 10 im Laufe des ersten Schuljahres automatisieren sollten (vgl. Schipper 2005), in den untersuchten Klassen *bei weitem nicht erreicht* wurde. Zugleich liefern Schulbuchanalyse und Lehrer/innenbefragung deutliche Hinweise dafür, dass der Arithmetikunterricht in diesen Klassen in zentralen Bereichen *nicht* den Empfehlungen entsprach, die von der aktuellen Fachdidaktik weitgehend übereinstimmend formuliert werden. Es erscheint plausibel, dass gerade diese Unterrichtsgestaltung maßgeblich dazu beigetragen hat, dass nur etwa ein Drittel der Kinder das von der aktuellen Fachdidaktik formulierte Ziel der Automatisierung im Zahlenraum bis 10 zumindest annähernd erreicht, aber ca. 27% der Kinder die Aufgaben im Zahlenraum bis 10 noch am Ende des ersten Schuljahres vorwiegend zählend lösen, mit absehbar negativen Konsequenzen für ihre weitere mathematische Entwicklung. In jedem Fall ist zu bedenken, dass die dargestellte Typologie keine allgemeinen Aussagen über *die* arithmetische Entwicklung *der* Kinder erlaubt, sondern eine Typologie der Strategieentwicklung *unter den oben charakterisierten, als ungünstig zu bewertenden Unterrichtsbedingungen* darstellt.

Als *Desiderate künftiger Forschung* ergeben sich unter anderem Längsschnittstudien, die die arithmetische Entwicklung über das erste Schuljahr hinaus verfolgen. Forschungsethisch vertretbar erscheinen solche Studien freilich nur dann, wenn sie als *Interventionsstudien im Interesse der teilnehmenden Kinder* konzipiert sind. Solche Studien sollten also zur Evaluation von Unterrichtsmaßnahmen dienen, bei denen Grund zur Annahme besteht, dass sie der arithmetischen Entwicklung der Kinder förderlich sind. Auf Basis der vorliegenden Studie gehören dazu jedenfalls Maßnahmen, die Kinder gezielt beim Entdecken und Anwenden von Ableitungsstrategien unterstützen.

Literatur

Gaidoschik, M. (in Vorbereitung): *Die Entwicklung von Lösungsstrategien zu den additiven Grundaufgaben im Laufe des ersten Schuljahres.* Dissertation. Universität Wien.

Geary, D. C., Bow-Thomas, C. C., Fan, L., Siegler, R. S. (1996): Development of Arithmetical Competences in Chinese and American Children: Influence of Age, Language, and Schooling. *Child Development, 67*, 2022 - 2044.

Henry, V. J., Brown, R. S. (2008): First-Grade Basic Facts: An Investigation into Teaching and Learning of an Accelerated, High-Demanding Memorization Standard. *Journal for Research in Mathematics Education, 39/2*, 153 - 183.

Schipper, W. (2005): Schulische Intervention und Prävention bei Rechenstörungen. *Die Grundschulzeitschrift, 182*, 6 - 10.

Hedwig GASTEIGER, München

Mathematische Kompetenzen wahrnehmen und fördern - von Anfang an

Elementare mathematische Bildung rückte mit der Entwicklung von Bildungsplänen, die auch fachliche Schwerpunkte ausweisen, zu Beginn dieses Jahrhunderts vermehrt in den Fokus des allgemeinen Interesses. Seither wird vielfach diskutiert, wie mathematisches Lernen bereits ab den ersten Lebensjahren möglichst anschlussfähig gestaltet werden kann und wie es gelingen kann, dass möglichst alle Kinder die notwendigen Grundlagen für ein erfolgreiches Weiterlernen erwerben können.

Entwicklung mathematischer Kompetenzen im vorschulischen Bereich

Kinder entwickeln in den ersten Lebensjahren bis zum Zeitpunkt der Einschulung beträchtliche mathematische Fähigkeiten. Sie können früh verschiedene Mengen unterscheiden und reagieren auf Mengenveränderungen. Die komplexe Tätigkeit des Zählens lernen sie spontan – auch ohne Unterweisung – wobei ihnen in der Regel aufgrund vielfältiger Handlungssituationen die kardinale Bedeutung der Zahlwörter bewusst wird und sie ihre Zählhandlungen zunehmend perfektionieren. Dadurch verfügen sie über die Grundlage, ein Verständnis für Addition und Subtraktion im Zusammenhang mit Handlungen z. B. des Dazulegens oder Wegnehmens aufzubauen und mit Hilfe des Zählens einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben in ihnen bekannten Kontexten zu lösen (vgl. z. B. Starkey, Cooper 1980; Xu, Spelke 2000; Gelman, Gallistel 1986; Fuson 1988; Hughes 1986; Wynn 1992).

Allerdings sind die mathematischen Leistungen der Kinder im Vorschulalter sehr heterogen, so dass diese Kompetenzen nicht bei jedem Kind zu Schulbeginn vorausgesetzt werden können (Schipper 2002). Diese Tatsache gewinnt an Bedeutung, wenn man Ergebnisse aktueller Untersuchungen aus der Rechenschwächeforschung reflektiert, die deutliche Zusammenhänge zwischen Zählfähigkeiten bzw. Zahl- und Mengenverständnis im vorschulischen Bereich und Erfolgen im späteren Mathematikunterricht aufzeigen (z. B. Dornheim 2008). Die Beobachtung und Förderung der mathematischen Entwicklung vor Schuleintritt ist infolgedessen unabdingbar.

Konzeptionen zur Förderung mathematischer Kompetenzen

Die konzeptionellen Vorschläge zur Förderung mathematischer Kompetenzen in Kindertagesstätten unterscheiden sich zum Teil deutlich. Neben lehrgangsartig konzipierten Trainingsprogrammen, die den Erziehenden

Formulierungen wörtlich vorgeben (z. B. Preiß 2007), gibt es Veröffentlichungen, die das Nutzen und Schaffen gehaltvoller mathematischer Lerngelegenheiten in den Mittelpunkt der vorschulischen Arbeit stellen (z. B. Wittmann, Müller 2009). Während bei letzterem die dialogische Auseinandersetzung und kollektives Aushandeln im Sinne der Ko-Konstruktion einen wesentlichen Aspekt von mathematischem Lernen ausmachen, zeigen Trainingsprogramme oftmals eine starke Nähe zu fragend-entwickelndem Vorgehen. Sollen mathematische Kompetenzen erworben werden, die sich durch Anwendbarkeit und flexible Nutzung auszeichnen, und nicht isolierte Kenntnisse und Fähigkeiten, so sollte elementare mathematische Bildung vor allem der Forderung nach fachlicher Richtigkeit nachkommen und natürliche Lerngelegenheiten nutzen.

Instrumente zur Beobachtung mathematischer Kompetenzen

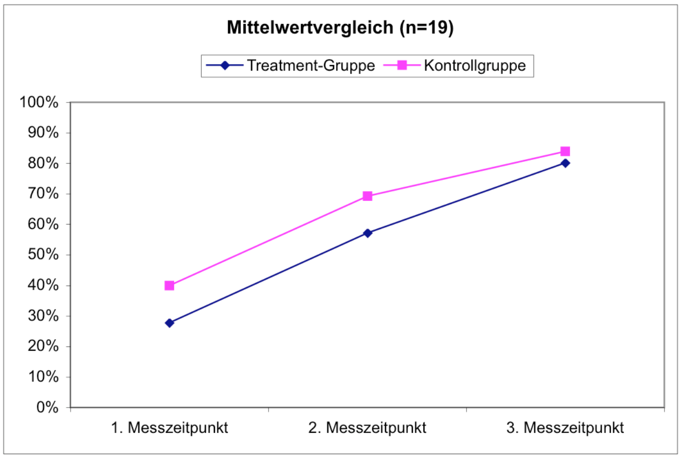
Die Erkenntnis, dass sich fehlendes mathematisches Vorwissen negativ auf die spätere Mathematikleistung auswirkt (s. o.), unterstreicht die Notwendigkeit, frühzeitig und fortlaufend über den Kompetenzstand und die -entwicklung des Kindes informiert zu sein, um fördernd eingreifen zu können. Punktuell einzusetzende diagnostische Verfahren, wie z. B. der Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (van Luit, van de Rijt, Hasemann 2001) eignen sich dabei für einen ersten Überblick. Im Sinne einer ‚pädagogischen Diagnostik' (Ingenkamp 1991), die zum Ziel hat, das individuelle Weiterlernen möglichst zu optimieren, bieten sich allerdings eher Beobachtungs- und Dokumentationsinstrumente an, die kontinuierlich lernbegleitend verwendet werden, und die den Erziehenden Hinweise auf zentrale Schritte in der mathematischen Entwicklung geben. Diese Forderungen erfüllt die „Lerndokumentation Mathematik" (Steinweg 2006). Dabei handelt es sich um ein Beobachtungsraster, in welches Erziehende zu verschiedenen mathematischen Erfahrungsbereichen beobachtete Kompetenzen notieren können. Das Raster gibt dazu wesentliche Schritte in der vorschulischen mathematischen Kompetenzentwicklung vor, wobei sowohl inhaltliche als auch allgemeine mathematische Kompetenzen berücksichtigt sind. Zusätzlich wird angeregt, die Beobachtungen durch eine Sammlung verschiedener mathematischer Dokumente im Sinne eines Portfolios zu ergänzen. Auf dieser Basis können Erziehende für adäquate Lernanregungen sorgen und das weitere Lernen planen.

Evaluation von Maßnahmen zur Beobachtung und Förderung mathematischer Kompetenzen

Im Rahmen des Verbundsprojekts ‚TransKiGs – Stärkung der Bildungs- und Erziehungsqualität in Kindertageseinrichtungen und Grundschule' wurden in Berlin Maßnahmen zur Beobachtung und Förderung mathematischer Kompetenzen evaluiert. Den Erziehenden wurde für die Beobachtung der Kompetenzen das Instrument ‚Lerndokumentation Mathematik' zur Verfügung gestellt. Um die mathematische Entwicklung weiter voranbringen zu können und gerade bei etwaigen Stagnationen oder Rückschritten in der Kompetenzentwicklung reagieren zu können, wurde für die Erziehenden eine Fortbildungsreihe durchgeführt. In den Veranstaltungen standen das für die Beobachtung und Förderung nötige Hintergrundwissen sowie konkrete Vorschläge für gehaltvolle Lernanregungen im Alltag der Kindertagesstätte im oben genannten Sinne im Mittelpunkt.

Die zentrale Fragestellung der Evaluation war: Profitieren die am Projekt teilnehmenden Kinder vom Einsatz des Beobachtungsinstruments und von der ‚Informiertheit' der Erziehenden? Zur Beantwortung der Frage wurde die Leistung dieser Kinder mit der von Kindern einer Kontrollgruppe durch einen interviewbasierten Test zu drei Messzeitpunkten erhoben und verglichen. Das Testinstrument enthielt mit ‚Zahlen und Rechnen', ‚Raum und Form' und ‚Größen und Maße' drei Subskalen (s. Gasteiger i.V.).

Die hier berichteten Ergebnisse beziehen sich auf jeweils 19 Kinder in der Treatment- und in der Kontrollgruppe, die drei Messzeitpunkte im Einjahres-Abstand durchlaufen haben. Problematisch für die Auswertung war, dass die Kontrollgruppe bereits zum Zeitpunkt des Pretests trotz Parallelisierung der Stichproben deutlich besser war – in der Subskala Zahlen und Rechnen sogar signifikant. Während die Entwicklung über die ersten beiden Messzeitpunkte in beiden Gruppen nahezu parallel verlief, näherten sich die Leistungen zum dritten Messzeitpunkt deutlich an. Die größten Veränderungen zeigten sich in der Subskala ‚Zahlen und Rechnen'. Eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung ergab einen signifikanten Interaktionseffekt. 11% der Varianz bei der Leistungsmessung über die drei Messzeitpunkte können durch die Gruppenzugehörigkeit aufgeklärt werden.



Die Kinder, deren Erziehende das Instrument ‚Lerndokumentation Mathematik' zur Verfügung gestellt bekommen und die sich bezüglich mathematischer Bildung im vorschulischen Bereich weitergebildet hatten, unterscheiden sich also bei den Aufgaben zum Bereich Zahlen und Rechnen signifikant in ihrer Leistungsentwicklung von den Kindern der Kontrollgruppe. Dass sich die Veränderung erst im zweiten Jahr der Intervention zeigt, erscheint nicht weiter verwunderlich. Da die ergriffenen Maßnahmen nicht unmittelbar am Kind ansetzen, sondern eine intensive Auseinandersetzung der Erziehenden mit der Thematik verlangen, wird ein Professionalisierungsprozess bei den beteiligten Personen angestoßen, der – wie man aus der Expertiseforschung weiß (z. B. Ericsson, Krampe, Tesch-Römer 1993) – Zeit braucht. Die veränderte Herangehensweise an die alltägliche Arbeit, könnte allerdings im Vergleich zu einem zeitlich begrenzt durchgeführten Trainingsprogramm zu einer konstanten Förderung der Kinder in ihrer Leistungsentwicklung führen. Dies bleibt noch zu untersuchen.

Literatur

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.

Ericsson, K. A., Krampe, R. Th., Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review*, 100/3, 363-406.

Fuson, K. C. (1988). Children's Counting and Concepts of Number. N. Y.: Springer.

Gasteiger, H. (i. V.). *Elementare mathematische Bildung im Alltag der Kindertagesstätte. Grundlegung und Evaluation eines kompetenzorientierten Förderansatzes.*

Gelman, R., Gallistel C. R. (1986). *The Child's Understanding of Number*. 2. Auflage. Cambridge, Massachusetts, London: Harvard University Press.

Hughes, M. (1986). *Children and Number Difficulties in Learning Mathematics.* Oxford, Basil Blackwell.

Ingenkamp, K. (1991). Pädagogische Diagnostik. In Roth, L. (Hrsg.), *Pädagogik. Handbuch für Studium und Praxis* (S. 760-785). München: Ehrenwirth.

Preiß, G. (2007). Leitfaden Zahlenland 1. Verlaufspläne für die Lerneinheiten 1 bis 10 *der „Entdeckungen im Zahlenland“.* Kirchzarten: Klein Druck.

Schipper, W. (2002). „Schulanfänger verfügen über hohe mathematische Kompetenzen.“ Eine Auseinandersetzung mit einem Mythos. In Peter-Koop, A. (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 119-140). Offenburg: Mildenberger.

Starkey, P., Cooper, R. G. (1980). Perception of numbers by human infants. *Science*, 210, 1033-1034.

Steinweg, A. S. (2006). *Lerndokumentation Mathematik.* Berlin: Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung.

Van Luit, J. E. H., van de Rijt, B. A. M., Hasemann, K. (2001). Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen, Bern, Toronto, Seattle: Hogrefe.

Wittmann, E. Ch., Müller, G. N. (*2009). Das Zahlenbuch – Frühförderprogramm*. Stuttgart: Klett.

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, 358, 749-750.

Xu, F., Spelke, E. S. (2000). Large number discrimination in 6-month-old infants. *Cognition*, 74, B1-B11.

THOMAS GAWLICK, DIEMUT LANGE , Hannover

Allgemeine vs. mathematische Begabung bei Fünftklässlern

Die MALU (Mathe-AG an der Leibniz Universität) fördert seit 2008 Fünftklässler, die einmal wöchentlich in Paaren selbständig Problemaufgaben bearbeiten. Neben Interesse ist eine nicht unterdurchschnittliche Begabung dafür eine plausible Voraussetzung. Dabei wird Begabung als eine stabile intrapersonale Eigenschaft aufgefasst, die interindividuelle Leistungsdifferenzen erklärt. Insoweit sie durch Tests erfassbar ist, kann sie als Prädiktor für zukünftige Leistungen und damit als ein Auswahlkriterium für die Förderung dienen. Über deren Verlauf und Ergebnisse wird an anderer Stelle berichtet – hier geht es um die Frage: Wie soll mathematische Begabung gemessen werden und welche Vorhersagen sind damit möglich?

Nach Heilmann (1999) sind prinzipiell drei verschiedene Modelle zur Erklärung mathematischer Leistung denkbar. Danach können interindividuelle Unterschiede mathematischer Leistung erklärt werden mit

1. unterschiedlich ausgeprägter mathematikspezifischer Begabung,
2. unterschiedlich ausgeprägter mathematikspezifischer und unterschiedlich ausgeprägter allgemeiner Begabung sowie
3. unterschiedlich ausgeprägter allgemeiner Begabung.

1. wird etwa von Krutetzki (1966) vertreten, 3. von Rost (2004, 43).

Um obige Frage für die MALU-Stichprobe zu beantworten, wurden an verschiedenen Hannoveraner Gymnasien ein mathematikspezifischer und ein allgemeiner Begabungstest mit 684 Fünftklässlern durchgeführt.

1. Allgemeine vs. mathematische Begabung

Allgemeine Begabung wird wie üblich verstanden als Intelligenz: „die Fähigkeit zum denkgestützten Lösen von Aufgaben und Problemen in Situationen, die für die Person neu und nicht allein durch Wissensabruf erfolgreich bearbeitbar sind, die Fähigkeit zum induktiv und deduktiv-logisch schlussfolgernden Denken, die Fähigkeit zum abstrakten Denken und die Fähigkeit zu Verständnis und Einsicht - zum Erkennen und zur Herstellung von Strukturen, Beziehungen, Sinnzusammenhängen und Bedeutungen.“ (Rindermann 2004, 374). Die Aufzählung suggeriert, dass Intelligenz verschiedenartige Aspekte hat, die durch die diversen Untertests von Intelligenztests operationalisiert werden – strittig war lange Zeit, ob diese manifesten Variablen besser als die unterschiedlichen Ausprägungen *einer* latenten Variable „allgemeine Intelligenz“ beschrieben werden können (Spearmans Generalfaktor g) oder durch *mehrere* latente Variable, die unterschiedlichen Fähigkeiten entsprechen (Thurstones „primary mental abilities“). Zur Klärung dieser Frage wurde die Faktorenanalyse entwickelt.

Bedenken, ob Intelligenztestaufgaben solche Fähigkeiten messen, die wesentlich für mathematische Begabung sprechen, werden vielfach von Mathematikdidaktikern geäußert. Geschlossene, zielgerichtete Intelligenztestaufgaben ließen lediglich eine einzige richtige Lösung zu, klammerten dabei Originalität und Einfallsreichtum aus und transportierten die Vorstellung von Mathematik als wohldefiniertem Gegenstand (Käpnick 1998, 68).

Ausgehend von dem Vorverständnis von *mathematischer Begabung* eigener Beobachtungen von mathematisch begabten Kindern und den Merkmalssystemen insbesondere von Krutetzki (1966) und Kießwetter (1985) stellt Käpnick in einem eigenen System „Merkmale für die Erfassung von Dritt- und Viertklässlern mit einer potentiellen mathematischen Begabung“ zusammen (Käpnick 1998, 119). Dazu zählt er sowohl *mathematikspezifische Begabungsmerkmale* wie Originalität und Phantasie bei mathematischen Aktivitäten, Gedächtnisfähigkeit, Fähigkeit zum Strukturieren, Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen, Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer als auch *begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften* wie hohe geistige Aktivität, Anstrengungsbereitschaft, Freude am Problemlösen und Beharrlichkeit.

2. Auswahl der Tests

Als mathematischer Begabungstest wurde der von Käpnick zusammengestellte *Indikatoraufgaben-Test* (Käpnick 1998) in einer verkürzten Version[1] eingesetzt. Als IQ-Test wurde der CFT-20R ausgewählt. Wie Ravens APM ist der CFT-20R unabhängig vom Sprachverständnis und erfasst die „Fähigkeit zur Problemerfassung in neuartigen Situationen“ (Weiß 2006, 16). Im Gegensatz zum APM existieren für den CFT-20R aktuelle deutsche Normwerte für Fünftklässler. Zudem konnten von uns keine Deckeneffekte beobachtet werden. Andere IQ-Gruppentests mit Normdaten für Fünftklässler schieden aufgrund ihrer Zeitdauer von vornherein aus.

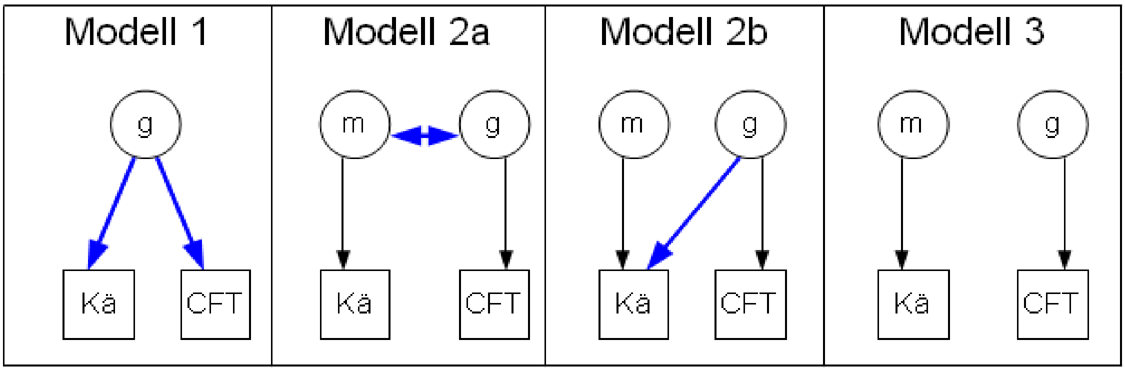
3. Ergebnisse

Von 684 Fünftklässlern liegt sowohl das CFT-20R- als auch das Käpnick-Testergebnis vor. Beide Punktzahlen korrelieren zu r=0.374** miteinander, so dass von einem schwach positiven linearen Zusammenhang ausgegangen werden kann. Anders formuliert: 14% der Varianz des einen Testergebnisses kann durch die des anderen erklärt werden. Da ein direkter kausaler Zusammenhang der Testpunktzahlen theoretisch ausgeschlossen wer-

---

1 Details und Literatur in Langfassung auf www.idmp.uni-hannover.de unter Gawlick bzw. Lange

den kann, sind entsprechend den Heilmannschen Fällen folgende Deutungsmodelle zur Erklärung der Korrelation der manifesten Testvariablen durch unterschiedliche Wirkzusammenhänge der latenten Begabungsvariablen (allgemeine: g, mathematische: m) denkbar.



Die dazugehörigen Strukturgleichungsmodelle wurden einer konfirmatorischen Faktorenanalyse mit AMOS 17 unterzogen. Alle Indizes[1] deuten darauf hin, dass Modell 2b die empirischen Relationen zwischen den manifesten Variablen am besten erklären kann (vgl. Brunner 2006, 100). Dieses Ergebnis stimmt gut damit überein, dass die Felder 12 und 21 in nachstehender Vierfeldertafel[2] besetzt sind – wenn auch signifikant geringer als für unabhängige Merkmale zu erwarten (χ^2=30,618, 2-seitig, $p<0,01$).

			Käpnick-Test	
			1	**2**
IQ-Wert	**1**	**Anzahl**	580	46
		Erwartete Anzahl	**568,3**	**57,7**
	2	**Anzahl**	41	17
		Erwartete Anzahl	**52,7**	**5,3**

Um Aussagen über die prädiktive Validität der beiden Tests machen zu können, wurden von einer Sechstklässlerstichprobe die Mathematik- und die Deutschhalbjahresschulnoten sowie die Einzelbearbeitungen von 4 ausgewählten MALU-Aufgaben erhoben und bivariat bzw. multipel korreliert:

		Deutschnote	Mathenote	Indiv. Bearbeitungen
N = 130 Kl. 6	Käpnicktest	r=0.350**	r=0.411**	r=0.290**
	CFT	r=0.199**	r=0.394**	r=0.305**
	Käpnicktest+CFT	--	R=0.469	R=0.347
	Käpnicktest+CFT+Mathenote	--	--	R=0.399

2 2 = weit überdurchschnittlich gute Testleistung; 1 = Rest. Als weit überdurchschnittlich intelligent gelten nach Rost(2004) Kinder, die mindestens einen IQ von 130 erreichten (d.h. mindestens zwei Standardabweichungen über dem Mittelwert der Normstichprobe). Der gleiche Anteil der Probanden soll auch als mathematisch hochbegabt eingestuft werden. Die tatsächliche Probandenzahl weicht davon leicht ab, da die Cut-Off-Punktzahl im Käpnick-Test von mehreren Fünftklässlern erreicht wurde.

4. Diskussion der Ergebnisse

Sowohl der Intelligenz- als auch der Käpnick-Test sind valide Prädiktoren, die allerdings jeweils nur ca. 16% Varianzaufklärung für mathematische Schulleistungen und ca. 9% für mathematisches Problemlösen erbringen. Es ist überraschend, dass letzterer Wert deutlich geringer ausfällt.

Die Korrelationen der Testergebnisse mit den Noten liegen im Rahmen des üblichen: Der CFT-20R korreliert laut Handbuch in den Gymnasialklassen 5-9 zu .40 mit der Mathematik-Note (Weiß 2006, 87). Für den Käpnick-Test sind uns keine Vergleichsdaten bekannt.

Die Interkorrelation der Tests liegt niedriger als z.B. die Interkorrelation der Ergebnisse des TIMSS-Mathematiktests mit kognitiven Grundfähigkeiten (figural: .49, verbal: .59, vgl. Baumert et al. 1997). Dies deutet darauf hin, dass das hier gemessene Konstrukt weiter von allgemeiner Begabung entfernt ist und damit mathematikspezifischer sein könnte. Allerdings liegt die Varianzaufklärung für Problemaufgaben noch unter der für Schulnoten.

Durch Kombination der Tests wird aufgrund der Interkorrelation die prädiktive Validität zwar deutlich erhöht, die Varianzaufklärung bleibt aber unbefriedigend. Die multiple Korrelation der Mathematikhalbjahresnote mit Käpnick- und CFT-Test beträgt $R=0.469$, also $R^2=0.220$. Für die Problemaufgaben liegen die Werte mit $R=0.347$ und $R^2=0.120$ noch niedriger, so dass die Vermutung nahe liegt, dass hierbei ein wesentlicher Faktor nicht miterhoben wurde – welcher das sein könnte, bleibt jedoch unklar. Es ist nicht das mathematische Vorwissen, denn die multiple Korrelation steigt lediglich auf $R=0.399$, wenn die Mathematikhalbjahresnote als zusätzlicher Prädiktor aufgenommen wird. Auch die Sprachkompetenz kann ausgeschlossen werden, da sich die multiple Korrelation bei Hinzunahme der Deutschnote lediglich um 0.014 auf $R=0.413$ erhöht. Insgesamt erklären die beiden Tests und die beiden Noten zusammen lediglich 17% der Varianz der individuellen Aufgabenbearbeitungen.

Dass in anderen Förderprojekten die Ergebnisse der Förderung ebenfalls nur unzureichend durch Tests vorhersehbar sind, stützt die in der Community verbreitete Präferenz für eine ganzheitliche Prozessdiagnostik, die allerdings i.d.R. auch Tests mit einbezieht.

Wenn aus ökonomischen Gründen nur einer der beiden Tests als ein Auswahlkriterium fungieren soll, könnte man den Käpnick-Test bevorzugen, da dieser auch auf den g-Faktor lädt. Wenn man auch hohe Leistungen, die nur aufgrund hoher allgemeiner Begabung erbracht werden, miterfassen möchte, braucht man beide Tests.

Literatur[1]

Andrea GELLERT, Essen

Lehrerintervention im Unterrichtsdiskurs in Kleingruppen

Interaktion und Intervention im Mathematikunterricht der Grundschule

Mathematikunterricht ist ein komplexes Interaktionsgeschehen, von vielfältigen Einflussfaktoren abhängig und wird durch die Teilnehmer konstituiert. In der Studie „Erprobung und Evaluation fokussierender Lehrstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule (ErfoLG)“ soll die unterrichtliche Interaktionskompetenz von Mathematiklehrerinnen und –lehrern untersucht und weiterentwickelt werden, indem in Kleingruppengesprächen mit vier bis fünf Grundschulkindern und einer Lehrperson sogenannte „fokussierende Lehrstrategien“ eingesetzt und anhand von Videoausschnitten interpretativ analysiert werden. Als Grundlage werden soziologische, interaktionistische und epistemologische Theorien herangezogen, die im Zusammenhang mit diskursivem Lernen und dem Aufbau neuen mathematischen Wissens stehen.

Grundschulkinder sind in ihrem Lernprozess, insbesondere wenn es um „fundamentales Lernen“ (Miller 1986) geht, auf andere Personen, seien es Mitschüler, Eltern, Lehrer und auch andere angewiesen, denn fundamentales Lernen erfordert es, neue verallgemeinernde Beziehungen zwischen vorhandenen Wissenselementen aktiv zu konstruieren und dialogisch auszuhandeln. Miller (1986; 2006) spricht von „Basistheorien“ zur Aneignung anwendungsbezogenen Wissens, für deren Emergenz Diskurse notwendige Voraussetzung sind. Steinbring überträgt dies auf neues mathematisches Wissen, welches das alte Wissen systematisch überschreiten muss (Steinbring 2005, 61). Dem entsprechend wird neues mathematisches Wissen als eine Erweiterung des alten Wissens durch neue, reichhaltige Beziehungen verstanden, ein Wissen über Systeme von Argumenten und Beziehungen, welches eine grundsätzliche Reorganisation und Weiterentwicklung von Wissenssystemen erfordert.

Bekommt die interaktive Wissensaushandlung einen derartigen Stellenwert, so muss der zugehörige »Interaktions-Raum« näher betrachtet werden. Im mathematischen Unterrichtsdiskurs – analog zum allgemeinen Diskurs – wird eine intersubjektive, von allen Teilnehmern einer Gemeinschaft anerkannte Wahrheit ausgehandelt (vgl. Habermas, z.B. 1981). Argumentationen (bzw. Diskurse) konstituieren eine grundlegende Methode zu einer solchen Aushandlung und damit zur Lösung interpersoneller Koordinationsprobleme (Miller 1986; 2006). Das primäre Handlungsziel einer kollektiven Argumentation besteht somit darin, dass eine strittige Frage von den daran Beteiligten gemeinsam beantwortet wird. Während Miller dies anhand von Strittigkeiten im Alltag untersucht (vgl. z.B. Streit um eine Schanze, 1986; 2006), stellt sich hier die Frage, ob das Klären von Strittigkeiten für den Mathematikunterricht ebenso fundamental ist. Und weiter: Wie muss der mathematische Diskurs von der Lehrerin initiiert und geführt werden, um sich positiv auf den Lernprozess der Schüler auszuwirken?

Aus mathematikdidaktischer Sicht entstehen solche Diskurse meist nicht spontan, allein „aus der Sache heraus", und ein „subjektives Beweisbedürfnis" (Winter, 1983) ist nicht voraussetzungslos vorhanden. Strittigkeiten in mathematischen Diskursen entstehen in der Interaktion zwischen den Beteiligten und unterliegen bestimmten Regeln. So müssen mathematische Aussagen geklärt und aufeinander bezogen werden, das Gespräch muss koordiniert und ggf. auf mathematische Strittigkeiten fokussiert werden. Diese Regeln sind nicht starr, sondern änderbar und werden auch oft geändert (Miller 2006). Die Schüler müssen eigene grundlegende Überzeugungen einbringen können, ihr Verstehen explizieren, ihren Umgang mit dem mathematischen Sachverhalt offen legen und sich dazu äußern können.

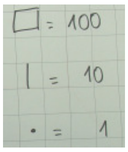
Interventionen der Lehrperson

Der Lehrperson kommt eine wesentliche Funktion zu. Sie soll Mathematik *Lehren*, wobei Lehren kein Transport des mathematischen Stoffs bedeutet, sondern das Arrangieren von günstigen Lernbedingungen (vgl. auch Cooney 1988; Mason 1987; Steinbring 1994). Ist sie dabei in der Lage, eine Distanz zu eigenen Vorstellungen und Intentionen einzunehmen? Und: Kann sie sich den Deutungskonstruktionen und den Argumentationsversuchen der Kinder zuwenden und diese gezielt erkunden? Wood (1998) nennt dieses Lehrverhalten »focussing pattern« und betont damit eine explizite Aufforderung an die Kinder, sich in den mathematischen Interaktionsprozess einzubringen.

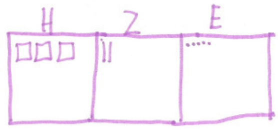
In mehrdeutig interpretierbaren Kommunikationssituation können strittige Argumente beispielsweise dann entstehen, wenn sich der Lehrer der Mehrdeutigkeit bewusst ist und diese auch als produktives Element im Unterricht nutzt. Dabei steht er vor einer doppelten Aufgabe: Auf welchen (strittigen) mathematischen Aspekt fokussiere ich? Und weiter: Wie mache ich diesen Kindern zugänglich? Ergibt sich der mathematische Aspekt vermeintlich aus den gestellten Aufgaben und dem notwendigerweise vom Lehrer oder einem Schüler angezeigten Begründungsbedarfs (vgl. Schwarzkopf 2000), besteht doch eine große Schwierigkeit in dem Sichtbarmachen eben jenes Erklärungsbedürftigem. Dabei ist gerade diese Wahrnehmung von interindividuellen Koordinationsproblemen fundamental für das Zustandekommen kollektiver Argumentationen (Miller 1984, 24).

Dissens aufgrund von Deutungsdifferenzen

Die hier exemplarisch diskutierte Szene thematisiert die Mehrdeutigkeit von Symbolen in Zahlrepräsentationen. Die Schüler sind zunächst aufgefordert, die Zahl 325 auf unterschiedliche Arten darzustellen, um anschließend zu viert mit der Lehrerin in einem Kleingruppengespräch die Deutungen der Kinder gemeinsam auszuhandeln.



Zu Beginn der Szene wird über die ikonische Darstellung der Mehrsystemblöcke diskutiert und ein vermeintlich gemeinsames Verständnis dieser Zeichen formuliert und notiert. Deutungsdifferenzen entstehen erst im Zusammenhang mit der Einbettung dieser Zeichen in die mit den Stellenwertbezeichnungen beschrifteten Kästchen und zwar zwischen der Lehrerin (L) und einem Schüler (Kevin).



8	Ke	Ja aber wenn. Das ist doch, da stehts doch auch (*deutet auf die beschrieben Papierunterlage*). Ein Strich ist ein Zehner und wenn man dann, wenn da Zehner drüber steht (*deutet erst auf die Beschriftung und dann auf die zwei Striche*), dann weiß man ja, dass da Striche reinkommen, wenns Zehner gibt. Und deswegen ein Strich (*zeigt auf das Kästchen*) ist ein Zehner und so.
9	L	Aber dann sind das auch zwanzig (*zeigt auf die zwei Striche*), ne?
10	Ke	Ja das ist zwanzig
11	L	Aber zwanzig Zehner # (*zeigt auf das Z über dem Kästchen*) Und zwanzig Zehner # sind doch
12	Ke	# Nein. # zwei Striche (*deutet auf die Striche*) sind, zwei, zwei Striche sind sind zw. Zwei Striche, die von den Zehnern sind 20(*deutet zweimal mit dem Finger auf das Kästchen*)(Fe: Mhh)
13	L	Aber sind doch 20 Zehner. 20 mal 10 sind das nicht 200 (*gestikuliert mit den Händen*).
14	Ke	Da geht's nicht um mal.

Kevins Aussagen „wenn da Zehner drüber steht" und „dass da Striche reinkommen" in Zeile 8 lassen vermuten, dass er eher die Vorstellung eines „Sortierkastens" hat, auch wenn er dies nicht so äußert.

Die Lehrerin scheint in der Zahlrepräsentation eine Strittigkeit zu erkennen, die sie in Zeile 9 auch formuliert: „Aber dann sind das auch zwanzig, ne?" Für Kevin ist dies keineswegs strittig, weshalb er in Zeile 10 die Aussage der Lehrerin bestätigt, was diese im weiteren Verlauf dazu veranlasst, ihre Strittigkeit noch weiter auszudifferenzieren: „Aber zwanzig Zehner". Dies negiert Kevin, da er bei seiner Deutung aus Zeile 8 bleibt und den Zusammenhang, den die Lehrerin bezüglich der Beschriftung Z und den beiden Strichen für je einen Zehner äußert, nicht teilt. Auch der letzte Versuch der Lehrerin einer multiplikativen Verknüpfung zwischen der Beschriftung Z und dem, was innerhalb der Kästchen steht („Aber sind doch 20 Zehner. 20 mal 10 sind das nicht 200?") schlägt fehl und wird von Kevin mathematisch begründet abgestritten: „Da geht's nicht um mal." In dieser Szene wird der Dissens nicht aufgelöst. Der Schüler bleibt bei seiner Sicht der Zahlrepräsentation als eine Art „Sortierkastensystem", während die Lehrerin vermutlich eher die Stellenwerttafel als Hintergrundverständnis in das Gespräch einbringt. Ebenso wird nicht geklärt, dass vereinbart werden muss, wie diese Repräsentation gedeutet werden soll. Die Beziehung zwischen der „Kennzeichnung" über dem Kästchen und dem, was in ihm eingetragen ist, wird nicht thematisiert. Weiterhin ist zu fragen, ob es für Kevin – selbst wenn er eine stellenwerttafelgebundene Sichtweise auf die Repräsentation einnehmen würde – bei dieser Lesart um die Multiplikation geht.

Resümee und Ausblick

Es gibt keineswegs immer einen Konsens zwischen den mathematischen Deutungen von Lehrer und Schülern – wie z.B. die obige Episode zeigt. Auch werden auf beiden Seiten Strittigkeiten nicht immer sofort erkannt: Für den Lehrer und die Schüler sind die je eigenen Sichtweisen nicht strittig, es bleibt dennoch schwierig, die Sichtweise des anderen so zu verstehen, dass anknüpfend daran eine gemeinsame Lösung entwickelt werden kann.

Diese und ähnliche Gesprächssituationen stellen Lehrer und Schüler vor ganz neue Anforderungen. Lehrer haben selten Gelegenheit, intensive mathematische Gespräche zu führen und so ihre Interaktionskompetenz weiterzuentwickeln. Schüler haben wenig Erfahrung, einen möglichen mathematischen Dissens zu erkennen und darüber zu diskutieren. Es bleibt zu fragen, ob bzw. wie Grundschulkinder für ein bewussteres Erkennen von Strittigkeiten sensibilisiert werden können. Koordinationsprobleme – d.h. Strittigkeiten verhandeln und beilegen – können nicht einfach nur auf der sozialen Ebene bearbeitet werden, sondern erfordern Begründungen, die sich auf den mathematischen Inhalt beziehen.

Weitere zentrale Forschungsfragen sind: Wie verändert sich die Interaktion im Rahmen eines solchen Settings?, und: Wie können wesentliche Charakteristika des theoretischen Konstrukts „fokussierende Lehrstrategien“ durch theoriegeleitete, interpretative Analysen von experimentell geplanten mathematischen Diskursen mit Schulkindern weiter ausgearbeitet werden?

Literatur

Cooney, T. J. (1988): The Issue of Reform: What Have We Learned form Yesteryear. In: *Math. Teacher* 81(5): 352-63.

Habermas, J. (1981): *Theorie des Kommunikativen Handelns* (2 Bd). Frankfurt/M.: Suhrkamp

Mason (1987): Only awareness is educable. In: *Math. Teacher* 120: 30-31.

Miller, M. (1986): *Kollektive Lernprozesse.* Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Miller, M. (2006): *Dissens. Zur Theorie diskursiven und systemischen Lernens.* Bielefeld: Transcript.

Schwarzkopf, R. (2000): *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht. Theoretische Grundlagen und Fallstudien.* Hildesheim: Franzbecker.

Steinbring, H. (1994): Frosch, Känguruh und Zehnerübergang – Epistemologische Probleme beim Verstehen von Rechenstrategien im Mathematikunterricht der Grundschule. In: H. Maier et al.: *Verstehen und Verständigung.* Köln: Aulis, 182-217.

Steinbring, H. (2005): *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective.* New York: Springer

Winter, H. (1983): Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, Heft 1, S. 59-95.

Wood, T. (1998): Alternative Patterns of Communication in Mathematics Classes: Funneling or Focusing? In: Bartolini Bussi, M. G. et al.: *Language and Communication in the Mathematics Classroom.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics, 167-178.

Boris GIRNAT, Freiburg

Theoretisches und nichttheoretisches Mathematisieren

Der sogenannte Modellbildungskreislauf (Abb. 1) wird in der Mathematikdidaktik als das zentrale Schema angesehen, mit dem man den Realitätsbezug der Mathematik beschreiben kann und an dem sich ein realitätsbezogener Mathematikunterricht ausgerichten sollte: Er ist „one of the main components of the theory of teaching and learning mathematical modelling“ (Kaiser, Blomhoj und Sriraman, 2006, S. 82).

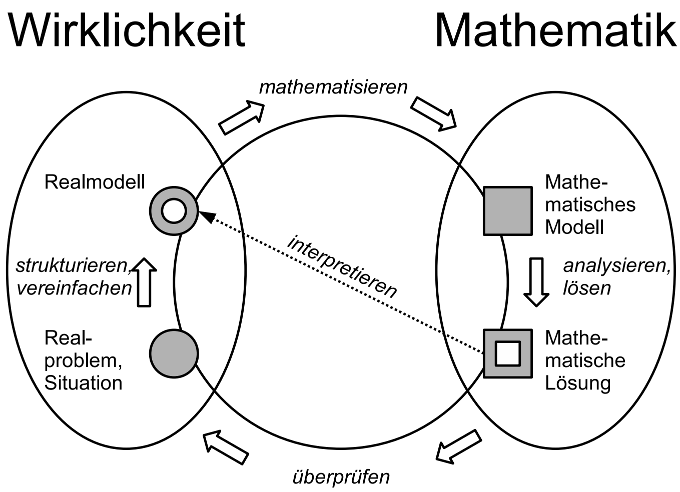


Abbildung 1: Modellbildungskreislauf

Dabei wird vorausgesetzt, dass jedem mathematischen Realitätsbezug ein Modellbildungsprozess zugrunde liegt und der Modellbildungskreislauf die wesentlichen Stationen dieses Prozesses angemessen beschreibt.

In der Wissenschaftstheorie ist das Verhältnis von Theorie und Wirklichkeit seit jeher eine zentrale Frage. Der sogenannte wissenschaftstheoretische Strukturalismus (Stegmüller 1985) hat zu diesem Thema neue Beiträge geliefert, die zunächst für axiomatisierbare wissenschaftliche Theorien der Physik gedacht waren (Sneed 1979). Dieser Ansatz wurde in der Mathematikdidaktik später allgemein für das Verhältnis von Theorie und Wirklichkeit aufgegriffen und hat sich gerade darin bewährt, die Beziehungen zwischen außermathematisch gewonnenen Vermutungen und innermathematischen Begründungen dieser Vermutungen zu beschreiben (Jahnke 1978).

Eine zentrale Grundidee des wissenschaftstheoretischen Strukturalismus ist die Unterscheidung zwischen theoretischen und nichttheoretischen Termen bzw. theoretischen und nichttheoretischen Daten (Stegmüller 1985, S. 45-52): Theoretische Terme erhalten ihre Bedeutung erst durch ihren Gebrauch innerhalb einer Gesamttheorie. „Kraft“ und „Masse“ sind theoretische Terme der Mechanik; „Gerade“ und „Abstand“ theoretische Begriffe der

Geometrie. Ihre Abhängigkeit von der Gesamttheorie wird daran deutlich, dass Kraft und Masse in der klassischen Mechanik etwas anderes bedeuten als in der relativistischen und dass Geraden und die Abstandfunktion in der euklidischen Geometrie andere Eigenschaften haben als in der projektiven oder hyperbolischen (Struve 1990, S. 92-116 und 163-167). Ähnliches gilt für Daten: Nichttheoretische Daten lassen sich ohne Bezug auf die Theorie gewinnen, für die sie erhoben werden; theoretische hingegen nicht. Diese scheinbare Paradoxie wurde zuerst in der klassischen Mechanik beobachtet, für deren Prüfung man Messinstrumente eingesetzt hat, die nach Maßgabe der klassischen Mechanik gebaut waren, also die Gültigkeit der Theorie, die es zu testen galt, bereits voraussetzten. In ähnlicher Weise ist die Entfernungsmessung in der Geometrie davon abhängig, welche Metrik man verwendet (sofern man keine nichttheoretische Messung mit Maßstäben oder -bändern vornimmt).

Dass die Unterscheidung zwischen theoretischen und nichttheoretischen Termen und Daten für didaktische Fragen des Mathematisierens bedeutsam ist, ergibt sich schon aus einem ersten Blick auf sehr einfache realitätsbezogene Aufgaben, die kaum über Einkleidungen hinausgehen und noch wenig mit ausgereiften Modellierungsaufgaben zu tun haben:

> 1) Miss die Fallzeit einer Eisenkugel aus verschiedenen Höhen und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.
>
> 2) 50g Bakterien befinden sich in einer Petrischale. Stelle eine Vermutung über die Entwicklung der Bakterienkultur auf.
>
> 3) Bestimme das Gewicht und die Größe verschiedener Personen und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.
>
> 4) Miss den Durchmesser und den Radius verschiedener Kreise und versuche, einen mathematischen Zusammenhang zu finden.
>
> 5) Beobachte die Fahrzeuge, die auf einer belebten Straße an dir vorbeifahren, und schätze nach einiger Zeit, ob du als nächstes Fahrzeug eher einen LKW, einen PKW, ein Motorrad oder ein Fahrrad erwartest.

Diese kleine Auswahl realitätsbezogener Aufgaben legt die folgende Beobachtung nahe: Die Aufgaben, die im Rahmen der Algebra oder Statistik gestellt werden, verwenden üblicherweise Daten, die unabhängig von einer mathematischen Theorie gewonnen werden: Gewichte, Längen, Geschwindigkeiten und Populationengrößen können jeweils in konkreten Messprozessen, d. h. ohne mathematische Methoden bestimmt werden. In der Geometrie gibt es demgegenüber meistens zwei Zugänge: einen theoretischen, der von Methoden, insbesondere Berechnungsverfahren der (euklidischen) Geometrie Gebrauch macht, und einen nichttheoretischen, der auf elementare Längen-, Flächen- und Volumenmessung beispielsweise mit Stäben, Einheitsquadraten oder Wasserverdrängungsversuchen beruht. In der Wahrscheinlichkeitstheorie scheint die Lage grundsätzlich anders zu sein: Die entscheidende Messgröße, die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, scheint nur aus einem theoretischen Kontext heraus zugänglich zu sein: Entweder wird die Situation selbst von Anfang an als Zufallsexperiment verstanden oder die Messreihe, wie hier im Beispiel 5, muss im Sinne des frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriffs gedeutet werden. In beiden Fällen ist ein theoretisches Vorverständnis nötig.

Die Überlegungen anhand der fünf Beispielaufgaben sollen als Heuristik verstanden sein. Für eine ernstzunehmende Auseinandersetzung mit dem wissenschaftstheoretischen Strukturalismus müsste überprüft werden, ob sich diese Einschätzung bei einer repräsentativen Auswahl von Aufgaben und insbesondere bei komplexeren Modellierungsproblemen aufrecht erhalten lässt. Falls das so wäre, könnten sich einige Konsequenzen für die Modellbildungsdebatte ergeben, die abschließend kurz umrissen werden.

Auf einer theoretischen Ebene wäre es fraglich, ob mit dem Modellbildungskonzept sämtlicher Realitätsbezug der Mathematik beschrieben werden kann. Der Modellbildungskreislauf setzt voraus, dass die Realsituation zuerst ohne jede Mathematik strukturiert und vereinfacht werden kann und erst anschließend der Übergang in die Mathematik vollzogen wird. Das erscheint plausibel, wenn sämtliche Daten nichttheoretisch, also unabhängig von der Mathematik gewonnen werden können – wie es vermutlich bei Mathematisierungen mit statistischem oder algebraischem Hintergrund der Fall ist. Die theoretischen Terme treten hier erst und nur im mathematischen Modell auf (Abb. 2).

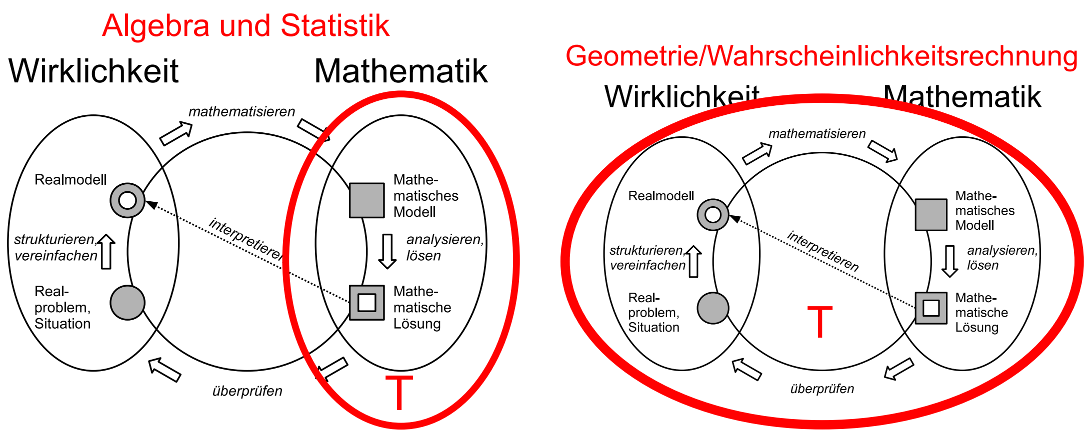


Abbildung 2: Theoretische Terme bei Mathematisierungen in der Algebra/Statistik und Geometrie/Wahrscheinlichkeitstheorie im Vergleich

Anders scheint es in der Geometrie und Wahrscheinlichkeitstheorie zu sein (Abb. 2): Hier kann bzw. muss die Situation von Anfang an durch die „mathematische Brille“ gesehen werden, d. h. man vereinfacht und strukturiert sie von vorn herein unter Benutzung mathematischer Begriffe und Theorien, etwa indem geometrische Formen identifiziert werden oder man den Blick auf Aspekte lenkt, die eine wahrscheinlichkeitstheoretische Deutung erlauben. Es ist fraglich, ob man unter diesem Umstand überhaupt zwischen Realmodell und mathematischem Modell unterscheiden, also die Grundvoraussetzung des Modellierungskreislaufs anwenden kann.

In der Praxis müsste sich dieser Unterschied folgendermaßen nachweisen lassen: In der Geometrie dürfte es eine ständige Unsicherheit über die erlaubten Methoden geben: Darf experimentiert und gemessen werden oder muss man deduktiv begründen und Werte im Sinn allgemeiner Berechnungsprobleme ermitteln? Mit Houdement und Kuzniak (2001) gibt es eindeutige empirische Belege für diesen Sachverhalt. Zwischen Algebra und Statistik auf der einen Seite und Wahrscheinlichkeitstheorie auf der anderen dürfte es in der Datenanalyse einen erheblichen Unterschied geben: In der Algebra und Statistik sind die Daten unproblematisch gegeben; anschließend kann man mit der mathematischen Modellbildung beginnen und dabei außermathematisches Wissen gewinnbringend einsetzen (so wie es bei der Bakterienkultur hilfreich ist, wenn man weiß, dass sich Bakterien durch Zellteilung vermehren). In der Wahrscheinlichkeitstheorie hingegen dürfte ein alltägliches Vorwissen eher hinderlich sein, da man dadurch leicht auf „falsche" Aspekte der Situation blickt, und nicht auf die erwünschten Eigenschaften, die man nur durch ein theoretisches Vorverständnis haben kann. Aufgabe der Mathematikdidaktik wäre es, empirisch zu überprüfen, ob sich der Einfluss des theoretischen und nichttheoretischen Mathematisierens in der hier vermuteten Form tatsächlich so stellt und ob die Einteilung gemäß den mathematischen Disziplinen so aufrecht erhalten werden kann, insbesondere ob es verschiedene Modellierungsdiskurse für die einzelnen mathematischen Disziplinen geben sollte.

Literatur

Houdement, C., und Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. *Proceedings of CERME 3*. Bellaria, Italien (Web).

Jahnke, H. N. (1978): *Zum Verhältnis von Wissensentwicklung und Begründung in der Mathematik – Beweisen als didaktisches Problem*, Bielefeld: IDM.

Kaiser, G., Blomhoj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a Didactical Theory for Mathematical Modelling. *ZDM*, 38(2), 82-85.

Sneed, J. D. (1979): *The Logical Structure of Mathematical Physics*, 2. Auflage. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stegmüller, W. (1985): Theorie und Erfahrung: Theorienstrukturen und Theoriendynamik. Band 2(2), *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Struve, H. (1990): *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI Wissenschaftlicher Verlag.

Stefan GÖTZ, Wien, Hans-Stefan SILLER, Salzburg

Vom Modellieren zum Definieren oder: Mathematik-(unterricht) rund ums Ei

Mathematische Beschreibung der Realität

Wie die Geschichte der Mathematik lehrt, ist es mit mathematischen Theorien manchmal möglich, Fragen aus der Realität einfach und routinemäßig zu beantworten. Aber ebenso kann das Gegenteil, d. h. Theorie und Realität entfernen sich voneinander (vgl. Maaß 1988), eintreten.

Auf der Suche nach *Eikurven* findet man sowohl Darstellungen, welche in der Natur praktisch nicht auffindbar sind, als auch Eier, die aufgrund besonderer Formen (z. B. extrem gedrungen oder länglich) mit den dargestellten Zugängen nicht beschrieben werden können (vgl. Siller et al. 2009).

Eine historische Eikurve

Die historische Dimension des Modellbildens im Mathematikunterricht sollte Schüler(inne)n nicht verwehrt bleiben, insbesondere in einem genetisch orientierten Unterricht. Durch die Berücksichtigung der direkten bzw. indirekten historischen Methode (vgl. Toeplitz 1927, 92) können (notwendige) Ansätze dargelegt und Schüler(inne)n verständlich erklärt werden. Mittels des indirekten Ansatzes und dem Aufgreifen der Definition einer Eilinie nach Schmidt 1907 kann eine mögliche Unterrichtssequenz stattfinden. Schmidt formuliert die folgende Definition: „*Eine Eilinie ist der geometrische Ort der Fußpunkte aller Lote auf Sekanten, gefällt von den Schnittpunkten der Abscisse mit Winkelhalbierenden, welche (stumpfe) Winkel zwischen den Sekanten und Parallelen zur x-Achse in den Schnittpunkten der Sekanten mit der Kreisperipherie halbieren.*“

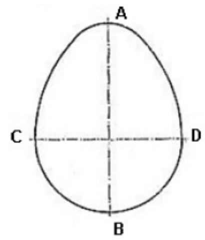
Mittels eines DGS kann man durch die Implementierung dieser Definition die Punkte, die auf der Ortslinie der Eikurve liegen, erzeugen. Übersetzt man die Schritte in ein CAS, werden die (Polar- oder kartesischen) Koordinaten dieser Punkte allgemein berechnet (vgl. Siller et al. 2009).

Eigentätigkeit der Schüler(innen) durch Rückgriff auf Bekanntes

„*Ein Ei ist ein Objekt, das aus einer Halbkugel und einem Halbellipsoid zusammengesetzt ist.*“ (Wie) passt das? – Dieser Ansatz ist nachvollziehbar und die Idee ist im Unterricht umsetzbar (vgl. Siller et al. 2009, 48 ff.).

Möchte man allerdings ein „besonders schönes“ Ei konstruieren, kann man mit der nun vorliegenden Proportion von Haupt- zu Nebenachsenlänge experimentieren. Eine – naheliegende – Idee dafür ist der *Goldene Schnitt*. So kann man eine zufriedenstellende Beschreibung eines mathematisch „idealen“ Eis erreichen, welche wir bewusst nicht als Definition verwenden möchten, da es zu viele Ei-Objekte (v. a. in der Natur) gibt, welche nicht der gewünschten Repräsentation entsprächen:

„Ein Ei ist ein dreidimensionales Objekt, dessen unterer Teil eine Halbkugel und dessen oberer Teil ein Halbellipsoid ist. Das Verhältnis der Längen AB zu CD soll dem Goldenen Schnitt entsprechen.“



Definitionen im Mathematikunterricht

Die Begriffsbildung spielt eine zentrale Rolle in der Mathematik. Folgt man dem didaktischen Prinzip der *Fundamentalen Ideen*, dann sollte das auch für den Mathematikunterricht gelten, alleine schon um *Eindeutigkeit in der Kommunikation* anzustreben. Definitionen stehen oft am Ende einer langen Entwicklung von Problem- oder Fragestellungen, z. B. beim Wahrscheinlichkeitsbegriff. Beim Reden über Mathematik (in einem Vortrag, im Unterricht) ist es oft gerade umgekehrt (Ausnahme: Siller et al. 2009). Begriffsentwicklung und Definitionen stehen in einem wechselseitigen Verhältnis zueinander, dieses zu beleuchten, fördert das Verständnis für die Mathematik (vgl. Vinner 1991).

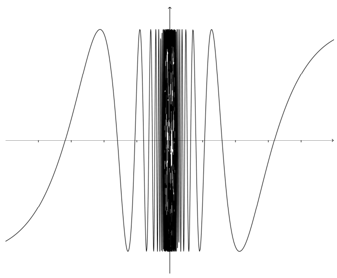
Andererseits beginnen mathematische Begriffe nach ihrer Festsetzung („Definition“) oft ein Eigenleben zu führen, flächenfüllende Kurven (z. B. die Peanokurve) waren wohl nicht das Ziel des Ringens um den Kurvenbegriff. *Begriffe werden erfunden, Zusammenhänge entdeckt!*

Wir unterscheiden nach Ouvrier-Buffet (2002, 384) *drei Typen von Definitionsentstehungsprozessen:* eine Definition kann erstens ausgehend von Beispielen und Gegenbeispielen konstruiert werden (z. B. Funktions- oder Stetigkeitsbegriff), zweitens durch die Lösung einer Problemstellung, durch einen Beweis erzeugt werden (beweiserzeugte Definitionen, z. B. Binomialkoeffizient), und kann schließlich drittens durch einen Modellierungsprozess motiviert werden. Ein Ei mathematisch zu definieren ist ein solcher Versuch.

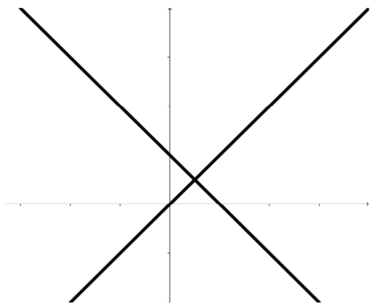
Zum Stetigkeitsbegriff

In Österreich ist dieser in der zehnten Schulstufe vorgesehen. Wofür eigentlich? – In Götz & Reichel 2005, 238, werden *„fadenförmige“* Funktionen in der Hoffnung charakterisiert, dass Verfahren zur Nullstellensuche funktionieren, d. h. z. B. Sprungstellen so ausgeschlossen werden können.

Ein anderer – eher hochschuldidaktischer – Vorschlag ist, an diesem Beispiel den Aspekt *konkurrenzierender Definitionen* zu zeigen, d. h. ihre Wahl, willkürlich oder absichtsvoll, zu thematisieren. Die übliche $\varepsilon-\delta$-Definition der Stetigkeit einer reellen Funktion *f* an einer Stelle ξ (Def. 1) versus der ebenso üblichen Folgendefinition (Def. 2) stehen zur Wahl, ihre Äquivalenz muss gezeigt werden (siehe z. B. Heuser 1986, 212 und 215).



Die Funktion $f(x)=\sin\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0)=0$ ist bekanntlich *nicht stetig in Null*, Def. 1 zeigt das: $\forall\delta>0$ $\exists x$ mit $|x|<\delta$ und $|f(x)|>\frac{1}{2}$, d. h. die Schwankung ist nicht „in den Griff" zu bekommen. Was ist aber jetzt mit der Fadenförmigkeit?! Def. 2 erfordert das Betrachten spezieller Folgen, z. B. $x_n=\dfrac{1}{(2n+1)\frac{\pi}{2}}$, für Lernende nicht gerade einsichtig. Umgekehrt ist eine Sprungstelle oft mit Hilfe von Def. 2 einfacher als Unstetigkeitsstelle zu identifizieren. Die Frage nach der „richtigen" Definition ist also auch eine (hochschul-)didaktische!



Definitionen könne auch *Beweise erzeugen:* nebenstehende Zeichnung zeigt den Graph einer (!) in einem Punkt stetigen (!) Funktion (!). Die Definition zeigt warum: $f(x)=x$, *x* rational, $f(x)=1-x$ sonst. Obwohl der Graph nicht aus einem Stück ist, die Funktion nicht durch *eine* Formel gegeben ist und der Graph nicht kontrollierbar schwankt, ist *f* an der Stelle $\frac{1}{2}$ stetig. Eine Begründung erfolgt mit Def. 1: egal, ob *x* rational oder irrational gewählt wird, $\delta:=\varepsilon$ funktioniert. Stetigkeit ist also eine *lokale* Eigenschaft (Tall & Vinner 1981, 168).

Kegelschnitte

Sie spielen in Österreich unterschiedliche Rollen: als *Kegelschnitte* marginal, als *Ortslinien* bevorzugt in der Sekundarstufe 1, als *algebraische Objekte* in der Sekundarstufe 2, und als *Graph gewisser funktionaler Abhängigkeiten* bleiben sie ein Mysterium: warum ist der Graph der indirekten Proportionalität eine Hyperbel? – Verschiedene Definitionen (Zugänge) verlangen nach dem Zeigen von Zusammenhängen!

Eine einfache Hauptachsentransformation klärt das Mysterium auf: $x\cdot y=1$ in den alten Koordinaten wird zu $\bar{x}^2-\bar{y}^2=2$ in den neuen, wobei eigentlich eine Drehung um 45 Grad genügt: $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ und ihre Transponierte (sowie vice versa!) leisten das.

Ein gerader Drehkegel mit einem Öffnungswinkel von 90 Grad wird senkrecht zu einer Erzeugenden geschnitten: die sich ergebende Kurve ist eine Parabel mit der Gleichung $y^2 = 2px$, wie man leicht mit dem Höhensatz und dem Satz von Thales sehen kann. Umgekehrt kann eine als algebraisches Objekt gegebene Parabel $y^2 = 2px$ einfach durch einen solchen Schnitt erzeugt werden: *p* an der Erzeugenden von der Spitze aus abtragen, dort ist dann der Einschnittpunkt (siehe http://www.members.tripod.com/sfabel/mathematik/themen_kegelschnitte.html, 15.2.2010).

Definitionen enthalten also immer eine Genau dann – wenn-Beziehung.

Literatur

Götz, S. & Reichel, H.-C. (2005, Hrsg.). *Mathematik-Lehrbuch 6* von R. Müller und G. Hanisch. Unter Mitarbeit von C. Wenzel und M. Müller. Wien: öbv.

Heuser, H. (1986). *Lehrbuch der Analysis. Teil 1.* Stuttgart: B. G. Teubner (4., durchgesehene Auflage).

Maaß, J. (1988). *Mathematik als soziales System. Geschichte und Perspektiven der Mathematik aus systemtheoretischer Sicht.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Ouvrier-Buffet, C. (2002). Zum Begriff der Definition. Eine epistemologisch-didaktische Untersuchung. In W. Peschek (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt* (383 - 386). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Schmidt, C. H. L. (1907). Über einige Kurven höherer Ordnung. *Zeitschrift für mathem. u. naturwiss. Unterricht, 38. Jg.,* 485 ff.

Siller, H.-S., Maaß, J. & Fuchs, K. J. (2009). Wie aus einem alltäglichen Gegenstand viele mathematische Modellierungen entstehen - Das Ei als Thema des Mathematikunterrichts. In H.-S. Siller & J. Maaß (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht. Schriftenreihe der Istron-Gruppe, Band 13: Modellieren lernen* (31 - 109). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educ. Stud. Math. 12 (2),* 151 - 169.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. *Jahresber. Dt. Math. Verein, 36,* 90 - 100.

Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (65 - 81). Dordrecht et al.: Kluwer.

Daniela GÖTZE, Dortmund, Karina HÖVELER, Dortmund

Diagnostische Gespräche planen, durchführen, auswerten

Die aktuelle Forschung zur Professionalisierung von Lehrkräften zeigt, dass die Fähigkeit, individuelle Lernstände und Lernprozesse von Kindern ermitteln zu können, die Wahrscheinlichkeit dafür erhöht, dass im Unterricht erfolgreiches Lernen stattfinden kann (vgl. u.a. Lipowsky 2006; Baumert & Kunter 2006, Blömeke et al. 2008). „Eine zentrale Voraussetzung für eine optimale Förderung ist eine ausreichende diagnostische Kompetenz der Lehrkräfte, also die Fähigkeit, den Kenntnisstand, die Verarbeitungs- und Verstehensprozesse (…) der Schülerinnen und Schüler korrekt einschätzen zu können“ (Deutsches PISA-Konsortium 2001, S. 132). Gleichzeitig zeigen die Ergebnisse von PISA jedoch auch, dass die diagnostischen Kompetenzen vieler Lehrer nicht ausreichend sind.

Die KMK fordert diesbezüglich, dass „Maßnahmen zur Verbesserung der Professionalität der Lehrertätigkeit, insbesondere im Hinblick auf die diagnostische und methodische Kompetenz als Bestandteil systematischer Schulentwicklung“ (KMK 2002, S. 7) ergriffen werden müssen. Es ist daher kaum verwunderlich, dass im Zuge der letzen Jahre der Erwerb diagnostischer Kompetenzen sowohl in der Lehrerfort- als auch in der Lehrerausbildung einen immer größeren Stellenwert einnimmt. Demnach sind es nicht nur die im Berufsleben stehenden, sondern auch die *angehenden* Lehrkräfte in der ersten Ausbildungsphase, die derartige Kompetenzen erwerben sollen:

„Ausbildung und Fortbildung einschließlich des Berufseingangs orientieren sich an der Entwicklung der grundlegenden beruflichen Kompetenzen für Unterricht und Erziehung, Beurteilung, Diagnostik, Beratung, (…). Dabei ist die Befähigung zur individuellen Förderung von Schülerinnen und Schülern und zum Umgang mit Heterogenität besonders zu berücksichtigen“ (LABG 2009, §2 Abs 2).

Hier setzt das von der Deutschen Telekom Stiftung unterstützte Projekt ‚Kinder rechnen anders’ an (www.kira.uni-dortmund.de). Ziel ist es, die diagnostischen Kompetenzen (angehender) Lehrkräfte durch die Entwicklung und Bereitstellung von Materialien zur Entwicklung von Methodenkompetenz und zur Veranschaulichung von Denkwegen von Kindern zu fördern.

Dazu wurde am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichts (IEEM) in Dortmund das Diagnoseseminar „Mathematische Lehr-Lern-Prozesse“ als fester Bestandteil des Lehramtsstudiums implementiert und ist – wie u.a Helmke, Hosenfeld und Schrader (2003, S. 28) es fordern – nach dem Prinzip „Learning by doing“ organisiert.

Da nach Helmke, Hosenfeld und Schrader (2003) ein alleiniges Studium von Literatur und Theorie nicht ausreicht, um diagnostische Kompetenzen zu erwerben (vgl. Helmke, Hosenfeld und Schrader 2003, S. 28), führen die Studierenden im Seminar „Mathematische Lehr- und Lernprozesse“ selbstständig zwei Interviewserien mit je zwei Kindern durch und werten diese unter diagnostischen Aspekten aus. Eine Interviewserie beschäftigt sich dabei vordergründig mit der Diagnose inhaltsbezogener Kompetenzen (informelle Fähigkeiten zur Multiplikation und Division), die andere eher mit der Diagnose prozessbezogener Kompetenzen (Beschreiben und Begründen am Bsp. Zahlengitter). Der Lernzuwachs der Studierenden erfolgt dabei auf drei Ebenen:

- Erwerb von inhaltsbezogenem Hintergrundwissen zu Vorgehensweisen und Fehlermustern (Wissen)
- Aneignung von Verfahren zur systematischen und authentischen Erhebung mathematischen Denkens (Können)
- Erhöhung der Sensibilität für mathematisches Denken von Kindern (Einstellungen)

Jede Interviewserie wird in Kleingruppen im Seminar vorbereitet und dann direkt nach der Vorbereitung (also während des Semesters) durchgeführt und – wenn möglich – gefilmt.

Der erste Durchlauf des Seminars im SoSe 2008 diente dazu herauszufinden, welche Unterstützungsmaterialien die Studierenden bei der Planung, Durchführung und Auswertung der Interviews benötigen. So wurden zunächst in den ersten Seminarsitzungen Charakteristika und wesentliche Vorzüge der klinischen Methode gemeinsam erarbeitet, das Interviewerverhalten in einem diagnostischen Gespräch ausdiskutiert und festgehalten sowie Aspekte einer kompetenzorientierten Diagnose herausgestellt. Die von den Studierenden anschließend durchgeführten Interviewserien und ausgewerteten Berichte zeigten allerdings, dass sie u.a.…

- Probleme bei der Auswahl informativer Aufgaben hatten bzw. die Strukturanalyse der Aufgaben nicht über die nötige Tiefe verfügte.
- Schwierigkeiten bei der Kontaktaufnahme mit Schulen zeigten und damit nur schwer Interviewkinder fanden.
- häufig im eigentlichen diagnostischen Gespräch – trotz der vorherigen Thematisierung der klinischen Methode – dazu neigten, das Kind zu belehren.

- Schwierigkeiten hatten, in der Interviewsituation passende Impulse zu finden.
- im Interview das Schweigen der Kinder häufig frühzeitig unterbrachen.
- dazu tendierten, in ihren Berichten über die Erlebnisse aus den Gesprächen zu schreiben und somit eher eine Nacherzählung verfassten, anstatt eine Analyse der Kompetenzen der Kinder zu betreiben. (…)

Um den aufgeführten, durchaus nachvollziehbaren Problemen der Studierenden entgegenzuwirken bzw. eine effektivere Unterstützung zu ermöglichen, wurden im Projekt „Kinder rechnen anders“ gezielt Unterstützungsmaterialien produziert. Diese werden in den jetzigen Durchläufen gemeinsam im Seminar oder auch im Heimstudium als Hausaufgabe betrachtet und analysiert. Diese Analysen dienen der Vorbereitung der eigenen Planung, Durchführung und Auswertung der Interviewserie und verdeutlichen die wesentlichen Aspekte diagnostischer Kompetenzen. Eine Vielzahl dieser Unterstützungsmaterialien wird zudem auf der Projekthomepage bereitgestellt. Unter www.kira.uni-dortmund.de befinden sich u.a.:

- Videos zur „good and bad practice“, in denen einmal ein im Sinne der klinischen Interviewmethode gelungenes diagnostisches Gespräch und einmal ein belehrendes Gespräch gezeigt wird. Die Studierenden werden aufgefordert, zu analysieren, in welchem der beiden Videos man mehr über die mathematischen Kompetenzen des Kindes erfährt und welche Ursachen dies hat.
- Videos, die weitere Aspekte guten Interviewerverhaltens wie z.B. den Umgang mit Schweigen oder auch gelungene kognitive Konflikte zeigen.
- exemplarische Interviewleitfäden, die Hinweise für mögliche Impulsfragen geben und als bedeutsames Instrument zur Vorbereitung der eigenen Interviews angeboten werden.
- Eltern- bzw. Schulbriefe, die das Anliegen der Interviews aufzeigen und somit als Gesprächsgrundlage eines Kontaktes mit einer Schule bzw. einer Lehrkraft dienen können.
- einen Internetauftritt inklusive Kinderdokumente und Videos über informative Aufgaben, der die Vorzüge wohl gewählter Aufgaben verdeutlicht und aufzeigt, worauf bei der Aufgabenauswahl zu achten ist.
- Videos und Kinderdokumente zu typischen Schülerstrategien und -fehlern, um zu verdeutlichen, dass diese Strategien und Fehler tatsächlich auftreten bzw. mit ihnen im Interview zu rechnen ist.

- Videozusammenschnitte von mehreren verschiedenen Kinderlösungen, die unter kompetenzorientierter und vergleichender Sicht analysiert und vor dem Hintergrund der didaktischen Literatur (z.B. im Hinblick auf Strategien und typische Fehler) eingeordnet werden sollen.
- Videozusammenschnitte von einem Kind zur selben Aufgabe, aber zu verschiedenen Zeitpunkten, um Entwicklungen aufzuzeigen.
- exemplarische diagnostische Analysen von Kinderaussagen.
- Tipps zur Kameratechnik.
- relevante Literatur zum Download. (u.v.m)

Diese vielfältigen Materialien sollen demnächst auch anderen lehrerausbildenden Institutionen zur Verfügung gestellt werden.

Nach den ersten Durchläufen des Seminars mit Hilfe dieser Materialien kann festgehalten werden, dass insgesamt die diagnostischen Gespräche an sich und vor allem auch die Analysen der Kompetenzen der Kinder in den Berichten qualitativ hochwertiger geworden sind. Sicherlich liegt es daran, dass mittels der konkreten, praxisnahen Beispiele die Studierenden viel besser auf die für sie noch sehr komplexe Interviewsituation vorbereitet werden. Trotz allem ist es natürlich auch nur ein Anfang. Die diagnostischen Fähigkeiten müssen sich selbstverständlich im weiteren Verlauf des Studiums, in der zweiten Ausbildungsphase und letztlich in der Berufspraxis weiter ausschärfen.

Literatur

Baumert, J. & Kunter, M. (2006). Stichwort: Professionelle Kompetenz von Lehrkräften. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft*, 9 (4), 469-520.

Blömeke, S., Kaiser, G. & Lehmann, R. (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematik-Studierender und –Referendare – erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung*. Münster: Waxmann.

Deutsches PISA-Konsortium (2001) *PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske + Budrich.

Helmke, A., Hosenfeld, I. & Schrader, F.-W. (2003). Diagnosekompetenz in Ausbildung und Beruf entwickeln. *Karlsruher Pädagogische Beiträge*, 55, S. 15-34.

Kultusministerkonferenz (2002). *PISA 2000 – Zentrale Handlungsfelder. Zusammenfassende Darstellung der laufenden und geplanten Maßnahmen in den Ländern (Stand: 07.10.2002) Beschluss der 299. Kultusministerkonferenz vom 17./18. 10. 2002.*

Lipowsky, F. (2006). Auf den Lehrer kommt es an. Empirische Evidenzen für Zusammenhänge zwischen Lehrerkompetenzen, Lehrerhandeln und dem Lernen der Schüler. *Zeitschrift für Pädagogik*, 51, 47-70.

GÜNTER GRAUMANN, Bielefeld

Allgemeine Kompetenzen: Alter Wein in neuen Schläuchen?
- 40 Jahre Lernziele in der Mathematikdidaktik in Deutschland -

Anfang der 1960er Jahre beschäftigte sich R. F. Mager u.a. in seinem Buch über programmierten Unterricht (Mager 1965) um eine Klärung und Präzisierung von Zielen unter dem Stichwort Operationalisierung von Lernzielen, wobei diese so formuliert werden müssen, dass sie Verhaltensweisen kennzeichnen (behavioristischer Zugang).

Ende der 1960er Jahre wurden solche Forderungen dann auch in Deutschland diskutiert. In einem Vorwort der deutschen Ausgabe des oben genannten Buches von Mager schreibt W. Schulz u. a. „Wir überwinden die Unverbindlichkeit der Bildungspläne in der Formulierung prüfbarer Lehrziele." (Schulz, in Mager 1965, S. XI)

Interessant ist in diesem Vorwort von W. Schulz auch, dass er eine Erwiderung zu den von deutschen Pädagogen geäußerten ***Argumenten gegen die Formulierung von operationalisierten Zielen*** liefert, die an die heutige Diskussion bezüglich standardisierter Test erinnert. Es heißt dort: 1. „Präzisierte Lehrziele schränken, so hört man, die Lehrfreiheit der Unterrichtenden in unzumutbarer Weise ein. [Unterstreichung G.G.]… Dieser Einwand übersieht, daß die unangemessene Einschränkung nicht von der Genauigkeit der Lehrziele ausgeht." 2. „Man ist leicht geneigt zu fürchten, daß ein energisch zielbestimmter Unterricht die Lernenden der Möglichkeit beraubt, das Geschehen mitzubestimmen. … Genaue Ziele in der Hand von Lehrenden wie Lernenden führen zur wechselseitigen Kontrolle der Partner und erleichtern die Selbstkontrolle beider Seiten." 3. „Viele warnen vor der Orientierung an prüfbarem Verhalten, weil das leicht Prüfbare auch oft das weniger wichtige Wissen und Können sei. Sie fürchten, daß die Verlagerung des Interesses auf operationalisierbare Ziele zu einer Verflachung der erzieherischen Wirksamkeit der Schule führt. Nun ist die gegenwärtige Praxis der Zielsetzung weit entfernt, solche Befürchtungen zu rechtfertigen. … Was dagegen geschieht, wenn Lernende wie Lehrende auch anspruchsvollere Ziele als Rechtschreibung so definieren, daß sie prüfbar werden, das zu erkunden, haben wir noch vor uns. … Unterscheidet man bei Unterrichtsintentionen in der kognitiven Dimension etwa Kenntniserwerb, Reproduktion von Erkenntnissen und gedankliche Produktivität, dann wird man darauf achten, welche dieser Absichten man mit Hilfe der zu unterrichtenden Gegenstandsfelder jeweils ansteuert." (Schulz, in Mager 1965, S XII-XIV)

Vor 40 Jahren begann dann auch in den Fachdidaktiken in Deutschland die Diskussion um Präzisierung von Lernzielen, wobei man versuchte sich dem Problem der Lernzielbestimmung von verschiedenen Seiten zu nähern.

Lenné (1969) sammelt im Rahmen seiner Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland die in Richtlinien aus den Jahren 1945 bis 1965 aufgeführten Ziele und findet neben verschiedenen anderen Aspekten unter der Überschrift „***Allgemeine verhaltensbezogene Qualifikationen***“ die folgenden allgemeinen Lernziele: *Anschauungsvermögen, Logisch-Denken-Können, Wissenschaftliches Denken und Arbeiten, Geistige Initiative, Phantasie und Kreativität, sprachliche Ausdrucksfähigkeit und Ordnung, Konzentration usw., Sachlichkeit bzw. Objektivität, Gewöhnung an Selbstkritik, Toleranz und Vorbehaltsdenken, Selbständigkeit und Selbstverantwortung*.

Gegenüber dieser Ansammlung verschiedener Stichpunkte aus Richtlinien geht H. Winter (1972) von vier Sichtweisen des Menschen aus (als schöpferisches, Einsicht suchendes, gestaltendes und sprechendes Wesen) und entwickelt daraus ***drei allgemeine Haltungen und Fähigkeiten sowie fünf geistige Grundtechniken***, nämlich *Argumentieren können, sich kreativ verhalten können, Mathematisieren können und Klassifizieren, Ordnen, Generalisieren, Analogisieren, Formalisieren können*.

Ende der 1970er Jahre wurde klar, dass das Konzept der Curriculumentwicklung nach S. B. Robinson vom Berliner Max-Planck-Institut für Bildungsforschung, bei dem nach einer gesellschaftlichen Analyse Lernziele durch Kommissionen erstellt werden sollten, nicht durchführbar war. Einerseits waren die Bemühungen, in einem gesellschaftlichen Diskurs oberste Lernziele festzulegen, nicht erfolgreich. Zum Zweiten hatten die Forschungen zur Herleitung fachlichen Lernziele aus der Analyse von beruflichen Situationen nicht viel gebracht. Und drittens war inzwischen klar, dass man aus allgemeinen Lernzielen nicht spezielle Ziele ableiten, wie es in der damals gängigen Lernpsychologie (vgl. etwa Gagné) konstatiert wurde. Schließlich hatte man auch festgestellt, dass der wissenschaftsorientierte Unterricht der 1970er Jahre nur zu einer Ansammlung einzelner Kenntnisse und Fähigkeiten führte; es fehlte ihm so etwas wie eine „integrierende Mitte“. U. a. führte dann Klafki (1985) den Begriff der „***Allgemeinbildung***“ ein, der einerseits an das Gedankengut der alten Bildungstheorien anknüpft und andererseits sich davon dadurch abhebt, dass die Aspekte „Bildung für alle“ (für alle Schichten und alle Völker), „allseitige Bildung“ (Bildung von Hirn, Herz und Hand wie es Pestalozzi formuliert hat) und „Schlüsselprobleme“ (gegenwärtige Menschheitsprobleme) berücksichtigt werden müssen.

Die in den weiteren Ausdifferenzierungen von Allgemeinbildung entwickelten allgemeinen Ziele in der Pädagogik und in den Fachdidaktiken spielen dabei nicht die Rolle von allgemeinen Lernzielen, aus denen spezielle Lernziele und Curricula hergeleitet werden; sie haben mehr die Aufgabe der Orientierung und des Deutlichmachens der „integrierenden Mitte“ sowie des Sich-Klar-Werdens über den Sinn des Unterrichts und dessen inhaltliche wie methodische Schwerpunktlegung.

In diesem Sinne haben Ende der 1980er und Anfang der 1990er Jahre in der Mathematikdidaktik u. a. H. W. Heymann und G. Graumann Kataloge zur Allgemeinbildung im Mathematikunterricht aufgestellt und diskutiert.

Heymann 1989 (S. 5) nennt folgende Kategorien: „***Aufgaben allgemeinbildender Schulen*** *(1) Lebensvorbereitung, (2) Stiftung kultureller Kohärenz, (3) Aufbau eines Weltbildes, (4) Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch, (5) Förderung von Phantasie und Kreativität, (6) Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft, (7) Stärkung des Schüler-Ichs*“.

Graumann 1990 (S. 104/105, vgl. auch Graumann 1993, S. 194f) nennt als ***Aufgaben der Schule im allgemeinen***: *1. Pragmatische Dimension (Bewältigung von Lebensproblemen, Fähigkeit der Mitgestaltung der Welt, Erwerb klarer Begriffe und Kommunikationsfähigkeit), 2. Aufklärungsdimension (Einzelheiten und Zusammenhänge in der Welt verstehen, einschließlich geschichtlicher und kultureller Einbindungen sowie der Rolle der Wissenschaften in der Welt), 3. Soziale Dimension (Leben in einer Gesellschaft, Kooperationsbereitschaft, Arbeiten im Team, Kommunikationsfähigkeit, Verantwortungsbewußtsein), 4. Persönlichkeitsdimension (Entwicklung der Persönlichkeit und Förderung individueller Fähigkeiten und Interessen), 5. Reflexionsdimension (Grenzen eigener und generell menschlicher Möglichkeiten, Grenzen der Formalisierbarkeit, Grenzen von Methoden).*

Als Fähigkeiten und Denkweisen, die besonders im Mathematikunterricht gefördert werden können nennt Graumann: *Begriffsklarheit und klare Ausdrucksweisen entwickeln, Anschauliche und abstrakte Vorstellungen (insb. Raumanschauung) fördern, Klassifikationen, Ordnungen und systematische Vorgehensweisen entwickeln, Vernetzungen herstellen und synergetisch Denken lernen, Kreativität und Spieltrieb fördern mit deren Lenkung in konstruktive Bahnen.*

Die Ergebnisse der internationalen Vergleichsstudien TIMSS 1997 und PISA 2000 haben in den letzten zehn Jahren zu erheblichen Veränderungen in der mathematikdidaktischen Diskussion geführt. Das Konzept von PISA, bezeichnet als „Mathematical Literacy“ mit Betonung der „Fähigkeit, sich in Alltagssituationen zurechtfinden zu können“ und die Versuche in den

SINUS-Projekten mit mehr „Schüleraktivitäten und Problemorientierung“ haben zu einer starken Betonung von allgemeinen ***Kompetenzen*** in den von den Kultusministerkonferenzen 2003/2004 beschlossenen Bildungsstandards geführt. Als allgemeine Kompetenzen tauchen daraufhin in den letzten fünf Jahren in den verschiedensten Bildungsstandards die folgenden Begriffe auf: *Mathematisch argumentieren, Kommunizieren, Mathematisch Modellieren, Mathematische Darstellungen verwenden, Probleme mathematisch lösen, mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen*.

Vergleicht man diese Begriffe mit den in den 1970er und 1990er Jahren verwendeten Begrifflichkeiten, so stellt man eine sehr große Ähnlichkeit fest – teilweise eine nahezu wörtliche, fast immer aber eine den Sinn betreffende Übereinstimmung. Das ist nicht negativ zu sehen. Einerseits erhalten die alten Forderungen nach mehr Bildung/Allgemeinbildung durch Mathematikunterricht damit erneut Gewicht und werden wieder breit diskutiert. Andererseits kann man frühere Erkenntnisse zu allgemeinen Lernzielen in die gegenwärtigen Diskussionen mit einbeziehen und die Begrifflichkeiten zu allgemeinen Kompetenzen präzisieren. Ein alter Wein in neuen Schläuchen kann ja ein guter Wein sein. Man sollte aber nicht so tun, als hätte man mit den Kompetenzbegriffen inhaltlich etwas völlig Neues geschaffen, bei dem die bekannten Probleme der Interpretation und Verwirklichung allgemeiner Lernziele nicht auftreten.

Literatur

GRAUMANN, G. (1990). "Allgemeinbildung durch Mathematik" als Aufgabe der Lehrerbildung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 1990, Bad Salzdetfurth 1990, S. 103 - 106.

GRAUMANN, G. (1993). Die Rolle des Mathematikunterrichts im Bildungsauftrag der Schule. In: Pädagogische Welt Heft 5 / 1993, S. 194 - 199 (und 204)

HEYMANN, H.W. (1989). Allgemeinbildender Mathematikunterricht – was könnte das sein? In: mathematik lehren Heft 33, S. 4 -9.

KLAFKI, W. (1985). Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik, Weinheim

KMK (2004 und 2005). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss (Beschluss vom 4. 12. 2003) und für den Primarbereich (Beschluss vom 15. 10. 2004), München/Neuwied.

LENNÉ, H. (1969). Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland, Stuttgart

MAGER, R. (1965). Lernziele und Unterricht, Weinheim und Basel (amerikanisches Original: Preparing Objectives for Programmed Instruction, San Francisco 1961)

WINTER, H. (1972). Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Kultusministerium NRW, Beiträge zum Lernzielproblem, Ratingen

GILBERT GREEFRATH, MICHAEL RIESS, Köln

Computer-Algebrasystem-Einsatz in der Sekundarstufe I: Das Projekt CASI

1. Einführung

Das Projekt CASI (Computer-Algebrasystem-Einsatz in der Sekundarstufe I) untersucht den langfristigen Einsatz von Grafiktaschenrechnern mit Computeralgebrasystem (CAS) in der Sekundarstufe I. Im Rahmen dieses Projekts wird der Einsatz an Real- und Gesamtschulen in der 9. und 10. Jahrgangstufe gefördert, erprobt und untersucht. Dabei stehen Entwicklung und Evaluation von Unterrichtskonzepten mit CAS-Einsatz für schwächere Lernende im Vordergrund.

Zurzeit gibt es 5 Projektschulen in Nordrhein-Westfalen, an denen 10 Projektklassen mit dem CAS-Handheld ClassPad ausgestattet sind. Außerdem nehmen 6 Vergleichsklassen an der Untersuchung teil. Insgesamt sind ca. 250 Projektschülerinnen und –schüler sowie ca. 120 Vergleichsschülerinnen und –schüler beteiligt. 10 Projektlehrkräfte sind bei der Erarbeitung und Durchführung von Unterrichtsreihen beteiligt. Das Projekt begann im Sommer 2009 und ist auf zwei Jahre Dauer angelegt.

Von Interesse sind die Einstellungen von Lehrenden und Lernenden zu Computern und Mathematik auch unter dem Aspekt der Veränderung im Verlauf des Projekts. Ebenfalls interessieren die Ergebnisse der Projektklassen im Vergleich zu den Kursen, die kein CAS-Handheld eingesetzt haben. Zusätzlich werden die unterschiedlichen Vorgehensweisen der Lernenden mit CAS untersucht. Erhoben werden auch Zusammenhänge von Rechnereinsatz und Unterrichtsinhalten sowie Unterrichtsmethodik.

2. Konzeption

Zur Konzeption des Projekts CASI gehört die ständige Begleitung der teilnehmenden Schulen. Innerhalb der zweijährigen Projektdauer werden 5 Unterrichtsreihen gemeinsam von allen Projektlehrkräften geplant und durchgeführt. Dazu gibt es mehrere Projekttreffen pro Schulhalbjahr sowie jederzeit verfügbarem Support per Email. Zusätzlich werden für die entsprechenden Unterrichtsreihen Kompetenzen festgelegt, die die Schülerinnen und Schüler jeweils mit und ohne CAS-Rechner erreichen sollen. Ein fester Bestandteil sind ebenfalls rechnerfreie Klassenarbeitsteile, in denen Basisfertigkeiten geprüft werden. Zum Konzept gehört das Ziel, einen vielfältigen Rechnereinsatz zu ermöglichen. Unter vielfältigem Rechnereinsatz verstehen wir, dass der Rechner nicht nur für Berechnungen sondern auch etwa zum Experimentieren, Visualisieren, Algebraisieren und Kontrollieren eingesetzt wird (s. Greefrath 2010).

Das Testdesign beinhaltet außer einem Schülerfragebogen zur Erhebung der Einstellungen zu Beginn, in der Mitte und am Ende der Projektdauer ein klassisches Pretest-Posttest-Control-Group-Design mit integriertem Lehrerfragebogen zum Pretest zur Erhebung der im Unterricht vermittelten Vorkenntnisse. Diese Tests werden für jede der 5 Unterrichtsreihen durchgeführt. Pre- und Posttest bestehen aus sich entsprechenden Parallelaufgaben, die im Posttest den Inhalt der Unterrichtsreihe berücksichtigen. Sie beinhalten jeweils aus einem rechnerfreien Teil und einem Teil mit Hilfsmitteln. Für die Projektklassen gibt es einen zusätzlichen Testteil für den CAS-Einsatz. Die Posttests können von den Lehrkräften auch als reguläre Klassenarbeit durchgeführt werden. Während der beobachteten Unterrichtsreihen führen die Lehrerinnen und Lehrer Stundenprotokolle, aus denen Art und Dauer des CAS-Einsatzes, die Unterrichtsmethode und die Inhalte der Stunde ersichtlich sind.

3. Erste Ergebnisse

Im Folgenden werden einige Beobachtungen und Auswertungen aus dem ersten Halbjahr des Projekts vorgestellt. Einige Daten liegen noch nicht ganz vollständig vor, so dass die zugrundeliegende Grundgesamtheit teilweise geringer ist, als die Gesamtzahl der Projektteilnehmer.

3.1. Schülerfragebögen

Mit den Schülerfragebögen wurden zu Beginn der Projektphase die Einstellungen und Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler zu Computern im Mathematikunterricht und Mathematik im Allgemeinen erhoben. Zurzeit sind die Daten von 195 Schülerinnen und Schülern vollständig ausgewertet.

Die untersuchten Schülerinnen und Schüler des 9. Jahrgangs haben nach eigener Einschätzung keine Erfahrung mit dynamischer Geometriesoftware und schreiben sich auch eher wenig Erfahrung mit Tabellenkalkulationsprogrammen zu. Auffällig ist außerdem, dass gleichzeitig sowohl der Prozesscharakter von Mathematik als auch die Eindeutigkeit von Ergebnissen gesehen werden. Ein indifferentes Bild zeigt sich bei der Frage, ob man mit Computern Mathematik besser verstehen kann. Speziell hier interessiert die Entwicklung im weiteren Projektverlauf.

3.2. Pre- und Post-Tests zu linearen Gleichungen

Abb. 1 zeigt die Ergebnisse der Projekt- und Vergleichsklassen von Pre- und Posttest zu linearen Gleichungssystemen und Funktionen. Es werden jeweils die parallelen Aufgaben verglichen. Lediglich Aufgabe 2 konnte nicht parallel im Post-Test übernommen werden. Die Grafik zeigt aber, dass die Voraussetzungen vor der Unterrichtseinheit ähnlich waren. Zur besseren Darstellung wurden die Punkte in Prozentwerte umgerechnet.

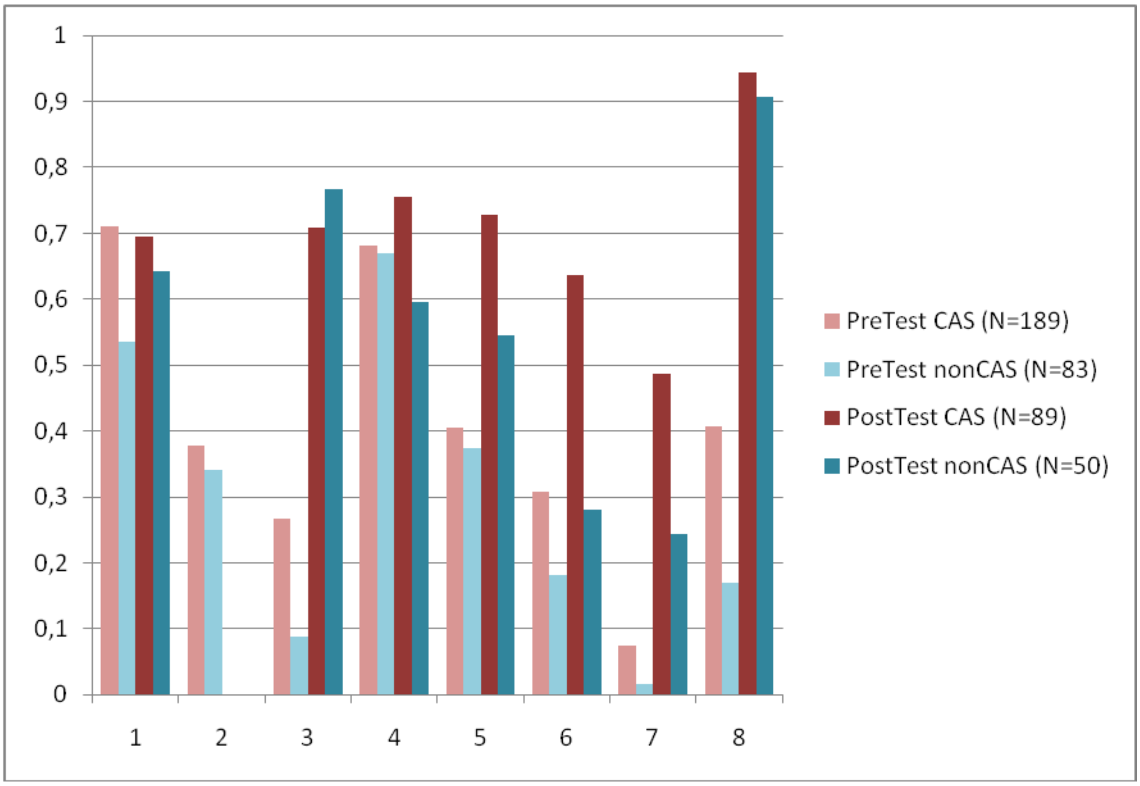


Abb. 1: Ergebnisse der Pre- und Post-Tests zu linearen Funktionen und Gleichungssystemen

Aufgabe 1 beinhaltet algebraische Umformungen von linearen Gleichungen bzw. Gleichungssystemen per Hand. Hier beobachten wir gleichbleibende Fertigkeiten bei den Projektklassen. Die Vergleichsklassen schneiden im Post-Test besser ab als vorher, aber schlechter als die Klassen mit den Taschencomputern. In Aufgabe 3 waren – ebenfalls ohne Hilfsmittel – Graphen linearer Funktionen zu zeichnen. Hier schneiden die Vergleichsklassen abschließend etwas besser ab, das Ergebnis ist aber in derselben Größenordnung. Weiterhin ist zu bemerken, dass in Aufgabe 5 auch Graphen zu zeichnen waren, was dieses Ergebnis relativieren könnte. Dieser Aspekt wird in der noch nicht durchgeführten Unterrichtseinheit über quadratische Funktionen weiter zu beobachten sein.

Ab Aufgabe 4 waren die jeweils in den Klassen eingeführten Taschenrechner bzw. –computer erlaubt. In Aufgabe 4 ging es um das Entnehmen und Interpretieren von Informationen aus funktionalen Graphen und das Einzeichnen von Informationen aus einem Text in dasselbe Koordinatensystem. Starteten hier beide Gruppen auf gleichem Niveau, so schnitten nach der Unterrichtseinheit die Projektklassen besser ab. Eventuell bekommen graphische Darstellungen und das Ablesen von Werten eine größere Bedeutung, wenn man den Rechner als Visualisierungshilfsmittel ständig zur Verfügung hat. Aufgaben 5, 6 und 7 waren Übersetzungsaufgaben, die nach Swan (1982) klassifiziert die Übersetzungen von Realsituation in graphische Darstellung, sowie von graphischer und algebraischer Darstellung zu passender Realsituation forderten. Hier schnitten die Projektklassen ausnahmslos signifikant besser ab als die Vergleichsklassen. In Aufgabe 8 wurde gefordert, Graphen mit passenden algebraischen Ausdrücken und diese dann mit Lösungspaaren in Verbindung zu bringen. Hier erreichen alle Kurse nach der Unterrichtseinheit durchschnittlich über 90% der Punkte.

3.3. Stundenprotokolle der Lehrer

Zu diesem Zeitpunkt ausgewertet sind vier Lehrer mit insgesamt 80 Unterrichtsstunden. Das Classpad wurde in ca. 80% der Stunden und insgesamt ungefähr in der Hälfte der gesamten Unterrichtszeit eingesetzt. Die erste Auswertung der Stundenprotokolle erfolgte durch eine lineare Regression von Scatterplots, wobei die Einschätzung der Lehrkräfte im Hinblick auf Unterrichtsinhalte und –methodik und der Anteil der Rechnernutzung während der Stunde in Beziehung gesetzt wurden.

Bei den Inhalten ist zu bemerken, dass der Rechner bei der Einführung neuen und Wiederholung alten Stoffes eher weniger im Einsatz war. Hier entschieden sich die Lehrer offenbar für klassischere Zugänge. Dafür wurde der Rechner in Stunden, mit stärkerem Übungs- und Anwendungscharakter, deutlich häufiger eingesetzt.

Die Unterrichtsmethodik war bei mehr Rechnereinsatz eher durch Gruppenarbeit und Schülervorträge geprägt. Weniger Rechnereinsatz zeigte sich in Stunden, in denen Lehrervorträge und Unterrichtsgespräche überwogen. Interessant war die Betrachtung der Ergebnisse einzelner Lehrkräfte, da sich hier zeigte, dass es typische Zusammenhänge zwischen Unterrichtsmethode und Rechnereinsatz geben könnte. Hier wird zu beobachten sein, ob sich diese Unterschiede auf die Ergebnisse der Schüler auswirken und wie sich diese Daten weiter entwickeln.

Literatur

Greefrath, G. (2010): Mit dem Computer qualitativ arbeiten? In: S. Hußmann & T. Leuders (Hrsg.): qualitativ & diskret – Funktionen verstehen, *Praxis der Mathematik in der Schule* 52 (Bd. 31), 20-24

Swan, M. (1982): *The teaching of functions and graphs*, in: G. van Barneveld & H. Krabbendam, Conference on functions. Conference report Pt. I, 151-165

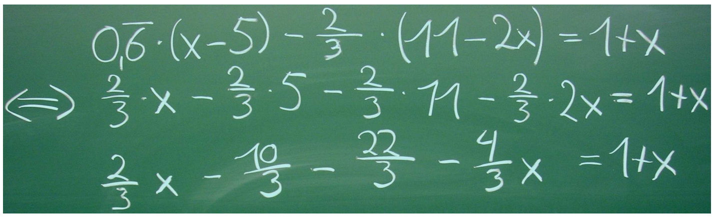
Eva Maria GRETZMANN, Osnabrück

Eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur als Grundlage kognitiver Aktivierung im Mathematikunterricht

Aus der Auseinandersetzung mit konstruktivistischen Unterrichtskonzeptionen ist die kognitive Aktivität als ein für das Lernen entscheidender Faktor hervorgegangen (Mayer, 2004). Vor diesem Hintergrund wird die Frage zentral, wie sich kognitive Aktivität bei Schülerinnen und Schülern evozieren lässt. In diesem Aufsatz soll dieser Frage mit dem Augenmerk auf Unterrichtsgesprächen nachgegangen werden. Anhand von Beispielen wird dargelegt, inwiefern eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur einen Beitrag zu kognitiver Aktivierung leisten kann.

Kognitive Aktivität und Lernen

Um eine Vorstellung von dem hier zu Grunde liegenden Verständnis des Konzepts der kognitiven Aktivität zu vermitteln, sei zunächst folgende Szene betrachtet (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007, S. 34ff.):



Im Rahmen der Lösung der notierten Gleichung ist dem Schüler Rainer in der zweiten Zeile ein Fehler unterlaufen. Seine Mitschüler bemerken dies und es findet eine fünf minütige Besprechungsphase statt, während der der Fehler ausführlich aufgearbeitet wird. Nach dieser Phase meldet sich Rainer erneut zu Wort:

Rainer: Also jetzt, den Fehler habe ich auch schon öfters gemacht. Dieses Minus das habe ich da ja übersehen, nach der ähm nach der x minus fünf Klammer, weil ähm in meinem Kopf sah das eben so aus, dass ich da immer so also bei dem ersten Term vor dem Gleichheitszeichen, öhm den hab ich wieder in zwei Teile unterteilt [*Nach ausführlichen Erläuterungen endet Rainer schließlich mit:*] So sah das in meinem Kopf aus. Und das war der Fehler.

Rainer scheint ehrlich dazu bereit, neue Erkenntnisse in seine bestehenden Wissensstrukturen zu integrieren bzw. bisherige Strukturen, mit denen er in seiner sozialen Umwelt auf Widerstand gestoßen ist, zu reorganisieren. Im Sinne von Mayer (2004, S. 17) ist Rainer damit kognitiv aktiv, was wiederum verstehensorientiertes Lernen fördert: “... the kind of activity that really promotes meaningful learning is cognitive activity (e.g., selecting, organizing, and integrating knowledge)”.

Eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur

Wie der Name bereits erkennen lässt, integriert eine metakognitiv-diskursive Unterrichtskultur zwei zentrale Aspekte. Der erste Aspekt ist die Metakognition. Ihr positiver Effekt auf die mathematische Leistung ist breit dokumentiert (vgl. für eine Übersicht Schneider & Artelt, 2010).

Zur Verdeutlichung der Mechanismen von Metakognition im Unterrichtsgespräch sei zunächst folgende Szene betrachtet (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010, S. 46ff.): Zu der Aufgabe „Schreibe als Summe: $(2a+3b)^2$" steht die Schülerlösung $(2a)^2+12ab+(3b)^2$ an der Tafel. Diese Lösung kommentiert Manuel wie folgt:

Manuel:	Aber das is, das is dann keine Summe mehr, weil dann müsste man rechnen zwei a mal zwei a und dann wär wieder nen Produkt vorhanden. [...]
L:	Es ist eine Summe. Aber was sollt ihr machen an der Stelle, Lenni?

Der Schüler offenbart an dieser Stelle, dass er sich etwas falsch zurecht gelegt hat. Evtl. erkennt er die Struktur der verschiedenen ineinander verschachtelten Funktionen in dem zur Diskussion stehenden Term nicht korrekt. Wünschenswert wäre, das Problem so weit aufzuarbeiten, dass Manuel schließlich eine Reaktion ähnlich der Rainers zeigt. Dazu waren im Fall von Rainer metakognitive Aktivitäten nötig: Der vorliegende Fehler musste bemerkt und dann aufgearbeitet werden, wozu es vor allem kontrollierender und reflektierender Aktionen bedurfte. Sie beförderten dann Rainers verbalisiertes Nachdenken über seine Vorstellungen. Im Fall von Manuel reagieren Lehrkraft und Mitschüler jedoch gar nicht in solch einer Weise. Für die Lehrkraft ist das Problem mit der Behauptung „Es ist eine Summe." abgeschlossen. Über den Einsatz von Metakognition könnte hier sicherlich verstehensförderlicher reagiert werden, und zwar dahingehend, dass der Fehler ausgehend von Manuels Vorstellungen herausgearbeitet wird.

Auch wenn der Nutzen von Metakognition gerade besonders betont wurde, ist dennoch Vorsicht geboten: Es treten durchaus Situationen in Unterrichtsgesprächen auf, die vordergründig nach dem Einsatz von Kontroll- oder Reflexionsaktionen aussehen, aber sicherlich nicht dazu beitragen, ernsthaft Einsicht bei den Schülern zu befördern. Dies sei an folgendem Beispiel illustriert (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010, S. 137ff.): Nachdem sich mehrere Schüler kritisch zu einer an der Tafel stehenden Schülerlösung geäußert haben, werden folgende Beiträge formuliert:

L.	Ja, was machen wir jetzt damit? Haben die Recht, oder was? (12 sec) Lars!
Lars	Die haben eigentlich Recht.
L.	Und uneigentlich?

Die Lehrkraft versucht, die geäußerten Schülerideen kontrollierend und reflektierend aufarbeiten zu lassen. Allerdings werden die Schüler die Frage „Haben die Recht“ kaum sinnvoll beantworten können, da unklar ist, wer mit dem Wort „die“ gemeint ist. Es hatten sich nämlich zuvor mehrere Schüler mit gegensätzlichen Argumentationen zu Wort gemeldet. Wenn jetzt also gefragt wird „Haben die Recht“, so ist diese Frage nicht mehr als Gerede. Daher ist es auch nicht verwunderlich, dass die Antwort von Lars ebenfalls nur Gerede ist. Die Reaktion der Lehrkraft auf diese Antwort zeigt nun jedoch, dass sie dies bei dem Schüler gemerkt hat. Was in der ersten Frage der Lehrkraft fehlte, nun aber vorhanden ist, ist das Bemühen um sprachliche Präzision und genauen Bezug. Durch das Nennen von Bezugspunkten oder die Wiederholung ganzer Argumentationszüge kann der Gegenstand eines Beitrags präzisiert und die Debatte fokussiert werden.

Folgende Schüleräußerung demonstriert dies (Kaune & Cohors-Fresenborg, 2010, S. 274ff.):

Justus: *Ich wollte meins selbst verbessern. Und zwar hat’ ich eben gesagt, man darf eine Koordinate mehr einsetzen,* und ich glaub’, die Formulierung ist schon falsch. Man darf einfach nur die 6 auch als Koordinate halt als Argument einsetzen und ähm hat somit halt eine Definitionslücke geschlossen. [...] Weil, *wenn man das so äh betrachtet, wie Helmut das sagte, dass es unendlich viele Punkte gibt,* dann gibt´s auch unendlich viele Argumente und somit kann man auch nicht sagen, dass da ein Argument mehr ist.

Durch die kursiv gedruckten Wörter macht Justus hier sehr genau deutlich, welche Bezugspunkte er für seinen Beitrag veranschlagt, nämlich einen seiner früheren Beiträge, den er verbessern will, und einen Beitrag seines Mitschülers, durch dessen Wiederholung er klarstellt, warum er meint, seine vorherige Äußerung korrigieren zu müssen. Damit zeigt er ein Bemühen, die Wahrscheinlichkeit zu erhöhen, dass seine Zuhörer verstehen, worüber er redet.

Der Mechanismus, der hier genutzt wird, wurde von Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) Diskursivität genannt. Er wirkt in präzisierender Weise, die der Gefahr begegnet, dass bspw. Kontroll- und Reflexionsaktionen zu Gerede verkommen, weil sie einer sauber erkennbaren Bezugsgrundlage entbehren.

Diskursivität stellt den zweiten Aspekt einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur dar. Aus den oben demonstrierten Gründen favorisiert diese Kultur Unterrichtsgespräche, in denen metakognitive und diskursive Aktivitäten miteinander verwoben auftreten. Durch besondere Forderung und Förderung dieser Aktivitäten sollen sie im Sinne eines Werkzeugs in den

Köpfen der Lernenden verankert werden und für einen verstehensorientierten Zugriff auf die Gesprächsinhalte zur Verfügung stehen.

Ausblick

Als Antwort auf die Eingangs gestellte Frage nach Möglichkeiten des Evozierens kognitiver Aktivität wird damit vorgeschlagen, Metakognition und Diskursivität im Rahmen einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur zu zentralen Bestandteilen eines „intellektuellen Habitus“ auszubilden. So geraten Schülerkognitionen verstärkt ins unterrichtliche Blickfeld, was die Organisation und Strukturierung von individuellem Wissen und damit die kognitive Aktivität der Lernenden zu fördern verspricht.

Um unterrichtliche Kommunikation gezielt auf das Vorliegen einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur untersuchen zu können, sind die vorgestellten Merkmale dieser Kultur in Kategorien umgesetzt worden. Es stehen sowohl ein transkriptbasiertes (Cohors-Fresenborg & Kaune, 2007) als auch ein videobasiertes (Gretzmann, im Druck) Analyseverfahren zur Verfügung. Sie wurden bisher in Fallstudien eingesetzt.

Von anderen Forschergruppen sind die Effekte kognitiver Aktivierung jedoch durchaus schon im Rahmen empirischer Videostudien zur Unterrichtsqualität untersucht worden. Dabei wurde die kognitive Aktivierung bspw. im Sinne einer Instruktionsmethode des Lehrers operationalisiert (vgl. z. B. Lipowsky et al., 2009). Die Ergebnisse zum Zusammenhang dieser Methode mit der Schülerleistung sind allerdings noch schwach (Lipowsky, 2009, S. 529). Hier besteht also weiterer Forschungsbedarf.

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2007). *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht. Arbeitsbericht Nr. 44.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Gretzmann, E (im Druck). Analyse metakognitiver und diskursiver Aktivitäten auf Video-Basis.

Kaune, C. & Cohors-Fresenborg, E. (Hrsg., 2010). *Mathematik Gut Unterrichten – Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten.* Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Lipowsky, F.; Rakoczy, K.; Pauli, C.; Drollinger-Vetter, B.; Klieme, E. & Reusser, K. (2009). Quality of geometry instruction and its short-term impact on students‘ understanding of the Pythagorean Theorem. *Learning and Instruction*, 19, 527-537.

Mayer, R. E. (2004). Should There Be a Three-Strikes Rule Against Pure Discovery Learning? The Case for Guided Methods of Instruction. *American Psychologist, 59(1)*, 14 - 19.

Schneider, W. & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 42(2).

Svenja GRUNDEY, Hamburg

Eigenständige Beweisaktivitäten im Mathematikunterricht – Schülervorstellungen und Kompetenzen

Beweise sind ein zentrales Charakteristikum der Mathematik. Auch im Bereich der Schule hat das Begründen und Beweisen seit einigen Jahren einen größeren Stellenwert bekommen. Dies zeigt sich etwa daran, dass Argumentieren zu den prozessbezogenen Kompetenzen in den deutschen Bildungsstandards (2003) gehört. Viele empirische Studien zeigen jedoch, dass Lernende unterschiedlichen Alters meist Probleme haben, wenn sie Beweise eigenständig führen oder überprüfen sollen (Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Healy & Hoyles, 1998; Harel & Sowder 1998).

Es stellt sich daher die Frage, wie die Beweiskompetenz von Schülerinnen und Schülern gefördert werden kann. Erste erfolgreiche Ansätze in dieser Richtung werden beispielsweise von Reiss et al. (Reiss, Klieme & Heinze, 2001) und Kuntze (2006) verfolgt, die heuristische Lösungsbeispiele und Themenstudienarbeiten als Methoden vorschlagen und im Unterricht in unterschiedlichen Klassenstufen erprobt und evaluiert haben.

Meine Ansatz folgt einer sozio-konstruktivistische Philosophie von Mathematik, in der die deduktive Methode als sozial konstruiert angesehen wird und die Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit deduktiver Argumente von Gemeinschaft zu Gemeinschaft variiert (Reid & Knipping, in press, S. 48ff.). Indem den Schülerinnen und Schülern fiktive Schülerbeweise vorgelegt werden, wird ihnen ermöglicht, ein Beweisverständnis zu entwickeln, das an ihrem Vorwissen und ihren Vorstellungen anknüpft und gleichzeitig von der Klasse als Gemeinschaft akzeptiert werden kann. Gleichzeitig kann dieses Beweisverständnis sowohl eine Basis für eigenständig geführte Beweise bieten als auch in eigenständigen Beweisaufgaben weiterentwickelt und vertieft werden. Zur Erfassung dieser Beweisvorstellungen wurden die Lernenden am Anfang und Ende der Einheit zu diesen befragt. Dabei sollen Erkenntnisse zu den folgenden Fragestellungen gewonnen werden:

Welche Beweisvorstellungen haben Lernende am Ende der Vorstufe? Wie beeinflussen die vorhandenen Beweisvorstellungen eigenständiges Beweisen von Lernenden? Inwieweit verändern sich die Beweisvorstellungen durch das konzipierte Unterrichtsexperiment?

Konzeption des Unterrichtsexperiments und Untersuchungsmethode

Aufbauend auf empirischen Ergebnissen aus der mathematikdidaktischen Forschung zum Beweisen (z.B. Healy & Hoyles 1998, Kuntze 2006) sind beim konzipierten Unterrichtsexperiment zur Analysis Wechsel zwischen Unterrichtsdiskurs, Phasen der Metareflexion und Eigenaktivität der Schülerinnen und Schüler zentral. Metareflexion bezieht sich hierbei auf Beweisvorstellungen und Beweisstrategien. So wird zu Beginn des Unterrichtsexperimentes den Schülerinnen und Schülern die Frage gestellt, was ein mathematischer Beweis ist, und sie werden aufgefordert, dies schriftlich festzuhalten. Metareflexion spielt aber auch in den anschließenden Unterrichtsgesprächen eine entscheidende Rolle, in denen fiktive Schülerbeweise (angelehnt an Healy & Hoyles 1998) diskutiert werden. Während des gesamten Unterrichtsexperiments sind die Lernenden aufgefordert, ihre Beweisvorstellungen zu reflektieren, zu revidieren und zu ergänzen. In den Beweisaufgaben, bei denen die Lernenden eigenständig unbekannte, mathematische Aussagen verifizieren oder widerlegen sollen, kommt neben Beweisvorstellungen vor allem auch Beweisstrategien eine zentrale Bedeutung zu. Beweisvorstellungen und Beweisstrategien werden gemeinsam und eigenständig geklärt und entwickelt.

Die Lehrer von zwei Gymnasialklassen in Niedersachsen haben das Unterrichtsexperiment im Juni 2009 in verschiedenen Kursen der Jahrgangsstufe 10 durchgeführt. In jeder Klasse wurden sechs Unterrichtsstunden gefilmt und alle während des Unterrichts angefertigten Arbeiten kopiert. Zusätzlich habe ich am Ende des Unterrichtsexperiments Interviews mit ausgewählten Schülerinnen und Schülern geführt.

Ergebnisse

Zu Beginn des Unterrichtsexperiments zeigte sich bei den Beweisvorstellungen der Lernenden beider 10. Klassen ein sehr enges, homogenes Bild. „Beweisen als algebraisch – numerisches Verifizieren" charakterisiert diese anfänglichen engen Vorstellungen. Gemäß ihrer Vorstellung zu Beginn besteht ein mathematischer Beweis aus Umformungen von Formeln, Gleichungen sowie Rechnungen. Als Funktion eines Beweises wird ausschließlich die Verifikation einer Aussage gesehen (de Villiers 1990). Die Antworten von Johanna, Janna und Mark, von denen ich hier zwei exemplarisch anführe, zeigen eine solche enge Beweisvorstellung.

„ ... z.B. beweisen, dass eine Formel oder Gleichung die Ausgangsformel / gleichung ist, nur umgestellt." *(Johanna, 10d)*

„Man hat das Ergebnis schon und muss verschiedene Formeln so kombinieren, dass das Ergebnis am Ende wieder herauskommt z.B. Satz des Pythagoras" (Janna, 10a)

Die Analysen der eigenständigen Beweise der Lernenden in meiner Studie zeigen jedoch, dass sich diese enge Beweisvorstellung unterschiedlich auf die Konstruktionen von Beweisen auswirken kann. Bei einfachen mathematischen Aussagen aus der Analysis etwa sind die meisten Schülerinnen und Schüler in der Lage einen korrekten Beweis zu erbringen. Ihre Beweisvorstellung und die im Unterricht diskutierten Beweisstrategien anhand von fiktiven Schülerlösungen scheinen für sie eine tragfähige Basis für einen eigenständigen Beweis zu sein. Der folgende Beweis von Mark, dass der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades genau einen Wendepunkt hat, verdeutlicht dies.

> *$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \varepsilon$; $a \neq 0$)*
> *$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$; $f'''(x) = 6a$*
> *$f''(x) = 0$, da notw. Krit. für Wendepunkt*
> *$0 = 6ax + 2b$ |-2b*
> *$-2b = 6ax$ |:6a*
> *$-2b/6a = x$*
> *$-b/3a = x$*
> *$f''(-b/3a) = 6a$ und da $a \neq 0$ ist, gilt: $f''(x_E) \neq 0$. Somit hat die Funktion einen Wendepunkt bei $x = -b/3a$. Aussage ist wahr.* *(Mark, 10a)*

Ein differenzierteres Bild zeigt sich jedoch bei falschen mathematischen Aussagen. Hier kann die enge algebraisch-rechnerische Vorstellung von Beweisen zum Hindernis werden. Vielen Schülerinnen und Schülern ist es nicht gelungen zu erkennen, dass die Aussage „Ein Polynom geraden Grades hat mindestens eine Nullstelle." nicht korrekt ist. Janna aus der Klasse 10a beispielsweise bleibt ihrer engen Beweisvorstellung treu und versucht einen Beweis für die gegebene Aussage zu konstruieren, der dieser Vorstellung entspricht. Es scheint ihr unmöglich zu erkennen, dass die Aussage falsch ist. Ihre Beweisvorstellung liefert ihr keine Strategie, um mit dieser Falschaussage umzugehen, d.h. diese zu widerlegen.

> *Allg. Beschreibung eines Polynoms:*
> *$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$*
> *($a_i \in$, $i = 0, \ldots, n$; $n \in$ und n gerade; $a_n \neq 0$)*
> *Bedingung: $f(x) = 0$*
> *$0 = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$*
> *Faktorisierung: $0 = x\,(a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1)$*
> *$x_1 = 0$ → Satz v. Nullprodukt*
> *$f(x_1) = 0$. Da $f(x_1) = 0$ ist, hat die Funktion an dieser Stelle eine Nullstelle. Die Funktion hat also min. 1 Nullstelle.* *(Janna, 10a)*

Interessant ist, dass diese Problematik in meiner Studie insbesondere bei leistungsstärkeren Schülerinnen und Schülern zu beobachten war. Andere Lernende dagegen, etwa Johanna (10d), scheinen sich im Kontext der Falschaussage von ihrer engen Beweisvorstellung zu lösen. Johanna argumentiert mit einem Gegenbeispiel, um die Aussage zu widerlegen.

„Die Aussage ist falsch, weil, wenn der Graph nach oben verschoben oder gespiegelt an der x-Achse ist und nach unten verschoben ist, dann schneidet er sie nicht. Beispiel dafür: $f(x) = x^2 + 3$" *(Johanna, 10d)*

Diskussion

Insgesamt zeigen die Ergebnisse, dass die meisten Schülerinnen und Schüler über ein rechnerisch - algebraisch geprägtes Beweisverständnis verfügen. Diese Beweisvorstellung ist zunächst eine tragfähige Basis für eigenständige Beweise im Bereich der Analysis. Ein solches Verständnis kann sich jedoch als problematisch erweisen, wenn Lernende mit falschen mathematischen Aussagen konfrontiert werden. Ein algebraisch geprägter Beweisansatz kann hier gerade für leistungsstärkere zum Hindernis werden. Durch ihre gefestigte, enge Beweisauffassung scheinen sie weder in der Lage zu sein, eine falsche Aussage zu erkennen, noch diese zu widerlegen. Andere Lernende zeigen mehr Flexibilität, sich in einem gegebenen Kontext von ihrer Beweisvorstellung zu lösen. Ein möglicher Erklärungsansatz für diese Beobachtungen weist auf vorangegangene Lernerfahrungen hin. Leistungsstarke Schülerinnen und Schülern haben die Algebra in der Regel als mächtiges Werkzeug im Unterricht kennengelernt, das ihnen in vielen Situationen zu einer Lösung verholfen hat. Es fällt ihnen somit schwer, sich von dieser Methode bzw. Vorstellung zu lösen.

Literaturverzeichnis

Harel, G.; Sowder, L. (1998): Students' Proof Scheme: Results from Exploratory Studies. In: CBMS Issues in Mathematics Education, American Mathematical Society, 7, 234-283.

Harel, G.; Sowder, L. (2003): Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof.

Healy, L.; Hoyles, C. (1998): Justifying and Proving in School Mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, 1998.

Kuntze, S. (2006). Themenstudienarbeit – Konzeption einer Lernumgebung für den gymnasialen Mathematikunterricht und Evaluation einer Themenstudienarbeit zum mathematischen Beweisen und Argumentieren. [Dissertation]. München: LMU.

Reid, D. A.; Knipping C. (in press): Proof in Mathematics Education. Research, Learning and Teaching. Sense Publishers, Rotterdam.

Reiss, K.; Klieme, E. & Heinze, A. (2001): Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht.

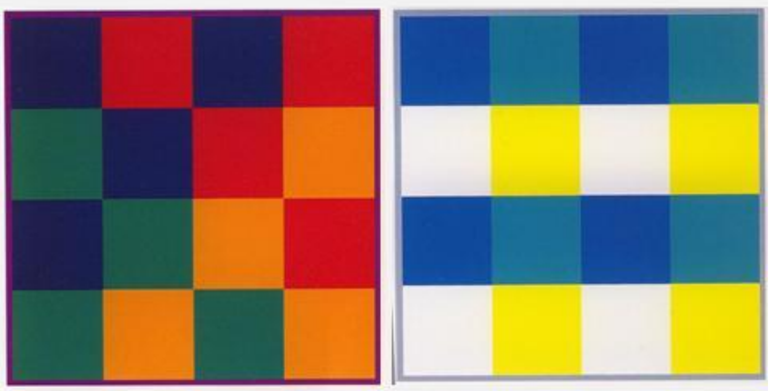
Villiers, M. de (1990). The Role and Function of Proof in Mathematics. In: Pythagoras, 24, 17-23

Dietmar Guderian, Ebringen im Breisgau

Mathematik und Kunst im Wandel – Beispiel Zufall

Das Thema „Kunst und Mathematik“ regt in den letzten Jahren immer häufiger Kollegen zu Publikationen und Vorträgen an. Dabei bleiben aber oft Gelegenheiten unbeachtet, Nutzen und Bedeutung der Mathematik in Kunst und Kultur der Gegenwart aufzuzeigen, denn es ist fast immer nur die Rede von Kunstwerken, die bereits vor nahezu vierzig Jahren entstanden sind. Man geht kaum auf jüngste Entwicklungen, auf Reaktionen der Künstler auf aktuelle Gebiete der Mathematik ein, obwohl bekannt ist, dass Künstler sich nicht erst heute an neuesten Forschungsergebnissen orientieren: Vasarély kannte die damaligen Ergebnisse von Informations- und Wahrnehmungstheorie; Dali diskutierte mit Thom über die Katastrophentheorie; Gerard Caris entwickelte Pseudopackungen mit Dodekaedern im Raum noch bevor Kristallographen und Mathematiker sie in der Realität wahrnahmen; das ars-electronica-Museum in Linz zeigt jüngste künstlerische Realisierungen neuronaler Netze…Weiterhin sollte es heute nicht mehr nur darum gehen, nachzuvollziehen, wie z.B. die ersten KünstlerInnen vor vierzig Jahren (und ihre Nachahmerinnen noch heute) die Primzahlen ungewohnt verteilten sondern möglichst auch, warum sie es taten. Auslöser der Beschäftigung mit der Mathematik in der Kunst (und Kultur) der Gegenwart können dabei auch Nachrichten aus dem Alltag sein, die gerade die Aufmerksamkeit der Öffentlichkeit auf sich ziehen: Geburtstage, Einweihungen, Preisverleihungen, Meldungen aus der Wissenschaft und Kultur.

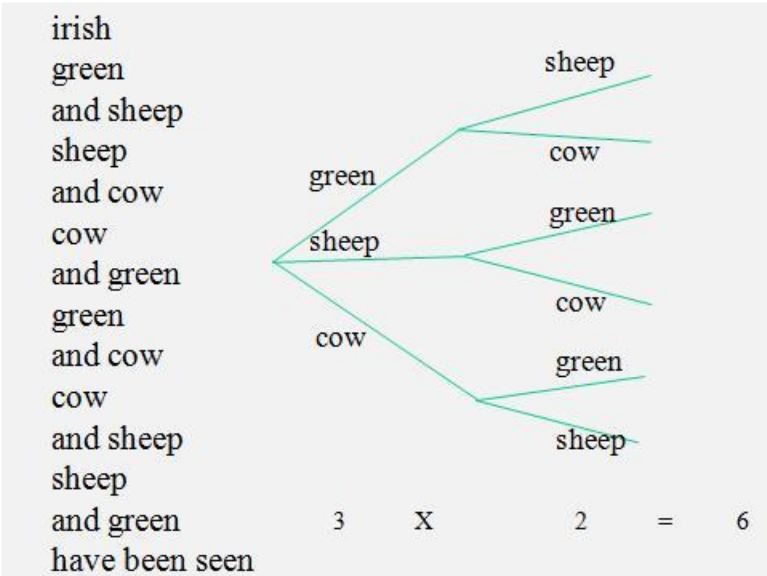
Am Beispiel des Zufalls sollen zumindest Teile eines historischen Entwicklungsstrangs zwischen Mathematik und Kunst aufgezeigt werden. Parallel dazu soll angedeutet werden, wie das Thema Mathematik und Kunst über tagesaktuelle Bezüge in den Unterricht einziehen könnte.



Max Bill: 11 x 4 : 4 , 1963 – 1970
(2 von 11 Realisierungen)

Max Bills Geburtstag jährte sich vor kurzem zum hundertsten Mal, Anlass für große Ausstellungen im Kunstmuseum Stuttgart, in Winterthur und Zürich und Möglichkeit für Kunsterzieher und Mathematiklehrer, das Thema Kunst und

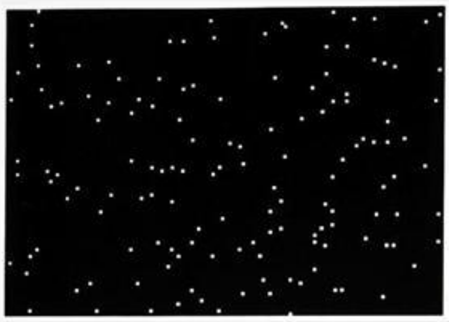
Mathematik zu behandeln. Der Künstler suchte alle 4 x 4 - Tafeln, deren 16 quadratische Felder sich folgendermaßen in vier Farben einfärben ließen:
Alle Farben sollen auf gleichgroßen Gesamtflächen auftreten.
Benachbarte Felder sollen verschieden gefärbt sein.
Rotationssymmetrie (90°): Farben tauschen bei Drehung ihre Plätze zyklisch. Der Künstler bestimmte alle (11) Versuchsausgänge empirisch, intuitiv. (Einen dazu für die Schule tauglichen Algorithmus zeigt mathematiklehren 157,2009.)



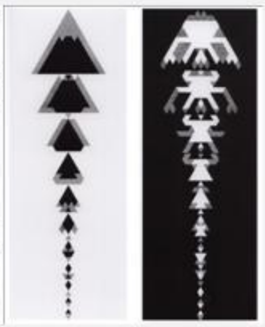
Eugen Gomringer, der Begründer der Konkreten Poesie, feiert in diesem Jahr seinen 85. Geburtstag und wird an vielen Orten mit Ausstellungen und Symposien gefeiert. Der Ereignisraum aller Variationen von drei (Worten) zu je zwei (Worten) lässt sich bei seinem Gedicht „irish“ leicht systematisch durch das Aufstellen des Ereignisbaums bestimmen. Der Dichter selbst gestaltete das Gedicht zusätzlich kunstvoll:

Das letzte Wort einer Strophe ist jeweils das erste Wort der folgenden.
Das Gedicht ist horizontal achsensymmetrisch angelegt.
Welche Hürden auch einfachste Elemente der Kombinatorik – wie im folgenden die Variation von 4 zu je 3 - in anderen Wissenschaftsgebieten darstellen, und wie aktuell dieses mathematische Gebiet auch heute ist, macht ein Artikel der Süddeutschen Zeitung (07.10.2009) zum Chemie-Nobelpreis 2009 deutlich: „Die Israelin Ada Yonath erhält zusammen mit den Amerikanern Thomas Steitz und Venkatraman Ramakrishnan den diesjährigen Chemie-Nobelpreis. Die drei haben Struktur und Funktion der Ribosomen aufgeklärt… Zunächst war es den Wissenschaftlern ein Rätsel, wie lediglich vier Bausteine (Adenin, Cytosin, Guanin und Uracil) die Information für die verschiedenen Arten von Eiweißstoffen enthalten können, die sich aus immerhin 20 verschiedenen Aminosäuren zusammensetzen. Doch dann knackten sie den genetischen Code. Jeweils drei Bausteine…stehen für eine Aminosäure.“
Kaum beherrschten die ersten Künstler wie Vera Molnar, Manfred Mohr,

Francois Morellet (Guderian,1974) den gelenkten Zufall in der Kunst, kamen schon die ersten Nachdenklichkeiten auf. Der polnische Künstler Ryszard Winiarski äusserte in den siebziger Jahren dem Autor gegenüber seine Verwunderung darüber, dass er manchen seiner Werke nicht ansehen kann, ob er sie per gelenktem Zufall oder mittels eines strengen numerischen Algorithmus hergestellt hatte. Erst ein vom Mathematiker erstelltes Zustandsdiagramm gibt Auskunft und könnte zugleich Schüler zum Begriff des „deterministischen Chaos“ hinführen (Guderian, 1990).



Rune Mields
Das Sieb des Eratosthenes, (Ausschnitt im Zahlenraum bei 10^{30}), 1977

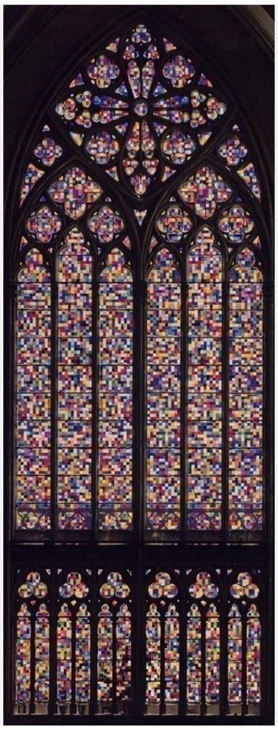


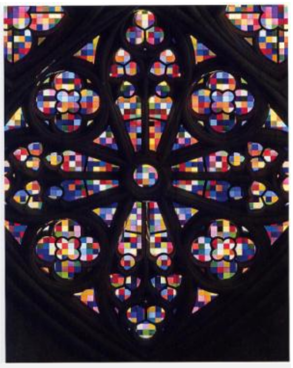
Rune Mields
Evolution: Progression und Symmetrie, 1987

Mit Visualisierungen zum Sieb des Erathostenes, wie sie zuvor für Zahlen dieser Größenordnung nicht publiziert wurden, versuchte die deutsche Künstlerin Rune Mields schon in den siebziger Jahren, Wissenschaftlern zu verdeutlichen, dass sie zu häufig bereit sind, von Zufall zu sprechen, sobald sie einen Entstehungsprozess ohne Zusatzinformationen nicht vollständig zurückverfolgen können. Sie zeigte die Primzahlverteilung innerhalb einer Zahlenfolge im Zahlenraum bei von 10^{30} . Nicht in die Entstehungsgeschichte des Bildes Eingeweihte können nicht beweisen, dass die Verteilung der für die Primzahlen stehenden weißen Punkte in den Spalten der Tabelle nicht zufällig auftreten und sind daher geneigt - wie es der Autor bei Ausstellungen (DMV,GDM,ICME) erlebte – eine zufällige Verteilung anzunehmen.
Parallel dazu weist die Künstlerin in ihrer Serie „Evolution: Progression und Symmetrie“ nach, dass bereits nur zwei verschiedene aus der Natur bekannte Gesetzmäßigkeiten (Achsensymmetrie und Fibonacci-Folge) in wenigen Schritten z.B. auf wesentlich verschiedenen Wegen auch ohne (genetisch o.ä. bedingten) Zufall zum gleichen Endergebnis gelangen können.
Der Einsatz von gelenktem Zufall in der Kunst ist heute selbstverständlich: Aktuell wird vielerorts das Theaterstück „Die Kontrakte des Kaufmanns“ der Nobelpreisträgerin Elfriede Jelinek gespielt, bei der die Autorin zulässt, dass die Reihenfolge der einzelnen Szenen zufällig ausgewählt wird. Der Künstler Peter Vogel realisiert Zufallsprozesse: Er ordnet Propeller nebeneinander an. Zu

jedem gehört eine Fotozelle, die unter dem benachbarten Propeller angeordnet ist. Bleibt ein Propeller direkt über einer Fotozelle stehen, so setzt sein Schatten den nächsten Propeller in Gang. Die fortlaufende Bewegung endet erst, wenn einmal ein Propeller nicht über einer Fotozelle stehen bleibt.

Gerhard Richter
4900 Farben
2007





Gerhard Richter
Domfenster Köln
2007

Gerhard Richter schuf im Jahre 2007 als vorläufigen Abschluss einer jahrzehntelangen Werkserie mit gelenktem Zufall zwei aufsehenerregende Werke: Das Ludwig-Museum Köln zeigte „4900 Farben“. Der Künstler hatte sich einen Farbenvorrat von 25 mit gleicher Wahrscheinlichkeit ziehbarer Farben geschaffen. Das gesamte Bild setzte sich aus quadratischen Bildplatten zusammen, die jeweils in 5x5 Quadrate unterteilt waren. Die Einfärbung der Quadrate geschah per Zufall durch „Ziehen mit Wiederholung“. Für ein von der Öffentlichkeit viel beachtetes Fenster im Kölner Dom gewichtete er dagegen die einzelnen Farben eines speziell dafür entworfenen Farbvorrates in verschiedenen Bereichen des Fensters unterschiedlich, sodass trotz des eingesetzten Zufallsgenerators die vom Künstler erwünschten Farbverläufe auftreten konnten.

Literatur

Guderian, D. (1974). Zufallsbilder im fächerübergreifenden Unterricht. *Beiträge zum Mathematikunterricht,*S.73-82.

Guderian, D. (1987 und 1991). Mathematik in der Kunst der letzten dreißig Jahre. Ebringen: Bannsteinverlag und Paris: edition galerie lahumière.

Guderian, D. (1990). Zufall – Chaos – Katastrophe. In P. Volkwein (Hrsg.), *Museum für Konkrete Kunst* S.13 -43. Heidelberg: Braus.

Holeczek, B., Mengden, L. von (1992). Zufall Als Prinzip: Spielwelt, Methode und System in der Kunst des 20. Jahrhunderts. Ludwigshafen: Wilhelm-Hack-Museum.

Ján GUNČAGA, Katholische Universität in Ružomberok, Slowakei

Theorien des Erkenntnisprozesses und Mathematikunterricht

In diesem Beitrag möchten wir einige Theorien des Erkenntnisprozesses vorstellen, die in derzeitiger Mathematikdidaktik eine wichtige Rolle spielen. Sie sind mit dem Erkenntnisprozess der Schüler während Mathematikunterricht verbunden, in welchem der Lehrer eine Führend- und Koordinationsrolle spielt.

Bauer (2009) definiert Didaktik der Mathematik als wissenschaftliche Disziplin, die sich mit Problemen des Lehrens und Lernens von Mathematik beschäftigt. Didaktik der Mathematik hat folgende Funktionen:

1. Wissenschaftliche Funktion: Beschreibung, Erklärung, Begründung von Lehr- und Lernprozessen (empirische Analyse, theoretische Reflexion), Entwicklung und Erprobung von Technologien (Instrumenten) für das Lehren und Lernen (Handlungsanweisungen, Benutzung von Modelle)
2. Praktische Funktion: Handeln in der Praxis, Planen und Realisieren von Unterricht.

Szendrei (2005) beschäftigt sich mit der Stellung der Mathematik im Unterricht. Sie formuliert folgende Ziele für Mathematikunterricht: Mathematik als

- Kulturerbe,
- Form des Nachdenkens,
- Kreative Tätigkeit,
- Quelle für Entdeckungen,
- die Ästhetik und Ordnung in Mustern und Strukturen,
- Wissenschaft,
- Hilfsmittel für andere Wissenschaften,
- Schulfach,
- Mittel für die Lösung von Problemen zu realen Situationen.

Für diese Aufgaben des Mathematikunterrichts ist es wichtig, passende Teile aus der Geschichte der Mathematik und realitätsbezogene Aufgaben zu benutzen. Aufgaben mit der graphischen Darstellung helfen uns Begriffe der Mathematik anschaulich zu untersuchen und Probleme der Realität zu visualisieren.

Ambrus (2004) nennt folgende Arten von Begriffen aus dem Mathematikunterricht:

1. Sachliche Begriffe: Klassifikation von realen oder gedanklichen Objekten (Funktion, Graph der Funktion, Grenzwert).
2. Relationsbegriffe: Sie zeigen Beziehungen zwischen Objekten und Gegenständen auf (Ableitung als Funktion, Stammfunktion).
3. Operationsbegriffe: Sie zeigen die Tätigkeiten und Operationen mit den Objekten und Gegenständen (Zusammengesetzte Funktion, Funktion als Summe oder Produkt von mehreren Funktionen).

Dienes (1999) analysiert den mathematischen Erkenntnisprozess und fasst die Ergebnisse seiner Untersuchungen in folgenden sechs Stufen zusammen:

1. Freies Spiel

Wir lassen Schüler spielen und mit Gegenständen und Modellen arbeiten, die später für den Erkenntnisprozess verwendet werden. Wichtig sind geeignete Gegenstände und Anlässe für Spiele. In dieser Stufe verwenden die Schüler eigene Sprechmuster.

2. Strukturiertes Spiel

Die Schüler erkennen, dass die Gegenstände Regeln erfüllen. Diese Regel führen später zu mathematischen Regeln. Der Lehrer hilft den Schülern bei der Entdeckung dieser Regel.

3. Suche nach gemeinsamen Eigenschaften in einer Struktur

In dieser Phase strukturiert der Schüler seine Kenntnisse und sucht die gemeinsamen Eigenschaften verschiedener Gegenstände. Beispielsweise kann der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen sehen. Im Mathematikunterricht kann man die Logarithmusfunktion benutzen, welche die Multiplikation zur Addition transformiert.

4. Abbildung (Repräsentation)

Wenn der Schüler die Isomorphismen zwischen mehreren Strukturen in einer konkreten Form kennt, dann hilft diese Phase bei der Abstraktion. Die Isomorphismen repräsentieren wir mit einem Schema. Dienes benutzt das Beispiel für die Multiplikation der natürlichen Zahlen.

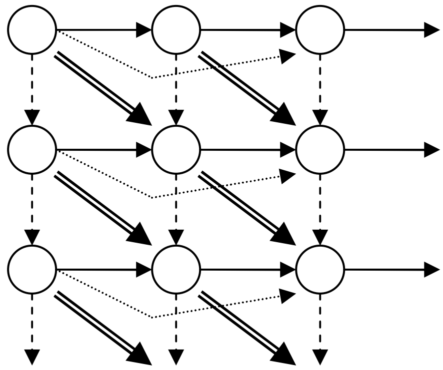


Abbildung 1

Wenn wir in die Kreise die Zahlen schreiben und der Schüler weiß, dass $\dashrightarrow$ „zweimal“ bedeutet und $\longrightarrow$ „dreimal“ bedeutet, dann kann er entdecken, dass:

a) $\Longrightarrow$ „sechsmal“ bedeutet,

b) $\cdots\!\!\rightarrow$ „viermal“ bedeutet.

Ähnlich kann man bei dieser Aufgabe beim Multiplizieren mit anderen Zahlen vorgehen. Der Schüler kann die Kreise sehr leicht bei beliebigen gegebenen Zahl in der Ecke links oben ausfüllen.

5. Symbolisierung

Die Eigenschaften in einer Struktur werden vom Schüler symbolisch ausgedrückt. Die Schüler entdecken zum Beispiel, dass die Operationen $\longrightarrow$ $\dashrightarrow$ und $\dashrightarrow$ $\longrightarrow$ äquivalent sind. Auch die Operationen $\dashrightarrow$ $\cdots\!\!\rightarrow$ und $\Longrightarrow$ $\longrightarrow$ sind äquivalent. In dieser Phase können die Schüler die Abbildung beschreiben. Deshalb nennen wir diese Beschreibungsphase auch die Einführungsphase zur mathematischen Bezeichnung.

6. Formalisierung

In dieser letzten Phase suchen wir die Regel für die entdeckten Beschreibungen und wir versuchen, diese Regel zum ersten Mal in einer formalen Form zu schreiben. Diese Formalisierung führt zur abstrakten Ebene. Die Grundeigenschaften der Struktur nennen wir Axiome und ausgehend von diesen Axiomen können wir Sätze beweisen und Grundideen entwickeln.

Zusammenhang

Im Unterrichtsprozess hat der Lehrer eine hervorgehobene Bedeutung. Deshalb möchten wir diesen Beitrag mit den Prinzipien für die Arbeit des

Lehrers beschließen, die Polya formuliert hat (siehe Pólya (1971)). Der Lehrer soll

1. sich für Fachinhalte des Unterrichts interessieren.
2. die Fachinhalte des Unterrichts gut kennen.
3. Lernstoff kennen und wissen, dass der beste Weg derjenige ist, den der Lehrer selbst entdeckt.
4. Vorstellungen der Schülern kennen: Was erwarten Sie? Was ist für sie schwierig?
5. nicht nur Fachkenntnisse an die Schüler weitergeben, sondern auch allgemeine Arbeitsfertigkeiten und Arbeitsfähigkeiten bei den Schülern entwickeln (z. B. Ordnung und korrektes Verhalten).
6. die Schüler lehren, miteinander zu diskutieren.
7. die Schüler beweisen lehren.
8. bei den Schülern heuristische Methoden für das Lösen von Aufgaben und Problemen entwickeln und ihnen in konkreten Situation eine verborgene allgemeine Strukturen aufzeigen.
9. nicht jede Problemlösung vorzeigen, sondern Schüler selbst entdecken lassen, was ihre Denkfähigkeiten fördert.
10. die Schüler nicht mit Lernstoff voll stopfen, sondern sie zu verstehensorientiertem Lernen ermutigen.

Bemerkung: Dieser Beitrag wurde unterstützt vom Grant KEGA 3/7068/09.

Literatur

Ambrus A. (2004). *Bevezetés a matematikaididaktikában.* Budapest: ELTE.

Bauer L. (2009). *Planung und Analyse von Mathematikunterricht*. Passau: Universität Passau.

Billich, M. (2008). The use of geometric place in problem solving, *Teaching Mathematics: Innovation, New Trends, Research*, Ružomberok: CU, 7 – 14.

Bryll G., Sochacki R. (2009). *Wybrane zagadnenia dydaktyki matematyki*. Poznań: Garmond.

Dienes, Z. (1999). *Építsük fel a matematikát*. Budapest: SHL Hungary, Kft.

Hajdu, S., Czeglédy, I., Hajdu Sándor, Z., Kovács, A. (2009). *Matematika 9*, Budapest: Műszaki Kiadó.

Pólya G. (1971). *A problémamegoldás iskolája*. Budapest: Tankönyvkiadó.

Szendrei J. (2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex Kiadó.

Takáč Z. (2003). *Klasifikácia dôkazov*. Ružomberok: CU in Ružomberok.

Žilková, K. (2009). *Potenciál prostredia IKT v školskej matematike*. Bratislava: UK.

MARTIN GUNDLACH, SEBASTIAN KUNTZE, JOACHIM ENGEL, LAURA MARTIGNON, Ludwigsburg

Einflussgrößen auf Statistical Literacy von Studierenden- Erste Ergebnisse aus dem Projekt RIKO-STAT unter besonderer Berücksichtigung motivationaler Dispositionen[1]

1. Das Projekt „RIKO-STAT"

Bei der Untersuchung von Kompetenzen von Lernenden im Bereich von Statistical Literacy wurden bisher unterschiedliche Ansätze verfolgt, die es nahe legen, Einflüsse verschiedener Komponenten relevanten Begriffswissens auf die Kompetenz des Nutzens von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten in den Blick zu nehmen. Dies stellt eine zentrale Fragestellung im Projekt RIKO-STAT (**Ri**siken verstehen und **ko**mmunizieren – Kompetenzen im Bereich von **Stat**istical Literacy) dar (vgl. Kuntze et al., im Druck). Im Fokus dieses Projekts steht damit die Untersuchung von Kompetenzen im Umgang mit Daten und statistischen Informationen und ihrer Weiterentwicklung. Ein zusätzlicher Fokus liegt auf Begriffswissen zum Kommunizieren und Modellieren von Risiken.

Zielgruppe sind Schülerinnen und Schüler der 4. Jahrgangsstufe der Grundschule und der 9. Jahrgangsstufe der Realschule. Zur Pilotierung des Testinstruments wurden die Testinstrumente bei Lehramtsstudenten erprobt.

Neben begriffswissensbezogenen Einflussgrößen auf Statistical Literacy sind auch motivationale Dispositionen von Lernenden von Bedeutung. Das Projekt RIKO-STAT beschäftigt sich deshalb auch mit dem Einfluss solcher Dispositionen der Lernenden. Dabei wurden im Rahmen der hier vorgestellten Teilstudie auch inhaltsbereichsspezifische und aufgabenbezogene motivationale Dispositionen von Lernenden untersucht.

2. Theoretischer Hintergrund der hier vorgestellten Teilstudie

Motivationale Dispositionen von Lernenden werden als einflussreiche Variablen auf die Schulleistungsentwicklung angesehen (vgl. Helmke & Weinert, 1997, Deci & Ryan, 1993). Insbesondere die Konstrukte „Interesse" (Heckhausen, 2006; Krapp, 1992) und „Fähigkeitsselbst" (Bandura, 1977) wurden in vielen empirischen Studien erforscht. Nach Helmke und Weinert (1997) ist die Prädiktivität motivationaler Dispositionen für Schulleistungsvariablen von Lernenden größer, je bereichsspezifischer diese Dispositionen erhoben werden. Dies soll anhand des in Abbildung 1 dargestellten Modells zur Einordnung motivationaler Dispositionen überprüft werden. Da für den Bereich Statistik und Stochastik noch keine inhaltsbereichsspezifischen Instrumente und Ergebnisse vorhanden waren, wurden mathematikbezogene, statistikbezogene, sowie auf Aufgaben bezogene motivationale Variablen sowie Lösungsraten der Aufgaben erhoben.

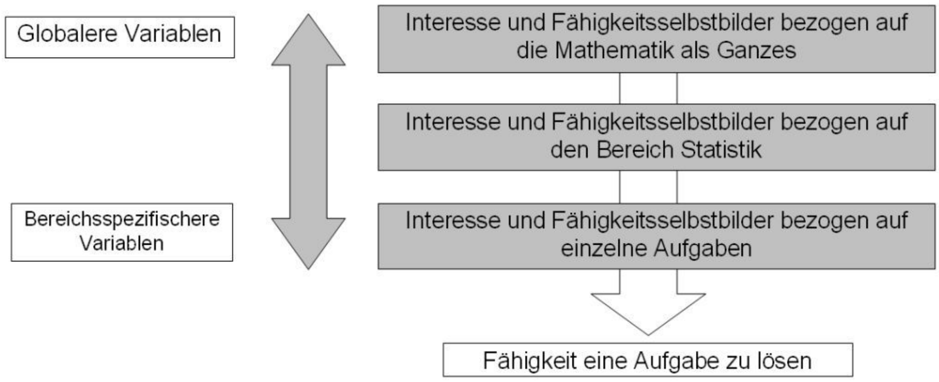


Abbildung 1: Modell zur Beschreibung bereichsspezifischer motivationaler Variablen (Gundlach, Kuntze, Engel & Martignon, akzeptiert)

3. Forschungsfragen

Hieraus ergeben sich folgende Fragestellungen über Zusammenhänge der oben angesprochenen motivationalen Dispositionen:

- Wie sind Interesse und Fähigkeitsselbst von Lernenden bezüglich Mathematik, Statistik und bestimmter Aufgaben ausgeprägt?
- Welche Zusammenhänge zwischen den einzelnen Variablen und der Fähigkeit, Aufgaben zu lösen, können beobachtet werden?

4. Untersuchungsdesign und Stichprobe

Das in RIKO-STAT verwendete Test- und Fragebogeninstrument beinhaltet Tests zur Kompetenz „Nutzen von Darstellungen und Modellen in statistischen Kontexten“, zu Begriffswissen bezüglich Funktionen, Wahrscheinlichkeit und Risiko, sowie Fragebogen zu deterministische Sichtweisen, epistemologischen Beliefs und motivationalen Variablen.

Motivationale Variablen wurden mit fünfstufigen Likert-Skalen erhoben. Dabei wurde auf in anderen Studien bewährte Skalen zurückgegriffen. (Pekrun et al, 2002). Für die inhaltsbereichsspezifischen und aufgabenbezogenen Variablen in dieser Studie wurden parallel zu Kuntze (2006) spezifische Skalen neu entwickelt.

Die Pilotierung des Testinstruments fand zu Beginn des Sommersemesters 2009 statt. Es wurden 360 Studierende in 5 Lehrveranstaltungen befragt.

5. Ausgewählte Ergebnisse

Im Folgenden werden Ergebnisse der Untersuchung zu motivationalen Variablen vorgestellt. Für detailliertere Ergebnisse sei an dieser Stelle auf Gundlach et al. (akzeptiert) und Gundlach (in Vorbereitung) verwiesen.

Zunächst ist festzuhalten, dass sich alle verwendeten Skalen, also auch die neu entwickelten, als reliabel erwiesen (Gundlach et al, akzeptiert).

Um empirisch zu bestätigen, dass es sich bei den statistikspezifischen Skalen um eigene Konstrukte handelt, wurden jeweils zusammen mit den mathematikbezogenen Items Faktorenanalysen durchgeführt. Die Ergebnisse zeigen jeweils die faktorenanalytische Unterscheidbarkeit der statistikbezogenen von den jeweiligen mathematikbezogenen Skalen.

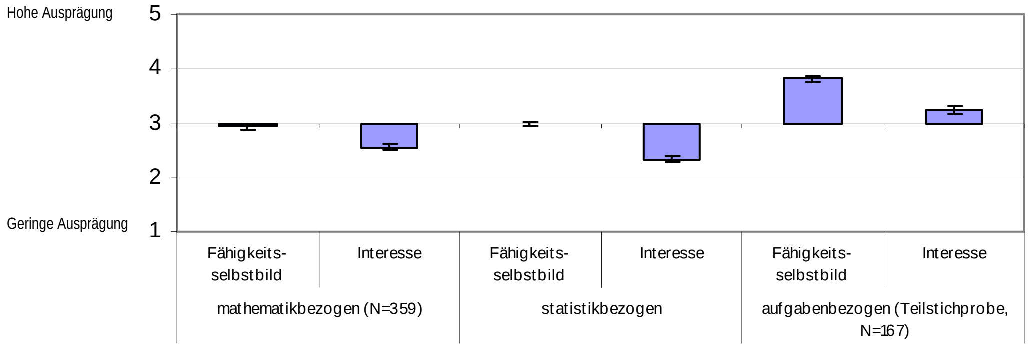


Abbildung 2: Mittlere Ausprägung der motivationalen Variablen

In Abbildung 2 sind die mittleren Ausprägungen der motivationalen Variablen und deren Standardfehler abgebildet (erste Forschungsfrage). Bis auf einen etwas negativeren Wert des statistikbezogenen Interesses sind die mathematikbezogenen und statistikbezogenen Variabeln ähnlich groß ausgeprägt. Dagegen ist bei den aufgabenbezogenen Variablen das Fähigkeitsselbstbild und das Interesse der Studierenden höher ausgeprägt.

Bezüglich der zweiten Forschungsfrage deuten die Ergebnisse einer Korrelationsanalyse zwischen den Variablen darauf hin, dass mathematik- und statistikbezogene motivationale Dispositionen jeweils stärker untereinander als mit den jeweils entsprechenden inhaltsbereichsübergreifenden Skalen korrelieren. Die Analyse von Zusammenhängen zwischen bereichspezifischen Skalen mit den aufgabenbezogenen Skalen ergab ausgeprägtere Korrelationen des mathematikbezogenen Interesses mit dem aufgabebezogenen Interesse einerseits und höhere Korrelationen des statistikbezogenen Fähigkeitsselbstbilds mit dem aufgabenbezogenen Fähigkeitsselbstbild andererseits.

Ferner wurde die Korrelation der aufgabenspezifischen Skalen mit dem Gesamtscore der betreffenden Aufgaben untersucht. Das aufgabebezogene Fähigkeitsselbstbild korreliert hier lediglich geringfügig mit $r=0{,}28$ ($p<0{,}01$), während sich mit dem aufgabebezogenen Interesse keine signifikante Korrelation ergab. Es zeigen sich keine höheren Korrelationen als mit mathematikspezifischen motivationalen Dispositionen.

6. Zusammenfassung und Diskussion

Auf der Basis der Ergebnisse der Teilstudie stehen reliable Skalen zu den untersuchten motivationalen Dispositionen für Folgestudien zur Verfügung, die es erlauben, bereichsspezifische Variablen zu erheben.

Die unerwartet geringe Korrelation der bereichsspezifischen und aufgabenbezogenen Variablen mit dem Punktescore könnten damit erklärt werden, dass die befragten Studierenden weniger intensive Erfahrungen mit Aufgaben im Bereich Statistik und Stochastik hatten, als dies für Mathematik allgemein der Fall ist, so dass sich beispielsweise Fähigkeitsselbstkonzepte noch auf keine vergleichbar ausgeprägte Erfahrungsbasis stützen können. Hierzu werden daher derzeit vertiefende Auswertungen vorgenommen.

Literatur

Bandura, A. (1977). Self-efficacy: Toward a unifying theory of behavioural change. *Psychological Review*, 84, 191-215.

Deci, F. & Ryan, R. (1993). Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation und ihre Bedeutung für die Pädagogik. *Zeitschrift für Pädagogik*, 39, 223-238.

Gundlach (in Vorbereitung). *Motivation und Selbstwirksamkeit im Bereich Stochastik: aufgabenspezifische Dispositionen und Lösungsraten*. [Arbeitstitel]. Magisterarbeit. Pädagogische Hochschule Ludwigsburg.

Gundlach, M., Kuntze, S., Engel, J. & Martignon, L. (akzeptiert). *Motivation and self-efficacy related to probability and statistics: task specific motivation and proficiency*. ICOTS 2010.

Heckhausen, J. & Heckhausen, H. (2006). *Motivation und Handeln*. (3. Auflage). Berlin: Springer.

Helmke, A. & Weinert, F. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistungen. In: F. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie Band 3: Psychologie des Unterrichts und der Schule* (S. 71–176). Göttingen: Hogrefe.

Krapp, A. (1992). Das Interessenskonstrukt. In A. Krapp & M Prenzel (Hrsg.), *Interesse, Lernen, Leistung. Neuere Ansätze der pädagogisch-psychologischen Interessensforschung* (S. 197-329). Münster: Aschendorff.

Kuntze, S., Engel, J., Martignon, L. & Gundlach, M. (im Druck). *Statistical Literacy von Studierenden zwischen Kompetenzmessung und der Untersuchung von Begriffswissen – Erste Ergebnisse aus dem Projekt RIKO-STAT*. Herbsttagung des Arbeitskreises Stochastik der GDM, 2009.

Pekrun, R., Götz, T., Jullien, S., Zirngibl, A., v. Hofe, R., & Blum, W. (2002). *Skalenhandbuch PALMA*. Universität München: Institut Pädagogische Psychologie.

[1]: Das Forschungsprojekt RIKO-STAT wird von der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg gefördert.

Mathias HATTERMANN, Gießen

Die Ellipse in der Primarstufe - Unterrichtsvorschlag und Legitimation mithilfe von Bildungsstandards und Rahmenplan

Die Kreisform ist ein fester Bestandteil unserer Lehrpläne und des Primarstufenunterrichts an deutschen Schulen. Wir stellen die Fragen: Ist es nicht möglich, anhand dieser Voraussetzungen noch einen Schritt weiter zu gehen und mindestens als Mittel zur inneren Differenzierung der Lerngruppe die geometrische Form der Ellipse in der Primarstufe zu thematisieren? Sollte man dem Phänomen, dass die Ellipse im günstigsten Fall als "schiefer Kreis" bekannt ist, nicht entgegenwirken und diese ästhetische, mit einfachsten Mitteln herzustellende Form, nicht bereits im Sinne eines Spiralcurriculums bzw. einer Propädeutik möglichst früh unterrichten? Soll es weiterhin so sein, dass nur Menschen mit einer universitären Ausbildung in Mathematik (ein Abitur reicht im Allgemeinen hierzu nicht aus) mit dem BEGRIFF der Ellipse, deren Form uns im Alltag häufig begegnet, etwas anzufangen wissen?

Eine erste "Begegnung" mit dieser Form in der Primarstufe ist möglich und sinnvoll, ein Vergleich mit der Konstruktion des Kreises auf enaktiver Ebene mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion direkt erfahrbar. Eine Behandlung und ein Vergleich der Definitionen beider Formen bietet sich im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I an, wo Kreis- und Gärtnerkonstruktionen auch theoretisch reflektiert und verglichen werden können. So lässt sich dort die Frage thematisieren, was passiert, wenn die beiden Brennpunkte in der Ellipsendefinition: "Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstandssumme zu zwei vorgegebenen Punkten, den Brennpunkten, konstant ist", zusammenfallen. Diese Vergleiche können im Sinne der Raumgeometrie, was das Ellipsoid bzw. die Kugel betrifft, fortgeführt oder auch im Bereich von Rotationskörpern in der Sekundarstufe II aufgegriffen werden, siehe hierzu Hattermann (2007). Zunächst mag der Legitimationsversuch zur Behandlung einer Kegelschnittkurve in der Primarstufe abwegig erscheinen, bei einer näheren Untersuchung der Vorgaben der Bildungsstandards und des hessischen Rahmenplans ergibt sich jedoch bei adäquater Unterrichtsplanung ein anderes Bild.

Vorgaben der Bildungsstandards

Die Bildungsstandards fordern für die Primarstufe (KMK (2005)) genügend übergeordnete allgemeine mathematische Kompetenzen wie das Argumentieren, Problemlösen, Kommunizieren, Darstellen von Mathematik und Modellieren, zu deren Erreichung, sich bei geeignetem Aufbau der

Lernumgebung, fruchtbare Möglichkeiten bei der Thematisierung der Ellipse ergeben. Auch im Bereich der geforderten inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen lassen sich Forderungen aus den Leitideen "Raum und Form" bzw. "Muster und Strukturen" identifizieren, die zur Legitimation einer Unterrichtsreihe zur Behandlung der Ellipsenform herangezogen werden können. Die Forderungen der Bildungsstandards: "Körper und ebene Figuren nach Eigenschaften sortieren und Fachbegriffe zuordnen, Körper und ebene Figuren in der Umwelt wieder erkennen, Zeichnungen mit Hilfsmitteln sowie Freihandzeichnungen anfertigen, symmetrische Muster fortsetzen und selbst entwickeln" (KMK 2005, S.10), lassen sich mit Hilfe einer geeignet konzipierten Stationenarbeit am Beispiel der Ellipsenform gut umsetzen. Die Thematisierung der Ellipsenform ist aufgrund der Herstellbarkeit mit elementaren Mitteln, dem Vorkommen im Alltag und der nahen "Verwandtschaft" zur bekannten Kreisform auf motivierende Art durchführbar.

Übergeordnete Vorgaben des hessischen Rahmenplans

Der hessische Rahmenplan für die Grundschule beschreibt explizit übergeordnete Lehrziele, die zur Legitimation der Ellipsenform im Primarstufenunterricht zusätzlich herangezogen werden können. "Im Mittelpunkt des Geometrieunterrichts in der Grundschule steht nicht die Systematik des Stoffes mit Begriffen und Lehrsätzen, sondern das Entdecken, Vermuten, Vergleichen, Beschreiben und Konstruieren. Begriffe und Einsichten werden aus realen Erfahrungen beim Betrachten, Zeichnen, Falten, Kleben, Schneiden, Modellieren, Drucken, Bauen usw. entwickelt." (HKM (1995), S.164) Wir interpretieren obige Aussage in der Weise, dass es unerheblich ist, an welchen konkreten mathematischen Begriffen die geforderten Aktivitäten umgesetzt werden und dass das gründliche Reflektieren von realen Erfahrungen bzw. die konkrete Handlung im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens stehen soll. Eine weitere Vorgabe des Rahmenplans betrachtet die folgenden Aktivitäten als erstrebenswert: "Die sich weiter entwickelnde manuelle Geschicklichkeit erlaubt es ab dem 3. Schuljahr, geometrische Aufgaben mehr und mehr zeichnerisch zu lösen und dabei die Genauigkeit und Sorgfalt zu steigern. Spielerische, kreative und freudvolle Aktivitäten sollen dabei jedoch im Vordergrund stehen (siehe bei Muster und Ornamenten).“ (ebd. S.169)

Konkrete Thematisierung der Ellipsenform nach übergeordneten Vorgaben von Rahmenplan und Bildungsstandards

Nach dieser Legitimation mithilfe des hessischen Rahmenplans bzw. der Bildungsstandards und den Vorüberlegungen zur Behandlung der Ellipse im Sinne eines Spiralcurriculums schlagen wir folgende, bereits erprobte, Methode zum Kennenlernen der Ellipse in der Primarstufe vor. Unser Unterrichtsprojekt erstreckt sich über eine Doppelstunde und ist durch eine Wiederholungs- bzw. Problematisierungsphase im Stuhlkreis, einer Durchführungsphase mit einer Stationenarbeit und einer Reflexionsphase in einer "Stuhlellipse" gekennzeichnet. Zu Beginn spielt die Lehrerin das Spiel "ich sehe was, was du nicht siehst" mit den Kindern, um zunächst deren Aufmerksamkeit auf die bereits bekannten Formen Dreieck, Rechteck, Quadrat und Kreis zu lenken und deren geometrische Eigenschaften zu wiederholen. In der Folge ist ein elliptischer Gegenstand zu erraten, dessen Benennung mit bereits bekannten geometrischen Begriffen nicht möglich ist. Bereits an dieser Stelle ergibt sich eine Fülle von Möglichkeiten, was die geforderten Kompetenzen Kommunizieren, Argumentieren, Modellieren, Vergleichen, Vermuten, Entdecken und Beschreiben betrifft. In der sich anschließenden Stationenarbeit werden die folgenden Stationen durchlaufen:

- Die Gärtnerkonstruktion: Die Schüler stellen bei dieser Station in Partnerarbeit eine Ellipse mit Hilfe der Gärtnerkonstruktion her und untersuchen explorativ, wie sich die Form der Ellipse verändert, wenn die Brennpunkte nah beieinander bzw. weiter auseinander platziert werden.
- Die Ellipse in unserem Alltag: Bei dieser Station sollen die Schüler zunächst anhand eigener Ideen Beispiele für das Vorkommen der Ellipsenform im Alltag nennen. Als Hilfe wird ein Karteikasten mit geeigneten Bildern aus dem Alltag der Kinder bereit gestellt.
- Experimentieren: Die Schüler experimentieren mit verschiedenen Schnittführungen an Gurke bzw. Salami, um die Schnittfiguren Kreis und Ellipse, abhängig von der Schnittführung unterscheiden zu lernen. Des Weiteren lassen sich Kegelschnittkurven an der Decke oder einem geeignet gehaltenen Stück Papier beim Schattenwurf eines in einem Glas stehenden Teelichts entdecken. (Als Schnitt des Lichtkegels mit einer Schnittebene (Papier bzw. Decke). Verwirrend kann hier sein, dass die Größe der Schnittfigur von dem Abstand der Lichtquelle abhängt und zusätzlich, neben Kreis und Ellipse ein Hyperbelast bzw. die Parabel als Schnittfiguren auftreten können. Es erscheint hier sinnvoll, die Phänomene von den Kindern beschreiben und das Experiment von einer Lehrperson durchführen zu lassen.
- Fühlbox: Die Schüler ertasten in der Fühlbox verschieden geformte Ellipsen und zählen zusätzlich die Anzahl der in der Fühlbox vorhandenen Dreiecke, Rechtecke, Quadrate, Kreise und Ellipsen.

– Schmuckblätter: An dieser Station können die Schüler vorgegebene Schmuckblätter mit verschiedenen Ellipsenformen ausmalen oder aber mithilfe von Kreis- und Ellipsenschablonen eigene Schmuckblätter oder beliebige Bilder anfertigen.

Nach dem Durchlaufen der Stationen, welche noch nach Schwerpunktsetzung in Wahl- und Pflichtstationen aufgeteilt werden können, erfolgt die Reflexionsphase, in der wesentliche Erkenntnisse der einzelnen Stationen zusammengetragen und nochmals thematisiert werden. Eine gemeinschaftliche Reflexion über den Zusammenhang von Ellipse und Kreis bietet sich an dieser Stelle an. Hierzu finden sich die Schüler in einer Stuhlellipse ein, die nach dem Vorbild der Gärtnerkonstruktion gebildet werden muss. Lediglich ein langes Seil und zwei Schüler, die als Brennpunkte fungieren und das Seil an seinen beiden Enden festhalten, sind hierzu nötig. Die wesentlichen Forderungen der Bildungsstandards bzw. des Rahmenplans können bei geeigneter Aufgabenstellung neben der Wiederholungs- bzw. Problematisierungsphase und der Reflexionsphase in den einzelnen Stationen angesprochen und bedient werden. Eine Darstellung der Durchführung der soeben skizzierten Unterrichtseinheit mit ausführlichen Reflexionen der einzelnen Stationen und konkreten Bearbeitungen von Schülern eines kombinierten 3./4. Schuljahres ist neben der expliziten Nennung, der in den einzelnen Stationen angestrebten Kompetenzen bzw. Lernzielen in Hattermann/Kley (2010) nachzulesen.

Literatur

Franke, M. (2007). *Didaktik der Geometrie in der Grundschule (2. Aufl.)*. Heidelberg [u.a.]: Spektrum Akad. Verl.

Hattermann, M. (2007). -Kegelschnitte- Ein alter Hut im neuen Gewand ? Möglichkeiten eines umstrittenen Lehrinhalts in Schule und Hochschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Vorträge auf der 41.Tagung für Didaktik der Mathematik vom 26.3. bis 30.3.2007 in Berlin*. Hildesheim: Franzbecker, S. 629–632.

Hattermann, M.; Kley, M. (2010). Die Ellipse in der Grundschule. Ein handlungsorientierter Zugang mit Alltagsbezug und Möglichkeiten des Vergleichs mit bereits bekannten Figuren und Formen. In: *Sache, Wort, Zahl* (im Druck).

Hessisches Kultusministerium (1995). *Rahmenplan Grundschule gemäß der 204. Verordnung über Rahmenpläne des hessischen Kultusministers vom 21.3.1995*. Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2005): *Beschlüsse der KMK, Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4)*.

PETRA HAUER-TYPPELT, Wien

Wahrscheinlichkeit, Zufall, Erwartungswert – und das alles aus einem Spiel?

1. Grundsätzliche Überlegungen – die Argumentationsbasis des Spiels

Basierend auf der Überzeugung, dass angemessene Grundvorstellungen zu den Grundbegriffen „Zufall“, „Wahrscheinlichkeit“ und „Erwartungswert“ ein erklärtes Ziel jedes Stochastikunterrichts sein müssen, wird ein Spiel für den stochastischen Anfangsunterricht vorgestellt, das dem Aufbau dieser dient. Abgesehen davon, dass sie essentielle Voraussetzung für den weiteren Stochastikunterricht sind, sind angemessene Grundvorstellungen unabdingbar, um stochastische Situationen außerhalb des Mathematikunterrichts überhaupt wiedererkennen und damit auch einschätzen bzw. bewerten zu können. Gerade die wesentlichen Basisbegriffe des gesamten Gebietes „Zufall“ und „Wahrscheinlichkeit“ sind durch die Überlappung mit der Alltagssprache oft nicht adäquat besetzt bzw. das Verständnis durch nicht angemessene Intuitionen beeinträchtigt. Darüber hinaus erfordern die Besonderheiten der Begriffe – für den Begriff „Zufall“ gibt es keine Definition, der Begriff „Wahrscheinlichkeit“ vereint unterschiedliche Aspekte in sich – besonderes Engagement im Aufbau eines tragfähigen Begriffsverständnisses. Das muss im Stochastikunterricht durchgehend, insbesondere im Anfangsunterricht, berücksichtigt werden und auch für die Schülerinnen und Schüler durch die ausreichende Zuteilung von Zeit und Vermittlung von Wertigkeit erkennbar sein.

2. Die Aufgabenstellung – Das Spiel

Jede/r von euch wählt eine Zahl von 2 bis 12. Ihr würfelt abwechselnd jeweils mit zwei Würfeln und zählt nach jedem Wurf die Augenzahlen zusammen. Ist die Summe der Augenzahlen genau gleich der gewählten Zahl, erhält der/die Spieler/in diese Summe gutgeschrieben. Weicht die Summe der Augenzahlen um 1 ab, erhält man eine um 1 kleinere Zahl als die Summe der Augenzahlen gutgeschrieben. In allen anderen Fällen bekommt man keine Punkte gutgeschrieben. Wer zuerst mindestens 30 erreicht, hat gewonnen. Welche Zahl sollte man wählen?

Über den Auftrag *„Spielt das Spiel und probiert mehrere Zahlen aus!“* wird eine Spielphase eingeleitet, deren Gruppenergebnisse als Klassenergebnis zusammengefasst und dokumentiert werden. Die nachstehende Tabelle 1 zeigt ein konkretes Ergebnis aus der 8. Schulstufe und dient dazu während der Spielphase entstandene Erkenntnisse zu analysieren.

Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
so oft gewählt:	-	-	1	6	10	32	24	10	11	13	11
so oft damit gewonnen:	-	-	-	2	4	23	14	3	4	6	3

Tabelle 1: Spielergebnisse

Aussagen wie „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt.“ (Originalzitat eines Schülers) zeigen, dass einige Lernende die beiden entscheidenden Einflussfaktoren während des Spielens selbst erkennen.

Zu Förderung dieser Einsichten eignen sich Fragestellungen wie: Was sagst du zu folgenden Überlegungen?
Ich wähle 12. Das ist die größte Zahl und ich bekomme am meisten Punkte! Ich wähle 11. Denn da bekomme ich nicht nur Punkte mit 11 und 12, sondern auch mit 10!

Durch diese Art von Fragestellung sollen auch Überlegungen zur Rolle des Zufalls angeregt werden, damit kann eine Auseinandersetzung mit dem Begriff auf intuitiver Ebene erfolgen.

3. Analyse des Spiels

In Folge muss es darum gehen, die Einflussfaktoren bei diesem Spiel zu präzisieren. Was genau meint die Aussage, eine Zahl sei „leicht zu würfeln“ ? Die Klärung dieser Frage sollte auf zwei verschiedene Arten in Angriff genommen werden, deren prinzipieller Unterschied für die Lernenden klar erkennbar sein muss. Einerseits über das Auszählen von absoluten Häufigkeiten und damit implizit über den Weg des empirischen Gesetzes der großen Zahlen letztlich einen frequentistischen Wahrscheinlichkeitsbegriff anpeilend (vgl. Auftrag 1), andererseits über einen theoretischen Ansatz (vgl. Auftrag 2).

Auftrag 1: Würfelt jede/r zehnmal und dokumentiert, wie oft ihr welche Augenzahl erhalten habt!

Wieder werden die Ergebnisse zum Klassenergebnis zusammengefasst und diskutiert: Welche Bedeutung haben die Ergebnisse solcher Experimente? Inwieweit können sie zur Beantwortung der Frage, welche Augensumme „leicht zu würfeln“ ist, verwendet werden? Wo liegt der Unterschied zwischen dem Ergebnis einer Einzelperson und dem Ergebnis für die ganze Klasse? Welche Schlüsse sind aus solchen experimentellen Ergebnissen überhaupt zulässig? Der Einfluss des Zufalls muss hier wieder thematisiert werden, der Begriff „wahrscheinlich“ fließt erfahrungsgemäß automatisch in die Diskussion ein. Es ist darauf zu achten, dass passende Aspekte des Wahrscheinlichkeitsbegriffs hervorgehoben werden.

Auftrag 2: In eine Tabelle, in deren Kopf- und Randspalte jeweils die Augenzahlen eines Würfels stehen, sollen in die Felder die entsprechende Augensumme der beiden Würfel eingetragen werden. (Aus Platzgründen hier nicht abgebildet.) Wie oft die einzelnen Augensummen bei 36 Würfen theoretisch vorkommen wird daraus entnommen und in einer weiteren Tabelle (Tabelle 2) zusammengefasst:

Augensumme	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
theoretische Anzahl bei 36 Würfen	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Tabelle 2: Auftreten von Augensummen bei 36 Würfen – theoretisch ermittelt

Die Bedeutung dieses theoretisch ermittelten Ergebnisses muss im Vergleich zu den Ergebnissen des Auftrages 1 analysiert werden. Insbesondere der Unterschied hinsichtlich der Rolle des Zufalls und der Güte der Vorhersage für künftige Spiele ist zu thematisieren.

Mit den in Tabelle 2 gezeigten Werten lässt sich nun eine Vorausberechnung anstellen, welche Punktezahl für eine gewählte Zahl bei 36 Würfen „theoretisch zu erwarten“ ist.
Für die Wahl der Zahl 5 ergibt sich beispielsweise:
Die Augensumme 5 kommt viermal vor, das liefert voraussichtlich $4 \cdot 5 = 20$ Punkte. Die Augensumme 6 kommt fünfmal vor, für sie werden nur 5 Punkte gutgeschrieben, man darf also theoretisch dafür $5 \cdot 5 = 25$ Punkte erwarten.Die Augensumme 4 kommt dreimal vor, man bekommt jeweils 3 Punkte gutgeschrieben, das lässt theoretisch $3 \cdot 3 = 9$ erwarten. Insgesamt ergibt die Vorausberechnung für die Wahl der Zahl 5 bei 36 Würfen $4 \cdot 5 + 5 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 54$ Punkte.
Jeder Summand des erwarteten Wertes setzt sich aus den beiden Faktoren „theoretische Anzahl des Ereignisses (bei 36 Würfen)“ und „Wert des Ereignisses“ zusammen und spiegelt damit die Einflussfaktoren für die Güte einer Zahl in diesem Spiel wider. Die Übereinstimmung mit ihren Erkenntnissen aus der Spielphase – „Es kommt darauf an, ob ich meine Zahl leicht würfeln kann und ob sie viele Punkte bringt.“ – muss von den Lernenden erfasst werden. Erst dann ist die Verbindung von intuitivem Wissen und theoretischen Überlegungen gelungen und ein essentieller Beitrag zum Aufbau adäquater Grundvorstellungen geleistet.

Überdies zeigt sich in Idee und Berechnungsweise der theoretisch zu erwartenden Punktezahl eine Parallele zum Aufbau des Erwartungswertes einer diskreten Zufallsvariablen. Damit wird im Sinnzusammenhang passend, fernab von Vorratslernen, eine gute intuitive Grundlage für diesen wesentlichen Begriff der Wahrscheinlichkeitsrechnung geschaffen. Analog lässt sich für die anderen zur Wahl stehenden Zahlen eine Vorausberechnung durchführen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst:

gewählte Zahl	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
vorausberechnete Punktezahl	6	16	32	54	82	102	108	98	82	60	32

Tabelle 3: Theoretische zu erwartende Punktezahl für die gewählte Zahl bei 36 Würfen

Die auf theoretischen Überlegungen basierte Empfehlung lautet also die Zahl 8 zu wählen.

Um dem angestrebten Aufbau von angemessenen Grundvorstellungen zu dienen, sollte es nun zu einer Gegenüberstellung von theoretischen (Tab. 3) und experimentellen Ergebnissen (Tab. 1) kommen. Über die Analyse der Rolle des Zufalls und der Stärken bzw. Schwächen der beiden unterschiedlichen Ansätze muss herausgearbeitet und auch intuitiv erfasst werden, dass die Güte der Vorhersage durch die vorausberechneten Punktezahlen mit steigender Anzahl an Spielen wächst. Damit lässt sich ein weiteres wichtiges Ziel des Stochastikunterrichts realisieren, nämlich eine sichere intuitive Grundlage für das empirische Gesetz der großen Zahlen zu schaffen.

4. Abschließende Bemerkung

Das vorgestellte Spiel möchte durch die Auseinandersetzung mit den grundlegenden Begriffen Zufall, Wahrscheinlichkeit und Erwartungswert in verschiedenen Phasen – Spielphase, Erhebung experimenteller Ergebnisse, Motivation und Durchführung theoretischer Ansätze – und damit aus unterschiedlichen Blickwinkeln zum Aufbau angemessener Grundvorstellungen beitragen. Selbstverständlich sind im Lernprozess eine Reihe weiterer Konfrontationen mit diesen grundlegenden Begriffen der Stochastik (in ganz anderen Sinnzusammenhängen) von Nöten um tragfähige Grundvorstellungen nachhaltig aufzubauen.

Literatur

Hauer-Typpelt, P. (2010). Tragfähige Grundvorstellungen zu Wahrscheinlichkeit und Zufall entwickeln – Vorschläge für den Stochastikunterricht. In: *Didaktikhefte der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft, Heft 42* : http://www.oemg.ac.at/DK/Didaktikhefte/index.html

Tietze, U.-P., Klika, M., Wolpers, H.; (2002). *Didaktik der Stochastik. Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 3*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Martin HENNECKE, Hildesheim

Bruchrechnung: Rechenwege von Mädchen und Jungen im Vergleich

1. Einführung

Die Studie zur Entwicklung von Rechenanwendungen in der Bruchrechnung (ERaB) folgt der Leitfrage, welche Rechenwege Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung von Kalkülaufgaben in der Bruchrechnung notieren. Zu diesem Zwecke wurden die Notationen von rund 7.400 Schülerinnen und Schülern zu 20 Bruchrechenaufgaben vollständig erfasst (vgl. Hennecke 2007a und i.V.) und in Form von Rechengraphen visualisiert (vgl. Hennecke 2007b, 2008). Die ERaB-Studie ist als Pseudo-Längsschnitt-Studie angelegt und erfasst unter anderem die Schuljahre 6 bis 12 der Gymnasien bzw. 6 bis 10 der Realschulen und der Hauptschulen. Die Testerhebung fand gegen Ende des jeweiligen Schuljahrs statt.

Das repräsentativ gewichtete Gesamtergebnis der ERaB-Studie fällt leicht zugunsten der Mädchen aus. Dies Ergebnis begründet sich vor allem aufgrund der signifikant besseren Leistungen der Mädchen in den Schuljahrgängen 6 bis 8. Nach Schulformen und Schuljahrgängen differenziert ist lediglich im 12. Schuljahrgang des Gymnasiums ein signifikanter Unterschied zugunsten der Jungen nachweisbar (U-Tests, 2-seitig).

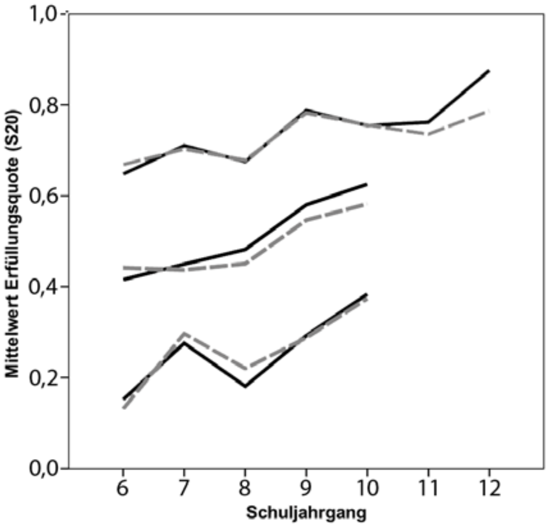


Abb. 1: Anteil richtiger Aufgabenbearbeitungen an den gestellten Kalkülaufgaben nach Geschlecht, Schulformen und Schuljahrgängen (Gymnasium oben, Realschule in der Mitte, Hauptschule unten, Mädchen gestrichelt).

Im Vergleich aufeinanderfolgender Schuljahrgänge ist insbesondere der „Leistungsschub" im 9. Schuljahr in allen Schulformen bei beiden Geschlechtern signifikant. Das schlechte Abschneiden im 8. Schuljahr der Hauptschule erklärt sich vorrangig durch eine geringe Bearbeitungsquote. Das bessere Abschneiden der Mädchen widerspricht nicht den besseren Ergebnissen der Jungen in den bekannten Schulleistungsstudien. Bei den kalkülorientierten Aufgaben der ERaB-Studie handelt es sich um vergleichsweise einfache mathematische Operationen, bei denen auch TIMSS und andere Studien nur kleine oder keine Leistungsunterschiede aufweisen (vgl. Baumert, Bos et al. 2000).

2. Länge der notierten Rechenwege

Die Länge der notierten Rechenwege ist ein interessanter Indikator für unterschiedliches Verhalten von Teilpopulationen. Während die Mädchen im Durchschnitt 2,36 Arbeitsschritte (SD 0,65) notierten, sind die Notationen ihrer männlichen Mitschüler signifikant kürzer (2,09 Arbeitsschritte, SD 0,69, d ≈ -0,4). Umgerechnet auf die Testlänge von 20 Aufgaben notierten die Mädchen somit gut 5 Zwischenschritte mehr. Eine nach Schulformen und Schuljahrgänge differenzierte Analyse zeigt im Gymnasium einen Trend zugunsten immer kürzerer Rechenwege mit höherem Schuljahrgang. Insbesondere der Wechsel zum 9. Schuljahr geht hier bei beiden Geschlechtern mit signifikant kürzeren Notationen einher. Anders in der Realschule: Auch hier ist die Länge der notierten Rechenwege bis Schuljahrgang 8 rückläufig. Insbesondere bei den Mädchen steigt dann jedoch im 9. Schuljahr die Anzahl der notierten Zwischenschritte signifikant an. Interessanterweise geht der Leistungsschub in Schuljahr 9 im Gymnasium also mit signifikant kürzeren und in der Realschule mit längeren Notationen einher.

3. Was notieren Mädchen mehr?

Abb. 2 zeigt einen vereinfachten Rechengraphen der Aufgabe $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ für die Schülerinnen des 10. Schuljahrs des Gymnasiums. Die Abbildung zeigt, wie von den 130 Schülerinnen 67 % im ersten Zwischenschritt $\frac{7}{8} - \frac{6}{8}$ notierten und erst in einem zweiten Schritt die Lösung $\frac{1}{8}$ (65 % der Antwortenden). Die direkte Notation der Lösung hingegen ist mit 17 % der Antwortenden eher selten. Die teilnehmenden Jungen hingegen zeigen bei gleicher Lösungsquote andere Notationen. Hier entfallen 52 % der Antworten auf die direkte Notation der Lösung und 35 % auf den bei den Mädchen ausgeprägten Standardweg.

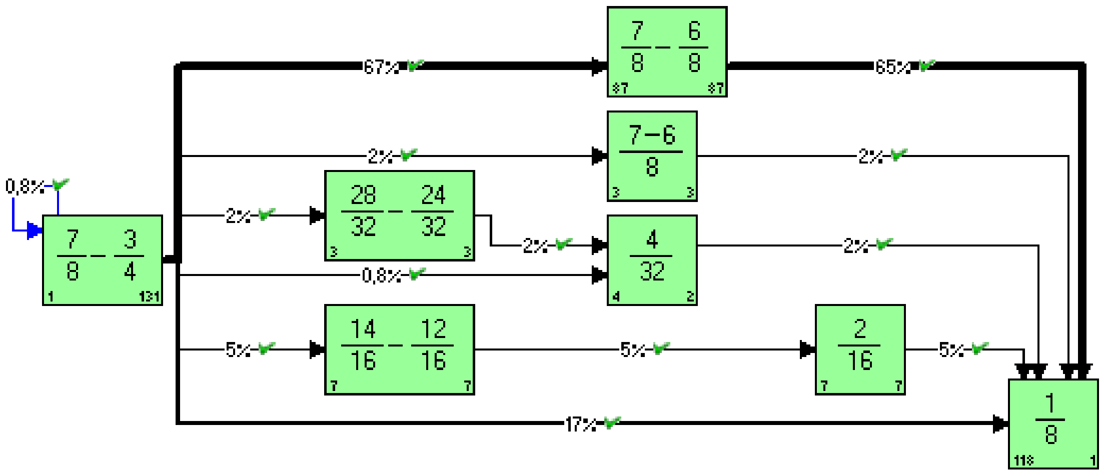


Abb. 2: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe $\frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ (Gymnasium, 10. Schuljahr, Mädchen, n = 130)

Vergleichbare Verhaltensmuster finden sich bei anderen Additions- und Subtraktionsaufgaben, z. B. den gut vergleichbaren Aufgaben $\frac{7}{9}+\frac{2}{9}$, $\frac{3}{4}+\frac{9}{12}$, $\frac{3}{8}+\frac{1}{5}$ und $\frac{6}{7}-\frac{2}{5}$. Auch wenn bei schwierigeren Aufgaben mehr Zwischenschritte notiert werden als bei leichteren, so ist zusammenfassend für diese Aufgaben festzuhalten, dass ca. dreimal so viele Jungen direkt die Lösung notierten als Mädchen. Insbesondere neigen Mädchen eher zur Notation von einleitenden Zwischenschritten als Jungen.

4. Was notieren die Realschülerinnen im 9. Schuljahr mehr?

Gegen den Trend kürzerer Notationen sind vor allem die von den Realschülerinnen des 9. Schuljahrgangs notierten Arbeitswege signifikant länger als die ihrer Mitschülerinnen des 8. Schuljahrgangs (vgl. Abs. 2). Zur Analyse der Unterschiede der beiden Jahrgänge eignen sich vor allem die Aufgaben, bei denen selbst nur geringe Leistungsunterschiede aufgetreten sind. Der in Abb. 2 gezeigte Rechengraph des 9. Schuljahrgangs gehört zu einer derartigen Aufgabe. Im Vergleich mit dem Rechengraphen des 8. Schuljahrgangs ist erkennbar, dass im 9. Schuljahrgang erheblich mehr Schülerinnen (55 % statt 36 %) einen der konventionellen Wege über $\frac{4}{7}+\frac{14}{7}$ oder sogar $\frac{4}{7}+\frac{2}{1}$ wählen. Parallel dazu verliert die „clevere“ Alternative durch reines Umschreiben der Aufgabenstellung zu $2\frac{4}{7}$ an Bedeutung (14 % statt 32 %). Ein ähnlicher Rückzug auf Standardwege ist auch bei vielen anderen Aufgaben erkennbar.

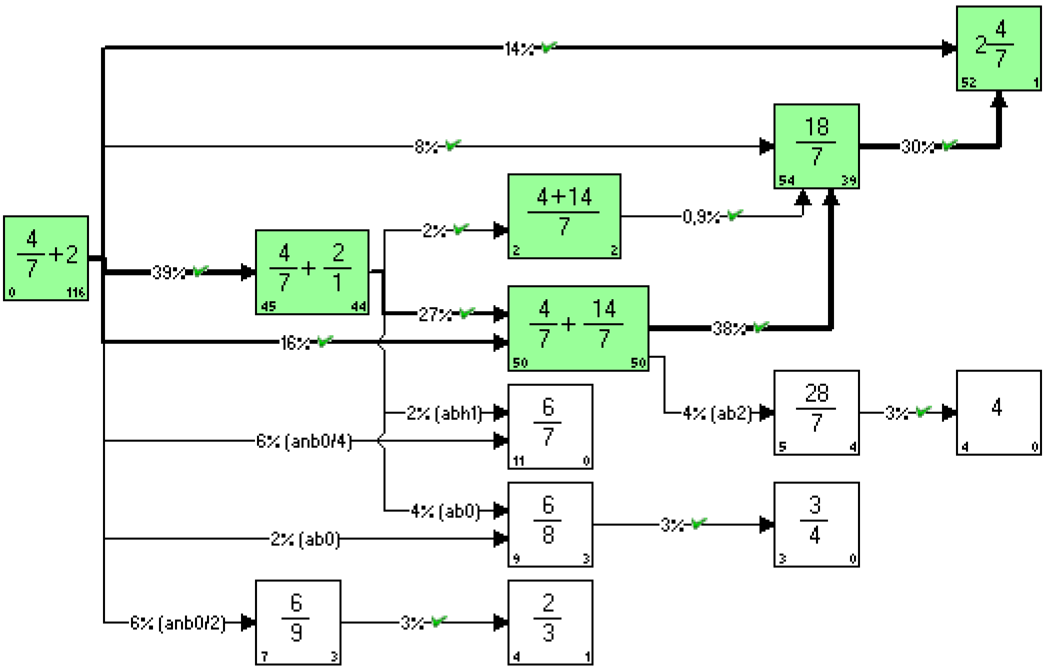


Abb. 2: Vereinfachter Rechengraph der Aufgabe $\frac{4}{7}+2$ (Realschule, 9. Schuljahr, Mädchen, n = 116)

Es handelt sich jedoch nicht um ein Phänomen, das nur typisch für Realschülerinnen ist. Auch bei Jungen und im Gymnasium findet sich bei vielen Aufgaben mit cleveren Alternativen eine zunehmende Verwendung der Standardverfahren. Diese werden dann jedoch kürzer notiert.

5. Zusammenfassung und Ausblick

In der ERaB-Studie konnten zumindest in den Schuljahrgängen 6 bis 8 bessere Leistungen bei den Mädchen nachgewiesen werden. Dieser scheinbare Widerspruch zu anderen Ergebnissen erklärt sich vermutlich durch die kalkülorientierte Aufgabenauswahl. Mit Blick auf die sich durch PISA verändernde Aufgabenkultur sind wir also sicherlich gut beraten, ein besonderes Augenmerk auf die Zugänglichkeit dieser Aufgaben für Mädchen zu haben.

Die Unterschiede zwischen den von Mädchen und Jungen notierten Rechenwegen sind erheblich größer als die meist im Vordergrund stehenden Leistungsunterschiede. Dies betrifft insbesondere die einleitenden Zwischenschritte bei Addition und Subtraktion. Bedingt durch das Studiendesign bleibt jedoch offen, ob es sich hier um einen Ausdruck der von PISA postulierten besseren Potentialausschöpfung (vgl. Zimmer, Burda et al. 2004), der häufig publizierten besseren Kopfrechenfähigkeiten oder um „Faulheit“ der Jungen handelt.

Insbesondere im Kontext natürlicher oder gemischter Zahlen werden mit höherem Schuljahrgang clevere Rechenwege immer weniger angenommen. Diese Orientierung zu den Standardwegen ist bei Mädchen in der Regel stärker ausgeprägt als bei Jungen. Sofern wir einen „Zahlenblick“ für wichtig halten, brauchen wir nachhaltigere Trainingsmethoden. Ohne weitere Unterstützung erreicht allein die Algebra dieses Ziel nicht ausreichend.

Literatur

Baumert, J., W. Bos et al. (2000): *TIMSS/III-Deutschland – Der Abschussbericht*.

Hennecke, M. (2007a): Fehlerdiagnostische Auswertung empirischer Studien in der Bruchrechnung. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*.

Hennecke, M. (2007b): Rechengraphen – Eine Darstellungsform für Rechenwege von Schülergruppen. *mathematica didactica* (1): 68-96.

Hennecke, M. (2008): Ein Blick hinter die Kulissen: Wie Schülerinnen und Schüler rechnen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*.

Hennecke, M. (i.V.): *Computergestützte Rechenwegdiagnostik in mathematischen Lern-, Lehr- und Forschungsszenarien*. Universität Hildesheim, Habilitationsschrift in Vorbereitung.

Zimmer, K., D. Burda und J. Rost (2004). Kompetenzen von Jungen und Mädchen. In Prenzel et al.: *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland*, Münster: Maxmann: 211-223.

Herbert HENNING, Magdeburg, Nadine HERBER, Magdeburg

Spiralen – ein Phänomen für fächerübergreifendes Lernen von Mathematik

In seinem Buch *Allgemeinbildung und Mathematik* diskutiert Heymann unter anderem die Frage, welche Bildung, im Sinne von Allgemeinbildung, den Schülern durch die Schule vermittelt werden soll. Dazu entwickelte er ein Konzept, das folgende *Aufgaben allgemein bildenden Schulen* enthält:

- *Lebensvorbereitung*
- *Stiftung kultureller Kohärenz*
- *Weltorientierung*
- *Anleitung zum kritischen Vernunftgebrauch*
- *Entfaltung von Verantwortungsbereitschaft*
- *Einübung in Verständigung und Kooperation*
- *Stärkung des Schüler-Ichs* (Heymann 1996).

Einige Aufgaben können durch fächerübergreifenden Unterricht aufgegriffen werden.

Fächerübergreifender Unterricht bedeutet die (unterrichtliche) Beschäftigung mit einem Gebiet, indem die fachlichen Grenzen überschritten werden und andere (wie und zu welchem Zweck oder Ziel auch immer) einbezogen werden. (Beckmann 2003)

Es bedarf einen besonderen Umgang mit Mathematik im Unterricht, die weitgehend hinter Phänomenen verborgen ist. Ein mathematisches Phänomen ist die Spirale. Für den Mathematikunterricht ist sie zum einen bedeutend, da sie eine Kurve ist und der Begriff „Kurve“ im Unterricht stiefmütterlich behandelt wird. Zum anderen werden viele Fächer und viele innerdisziplinäre mathematische Gebiete durch die Spirale vernetzt. Das Phänomen „Spirale“ stellt somit einen Weltbezug zur Mathematik her.

Im Folgenden wird eine mögliche Themenplanung für das Leitfach Mathematik zum Thema „Spiralen“ vorgestellt. Anschließend wird diskutiert, wie andere Unterrichtsfächer das Thema der Spirale aufgreifen können. Im Mathematikunterricht können folgende Themen behandelt werden:

- Einführung Polarkoordinaten
- Definition von Spiralen
- Beschreibung von Spiralen in Polarkoordinaten

- Besonderheiten ausgewählter Spiralen
- Konstruktionen von Spiralen
- Goldener Schnitt, Goldener Winkel
- Fibonacci-Folge
- Selbstähnlichkeit

Für die Einführung bzw. für die Herleitung der Polarkoordinaten werden Winkelfunktionen benötigt, die in Klasse 10 unterrichtet werden. Daher empfiehlt sich die Behandlung von Spiralen ab dieser Klassenstufe.

Wenn der Mathematikunterricht den Goldenen Schnitt und die Fibonacci-Folge behandelt, kann der Biologieunterricht beginnen die Phyllotaxis zu thematisieren. Fibonacci-Zahlen tauchen bei den links- und rechtsläufigen Spiralen der Blüten und Samen auf, der „Goldene Winkel" ist bei zerstreuter Anordnung der Blätter zu finden. Ein Beispiel für ein selbstähnliches Objekt in der Natur ist der Nautilus.

In Informatik kann der Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen geübt werden. Schnell zu lösen ist zum Beispiel folgende Aufgabe zur Fibonacci-Folge: *Berechne den Quotienten a_{n+1}/a_n für einige Folgenglieder. Was stellst du fest ?*

Man findet heraus, dass die Folge zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen gegen die goldene Verhältniszahl F konvergiert. Zudem lassen sich mit Tabellenkalkulationsprogrammen zu vorgegebenen Divergenzwinkeln die zugehörigen Blattstellungsmuster erstellen. Um das Sierpinski - Dreieck aus dem Pascalschen Dreieck zu erhalten, muss man dieses bis zur 31. Zeile aufschreiben. Mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogramms kann den Schülern diese Aufgabe erleichtert werden. Anhand des Sierpinski-Dreiecks kann die Selbstähnlichkeit eingeführt werden.

In *Astronomie* kann auf das Milchstraßensystem eingegangen werden. Die Sonne gehört als einer von mehreren hundert Milliarden Sternen diesem Sternsystem an. Neben den Sternen, die als Einzel-, Doppel- und Mehrfachsterne sowie in Sternhaufen vorkommen, befindet sich im Milchstraßensystem auch interstellare Materie (ein diffuses Gas-Staub-Gemisch). Von der Erde aus gesehen ist die Milchstraße ein schwach leuchtendes Band. Eine flache Scheibe aus Sternen und interstellare Materie stellt den Anblick des bestimmenden Bereichs des Milchstraßensystems dar. Die Sonne befindet sich in dieser galaktischen Scheibe. Die Scheibe ist durch mehrere in einer Ebene angeordnete Spiralarme strukturiert. In diesen konzentrieren sich leuchtkräftige heiße Sterne, Sternhaufen und interstellare Materie. Zwischen den Spiralarmen befinden sich Sterne mit geringeren

Leuchtstärken. Sterne und interstellare Wolken gehören nur für eine begrenzte Zeit einem Spiralarm an. Die Spiralarme selbst befinden sich in einem ständigen Werden und Vergehen. Sie sind Regionen mit hoher Sternentstehungsrate und sie enthalten viele extrem junge Sterne. Die Zentralregion des Milchstraßensystems hat die Gestalt einer leicht abgeplatteten Kugel. Eine Spiralstruktur ist dort nicht erkennbar. Die Scheibe des Milchstraßensystems wird von einem aus kugelförmigen Sternhaufen und Einzelsternen bestehenden, fast kugelförmigen Halo umschlossen. Zentralregion, Scheibe und Halo sind in einer sehr großen unsichtbaren Hülle eingebettet, der Korona. Spiralgalaxien bestehen, wie das Milchstraßensystem, aus Zentralregion, Scheibe und Halo. Sie sind wahrscheinlich auch von unsichtbaren, massereichen Koronen aus dunkler Materie umgeben. In ihren Zentren finden sich sehr viel ältere Sterne. Junge Sterne und interstellare Materie finden sich in den Spiralarmen.

In Chemie bietet sich die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion als Experiment an. Sie ist ein Beispiel für einen homogenen chemischen Oszillator und dient häufig der Veranschaulichung chaotischer Systeme. Einige Grundkenntnisse aus der Physik zu chaotischen Systemen sind von Vorteil.

Im Religionsunterricht kann die Symbolik der Spirale in den einzelnen Religionen besprochen werden. Auch die Mystik, die die Spirale umgibt, ist interessanter Unterrichtsstoff. Eine Gerade symbolisiert zielstrebiges und kompromissloses Fortschrittsdenken. Wer dagegen einer Spirale folgt, gelangt langsam, aber sicher voran. Bekanntes wird berücksichtigt und von immer höherem Standpunkt aus betrachtet. Die Spirale steht also als Sinnbild von Wandel und Wiederkehr für zahlreiche Entwicklungsprozesse im Leben.

Im Kunstunterricht gibt es sehr viele Möglichkeiten das Thema der Spirale aufzugreifen. Schon der *Goldene Schnitt* ist in vielen Kunstwerken zu finden. So zum Beispiel in folgenden Gemälden:

- Die Sixtinische Madonna von Raffael de Santi
- Mona Lisa von Leonardo da Vinci
- Selbstbildnis sowie Adam und Eva von Albrecht Dürer

oder zum Beispiel bei folgenden Bauwerken:

- Parthenon in Athen
- (altes) Rathaus in Leipzig
- Triumpfbogen des Kaisers Augustes in Rom

Albrecht Dürer war nicht nur Künstler, sondern auch Mathematiker. In der darstellenden Geometrie stieß er bis an die Grenzen der damals bekannten Mathematik vor. Er veröffentlichte drei Bücher über Geometrie, Befestigungskunst und menschliche Proportionen. Dürer reiste nach Italien, um in Bologna das perspektivische Zeichnen zu erlernen.

Vincent van Gogh entwickelte seine eigene Technik: Er setzte die Farben in kleinen Strichen nebeneinander. Um seine Gemälde noch lebendiger und bewegter zu gestalten, begann er diese Striche zu rhythmisieren und in Wellenlinien, Kreisen oder Spiralen anzuordnen. Deutlich wird dies in seinem Gemälde „Sternennacht“, in dem der Mond und die Sterne Kreise und die Wolken spiralförmig sind.

In der Architektur sind Spiralen zu finden, Bereits in der Architektur Griechenlands (etwa 900 - 50 v. Chr.). An den Tempeln unterscheidet man eine dorische, ionische und korinthische Ordnung. Bei der ionischen Ordnung (ab 570 v. Chr.) ist das Kapitell (Kopfstück einer Säule) in Erinnerung an ehemaliges pflanzliches Baumaterial zu der Schmuckform einer Schnecke (Volute) mit Blattornament ausgebildet.

Möglichkeiten der Vernetzung der verschiedenen fächerübergreifenden und fächerverbindenden Inhalte ist einer ausserunterrichtlichen Arbeitsgemeinschaft möglich.

Schwerpunktthemen können dabei sein:

Polarkoordinaten, Archimedische Spirale, Logarithmische Spirale, Goldener Schnitt Fibonacci-Folge und Goldenen Spirale, Phyllotaxis, Selbstähnlichkeit.

Materialien und Ergebnisse (Poster, Kunstobjekte von Schülern, Arbeitsblätter) mit einer Einführung in die genannten Themen sowie Aufgaben mit Lösungen sind unter http: public.me.com nadinegroh de bereitgestellt.

Beckmann, A. Fächerübergreifender Mathematikunterricht, Franzbecker 2003

Heymann, H.W. Allgemeinbildung und Mathematik, Beltz 1996

Kurt HESS, Zug (CH)

Kompetenz orientierte Diagnostik in Lernumgebungen für Kindergärten und erste Grundschulklassen

1. Einleitung

Im Mathematikunterricht der Grundschule halten reichhaltige Aufgaben, welche individuelle Zugänge, Herausforderungen und Lösungsmöglichkeiten bieten, zunehmend Einzug. Es ist nachvollziehbar, dass eine solche Öffnung bzw. natürliche Differenzierung des Unterrichts bei manchen Lehrpersonen zum Einwand führen kann, die Übersicht über die Kompetenzentwicklung der Kinder zu verlieren.

Der folgende Beitrag zeigt am Beispiel der mathematischen Lernumgebung "Musterschlangen" für den Kindergarten und die ersten beiden Grundschulklassen[1] eine diagnostische Ausrichtung, welche zu einer kompetenz- bzw. kriterienorientierten Beurteilung führt und eine spezifische Förderplanung fundiert. Er gründet auf einem diagnostischen Entwicklungsprojekt zur *förderorientierten Beurteilung 4- bis 8-jähriger Kinder (föbe)*, in welchem publizierte Lernumgebungen für die ersten beiden Grundschulklassen (Hengartner, Wälti & Hirt, 2007; Hirt & Wälti, 2008;) „nach unten" auf die beiden Kindergartenjahre erweitert wurden (vgl. Hess & Wälti, 2009).

2. Differenziertes Wissen über Kompetenzaufbau und Diagnostik

Lehr-/Lernprozesse bewegen sich zwischen subjektseitigem Kompetenzaufbau und stofflicher Herausforderung. Die fachdidaktische Literatur zum mathematischen Lernen 4- bis 8-jähriger Kinder nähert sich dieser Vermittlung einerseits mit differenzierten kognitionspsychologischen und fachlichen Kompetenzmodellen und andererseits mit reichhaltigen Aufgabenstellungen an. Beispiele für die erste Annäherung sind z. B. in Theorien zur Zählentwicklung (Gelman & Gallistel, 1978; Fuson, 1988), zum Aufbau einer Mengenbewusstheit (protoquantitative Schemata; Resnick, 1989) oder in jüngster Zeit in Modellen zur frühen mathematischen Kompetenzentwicklung (z. B. Krajewski, 2008) abgebildet. Die differenzierten Theorien zur Progression subjektseitiger Kompetenzen sind notwendige Voraussetzungen für eine diagnostische Begleitung, sie taugen aber nicht für eine direkte (i. S. einer differenzierten und kleinschrittigen) Hereinnahme in didaktische Konzeptionen. Die Alternative besteht aus reichhaltigen Aufgaben (Lernumgebungen), die jedem Kind Zugänge ermöglichen und individuelle Herausforderungen bieten.

[1] Im Rahmen der Schweizerischen Bildungsreform Harmonisierung der Schule (HarmoS) wird von den ersten vier Bildungsjahren gesprochen (1. und 2. im Kindergarten, 3. und 4. in der Grundschule).

3. Orientierungsrahmen für den arithmetischen Kompetenzaufbau

Die pro Bildungsjahr von je zwei minimalen und erweiterten Anforderungen begleiteten Lernumgebungen Musterschlangen (pränumerische und numerische Strukturen), Einkaufen (Sachrechnen), Wege in der Plustafel (Arithmetik) und Würfelhäuser (Kopfgeometrie) orientieren sich an einem vierstufigen Kompetenzaufbau. In der *Arithmetik* beinhaltet dieser:

1. Bildungsjahr: *A.* Operative Handlungsschemata (z. B. Einkaufen) und Mengenbewusstheit (Vergleichs- / Zunahme-Abnahme-Schema; Resnick, 1989) aufbauen, erweitern und festigen. *B.* Aufbau von Sprachkompetenzen zu operativem Handeln, Formen, Mengen (z. B. Komparative und Superlative), räumlichen und zeitlichen Beziehungen. *C.* Zählerfahrungen ermöglichen und erste Zählprinzipien aufbauen und festigen (how-to-count-prinziples; Gelman & Gallistel, 1978). *D.* Kognitive Strategien erwerben und differenzieren (z. B. pränumerische Operationen).

2. Bildungsjahr: E. Pränumerische und numerische Mengenbewusstheit (Teil-Ganzes-Schema; Resnick, 1989) erweitern und festigen. *F.* Verbale Zählkompetenzen und Zählprinzipien erweitern (what-to-count-prinziples; Gelman & Gallistel, 1978). *G.* „Additionsverständnis“ aufbauen und durch visuelles Operieren verinnerlichen, differenzieren und erweitern.

3. Bildungsjahr: *H.* Additives (und subtraktives) Netzwerk im Zahlenraum bis 20 erwerben. *I.* Zählstrategien ökonomisieren und weiterführende Strategien generieren (statischer Fingergebrauch, mentale Gliederungsfähigkeit, Ableitstrategien, Abrufwissen; vgl. Hess, 2011).

4. Bildungsjahr: K. Arithmetisches Netzwerk im Zahlenraum bis 100 mit allen Grundoperationen und ersten halbschriftlichen Strategien aufbauen.

Diese grobe Rahmung bietet den diagnostischen Kriterien in den einzelnen Lernumgebungen eine Referenz. Das folgende Beispiel der Lernumgebung Musterschlangen gibt Einsicht in Aufbau und Inhalte der Lernumgebungen.

4. Beispiel Lernumgebung „Musterschlangen“

Worum geht es? Die Lernumgebung Musterschlangen besteht aus reichhaltigen Aufgaben, die unterschiedliche pränumerische und numerische Orientierungen an Mustern bzw. Regelmässigkeiten herausfordern. Inhaltlich geht es darum, dass sich die Kinder an Sequenzen orientieren, diese durch visuelle und sprachliche Auseinandersetzung verinnerlichen und weiterführen. Auch Übersetzungen in taktil-kinästhetische und rhythmisch-musikalische Strukturen tragen zu einer Musterbewusstheit bei.

Mögliche Aufträge. Die Kinder kriegen z. B. rote und blaue Würfel und legen mit diesen ein Muster. Durch den Vergleich mit Lösungen anderer

Kinder erhalten sie Ideen, wie Steigerungen aussehen können. Vielleicht variieren sie die Sequenzen durch Umkehrungen: rot, blau, blau, dann umgekehrt blau, blau, rot oder durch numerische Kriterien der Sequenzen: rot, blau / rot, rot, blau, blau / rot, rot, rot, etc. In den Aufträgen sind auch spielerische Varianten enthalten. Wenn die Kinder gegenseitig Muster beginnen und fortsetzen, ist darauf zu achten, dass eine wirkliche Orientierung an Sequenzen erfolgt und nicht eine einfache Eins-zu-eins-Zuordnung. Dies kann durch Abdecken der Sequenzen erreicht werden, also durch eine visuelle oder rein sprachliche Fortsetzung ohne Vorlage. Ab dem 3. Bildungsjahr sind Aufträge mit numerischen Mustern im Auftragsrepertoire.

Diagnostische Kriterien. Die diagnostischen Kriterien geben der Lernbegleitung eine Zielorientierung und sie ermöglichen eine förderorientierte Beurteilung. Im zweiten Bildungsjahr sehen die minimalen Anforderungen (MA; von allen Kindern erwarteten) und die erweiterten (EA; für Kinder, die bereits Ziele des nächsten Bildungsjahres anstreben) wie folgt aus:

2. BJ	Beobachtungs-Kriterien	Kommentar
Musterschlangen	A Zeichnet mindestens 2 verschiedene regelmässige visuelle Muster in die leeren Schlangen (ohne Zahlen). B Zeigt mit mindestens zwei Elementen ein Muster mit Variationen, z. B. ▲▼▼ ▲▲▼ ▼▲▲ ▼▼▲ .	MA, wenn A und B erfüllt
	+C Schaut 2 fremde visuelle Muster an, deutet und zeichnet sie ohne Vorlage nach. +D Führt visuelles Muster *rein sprachlich* weiter.	EA, wenn +C oder +D erfüllt

Die MA verlangen eine Bewusstheit gegenüber Regelmässigkeiten in Eigenproduktionen. Die EA bedingen das Einprägen von Sequenzen bzw. Regeln, damit eine sprachliche oder visuelle Wiedergabe ohne Vorlage möglich ist. Wie folgender Kriterienraster für das 3. Bildungsjahr zeigt, wurde dieser Grundsatz nicht a priori verfolgt, dies aus hier nicht genannten Gründen.

3. BJ	Beobachtungs-Kriterien	Kommentar
Musterschlangen	A Zeichnet mindestens 3 verschiedene regelmässige Schlangen und schreibt unter das Muster relevante Zahlen (z. B. 2, 4, 6, 2). B Variiert mit 2 oder 3 Elementen die Anzahlen (der Elemente in den Sequenzen), z. B. ▲▼ ▲▲▼▼ ▲▲▲▼▼▼ ▲▼.	MA, wenn A und B erreicht
	+C Schaut 2 fremde Muster an, deutet sie und zeichnet sie ohne Vorlage nach. +D Führt Muster „im Kopf" (sprachlich) weiter (z. B. 11, 12 sind blau, 13 bis 16 rot, 17 und 18 blau …).	EA, wenn +C oder +D erreicht

Die Schwierigkeit, von Beobachtungs- zu Beurteilungskriterien zu gelangen verweist auf die Notwendigkeit, dass Lehrpersonen aus Studium und Weiterbildung über ein entsprechendes fachdidaktisches Hintergrundwissen verfügen sollten, um entsprechende Interpretationen vornehmen und fachdidaktische Konsequenzen ziehen zu können.

Gezielte Förderhinweise. Die Lernumgebungen sind begleitet von spezifischen Förderideen für Kinder, welche auch die MA nicht erfüllen. Diese sind Stufen gerecht vorwiegend an Regelspielen orientiert.

5. Erfahrungen

A. Die beteiligten Lehrpersonen berichten, dass die Kinder eher höhere Kompetenzen zeigen als sie voraus annahmen. *B.* Die Beurteilungskriterien geben ihnen eine diagnostische und didaktische Sicherheit. *C.* Die vorgelegten Lernumgebungen inspirierten die Lehrpersonen, diese mit weiteren Aufträgen anzureichern und zu eigentlichen Unterrichtsprojekten von 8 bis 10 Lektionen Dauer zu erweitern.

Literatur

Gelman, R. & Gallistel, C. (1978). *The child's understanding of number*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Fuson, K. (1988). *Children's counting and concepts of numbers.* New York: Springer.

Hengartner, E., Wälti, B. & Hirt, U. (2007). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht.* Zug: Klett.

Hess, K. (2009a). Aufbau einer mathematischen Strategiebewusstheit im Anfangsunterricht. In GDM (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht zur 43. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 02.03. bis 06.03.2009 in Oldenburg* (S. 631 – 634). Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Hess, K. (2009b). Muster und Gesetzmässigkeiten in der Mathematik. In *„4 bis 8"* (H 12), 18-19.

Hess, K. (2011; in Vorb.). *4- bis 8-jährige Kinder lernen Zahlen, zählen, rechnen. Eine kompetenz- und entwicklungsorientierte Fachdidaktik zum Aufbau einer mathematischen Strategie-Bewusstheit.* Zug: Klett.

Hess, K. & Wälti, B. (2009). Mathe förderorientiert beurteilen. In G. Cwik (Hrsg.) *Selbstständiges Lernen unterstützen. Konzepte und Methoden, Unterrichtsbeispiele. Für die Klassen 1 bis 4* (S. 41-74 *).* Berlin: Cornelsen Scriptor.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Krajewski, K. (2008).Vorschulische Förderung mathematischer Kompetenzen. In F. Petermann & W. Schneider, *Angewandte Entwicklungspsychologie* (S. 275-304). Göttingen: Hogrefe.

Resnick, L. B. (1989). Developing mathematical knowledge. *American Psychologist*, 44, 162-169.

Maren HIOB-VIERTLER, Weingarten, Andreas FEST, Schwäbisch Gmünd

Entwicklung einer offenen Experimentierumgebung für das Lernfeld Funktionen

In dem BMBF-Projekt „SAiL-M – Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik" (http://www.sail-m.de) werden didaktische Beschreibungsmuster für aktivierende, kompetenzorientierte Umgebungen zum Mathematiklernen an der Hochschule formuliert und implementiert. Unterstützend werden prototypisch computergestützte Lern-Werkzeuge mit einem intelligenten Assessment (vgl. Bescherer et al., 2009) für verschiedene mathematische Themenfelder entwickelt. Diese Tools implementieren den Ansatz der semiautomatischen Rückmeldung (Fest & Zimmermann, 2010) und werden in Einführungsveranstaltungen an mehreren Pädagogischen Hochschulen in Baden-Württemberg eingesetzt.

Im Rahmen des Projektes wurde eine Experimentierumgebung „SQUIGGLE-M" für das Lernfeld Funktionen entwickelt. Wir diskutieren die Ausgangssituation, daraus resultierende Entwicklungsfragestellungen sowie deren interaktive Umsetzung.

Probleme im Lernfeld Funktionen und Zuordnungen

Beobachtungen zeigen, dass Studierende häufig mit einer sehr engen Vorstellung des Funktionsbegriffs an die Hochschulen kommen. Funktionen sind für sie meist gleichbedeutend mit Funktionsgraphen und -gleichung (vgl. Malle, 1996). Auf Grund dieser eingeschränkten Sichtweise haben sie nach Untersuchungen von Kerslake (1981) und Weigand (1988) große Schwierigkeiten beim Übergang zwischen unterschiedlichen Darstellungsformen von Funktionen.

Da sich ein enges „*funktionales Denken*" (vgl. Vollrath, 2003) in vertiefenden mathematischen Veranstaltungen als störend erweist, braucht es bereits in den Einführungsveranstaltungen gezielte Förderung. Die Beweglichkeit des funktionalen Denkens zu entwickeln benötigt nach Vollrath(2003) Zeit und sollte demnach in den ersten Semestern begonnen werden.

Befragungen in Einführungsveranstaltungen haben einzelne Begriffe signifikant als problematisch identifiziert. Begriffe aus dem Bereich der Funktionen, sogenannte *„definierte Begriffe"*, sind nach Gangé (vgl. Zech, 2002) nicht greifbar und demnach sehr schwierig zu verstehen. Vor allem der Funktionsbegriff an sich und damit verbundene Begriffe wie *Totalität, Eindeutigkeit, Surjektivität*, *Injektivität* und *Bijektivität* können von Studierenden selten auf konkrete Beispiele angewendet werden. Die Ursache dafür liegt oftmals in einem Nichtverständnis der Begriffe sowie deren Transfer auf unterschiedliche Darstellungsformen und entsprechende Beispiele.

Vinner und Dreyfus sagen, dass *„für das Verständnis des Funktionsbegriffs die Vorstellungen (concept image) entscheidend sind. Sie werden weitgehend durch Beispiele und ihre Darstellungen bestimmt[...]*“ (vgl. Vollrath, 2003, S. 218).

Wird nun auf die „*Stufen des Verständnisses*“ bei der Begriffsbildung nach Vollrath (2003) zurückgegriffen, dann wird deutlich, dass gerade das Arbeiten mit unterschiedlichen Beispielen und Zusammenhängen für die Begriffsbildung eine aufbauende Entwicklung benötigt. Vollrath benennt vier auf einander aufbauende Stufen, die zur Bildung des *intuitiven,* des *inhaltlichen,* des *integrierten* sowie des *formalen Begriffsverständnis* führen. Spezielle Beispiele zur Darstellung von Phänomenen und Eigenschaften, die Herstellung von Zusammenhängen sowie unterschiedliche Darstellungsformen unterstützen dabei den Begriffsbildungsprozess.

Entsprechend diesem Stufenmodell sollte das Konzept eines Computertools zur Unterstützung der Begriffsbildung folgende Dimensionen beinhalten. Es sollte ***experimentelles Arbeiten*** zulassen um das intuitive Verständnis zu fördern. Unterschiedliche Anschauungsbeispiele können experimentell entwickelt, bearbeitet, verändert, definiert und ausprobiert werden und bieten demnach individuelle Unterstützung in der Verständnisbildung und deren Beweglichkeit. In Verbindung mit ***verschiedenen Repräsentationsformen*** greift das Tool auf die Ausgangslage der ersten drei Stufen des Verständnisses zurück. Außerdem werden Übergänge zwischen einzelnen Darstellungsformen geübt und somit ein erweitertes funktionales Denken unterstützt und gefördert. Wird ein ***intelligentes Assessment*** mit lernprozess-orientiertem Feedback implementiert, so fördert das Computerprogramm weiterhin die Selbstreflexion und somit eine Auseinandersetzung mit dem funktionalen Denken an sich. Dem Studierenden wird unter anderem ein bewusster Umgang mit der Thematik „Fehlerquellen und Fehlerbehebung“ während seines Lernprozesses nahegelegt. ***Offene Fragestellungen*** bieten Raum um individuelles Lernen überhaupt möglich zu machen.

Das Tool „Squiggle-M“

Die Lernsoftware „SQUIGGLE-M“ (herunterzuladen auf www.sail-m.de) wurde auf Grundlage des beschriebenen Konzepts entwickelt. „SQUIGGLE-M“ ist eine offene Experimentierumgebung mit eingebetteten „Cinderella“-Applets. Der laborbasierte Aufbau soll dazu beitragen das Verständnis des Funktionsbegriffs und dessen Eigenschaften zu vertiefen und zu erweitern. Studierende lernen, mit Hilfe der Definition des Funktionsbegriffes zu begründen sowie Funktionseigenschaften an verschiedenen Beispielen zu erkennen, benennen und verdeutlichen. Die Möglichkeit, ein erweitertes funktionales Denken zu entwickeln, soll durch ein verbessertes Verständnis einzelner Zusammenhänge zwischen Urbildmengen, Bildmengen, Funktionsgraphen sowie Funktionsgleichungen in den einzelnen Laboren hergestellt werden. Der Begriffsbildungsprozess wird durch integrierte Experimentierfragen unterstützt.

Das Zuordnungslabor

Das Zuordnungslabor gibt die Möglichkeit, individuelle Zuordnungsdiagramme interaktiv zu definieren. Dadurch können der Funktionsbegriff sowie weitere Eigenschaften an verschiedenen Beispielen verständlich gemacht und erlernt werden. Selbst definierte Zuordnungen können bei Bedarf auf ihre Eigenschaften überprüft werden. Das Labor gibt unterschiedliche u. a. fehlerbasierte Meldungen zurück, wie z.B. „*Dies ist keine Funktion da die Eindeutigkeit/Totalität verletzt wurde*".

Die Farbwahl der Rückmeldung unterstützt den Lernprozess dabei visuell. So deutet eine grüne Rückmeldung auf die korrekte, eine rote auf eine falsche Definition, einer Funktion hin.

Das Repräsentationslabor

Das Repräsentationslabor stellt zwei graphische Darstellungsarten von Funktionen nebeneinander und schafft so die Verbindung zwischen Zuordnungsdiagrammen, Funktionsgraphen und -gleichungen. Dieser Zusammenhang unterstützt v.a. das intuitive, das inhaltliche sowie das integrierte Begriffsverständnis. Funktionen, deren Term selbst eingegeben werden können, werden als Graph im Koordinatensystem sowie als Zuordnung in einem Leiterdiagramm dargestellt. Diese zweite Darstellungsform wurde von Goldenberg (1991) in Dynagraph erstmals interaktiv umgesetzt und soll helfen, „den Zuordnungs- und Kovariationsaspekt von Funktionen zu erfassen" (vgl. Malle, 2000). In beiden Darstellungsformen können simultan dynamisch verschiebbare Punkte auf der x-Achse markiert werden, deren zugehörigen Bilder auf dem Graphen und der jeweiligen y-Achse gekennzeichnet werden. Anders als in den bisher veröffentlichten interaktiven Umsetzungen von Leiterdiagrammen können hierbei beliebig viele Punktepaare gesetzt werden.

Es werden – wie auch im Zuordnungslabor – Experimentieranregungen gegeben, die individuell vom Studierenden bearbeitet werden und die Begriffsbildung fördern. So könnte eine exemplarische Aufgabe für dieses Labor lauten: „*Welche Bedingungen benötigt eine bijektive Funktion, deren*

Repräsentation als Leiterdiagramm parallel steigende Pfeile aufzeigt?" Unterstützend können beide Darstellungsformen simultan nebeneinander oder – je nach Wahl des Lernenden – nur eine Form angezeigt werden, wobei ein dynamischer Übergang zwischen beiden Formen implementiert ist. Dem Lerner wird somit eine individuelle Lösungsstrategie ermöglicht.

Ausblick

Das Toolkonzept beinhaltet eine semiautomatische Rückmeldung im Rahmen des intelligenten Assessments um den Lernprozess unterstützend zu begleiten. Die Integration konkreter Experimentierfragen sowie ein angepasstes Feedback sind in Bearbeitung. Dazu wird die Software den jeweiligen Experimentiervorgang aufzeichnen, analysieren und auf Grund dieser Ausgangslage Fehler rückmelden sowie Hinweise auf weiteres optimiertes Vorgehen geben. Werden unübliche Strategien oder Fehler vom System erkannt, die nicht automatisch analysiert werden können, so kann ein individuelles Feedback durch einen Tutor oder den Dozenten erfragt werden. Eine Evaluation wird weitere Ergebnisse bzgl. der Lernwirksamkeit liefern.

Literatur

Bescherer, C., Kortenkamp, U., Müller, W. & Spannagel, C. (2009). Intelligent Computer-Aided Assessment in Mathematics Classrooms. In A. McDougall, J. Murnane, A. Jones & N. Reynolds (Hrsg.), *Researching IT in Education: Theory, Practice and Future Directions*. (S. 200-205). Routledge.

Fest, A. & Zimmermann, M. (in Druck). Werkzeuge für das individuelle Lernen in Mathematik. *27. Herbsttagung des Arbeitskreises Mathematikunterricht & Informatik der GDM*, Soest.

Goldenberg, P. et al. (1991): Dynamic representation and the development of an understanding of function. In: Harel, E. (Hrsg.): *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*, Bd. 25. Washington: MAA

Kerslake, D. Graphs In: K. M. Hart u.a. (Hrsg.): *Children´s Understanding of Mathematics:* 11-16, Oxford (Murray), 120-136.

Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *Mathematik lehren*, 75 (S. 4-8). Friedrich Verlag.

Malle, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. *Mathematik lehren*, 103 (S. 8-11). Friedrich Verlag.

Vollrath, H-J. (1984). *Methodik des Begriffslehrens im Mathematikunterricht.* Stuttgart: Klett Verlag.

Vollrath, H-J. (2003). *Algebra in der Sekundarstufe*. Heidelberg/Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

Weigand, H.-G.(1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *JMD* 9, 287-325.

Zech, F. (2002). *Grundkurs Mathematikdidaktik: theoretische und praktische Anleitung für das Lehren und Lernen von Mathematik*. Weinheim /Basel: Beltz Verlag.

Horst HISCHER, Saarbrücken und Braunschweig

Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext — vertiefende Aspekte

In [Hischer 2009] wird ein verbales Axiomensystem für *Netz* im pädagogisch-didaktischen Kontext skizziert, das ein Zusammenspiel zwischen den *Bestandteilen*, den *Benutzern* und den *Betrachtern* eines solchen Netzes beschreibt. Anlass für diese Betrachtungen ist die Feststellung, dass in erziehungswissenschaftlichen Zusammenhängen (wie auch im Alltag) oft von „Vernetzungen" gesprochen wird, ohne zu präzisieren, was denn darunter zu verstehen sei. Im Folgenden werden Weiterungen wie *Netzgraph* und *Vernetzungsgrad* kurz angesprochen, die schließlich zu einer zweckmäßigen Interpretation von *„Vernetzung"* im pädagogisch-didaktischen Kontext führen. Eine umfassende Untersuchung findet sich in [Hischer 2010].

1. Der konzeptuelle Ansatz

Die oben erwähnten Netze sind in ihrer Zusammensetzung aus Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern und den damit einhergehenden vielfältigen Verbindungen und Beziehungen sehr komplexe Gebilde, die nicht einfach nur als Graphen (mit besonderen Eigenschaften) aufgefasst werden können, sondern eher Assoziationen an die insbesondere in der Soziologie betrachteten sog. „Systeme" wecken.

Dennoch bieten sich („einfache") Graphen zur strukturellen Beschreibung der so genannten *Bestandteile von Netzen* (nämlich den „Knoten" und ihren „Verbindungen", genannt „Kanten") an, indem verschiedene Graphen überlagert werden und man damit dann *ohne Mehrfachkanten* auskommen kann. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder auch zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich ggf. durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass diverse Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Überlagerung ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Es bietet sich daher an, zunächst spezielle Graphen für das *graphentheoretisch „Innerste" der Netze* zu charakterisieren – nämlich für ihre *Bestandteile*. Diese Graphen werden dann idealtypisch „Netzgraphen" genannt, verallgemeinert heißen sie „Netzwerke".

2. Netzgraphen

Typisch für „Netze" im Alltagsverständnis ist u. a. das Vorhandensein von *Maschen*, in denen sich die „Benutzer" verfangen können, die aber auch deren Schutz dienen können. „Bäume" sind damit stets nicht „vernetzt".

Eine graphentheoretische Analyse führt zu der Idee, einen „Netzgraphen“ als endlichen, zusammenhängenden, „maschenhaltigen“ Graphen aufzufassen (noch schärfer: wenn sogar jede Kante „Teil einer Masche“ ist), ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Das führt dann äquivalent damit zu der Definition: Ein endlicher Graph ist genau dann ein **Netzgraph**, wenn **zwischen je zwei Knoten mindestens zwei verschiedene Wege** existieren und wenn jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Es liegt nahe, die Existenz je verschiedener Wege als die wesentliche Eigenschaft für „Vernetzung“ anzusehen.

Vollständige Graphen mit mindestens vier Knoten sind dann stets Netzgraphen. Entfernt man einzelne Kanten sukzessive, so können zwar zunächst noch Netzgraphen vorliegen, jedoch „kippt“ die Lage plötzlich, so dass dann kein Netzgraph mehr vorliegt, obwohl dieser Graph „noch“ kein Baum ist, weil noch mindestens eine Masche existiert (oder er nicht mehr zusammenhängend ist). So wird man ggf. auch derartige Graphen noch als „vernetzt“ ansehen, allerdings mit folgender Konsequenz: Das (idealtypische) *„Vorliegen eines Netzgraphen“* und das *„Vorliegen einer Vernetzung“* bedeuten nicht dasselbe. Das o. g. „graphentheoretisch Innerste eines Netzes“ kann also im Idealfall ein Netzgraph sein, soll aber, um stets ansprechbar zu sein, im allgemeinen Fall „**Netzwerk**“ genannt werden. Ein „Netzwerk“ ist also der aus den Bestandteilen eines Netzes (s. o.) gebildete Graph, der ggf. ein Netzgraph ist, der aber dennoch eine „Vernetzung“ zum Ausdruck bringen kann, die in geeigneter Weise zu messen ist.

3. Vernetzungsgradmaße

Daher liegt es nahe, neben dem „Vorliegen eines Netzgraphen“ als einem *qualitativen Maß* für die Vernetzung auch ein *quantitatives Maß* für die Vernetzung einzuführen, genannt „Vernetzungsgrad“.

Die „reine“ mathematische Graphentheorie hat zwar umfassend sog. „Bäume“ untersucht, ihr Augenmerk gilt aber bisher weder Netzgraphen im hier vorgestellten Verständnis noch Vernetzungsgradmaßen in einem für die Anwendung nützlichen Sinn. Anders ist es jedoch in den Anwendungsdisziplinen (insbesondere in Physik und in Soziologie, zunehmend aber auch in Angewandter Mathematik und in Informatik, nicht jedoch bisher in Didaktik und in Pädagogik): Hier hat sich in den letzten 15 Jahren geradezu explosionsartig eine neue transdisziplinäre Forschungsrichtung entwickelt, genannt „Netzwerkanalyse“ (“network analysis”). Dort werden zwar keine idealtypischen „Netzgraphen“ untersucht, wohl aber die Struktur „natürlich entstehender Netzwerke“, und in dem Zusammenhang wurden auch unterschiedliche Vernetzungsgradmaße vorgeschlagen und für die Untersuchung solcher Netzwerke herangezogen. Hier sind vor allem zu nennen:

- **mittlerer Knotenabstand** („charakteristische Weglänge“ *L* des Graphen)
- **Clusterbildung** („Clusterkoeffizient“ *C* des Graphen)
- **mittlerer Knotengrad** (ähnlich zur „Dichte“ des Graphen)
- **Durchmesser** des Graphen

Diesen globalen Vernetzungsgradmaßen liegen lokale zugrunde. Sie werden in [Hischer 2010] genauer betrachtet und seien hier nur skizziert: Der *Knotenabstand* ist die Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten (als Anzahl der Kanten eines solchen Weges), woraus sich die o. g. *charakteristische Weglänge L* als deren arithmetisches Mittel ergibt. Alle unmittelbaren Nachbarn eines Knoten bilden dessen Nachbarschaft als „Cluster“. Ein Cluster heißt „Clique“, falls jeder seiner Knoten mit jedem anderen verbunden ist. Der lokale Clusterkoeffizient misst dann die *Cliquenhaftigkeit* des Clusters (als Verhältnis der Anzahl aller vorhandenen zu allen möglichen Kanten innerhalb dieses Clusters); das arithmetische Mittel aller lokalen Clusterkoeffizienten ist der globale *Clusterkoeffizient C*, er ist maximal 1, und nur bei Bäumen und Wäldern ist er 0. Der *mittlere Knotengrad* ist das arithmetische Mittel der einzelnen Knotengrade; dividiert man ihn durch die Anzahl aller für jeden Knoten verfügbaren „Partner“, so erhält man die *Dichte*. Der *Durchmesser* ist der „größte auftretende Abstand“ in einem Graphen (wie beim Durchmesserbegriff der Geometrie). All diese Vernetzungsgradmaße messen unterschiedliche Eigenschaften und können in ihrer Gesamtheit zur Vernetzungsbeurteilung herangezogen werden.

4. Modellierung, Stabilität und Angreifbarkeit realer Netzwerke

„Natürliche“ Netzwerke entstehen nicht aufgrund eines geordneten Plans, sondern unter stochastischen Bedingungen. Die ersten Untersuchungen von „Zufallsgraphen“ waren rein graphentheoretischer Natur und gehen auf Erdős und Rényi zurück (1959: “On Random Graphs”): *n* vorhandene Knoten werden stochastisch durch Kanten verbunden. Dieses *ER-Modell* konnte jedoch nicht das Auftreten sog. „Kleiner Welten“ (“Small Worlds”) erklären, wie man sie z. B. beim *Kevin-Bacon-Orakel* kennt: Der „Zusammenarbeitsabstand“ zwischen zwei beliebigen Filmschauspielern ist maximal 8 (vgl.: http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html). Watts und Strogatz stellten daher 1998 ihr *WS-Modell* vor, bei dem die Kanten eines gegebenen regulären Graphen stochastisch nur „neu verdrahtet“ werden. Damit konnte zwar das Entstehen „Kleiner Welten“ erklärt werden, nicht jedoch das Entstehen von sog. *„Naben“* in realen Netzwerken: Sehr wenige Knoten des Netzwerks weisen einen extrem hohen Grad auf (sehr viele Verbindungen zu anderen Knoten). Die Physiker Barabási und Albert stellten daraufhin 1999 alternativ ihr *BA-Modell* vor, gekennzeichnet durch **dynamisches Wachstum** und **bevorzugendes Andocken**:

Reale Netzwerke wachsen nämlich durch Entstehung neuer Kanten **und** neuer Knoten: So „dockt“ bei dem BA-Modell jeder neue Knoten nach dem „Matthäus-Prinzip“ stochastisch an vorhandenen Knoten durch Bildung neuer Kanten an, wobei die bereits „reichen“ Knoten bevorzugt werden (“rich gets richer”). Damit ist dann die *Entstehung von Naben erklärbar*. Insbesondere zeigt sich in Übereinstimmung mit dem BA-Modell und empirischen Untersuchungen (z. B. beim Internet und beim WorldWideWeb): Die zufällige Zerstörung einer geringen Anzahl von Knoten betrifft faktisch keine Naben, und damit ändert sich die charakteristische Weglänge nicht, die hingegen bei gezielter Zerstörung von Naben dramatisch zunimmt.

6. Vernetzung

„Vernetzung“ ist ein Prozess, der ggf. durch solche Modelle beschreibbar ist und der im optimalen Fall einen Netzgraphen liefert, im Normalfall jedoch nur ein Netzwerk, dessen jeweils gewählter „Vernetzungsgrad“ ein Maß für eine mehr oder weniger ausgeprägte Vernetzung bildet. Folgende Sprechweisen bzw. Definitionen liegen nahe:

Verbindung: Zwei *Knoten* eines Graphen sind genau dann *verbunden*, wenn zwischen ihnen ein Weg existiert.
Verzweigung: Ein *zusammenhängender Graph* ist genau dann *verzweigt*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten *genau ein Weg* existiert.
Starke Vernetzung: Ein *Graph* ist genau dann *stark vernetzt*, wenn er ein Netzgraph ist.
Schwache Vernetzung: Ein *zusammenhängender Graph* ist genau dann *schwach vernetzt*, wenn er weder verzweigt noch stark vernetzt ist.
Vernetzung: Ein *Graph* ist genau dann *vernetzt*, wenn er entweder schwach vernetzt oder stark vernetzt ist.

Klar: Stark vernetzte Graphen sind stets zusammenhängend. Insbesondere folgt: Sind je zwei Knoten eines endlichen Graphen verbunden (ist der Graph also zusammenhängend), so ist er entweder verzweigt oder vernetzt, d. h.: Es liegt dann **entweder ein Baum oder ein vernetzter Graph** vor.

Ein „**vernetzender Unterricht**“ zeitigt dann Aufgaben für die *Betrachter* (insbes. Lehrpersonen) in Bezug auf die Betreuung der *Benutzer* (insbes. Schülerinnen und Schüler) bei deren Umgehen mit den *Bestandteilen* (wie Ideen, Vermutungen, Definitionen, Sätze, Beispiele, Zusammenhänge, ...).

Literatur

Hischer, H. [2009]: Was sind und was sollen Netze und Vernetzungen? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 635 – 638).

Hischer, H. [2010]: Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? — Analysen und Thesen in didaktisch-pädagogischer Sicht. Hildesheim: Franzbecker.

Eva HOFFART, Gießen

„Paul hat nicht Recht!“ –

Das Dilemma guter Aufgaben in Leistungserhebungen

Schriftliche Leistungserhebungen sind nicht erst aufgrund der bildungspolitischen Entwicklungen der vergangenen zehn Jahre fester Bestandteil der Unterrichtspraxis wie auch des Bildungsmonitorings. Grundsätzlich wird ihnen eine Funktion einer Ermittlung von Schülerleistungen zugeschrieben, der wiederum verschiedenste Intentionen zugrunde liegen können. Als Instrumente der Leistungserhebungen fungieren Aufgaben, womit sich das seit vielen Jahren geforderte mathematikdidaktische Forschungsinteresse intensiviert (vgl. Walther 1984, S.29).

Einigkeit herrscht in der Mathematikdidaktik über eine Auffassung des Mathematikunterrichts als Aufgabenfach, so dass den Aufgaben eine zentrale Bedeutung für das Lernen und Lehren von Mathematik zuzuschreiben ist (vgl. bspw. Granzer/ Walther 2008, S. 8). Ein aktuelles Dissertationsvorhaben beschäftigt sich mit der qualitativ orientierten Analyse von Aufgaben als Instrument der Lernstandsfeststellung, so dass sich in diesem Rahmen der Untersuchung bewusst von Aufgaben als Auslöser von Lernprozessen distanziert wird. Untersuchungsgegenstand ist eine landesweite Vergleichsarbeit Mitte der Klasse 3, wobei konkret die schriftlich formulierten Aufgaben dieser Hessischen Orientierungsarbeit sowie die real existierenden Bearbeitungen der Schüler im Fokus der Analysen stehen. Die Datenbasis der Untersuchung setzt sich aus über 2000 Schülerdokumenten des ersten offiziellen Durchgangs der Hessischen Orientierungsarbeit und einer ergänzenden Interviewstudie zusammen, so dass eine Komplementarität reaktiver und non-reaktiver Daten erreicht wird.

Die landesweit verpflichtende Orientierungsarbeit wird seitens des verantwortlichen Ministeriums als „Diagnoseinstrument für die Feststellung des Lernstandes“ (HKM 2009, S.3) bezeichnet. Sie dient dazu, „die Leistungen sowohl der Klasse insgesamt als auch einzelner Schülerinnen und Schüler besser zu bestimmen und Erkenntnisse über ihren spezifischen Förderbedarf zu gewinnen“ (ebd.). Die öffentlichen Ergebnisse der auf der folgenden Seite abgebildeten Aufgabe „Zucker“ führten aufgrund des landesweiten Durchschnitts von 0,45 Punkten der insgesamt 3 zu erreichenden Punkte zu zahlreichen Diskussionen. Der offizielle Aufgabenkommentar erwartet ein in Beziehung setzen der in der Tabelle vorhandenen Informationen. Aufgrund einer Interpretation der Angaben soll die vorgegebene Aussage anschließend beurteilt werden. Der Intention der Aufgabe folgend ist Pauls

Aufgabe 8
In vielen Lebensmitteln versteckt sich Zucker:

	Gewicht	Zuckeranteil
Schokokuss	25 g	15 g
Cornflakes	200 g	18 g
Schokolade	100 g	60 g
1 Flasche Ketchup	800 g	150 g

Paul behauptet: „In Schokolade ist genau so viel Zucker drin wie in Schokoküssen."

a) Hat Paul Recht? ❍ ja ❍ nein

b) Begründe deine Antwort!

Aussage zu bestätigen, da die Schokolade viermal so schwer wie der Schokokuss ist und somit auch viermal so viel Zucker enthält. Der gleiche Zuckeranteil beider Lebensmittel ist somit bestätigt (vgl. HKM 2005, S.55ff)

Sind die gezeigten Leistungen der Drittklässler tatsächlich so desolat einzuschätzen, wie es die erreichten Ergebnispunktzahlen vermitteln?

In einem ersten Teil der Untersuchung, der *Rationalen Aufgabenanalyse*, wird die Aufgabe aus inhaltlichen, didaktischen und formalen Perspektiven heraus eingeordnet, um das diagnostische Potential der Aufgabe auszuloten. Einige Blitzlichter dieser Untersuchungsphase werden nachfolgend zusammenfassend dargestellt. Aus inhaltlicher Sicht ist die Aufgabe als proportionale Zuordnung einzuschätzen. Von den Aufgabenautoren jedoch nicht bedacht ist der Anspruch der allgemeinen mathematischen Kompetenzen. Neben dem hohen Anspruch der Aufgabe an die Modellierungskompetenzen der Schüler impliziert die Forderung nach einer schriftlichen Begründung der Beurteilung von Pauls Aussage den Einsatz der Argumentations- und Darstellungskompetenzen. Die Informationen für die Bearbeitung der Aufgabe werden darüber hinaus in einer Tabelle präsentiert. Mit dieser Form der Darstellung sollen die Drittklässler umgehen können und die für die Bearbeitung der Aufgabe relevanten von nicht relevanten Informationen unterscheiden. Die inhaltliche Validität der Aufgabe Zucker ist somit deutlich zu verneinen. Das schuljahresbezogene Niveau ist aus Sicht der inhaltlichen als auch allgemeinen mathematischen Kompetenzen deutlich über dem dritten Grundschuljahrgang einzuordnen. Die Rationale Aufgabenanalyse zeigt konträr zu der exklusiven Musterlösung in den offiziellen Handreichungen der Orientierungsarbeit eine deutliche multiple Lösbarkeit der Aufgabe auf. Der intendierte relative Bezug der Angaben der beiden zu vergleichenden Lebensmittel wird hier durch eine Multiplikation der Angaben zum Schokokuss mit dem Faktor 4 abgebildet, womit jedoch lediglich eine rechnerische Variante bedacht wird. Unter Beachtung des relativen Bezuges der Gewichts- und Zuckerangaben sind durchaus weitere rechnerische Varianten möglich. Ebenfalls stellt sich heraus, dass auch bei einem absoluten Verständnis der angegebenen Werte rational sinnvolle Begründungen für die Verneinung von Pauls Aussage möglich sind. Des Weiteren erweist sich die Aufgabe „Zucker“ aufgrund ihrer formalen Merkmale als schwierig. Während das Antwortformat der ersten Teilaufgabe ein Auswahlformat darstellt, wird in Teilaufgabe b) eine völlig freie Formulierung der Drittklässler gefordert. Zu betonen ist jedoch der inhaltliche Bezug der beiden Teilaufgaben, der aufgrund der konträren Antwortformate keinesfalls unterstützt wird. Ebenso sind die Aufgabenteile allesamt formal deutlich voneinander getrennt, wobei auch die sprachliche Formulierung den inhaltlichen Zusammenhang keinesfalls unterstreicht. Die Verwendung der Begriffe Zucker, Zuckeranteil und Schokokuss kann aufgrund von Unkenntnis oder fehlender Differenzierung zu Irritationen bei der Aufgabenbearbeitung führen.

Auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse fand die Konstruktion theoretischer Bearbeitungskonzepte und -varianten statt. Diese dienten als Grundlage der kategorieorientierten Untersuchung der sich anschließenden *Empirischen Aufgabenanalyse*. Nach den theoretischen Überlegungen zu der Aufgabe und ihrer Bearbeitung waren auf Grundlage von N=1946 Schülerbearbeitungen Erkenntnisse zu den real existierenden Aufgabenlösungen möglich. Die zuvor konstruierten Bearbeitungskonzepte und deren Varianten wurden auf Basis der Empirie ausgeschärft, zusammengefasst oder ausdifferenziert. So zeigte sich, dass lediglich 6,3 % aller Bearbeitungen ein relatives Verständnis der in der Tabelle präsentierten Angaben aufweisen. Vergleichend hierzu verstanden 61,5 % der Drittklässler die Angaben als absolute Werte und lösten die Aufgabe somit anders als von den Aufgabenautoren erwartet. Auch argumentierten 11 % der Aufgabenbearbeiter mit lebensweltlichen Begründungen oder Erfahrungswerten. Auf weitere Bearbeitungskonzepte und -kategorien kann an dieser Stelle aus Platzgründen nicht weiter eingegangen werden.

Bereits die Rationale Aufgabenanalyse verdeutlichte den inhaltlichen Bezug der beiden Teilaufgaben, so dass im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse der Zusammenhang zwischen Bearbeitungskonzept und Beurteilung der Aussage eingehender untersucht wurde. Es zeigt sich, dass 87% der Aufgabenbearbeiter des Konzepts „Relativer Bezug“ Pauls Aussage bestätigen. Hingegen wird sie von 97% der Aufgabenbearbeiter des Konzepts „Absoluter Bezug“ deutlich verneint. Eine Argumentation auf Grundlage des Konzepts „Lebenswelt“ erlaubt sowohl Argumente für als auch Argumente gegen einen gleichen Zuckergehalt von Schokolade und Schokokuss zu sprechen. Zusammenfassend sind hinsichtlich des diagnostischen Potentials der Aufgabe „Zucker“ folgende Ergebnisse zu formulieren.

- Es handelt sich bezüglich der inhaltlichen sowie auch allgemeinen Anforderungen um eine komplexe und anspruchsvolle Aufgabe. Die inhaltliche Validität ist zu verneinen, das schuljahresbezogene Niveau ist deutlich über der dritten Klasse anzusiedeln.
- Die multiple Lösbarkeit bestätigt sich sowohl innerhalb des Bearbeitungskonzeptes „Relativer Bezug“ als auch dahingehend, dass zahlreiche weitere rational begründbare Bearbeitungen möglich sind.
- Beide Analysephasen verdeutlichten den inhaltlichen Bezug der zwei Teilaufgaben, der jedoch aufgrund der formalen Merkmale der Aufgaben nicht unterstützt wird. Ein Zusammenhang Bearbeitungskonzept - Beurteilung der Aussage konnte aufgezeigt werden.
- Schwierigkeiten der Aufgabe sind besonders aus der formalen Perspektive aufzuzeigen. Neben der strikten äußerlichen Trennung der beiden Teilaufgaben bestätigte sich der Einfluss der verwendeten Begriffe im Aufgabentext. Die Worte Zucker und Zuckeranteil wurden ausschließlich synonym verwendet, der relative Charakter des Begriffs Zuckeranteil konnte nicht gedeutet werden. Auch das Wort Schokokuss wurde verschieden interpretiert. Argumentationen, die auf Schokokuss im Sinne der Praline Schokoküsschen oder Schokoguss als Kuchenglasur zurückgreifen sind hier nur zwei häufig aufzufindende Beispiele.

Die Aufgabe „Zucker“ besitzt ein grundsätzlich hohes diagnostisches Potential. Allerdings wird der zugrunde gelegte und deutlich eingeschränkte Beurteilungsmaßstab strikt abgelehnt, da einer Berücksichtigung verschiedener rationaler Bearbeitungswege von Nöten ist. Weiterhin wird das diagnostische Potential der Aufgabe aufgrund der Aufgabenmerkmale verzerrt, wodurch eine inhaltliche Reduktion und formale Modifikation intendiert wird.

Literatur

Granzer, Dietlinde; Walther, Gerd (2008): Standards, keine Standardaufgaben. Gute Aufgaben für länderübergreifende Bildungsstandards in Deutschland. In: *Grundschule*, Heft 4, S. 6–10.

Walther, Gerd (1984): Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Franzbecker , S. 28–42.

Hessisches Kultusministerium (2005): *Erste hessenweite Durchführung der Orientierungsarbeiten*, URL: http://www.hessisches-kultusministerium.de/ irj/HKM_Internet ?cid =534aa22428e4954457d7bd4f1a25eb1e, Zugriff 14.03.2010

Hessisches Kultusministerium (2009): *Aufgaben und Auswertungen der Orientierungsarbeiten*, URL: http://www.hessisches-kultusministerium.de/ irj/HKM_Internet ?cid=534aa22428e4954457d7bd4f1a25eb1e, Zugriff 14.03.2010

ANDREA HOFFKAMP, Berlin

Empirische Befunde und neue Gestaltungsprinzipien für einen inhaltlichen Zugang zur Analysis durch Computereinsatz

Funktionales Denken und Analysispropädeutik

In der Meraner Reform (1905) wurde die ‚Erziehung zum funktionalen Denken' als Sonderaufgabe herausgestellt. Es ging um ein gebietsübergreifendes Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten im Sinne einer fundamentalen Idee. Die Differential- und Integralrechnung sollte Höhepunkt in einem organisch aufgebauten Mathematikunterricht sein und nicht Zusatzstoff. Die Erziehung zum funktionalen Denken kann dabei als Propädeutik zur Analysis gesehen werden (Krüger 2000). Vollrath (1989) beschreibt drei Aspekte funktionalen Denkens: Zuordnungsaspekt (punktweise, statische Sicht), Änderungsaspekt (dynamische Sicht) und Objektaspekt (Sicht auf Funktion als Ganzes). Änderungsaspekt und Objektaspekt kommen hierbei dem Meraner Begriff am nächsten und sind für die Analysis, in der Funktionen als Ganzes im Zusammenhang betrachtet werden und deren Änderungsverhalten untersucht wird, essentiell.

Änderungsaspekt und Objektaspekt bereiten den Schülerinnen und Schülern am meisten Schwierigkeiten. Das zeigt sich zum Beispiel darin, dass Weg-Zeit-Graphen als Bewegung in der Ebene interpretiert werden bzw. Graphen als fotographische Bilder von Realsituationen gesehen werden (Graph-als-Bild-Fehler, Vogel 2006).

Ein oft bemängelter Zustand des Analysisunterrichts ist seine Kalkülorientierung und sein Verharren in Berechnungen losgelöst von inhaltlichen Vorstellungen. Viele Didaktiker plädieren deswegen immer wieder für einen qualitativ-inhaltlichen Zugang zur Analysis (z.B. Hahn/Prediger 2008).

Gestaltungsprinzipien am Beispiel der Lernumgebung ‚Die Reise'

Insgesamt wurden drei interaktive Lernumgebungen unter Nutzung der DGS Cinderella (Kortenkamp/Richter-Gebert 2006) entwickelt. Sie sind unter http://www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp zusammen mit Unterrichtsmaterial frei zugänglich und können mit einem Standardinternetbrowser ohne spezielle Softwarekenntnisse benutzt werden (**geringer technischer Overhead, Praktikabilität**). Die Lernumgebungen verstehen sich als ein Beitrag zu einem inhaltlich-qualitativen Zugang zur Analysis. Am Beispiel der Lernumgebung ‚Die Reise' werden Gestaltungsprinzipien, zugrunde liegende Ideen und ausgewählte Ergebnisse einer Studie verkürzt dargestellt (siehe dazu auch Hoffkamp 2009).

Grundidee ist eine experimentell-interaktive Computernutzung mit dem Ziel die dynamische Komponente funktionalen Denkens zu akzentuieren. Ausgangspunkt ist jeweils eine **simultane dynamische Verknüpfung zwischen einer Situation und einem Funktionsgraphen**. Im Falle der ‚Reise' zwischen einer Landkarte und einem Weg-Zeit-Graphen (Abb. 1).

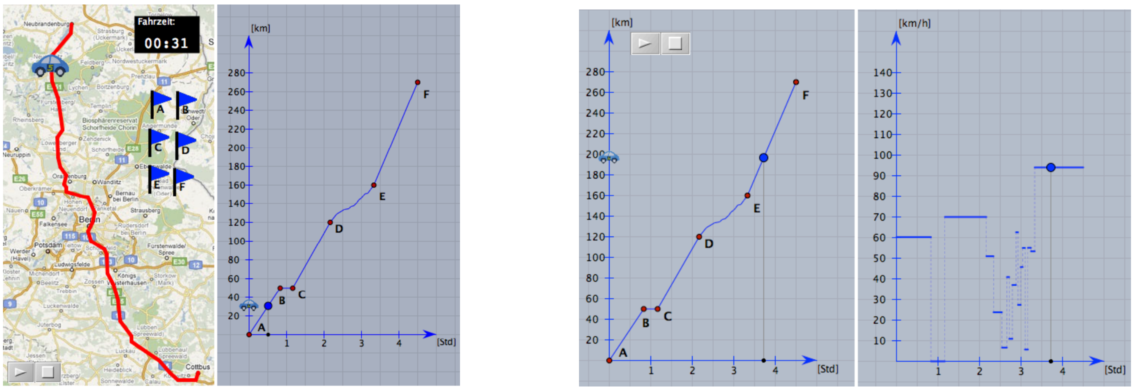


Abb.1: Verknüpfung Situation-Graph (links) und Variation innerhalb der Situation simultan in st- und vt-Graph (rechts). Es kann die Animation benutzt werden oder die blauen Punkte auf den Graphen und Fähnchen bewegt werden. (Quelle: Google Maps)

Die Lernenden markieren mit den Fähnchen die Stationen der Fahrt auf der Landkarte und verschaffen sich einen Überblick über die Situation. In einem zweiten Schritt werden Weg-Zeit Graph und dazugehöriger Geschwindigkeits-Zeit Graph dynamisch verknüpft (**Variation innerhalb der Situation**). Die Lernenden sollen untersuchen und verbalisieren, wie sich die beiden Darstellungen zueinander verhalten, indem sie z.B. die Frage beantworten, ob man mit Hilfe des vt-Graphen die zurückgelegte Wegstrecke bestimmen kann. In der Dynamik ist dies offensichtlich: Fährt man 50 Minuten lang eine Geschwindigkeit von 60 km/h, so hat man eine Strecke von 5/6 [h]·60 [km/h]=50 [km] zurückgelegt, was genau dem Flächeninhalt unter dem ersten Balken entspricht. Mit anderen Worten: Hier soll eine idealisierte Darstellung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erkundet werden. Dabei ist der Gedanke der Supplantation (Vogel 2006), nämlich die visuelle Unterstützung mentaler Simulationsprozesse, wesentlich. Eine zweite Variationsstufe (**Metavariation**, ohne Abb.) erlaubt dann das Ändern der Situation und damit der Funktion als Ganzes. Dabei können die Lernenden in einem vt-Graphen die Balkenbreite und -höhe von fünf vorgegebenen Balken ändern und die Auswirkungen dieser Änderungen auf den st-Graphen untersuchen. Metavariation bezieht sich insbesondere auf den Objektaspekt und macht diesen Aspekt nutzbar. Darüber hinaus bewirkt Metavariation die Loslösung von konkreten Werten und richtet den Blick auf qualitative Betrachtungen der funktionalen Abhängigkeiten.

Qualitative Studie und ausgewählte Ergebnisse

Die Lernumgebung wurde im Rahmen einer qualitativen Studie in Jahrgangsstufe 10 im regulären Unterricht an zwei Berliner Gymnasien eingesetzt. Forschungsfragen sind: Welche Vorstellungen/Begriffe bezogen auf eine dynamische Sicht funktionaler Abhängigkeiten und im Hinblick auf Konzepte der Analysis werden bei der Arbeit mit der Lernumgebung entwickelt? Wie sehen die Interaktionsprozesse aus und welche Rolle spielen die Möglichkeiten der Applikationen (Variation/Metavariation)? Welche epistemologischen Hürden sind erkennbar?

Es wurden vier Schülerpaare bei der Arbeit mit der Lernumgebung und das Unterrichtsgespräch mit der gesamten Klasse videographiert. Von den Videos der Schülerpaare wurden basierend auf Rohanalysedokumenten gewisse Episoden zum Transkript und zur Analyse ausgewählt. Dabei wurde das Material sequentiell durchgegangen. Die Analyse basiert auf den Grundsätzen der interpretativen Unterrichtsforschung (Maier/Voigt 1991) und wurde in der Analyse ergänzt durch Daten von Arbeitsbögen, Test und Fragebögen.

Ausgewählte Ergebnisse: Folgender Auszug zeigt die Bearbeitung der Frage ‚Was passiert zwischen B und C?' Die Schülerinnen benutzen hierbei die linke Applikation aus Abb. 1. Zuvor haben sie die Fähnchen B und C an verschiedenen Stellen auf der Landkarte platziert, obwohl zwischen B und C eine 20-minütige Fahrtpause vorliegt. Sie haben also spontan zunächst einen Graph-als-Bild Fehler gemacht (‚B und C sind im Graph auch an verschiedenen Stellen').

S2:	*(bewegt den blauen Punkt zwischen B und C hin und her)* Der bleibt doch da irgendwie, oder? [..]
S2:	Macht der eine Pause, oder so? *(lächelt)*
S1:	Nee, warte mal, wie viele Minuten vergeudet er denn?
S2:	*(schiebt den blauen Punkt auf D)* Ach so, guck mal, dann ist ja, dann sind die beide auf einem Punkt *(schiebt Fähnchen C auf Fähnchen B)* [..]
S2:	Weil guck doch mal. Die sind doch, guck mal *(schiebt den blauen Punkt zw. B und C hin und her)* der ist doch immer auf der gleichen Stelle.
S1:	Ja, er bewegt sich nicht ( )
S2:	[Aber die Zeit verändert sich nur

Die Schülerinnen erlangen Einsicht nur durch inhaltliche Überlegungen (‚Pause') und durch eine dynamische Sicht, die sich in zeitabhängiger Änderung des Weges ausdrückt (‚Ja, er bewegt sich nicht.' ‚Aber die Zeit verändert sich nur.') Dazu bewegen sie P ein paar mal zwischen B und C hin und her, sie *erleben* die Situation virtuell und erlangen Erkenntnisse durch dynamische graphische Abstraktion.

Wirkung von Metavariation: Die Ergebnisse lassen vermuten, dass Metavariation eine abschnittweise Sicht des Graphen fördert – eine Sache die SuS i.a. schwer fällt und die sich darin äußert, dass Graphen nicht abschnittweise gelesen werden können und Punkte nicht miteinander in Beziehung gesetzt werden können, was man aber für die Bestimmung von Änderungsraten benötigt. Insbesondere formulieren SuS einen qualitativen Transfer zwischen Bestandsgraph (st-Graph) und Änderungsgraph (vt-Graph).

Epistemologische Hürde ‚Kontinuierlicher Durchschnittsbegriff': Unerwarteterweise gab es Probleme bei der Berechnung der durchschnittlichen Reisegeschwindigkeit (hier: 270 [km]/4.5 [h]=60 [km/h]). Ursache war einerseits das umgangssprachliche ‚Stundenkilometer', weshalb die SuS ‚auf einen Kilometer' ausrechnen wollten. Andererseits lag ein *Problem der Verkürzung* vor. Obwohl die Formel v=s/t allen bekannt war, war nicht klar, dass hierfür eine gleichförmige Bewegung und somit eine Proportionalität, also Quotientengleichheit (270/4.5=60/1) unterstellt wird. Tatsächlich wurde aber eine weitere Ursache v.a. im Verlaufe der Unterrichtsgespräche deutlich: Hier liegt ein kontinuierlicher Durchschnittsbegriff vor und SuS scheitern immer wieder an Aufgaben der Form: Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn man eine Stunde lang 30km/h und vier Stunden lang 100km/h fährt. Ein typischer Fehler zeigt sich in der Rechnung: (30+100)/2. Richtig wäre (1·30+4·100)/5, was gerade das Integral über die Geschwindigkeitsfunktion geteilt durch das Zeitintervall ist. Anders gesagt: Das kontinuierliche Analogon zum diskreten Durchschnittsbegriff ist der Mittelwertsatz der Integralrechnung.

Literatur

Hahn, S., Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD*, 29(3/4), 163-198.

Hoffkamp, A. (2009). Funktionales Denken mit dem Computer unterstützen – Empirische Untersuchungen im Rahmen des propädeutischen Unterrichts der Analysis. Erscheint in: *Bericht über die 27. Arbeitstagung des AK 'MU&I' in Soest.* Franzbecker.

Hoffkamp, A. (2009). Enhancing functional thinking using the computer for representational transfer. *Proceedings of CERME 6, Lyon.*

Kortenkamp, U., Richter-Gebert, J. (2006). The Interactive Geometry Software Cinderella, Version 2.0 Springer, Online unter http://cinderella.de

Krüger, K. (2000). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47, 221-241.

Maier, H., Voigt, J. (Hg.) (1991): Interpretative Unterrichtsforschung. Aulis Verlag.

Vogel, M. (2006). Mathematisieren funktionaler Zusammenhänge mit multimediabasierter Supplantation. Franzbecker: Hildesheim.

Vollrath, H.J. (1989). Funktionales Denken. *JMD,* 10(1), 3-37.

TOBIAS HOFMANN, Paderborn

Entwicklung und Evaluation einer multimedialen Lernumgebung für einen selbstständigen Einstieg in die Werkzeugsoftware FATHOM

Das Erlernen einer mathematischen Werkzeugsoftware ist kein Selbstzweck, sondern hat zum Ziel die Software zur Problemlösung in der Mathematik einsetzen zu können. Allerdings erfordert eine solche „instrumentelle Genese“ eigene Lernzeit und sie muss besonders gestützt werden, damit sie erfolgreich verlaufen kann (vgl. TROUCHE, 2005b). Am Beispiel der dynamischen Stochastik- und Datenanalysesoftware FATHOM[1] wurde hierzu die multimediale Lernumgebung eFATHOM[2] entwickelt. Sie ist im Rahmen des Promotionsvorhabens von Tobias Hofmann an der Universität Kassel entworfen und evaluiert worden.

Das Ziel der Lernumgebung ist es dem FATHOM-Novize einen multimedialen und beispielorientierten Einführung in die Software zu ermöglichen. Thematische Schwerpunkte werden auf die Datenanalyse und die stochastische Simulation mit FATHOM gelegt. Gerade die stochastische Simulation erfordert eine mehrschrittige Arbeitsweise (BIEHLER et al., 2006), bei der der Benutzer die Software in adäquater Weise als Werkzeug (vgl. TROUCHE, 2005a) zielgerichtet einzusetzen hat. Neben den vermittelten Kompetenzen im Umgang mit FATHOM, werden dem Lernenden ferner stochastische Inhalte vermittelt, etwa um Daten geeignet Auszuwerten. Im Zusammenhang mit der Simulation lernt er das Gesetz der großen Zahl kennen, die Genauigkeit von Simulationen in Abhängigkeit der Simulationsanzahl wird thematisiert und die strukturelle Gliederung einer Simulation wird anhand eines Simulationsschemas verdeutlicht. Die Aufbereitung der Lerninhalte baut auf vielfältige Erfahrungen auf, die im schulischen und universitären Umfeld gesammelt wurden, wie FATHOM-Novizen mit der Software umgehen. Insbesondere sei auf die Dissertationen von MAXARA (2009) und MEYFARTH (2008) hingewiesen.

Die inhaltliche Struktur von eFATHOM

Die Lernumgebung eFATHOM gliedert sich in vier in sich abgeschlossene, auf einander aufbauende Module. Die ersten beiden Module führen den

[1] siehe `fathom.math.uni-paderborn.de`

[2] Die Website `www.mathematik.uni-kassel.de/~luf` stellt das Einstiegsprotal von eFATHOM dar. Auf ihr lassen sich weitere Informationen abgerufen. Ferner erhält man dort nach Registrierung einen kostenlosen Zugang zur Lernumgebung eFATHOM. Benötigt wird lediglich ein Browser, der nicht älter als zwei Jahre sein sollte.

Lernenden in die Auswertung von Daten mit FATHOM ein. Die beiden weiteren behandeln zwei Methoden der stochastischen Simulation in FATHOM.

Jedes Modul von eFATHOM ist in sog. Lernelemente unterteilt, die entweder linear durchlaufen, oder zum Nachschlagen selektiv angesteuert werden können. Jedes Lernelement besteht seinerseits aus mehreren Seiten. Die Kern-Lernelemente sind:

- *Praxis*: Hier bekommt der Lernende anhand kurzer Tutorial-Videos beispielorientiert vermittelt, wie er mit FATHOM arbeiten kann. Er wird dabei dazu angehalten, die vorgestellten Inhalte in Eigenregie praktisch in FATHOM nachzuvollziehen.
- *Wissen*: Hier wird das Faktenwissen aus dem Praxisteil kurz und prägnant dargestellt und ggf. ergänzt.
- *Aufgaben & Anwendungen*: Hier kann der Lernende das neu erworbene Wissen festigen und erweitern. Ihm werden einerseits Ankreuzaufgaben angeboten, bei denen er eine Rückmeldung über seine gegebenen Antworten erhält, oder sog. hilfegestützte Anwendungsaufgaben. Dies sind umfangreichere Aufgaben, bzw. Simulationsaufträge, die in FATHOM durchzuführen sind. Kommt der Lernende nicht weiter, kann er über die angebotenen Hinweise gestufte Hilfe finden.

Diesen Kern-Lernelementen ist das Lernelement *Einführung* vorangestellt. Es präsentiert einen kurzen Überblick über die Inhalte und den Anwendungskontext des Moduls. Das Lernelement *Check-up* rundet das Modul mit einem kleinen Abschlusstest ab, der dem Lernenden Feedback darüber gibt, wie gut er die wichtigsten Inhalte des Moduls bereits verinnerlicht hat.

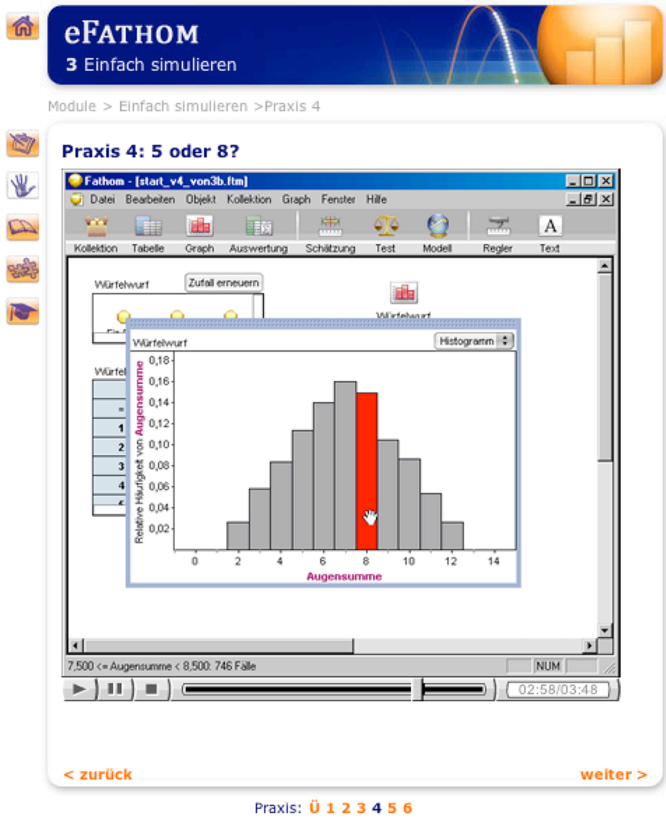
Das Layout von eFATHOM

Der gestalterische Aufbau von eFATHOM gründet auf den Design-Prinzipien, die aus der *Cognitive-Load-Theorie* von Sweller (CHANDLER & SWELLER, 1991) und der *kognitiven Theorie multimedialen Lernens* von Mayer (MAYER, 2005) abgeleitet werden. Beide Theorien gehören zu den einflussreichsten pädagogisch-psychologischen Theorien der letzten zehn Jahre (vgl. Brünken & Seufert, 2009). Auf diesen Design-Prinzipien aufbauend waren für eFATHOM folgende Prinzipien wichtig:

- *Paralleles Arbeiten*: Der Lernende soll die Möglichkeit haben zu jeder Zeit beide Programmfenster, das von eFATHOM, als auch das von FATHOM, im Blick zu haben, um in beiden Programmen gleichzeitig arbeiten zu können.
- *Video-Tutorials*: Die wesentlichen Lerninhalte sollen über Tutorial-Videos dargeboten werden.

- *Wenig Text*: Auf langen Fließtext soll weitgehend verzichtet werden. Der Lernende soll kein Onlinebuch durchlesen müssen, sondern sich mit den Möglichkeiten, die sich durch Multimedia eröffnen, die Lerninhalte aneignen – etwa anhand kleiner Tutorial-Videos und abwechslungsreicher interaktiver Aufgaben.
- *Ansprechendes Layout*: Die Lernumgebung soll funktional und zeitgemäß gestaltet sein.
- *Intuitive Bedienung*: Der Lernende soll eine Lernumgebung vorfinden, in der er sich ohne lange Einarbeitung schnell zurechtfindet.

Nebenstehende Abbildung zeigt beispielhaft eine Seite von eFathom, an der der gestalterische Aufbau erkennbar wird. Zu sehen ist ein Tutorial-Video aus Modul 3.



Die Evaluationen von eFathom

Es wurden insgesamt sechs Studien durchgeführt. In den ersten dreien wurde die Lernumgebung u. a. geprüft, ob technische Probleme auftraten, wie lang Lernende für die Bearbeitung eines Moduls benötigen und welche Akzeptanz eFathom bei den Lernenden findet. Mittels einer Screen-Capture-Software wurden die Bildschirmaktivitäten nebst Gesprächen der Lernenden aufgezeichnet, während sie mit eFathom gearbeitet haben. Dies ermöglichte genaue Einblicke in die Nutzungsweise der Lernumgebung. In den letzten drei Untersuchungen wurde u. a. eruiert, wie Lernende die Arbeit mit eFathom erleben. Ferner wurde untersucht, wie gut sich beim Lernenden Simulations-Kompetenzen mit eFathom im Vergleich zum traditionellen Lehrbuch (Biehler et al., 2006) entwickeln.

Probanden dieser Untersuchungen waren Fathom-Novizen aus der Sekundarstufe I (9. Klasse, Gymnasium) und Sekundarstufe II (13. Klasse), in deren Stochastikunterricht Fathom eingesetzt wurde, als auch GHR-Studierende der Lehrveranstaltung „Elementare Stochastik“ an der Universität Kassel, bei der konsequent Fathom als Werkzeugsoftware eingesetzt wurde. Über die verschiedenen Probanden zeichneten sich ähnliche Nutzungsverhalten und Meinungen zu eFATHOM ab.

Ausgewählte Ergebnisse zu eFATHOM

Zur Bearbeitung der Module 1 und 2 benötigt ein Benutzer jeweils ca. 40 Minuten, für die Module 3 und 4 jeweils etwa 60 Minuten. In der ersten Studie, an der 101 Studierende und 21 Schülerinnen und Schüler einer 9. Gymnasialklasse teilnahmen, wurde u. a. die offene Fragen gestellt: „Was hat Ihnen an der Lernumgebung gut gefallen?“ Die vielfältigen Antworten wurden kategorisiert. Ca. 43% aller Probanden hoben explizit die Erklärungen als gut hervor, ca. ein Drittel erwähnten die Tutorial-Videos, etwa ebensoviel empfanden, dass eFATHOM einen guten Überblick vermittelt und den Einstig in FATHOM erleichtert, ca. 16% betonten, eFATHOM sei übersichtlich und gut strukturiert. Auch wurde eine offene Frage nach Verbesserungsvorschlägen gestellt, dessen Antworten ebenfalls kategorisiert wurden. Insgesamt gab es zu bemängeln. 8% empfanden die Erklärungen als zu ausführlich. Ebenso 8% wünschten sich ein transparenteres Lernelement *Wissen*, welches daraufhin adressatengerechter gestaltet wurde.

Literatur

Biehler, R., Hofmann, T., Maxara, C., & Prömmel, A. (2006). *Fathom 2. Eine Einführung*. Berlin Heidelberg New York: Springer.

Maxara, C. (2009). *Stochastische Simulation von Zufallsexperimenten mit Fathom - eine Theoretische Werkzeuganalyse und explorative Fallstudie*. Hildesheim: Franzbecker.

Meyfarth, T. (2008). *Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe - Eine explorative Entwicklungsstudie*. Hildesheim: Franzbecker.

Brünken, R., & Seufert, T. (2009). Wissenserwerb mit digitalen Medien. In: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), *Online-Lernen Handbuch für Wissenschaft und Praxis*. München: Oldenbourg Verlag.

Mayer, R. E. (2005b). Cognitive Theory of Multimedia learning. In: R. E. Mayer (Hrsg.), *The Cambridge Handbook of Multimedia Learning* (S. 31-48). Cambridge: Cambridge University Press.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculators environments. In: D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Hrsg.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators. Turning a Computational Device into a Mathematical Instrument* (S. 137-162). New York: Springer.

Trouche, L. (2005). Instrumental genesis, individual and social aspects. In: D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche (Hrsg.), *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (S. 197-230). New York: Stringer.

Chandler, P., & Sweller, J. (1991). Cognitive load theory and the format of instruction. *Cognition and Instruction, 8*, S. 293-332.

Martin Erik HORN, Berlin

Eine Einführung in Pauli-Matrizen und Dirac-Matrizen: Reflexionen und Rotationen in Raum und Raumzeit

In den über 130 Jahren, die seit dem Tode Hermann Graßmanns vergangen sind, hat die didaktische Aufarbeitung seiner Ideen – wenngleich auch von vielen unbemerkt – deutliche und tiefgreifende Fortschritte gemacht. So liegen zwischen den Bemerkungen Sturms, Schröders und Söhncke in ihrem Nachruf auf Graßmann, dass die Behandlungsweise Graßmanns „keinem Vorgerücktem vorenthalten und keinem Lehrer der Mathematik fremd bleiben sollte" (Sturm et al. 1878, S. 32) und der Bemerkung Parra Serras (2009, S. 820), dass die Clifford-Algebra mittlerweile „der erstbesten Person, die man auf der Straße treffe, erklärt werden könne", Welten.

Nicht mehr nur mathematische Spezialisten, sondern bereits im schulischen Kontext Lernende können die Ideen Graßmanns und Cliffords kognitiv erfolgreich durchdringen und problemorientiert im Unterricht erarbeiten, wie Unterrichtsbeispiele im Schulbereich (siehe z. B. Hitzer 2008; Horn 2009) belegen. Doch was in der Sekundarstufe II gelingt, sollte auch im Bereich der Hochschullehre sowohl auf fachliche wie auch auf didaktische Vorteile hin untersucht und in der Lehre erprobt werden.

1. Mathematischer Kern der Geometrischen Algebra

Im Zentrum der Geometrischen Algebra steht die Idee Graßmanns, weiter ausformuliert durch Peirce und Clifford, direkt mit geometrischen Objekten zu rechnen. Dies ist eine zutiefst physikalische Idee. Während Mathematiker im Raum aller möglichen Algebren agieren und Physikern die Entscheidung überlassen, welche der unendlich vielen hypothetisch möglichen Algebren konkret zur Modellierung von physikalischen Sachverhalten herangezogen werden, stellt Graßmann von Anbeginn einen eineindeutigen Weltbezug her. Er konstruiert eine Algebra, die geometrische Gegebenheiten, wie wir sie real in unserer Lebenswelt vorfinden, umfassend abbildet.

Diese Geometrische Algebra Graßmanns wurde im Laufe der vergangenen 130 Jahre immer wieder unabhängig neu entdeckt, so auch von Pauli und

Pauli-Matrizen	$\Leftrightarrow$	Basisvektoren des dreidimensionalen Euklidischen Raumes
Dirac-Matrizen	$\Leftrightarrow$	Basisvektoren der vierdimensionalen Raumzeit

Abb. 1: Basiselemente der Geometrischen Algebra nach Gull et al (1993)

Dirac bei der Ausformulierung des quantenmechanischen Verhaltens von Elektronen (siehe Abb. 1). Die Äquivalenz von Pauli- bzw. Dirac-Matrizen und Basisvektoren der drei- bzw. vierdimensionalen Welt, in der wir leben, wurde im Weiteren von Hestenes (2003a, b) didaktisch aufgearbeitet.

2. Koordinatenperspektive und Operatorenperspektive

Die konzeptionelle Stärke der Geometrischen Algebra liegt dabei nicht nur in ihrer verbindlichen Anknüpfung an die geometrische Struktur unserer Welt begründet, sondern in der Einheitlichkeit ihrer Beschreibungsweise. Diese umfassende, strukturell eingeprägte Einheitlichkeit drückt sich unter anderem dadurch aus, dass Koordinaten und Operatoren durch identische Basiselemente dargestellt werden.

Diese Basiselemente werden von Penrose (2005, S. 209), sich auf Hestenes beziehend, als Basis-Reflexionen erkannt (siehe Abb. 2), wenn sie links- und rechtsseitig multiplikativ mit einen Ortsvektor verknüpft werden.

Pauli-Matrizen	⇔	Basis-Reflexionen des dreidimensionalen Euklidischen Raumes
Dirac-Matrizen	⇔	Basis-Reflexionen der vierdimensionalen Raumzeit

Abb. 2: Basisoperationen der Geometrischen Algebra

Ein beliebiger Ortsvektor des dreidimensionalen Euklidischen Raumes

$$\underline{r} = x\,\boldsymbol{\sigma}_x + y\,\boldsymbol{\sigma}_y + z\,\boldsymbol{\sigma}_z \qquad (1)$$

wird beispielsweise durch beidseitige Multiplikation mit $\boldsymbol{\sigma}_x$ in den an der x-Achse gespiegelten Ortsvektor

$$\underline{r}' = \boldsymbol{\sigma}_x\,\underline{r}\,\boldsymbol{\sigma}_x = x\,\boldsymbol{\sigma}_x - y\,\boldsymbol{\sigma}_y - z\,\boldsymbol{\sigma}_z \qquad (2)$$

überführt, wobei Assoziativität und Anti-Kommutativität der Basisvektoren $\boldsymbol{\sigma}_i$ genutzt werden.

3. Rotationen als mehrfache Reflexionen

Führt man zwei beliebige Reflexionen hintereinander aus, ergibt sich eine Rotation. Im dreidimensionalen Fall repräsentieren die Produkte zweier Pauli-Matrizen deshalb die quaternionischen Basiseinheiten ***i***, ***j*** und ***k*** (Doran & Lasenby 2003, S. 34). Im Fall der Raumzeit stellen die vierdimensionalen Rotationen sodann Lorentztransformationen dar.

Ein beliebiger Ortvektor der vierdimensionalen Raumzeit

$$\underline{\underline{\underline{r}}} = ct\,\boldsymbol{\gamma}_t + x\,\boldsymbol{\gamma}_x + y\,\boldsymbol{\gamma}_y + z\,\boldsymbol{\gamma}_z \tag{3}$$

wird durch beidseitige Multiplikation mit zwei Einheitsvektoren

$$\underline{\underline{\underline{n}}} = n_t\boldsymbol{\gamma}_t + n_x\boldsymbol{\gamma}_x + n_y\boldsymbol{\gamma}_y + n_z\boldsymbol{\gamma}_z \quad \text{und} \quad \underline{\underline{\underline{m}}} = m_t\boldsymbol{\gamma}_t + m_x\boldsymbol{\gamma}_x + m_y\boldsymbol{\gamma}_y + m_z\boldsymbol{\gamma}_z \tag{4}$$

in den hyperbolisch rotierten Ortsvektor

$$\underline{\underline{\underline{r}}}' = \underline{\underline{\underline{m}}}\;\underline{\underline{\underline{n}}}\;\underline{\underline{\underline{r}}}\;\underline{\underline{\underline{n}}}\;\underline{\underline{\underline{m}}} = ct'\,\boldsymbol{\gamma}_t + x'\,\boldsymbol{\gamma}_x + y'\,\boldsymbol{\gamma}_y + z'\,\boldsymbol{\gamma}_z \tag{5}$$

überführt, wobei gestrichene und ungestrichene Koordinaten das übliche Verhalten bei Lorentztransformationen zeigen. Die Lorentztransformation wird hier einzig durch Multiplikationen modelliert. Bei der Berechnung des Produktes ist das antikommutative Verhalten der Basiselemente und zum zweiten die der Speziellen Relativitätstheorie zugrunde liegende Metrik mit $\boldsymbol{\gamma}_t^2 = 1$ und $\boldsymbol{\gamma}_x^2 = \boldsymbol{\gamma}_y^2 = \boldsymbol{\gamma}_z^2 = -1$ zu berücksichtigen.

4. Didaktische Aspekte

Einer der entscheidenden Aspekte des hier vorgestellten Ansatzes ist die strukturelle Verknüpfung von Algebra und Geometrie. Jeder algebraische Ausdruck lässt sich in der Geometrischen Algebra geometrisch darstellen, und jede geometrische Situation lässt sich durch einen algebraischen Ausdruck beschreiben. Die Erfahrung im Unterricht zeigt, dass die Betonung und Nutzung dieser Verknüpfung direkt mit Einführung der Geometrischen Algebra einer der wesentlichen didaktischen Strategien darstellt.

Pauli-Matrizen werden deshalb nicht als Matrizen, sondern als Pauli-Vektoren bezeichnet und im Tafelbild durch Vektorpfeile repräsentiert. Produkte zweier verschiedener Pauli-Matrizen werden als Pauli-Bivektoren bezeichnet und im Tafelbild durch orientierte Flächenstücke repräsentiert. Im Rahmen dieses Ansatzes können wir mit Pauli-Matrizen arbeiten, ohne das Wort „Matrix“ auch nur zu erwähnen. Nicht die Repräsentation als 2 x 2-Matrix ist entscheidend, sondern deren geometrische Bedeutung.

Lernende werden im Bereich der Mathematik von Beginn ihrer Lernbiographie an nahezu ausschließlich mit kommutativen Beziehungen konfrontiert. Die Anti-Kommutativität der Pauli-Vektoren ist deshalb einer der Punkte, die für Lernende neu und ungewohnt erscheinen und einen Konzeptwechsel erforderlich machen. Auch dieser Sachverhalt kann unter Rückgriff auf geometrische Konzepte (wie zum Beispiel dem Orientierungssinn unterschiedlicher Flächenstücke) didaktisch geklärt werden.

5. Erfahrungen bei der Umsetzung im seminaristischen Unterricht

Nachdem die Modellierung der Speziellen Relativitätstheorie im Rahmen des hier vorgestellten Ansatzes mit gutem Erfolg in einem Berliner Physik-

Leistungskurs unterrichtet und im Abitur abgeprüft wurde (Horn 2009), wurde ein ähnliches Konzept im Rahmen einer Vorlesung zur Physik für Mathematiker an der Beuth-Hochschule für Technik Berlin erprobt. Die verwendeten Materialien werden in Kürze in (Horn 2010) veröffentlicht.

Es gelang, die Studierenden am Beispiel der Speziellen Relativitätstheorie in die Denk- und Arbeitsweisen naturwissenschaftlicher Erkenntnisgewinnung einzuführen und ein übergreifendes Verständnis der modellhaften Verknüpfungen zwischen Geometrischer Algebra und relativistischen Phänomenen zu entwickeln. Im Unterschied zum schulischen Vorgehen, bei dem der Schwerpunkt auf den Koordinatenaspekt gelegt wurde, wurde hier versucht, die Verknüpfung zwischen Operatoren- und Koordinatenperspektive in den Vordergrund zu stellen. Dies gelang nicht ganz so vollständig wie geplant, da einerseits die zeitlichen Vorgaben (6 Vorlesungsstunden im Vergleich zu 25 Schulstunden) enge Grenzen setzten.

Darüber hinaus zeigt sich, dass die konzeptuelle Vorprägung der Studierenden auf ihnen schon bekannte Konzepte weit stärker ist als bei Schülern. Eine der Schlussfolgerungen ist deshalb, die Geometrische Algebra möglichst frühzeitig zu behandeln, und den Vorschlag Parra Serras (2009), dafür die curricularen Voraussetzungen zu schaffen, zu unterstützen.

Literatur

Doran, C., Lasenby, A. (2003). *Geometric Algebra for Physicists*. Cambridge: CUP.

Gull, S., Lasenby, A. & Doran, C. (1993). *Imaginary Numbers are not Real – The Geometric Algebra of Spacetime*. Foundations of Physics, Vol. 23, No. 9, S. 1175 - 1196.

Hestenes, D. (2003a). *Reforming the Mathematical Language of Physics*. Oersted Medal Lecture. American Journal of Physics. Vol. 71, No. 2, S. 104 – 121.

Hestenes, D. (2003b). *Spacetime Physics with Geometric Algebra*. American Journal of Physics. Vol. 71, No. 7, S. 691 - 714.

Hitzer, E. (2008). Vectors and Complex Numbers. Script for four 45 min classes held at Fujishima Super Science High School in Fukui. Japan, 11. Jan. - 1. Feb. 2008.

Horn, M. E. (2009). *Vom Raum zur Raumzeit*. In D. Höttecke (Hrsg.): Chemie- und Physikdidaktik für die Lehramtsausbildung. GDCP-Band 29. Berlin: LIT-Verlag Dr. W. Hopf, S. 455 - 457.

Horn, M. E. (2010). *Die Spezielle Relativitätstheorie in der Mathematikerausbildung*. Zur Veröffentlichung vorgesehen in V. Nordmeier (Hrsg.): Didaktik der Physik. Beiträge zur Frühjahrstagung der DPG in Hannover, Beitrag 19.35.

Parra Serra, J. M. (2009). Clifford Algebra and the Didactics of Mathematics. Advances in Applied Clifford Algebras. Vol. 19, No. 19, S. 819 - 834.

Penrose, R. (2005). *The Road to Reality.* London: Vintage Books.

Sturm, R., Schröder, E. & Sohncke, L. (1878). *Hermann Grassmann – Sein Leben und seine mathematisch-physikalischen Arbeiten*. Mathematische Analen, Band 14, Heft 1, S. 1 - 45.

ALENA HOŠPESOVÁ, JANA KOUŘILOVÁ, YVONA MAZEHÓOVÁ,
České Budějovice

Mosaiken als substanzielle Lernumgebungen

1. Einleitung

Der Geometrieunterricht auf der Primarstufe der Grundschule ist in Tschechien ein relativ junger Bestandteil des Curriculums. Ende der achtziger Jahre stützte er sich in den damaligen tschechoslowakischen Lehrplänen auf ein modifiziertes axiomatisches Modell der euklidischen Geometrie. Dies war zweifelsohne nicht dem Alter der Schüler angemessen. Die logische Konstruktion der Geometrie fordert von den Schülern die Fähigkeit, auf einer formellen, deduktiven Ebene zu denken. Dazu sind sie am Anfang ihrer Grundschulbildung für gewöhnlich nicht im Stande, zudem mangelt es ihnen an den notwendigen geometrischen Vorkenntnissen (van Hiele, 1999). Diese Situation führte zu (a) einer Diskrepanz zwischen dem Denkniveau der Schüler und dem Niveau, das die zu erlernende Geometrie von ihnen forderte; (b) einem Desinteresse der Kinder an der Geometrie, das auch während der weiterführenden Schulbildung andauerte.

Die Lehrbuchreihen, die nach 1989 entstanden, basieren zwar stärker auf den natürlichen Erfahrungen der Schüler; halten sich jedoch meistens an die Reihenfolge der Begriffe nach dem Diktat des axiomatischen Systems. Auf einem sehr einfachen Niveau werden Begriffe wie „Gerade", „Halbgerade", „Dreieck" und andere gehandhabt. Ihr praktischer Nutzen ist für die Kinder jedoch gering und sie können ihren Sinn nicht erschließen. Aus Gesprächen mit Lehrern geht hervor, dass sie sich mit Geometrie keinen Rat wissen und dass dieses Thema eines der ersten ist, das sie bei Zeitmangel auslassen.

2. Das Projekt NaDiMa, substanzielle Lernumgebungen und natürliche Differenzierung

Seit 2008 nehmen wir im Rahmen des Programms Comenius zusammen mit unseren Kollegen aus Polen, Deutschland und den Niederlanden am Projekt „Motivation durch natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht" (NaDiMa) teil. Ziel des Projektes ist die methodische Erarbeitung mehrerer Lernumgebungen, die eine natürliche Differenzierung der Schüler unterstützen sollen und die in der Schulpraxis erprobt werden.

Unter Lernumgebungen verstehen wir im Einklang mit Wittmann (2001, 194) *substanzielle Lernumgebungen*. In unserem Verständnis der *natürli-*

chen Differenzierung gehen wir vom folgenden Ansatz aus: alle Schüler in der Klasse bekommen dieselbe Aufgabenstellung, die so konzipiert ist, dass sie jeder Schüler individuell mit Hilfe seiner aktuellen Fähigkeiten lösen kann. Die Lösungswege, Mittel und Hilfsmittel, die Art und Weise der Aufzeichnung sowie die Aufgabe, mit der er sich befassen wird, stehen dem Schüler frei (vgl. Krauthausen & Scherer, 2010).

Das Team aus České Budějovice beschloss eine geometrische Lernumgebung auszuarbeiten, die den Namen *Mosaiken* bekam. Als Lehrmittel machten wir von dem Mosaik geometrischer Formen und vom Legespiel Tangram Gebrauch.

3. Die Unterrichtserprobung

Die Unterrichtserprobung umfasste elf aufeinander folgende Geometriestunden in einer 2. Klasse Grundschule. Da in der Klasse ungefähr einmal pro Woche eine Stunde Geometrie unterrichtet wurde, erstreckte sich die Unterrichtserprobung über drei Monate. Vor der Unterrichtserprobung und auch danach wurden alle Kinder von zwei Psychologinnen getestet, um feststellen zu können, ob sich die besondere Unterrichtsgestaltung auf die Motivation der Kinder für die Mathematik ausgewirkt hat. Die Tests beurteilten ferner die kognitiven Fähigkeiten, die Wahrnehmung sowie der Persönlichkeit der Kinder.

Der Unterricht wurde von einer der Verfasserinnen dieses Beitrags zusammen mit der Lehrerin vorbereitet. Dabei wurde über das Unterrichtsziel in Bezug auf die Curriculumsdokumente sowie über den Zusammenhang mit wichtigen geometrischen Begriffen diskutiert. Vom Egebnis der Diskussion ausgehend wurden die Aufgaben formuliert und bis auf eventuelle Fragen für die abschließende Diskussion mit den Schülern heruntergebrochen. Der Unterricht wurde von einer der Verfasserinnen erteilt. Die Stunde wurde auf Video aufgezeichnet und alle Arbeiten der Schüler wurden eingesammelt. Nach einer gemeinsamen Analyse wurde von uns die nächste Unterrichtstunde vorbereitet.

Im Rahmen der Unterrichtserprobung lösten die Kinder nach und nach verschiedene Aufgaben, bei denen sie Formen des Mosaiks oder des Tangrams zusammenlegten, z.B.: (a) bilde Formen anhand der Vorlage, (b) bilde Formen aus 2, 3, 4 Formen des Mosaiks und benenne sie; (c) Bilde Formen aus 2, 3, 4 Quadraten/Dreiecken des Mosaiks.

Unsere Vorgehensweise soll nun anhand der Lösung der Aufgaben mit einem „Quadrat, das in zwei Teile aufgeteilt ist“ illustriert werden.

Die Kinder bekamen ein quadratisches Stück Papier, das in zwei Teile zerschnitten war (siehe Abb.1). Die Aufgabenstellung lautete: *Lege aus den zwei Mosaikteilen Formen zusammen, indem du gleich lange Seiten miteinander verbindest. Wenn du weißt, wie die Formen heißen, schreibe die Namen der Formen dazu. Zeichne/ziehe die gefundenen Formen auf Papier nach oder zeichne sie in ein Punktraster ein.*

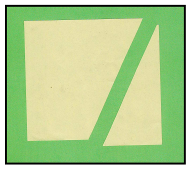


Abb.1

Wie haben die Kinder die Aufgabe gelöst? Ziel der Aufgabe war die Vertiefung der Vorstellungen über Polygone. Unsere Annahme, dass die Schüler eine unterschiedliche Anzahl von Formen finden werden, bestätigte sich: Nur ein einziger Schüler kam auf alle 8 Formen. Beim Lösen der Aufgabe verglichen die Kinder identische Seiten, drehten die Formen, entschieden, ob sie etwa nicht schon mit jenen Formen übereinstimmen, die sie bereits zusammengelegt haben.

Die Differenzierung wurde auch dadurch ermöglicht, dass die Kinder selbst entscheiden durften, ob sie die Ergebnisse auf Papier nachzeichnen/nachziehen oder ob sie die Form in ein Punktraster übertragen. Die Zeichnungen der Kinder waren natürlich nicht genau. Voraussetzung für die richtige Einzeichnung in das Punktraster war die Anwendung der geometrischen Ähnlichkeit. Manche Kinder hatten damit bei einigen Formen Probleme. Auf der Videoaufzeichnung haben wir einige Momente gefunden, in denen sie das mit ihren Worten kommentieren: „Ich soll ein Quadrat zeichnen, aber so ein schiefes". „Das ist ein langes Dreieck. Ich muss es kleiner machen, damit es da hineinpasst".

An diese Aufgabe knüpfte eine weitere an. Die Kinder bekamen ein quadratisches Stück Papier und folgende Aufgabenstellung: *Zerschneide das Quadrat mit einem geraden Schnitt in zwei beliebige Teile (die Lehrerin ergänzte die Vorgabe, indem sie es vormachte). Bilde aus diesen Teilen Formen. Versuche das Quadrat so zu zerschneiden, dass daraus so viele Formen wie möglich entstehen.* In der anschließenden Diskussion wollten wir zu dem Schluss kommen, dass die Anzahl der möglichen Lösungen der Aufgabe davon abhängig ist, wie viele Paare identischer Seiten die entstandenen Formen haben.

Die Lösungen der Schüler zeigen, dass es für sie schwierig war, die Aufgabenstellung überhaupt zu begreifen. Sie zerschnitten das Quadrat anders als vorgegeben wurde bzw. verbanden die Formen falsch. Am besten setzte sich mit dem Problem ein Schüler der seine Lösungen auf Abb. 2 aufzeichnete.

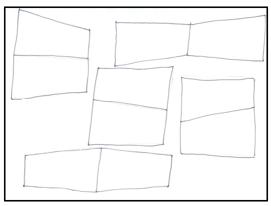


Abb. 2

Die Ergebnisse der psychologischen Untersuchung zeigten, dass nach der Unterrichtserprobung bei den Kindern auf der verbalen Ebene eine eindeutige Motivationssteigerung im Bereich Mathematik zu erkennen ist. Im kognitiven Bereich kam es im Vergleich mit den ursprünglichen Leistungen zu einer durchschnittlichen Verbesserung um 23,4 %. Diese Leistung überragt deutlich die Fortschritte, die im Laufe von drei Monaten üblich sind.

4. Diskussion

Wir müssen vor allem Antwort darauf geben, ob wir *Mosaiken* für eine substanzielle Lernumgebung halten können. Unserer Meinung nach erfüllen *Mosaiken* alle von Wittmann geforderten Charakteristiken. Für die Lehrer kann es aber schwierig sein, sich ihrer bewusst zu werden. Vor allem das Formulieren von Fragen, die den Kindern dabei helfen würden, ihre intuitive Tätigkeit zu verbalisieren, in deren Hintergrund sich kompliziertere geometrische Begriffe befinden (z.B. Kongruenz), stellt hohe Ansprüche an die Geometriekenntnisse des Lehrers.

Als im zweiten Schuljahr schwer erfüllbar erwies sich die Forderung nach einer natürlichen Differenzierung der Klasse, die ja eine der Projektaufgaben ist. Wir haben den Kindern ermöglicht, die Lösung der Aufgaben auf unterschiedliche Art und Weise aufzuzeichnen. Dabei stellte sich heraus, dass die Kinder die Aufzeichnung der Ergebnisse durch Zeichnen erst ausprobieren müssen. Einige Ergebnisse waren dennoch überraschend gut. Erst in den letzten Unterrichtsstunden hatten wir den Eindruck, dass die Schüler im Stande waren eine gezieltere Auswahl der Aufzeichnungsmethode zu treffen.

Literatur

Krauthausen, G., Scherer, P. (2010). Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule. *Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen.* Kiel: IPN-Materialien.

Van Hiele, P.M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities that Begin with Play. *Teaching Children Mathematics*, 310-316.

Wittmann, E. Ch. (2001). Mathematics in Designing Substantial Learning Environments. In M. Van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *PME 25. Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1,*). Utrecht: Freudenthal Institute, pp. 193-197.

Anmerkung: Die Untersuchung wurde im Rahmen des Programms Comenius mit Mitteln des Projektes Nr.142453-LLP-1-2008-1-PL-COMENIUS-CMP gefördert.

Anna-Marietha HÜMMER, Frankfurt am Main

Mathematische Denkentwicklung und ihre Supports

Der vorliegende Beitrag ordnet sich ein in eine Longitudinalstudie zur mathematischen Denkentwicklung im Vorschul- und Grundschulalter am Center for Research on **I**ndividual **De**velopment and **A**daptive Education of Children at Risk (IDeA). Grundlage ist eine sozial-konstruktivistische Sicht auf Lernen und kognitive Entwicklung von Kindern, welche die Unterstützung (Support) in der Interaktion mit Kindern als konstitutives Element ihrer Entwicklungen sieht. Als zentrale Begriffe dieser Entwicklungstheorie werden der der „Zone der nächsten Entwicklung" im Sinne Vygotskys und der des „Formats" nach Bruner aufgegriffen. Anhand empirischer Befunde werden hierfür erste theoretische Präzisierungen und Perspektiven zur theoretischen Weiterentwicklung aufgezeigt.

1. Mathematische Denkentwicklung im Kindergartenalter

Ein Ansatz zur Beschreibung und Erforschung mathematischer Denkentwicklung ist es singulär spezifische Inhaltsbereiche wie z.B. den der Arithmetik zu fokussieren. Dabei werden isolierte Bereiche mit vermeintlich besonderer Anfälligkeit für Dispositionen in der Entwicklung primärer mathematischer Fähigkeiten und Kompetenzen herausgegriffen und singulär auf einer Inhaltsebene betrachtet und durch kognitive Dispositionen innerpsychisch begründet. In Hinsicht auf die mathematische Denkentwicklung besonders im Kindergartenalter ist jedoch eine Gesamtschau mathematischer Denkentwicklung über alle mathematischen Inhaltsbereiche hinweg von besonderem Interesse. Hierdurch werden die vielfältigen inhaltlichen Verknüpfungen zwischen mathematischen Inhaltsbereichen, die eventuell einen entscheidenden Beitrag zur mathematischen Denkentwicklung leisten, differenzierter betrachtet. Fokussiert werden soll hierbei unter anderem, welche der vielfältigen Verknüpfungen Kinder im Kleinkind- und Vorschulalter innerhalb von Interaktionen aufgreifen und sich für die Konstruktion ihres mathematischen Wissens zu nutze machen. Im Gegensatz zu einer psychologischen Sicht, welche die "ursächlichen Mechanismen" (Oevermann u.a. 1976, S.371) für das Lernen in das sich bildende Subjekt hinein verlegt, soll hier eine soziologisch-interaktionistische Perspektive auf Lernen und Denkentwicklung eingenommen werden. Die Unterstützung innerhalb von Interaktionen wird dabei als konstitutives Element mathematischer Entwicklung gesehen. Interaktionen mit unterstützendem bzw. lernförderlichem Charakter sollen im Folgenden Supports genannt werden.

2. Support-Systeme und das Format

Bruner (1987) entwickelt parallel zu Vygotsky (1978) einen Theorieansatz, in dem Lernen nicht mehr allein innerpsychisch verortet wird. Vielmehr konstituiert sich Lernen nach Bruner (1987) situationsabhängig und weist somit eine externale Komponente auf. Bruners Arbeiten beziehen sich hierzu auf der empirischen Ebene vorwiegend auf den Erwerb der Muttersprache. Er postuliert eine Dualität zwischen Spracherwerb und sozialer Funktion (vgl. Bruner 1987, S.88). Er konzeptualisiert Lernen und Erwerb als Prozesse, die durch ein sogenanntes Support-System ermöglicht werden, welches von einem in der Sache kompetenteren Gegenüber moderiert wird. Hinsichtlich des Mutterspracherwerbs, den Bruner untersucht, sieht er dieses „Language Acquisition Support System" (LASS) (ebd., S.32) als notwendig für die Aktivierung angeborener Spracherwerbsfähigkeit. Auf empirischer Ebene rekonstruiert Bruner „Formate" (ebd., S.33), denen er eine derartige supportive Funktion zuschreibt. Nach Bruner ist ein Format „ein standardisiertes Interaktionsmuster zwischen einem Erwachsenen und einem Kleinkind, welches als ursprünglicher Mikrokosmos feste Rollen enthält, die mit der Zeit vertauschbar werden" (ebd., S. 103). Zunehmende Autonomie innerhalb der Formate wird unter Bruners Perspektive als Indikator eines Lernfortschrittes gesehen. Lernen beginnt, wenn Erwachsener und Kind „einen vorhersagbaren *Interaktionsrahmen* schaffen, welcher als Mikrokosmos für die Kommunikation und die Definition einer gemeinsamen Realität dienen kann" (ebd., S.14). In diesem Interaktionsrahmen finden „Prozesse des Deutens und Verhandelns" (ebd., S.17) statt.

3. Rahmung

Im Rahmen dieser Bedeutungsaushandlung in Interaktionen werden die unterschiedlichen individuellen Situationsdefinitionen der an einer Situation Beteiligten bedeutsam. Mit Blick auf diese individuellen Deutungsprozesse und -leistungen im interaktiven Aushandlungsprozess soll hier auf den Begriff der Rahmung von Goffman (1980) zurückgegriffen werden. Er versteht darunter die unbewusste Nutzung von durch Sozialisation erworbener Erfahrungsschemata, die es einer Person ermöglichen eine für sie selbst sinnvolle Deutung von Situationen bzw. Interaktionen vorzunehmen. Im Abgleich von Rahmungsunterschieden im Zuge einer interaktiven Bedeutungsaushandlung können sich für die Beteiligten zunächst situativ neue Einsichten eröffnen, die unter bestimmten Umständen zu einer Weiterentwicklung der Deutungsmöglichkeiten führen. Führt dies bei einem Beteiligten zu neuen stabilen Deutungsweisen, so sprechen wir von der Konstruktion einer neuen Rahmung, d.h. von neuem Wissen. Der Prozess einer Bedeutungsaushandlung kann also lernförderliche Momente enthalten. Interessant dabei ist die Konstruktion solcher Rahmungen in Bezug auf die mathematische Denkentwicklung von Kindern innerhalb von Interaktionen mit supportivem Charakter. Im Mittelpunkt der Identifizierung und Rekonstruktion derartiger sozialer, interaktionaler Unterstützungssysteme steht die Frage, in welcher Weise Supports eine Umstrukturierung von Rahmungen ermöglichen und beeinflussen und so zu einer Umstrukturierung oder Weiterentwicklung von mathematischen Denkweisen bei den Kindern beitragen.

4. Semantische und inhaltliche Komplexität mathematischer Supports

Krummheuer (1989) konzeptualisiert einen ersten Ansatz zur Beschreibung der Struktur solcher Supports im Rahmen seiner interaktionistisch-argumentationstheoretischen Theorien. Er beschreibt, dass es während mathematischer Interaktionen zu sogenannten Veranschaulichungssituationen kommen kann. Diese können gleichsam als Begründungssituationen gesehen werden, in denen die Interakteure Lösungswege oder Beweise sowohl ikonisch-graphisch oder auch enaktiv, z.B. durch Inskriptionen, veranschaulichen. In diesen Begründungssituationen können, wie dies Krummheuer darstellt, ggf. „Argumentationsformate“ (ebd., S.242) emergieren, welche als Struktur für sozial haltbare Argumentationen dienen. Durch dieses Format wird es dem einzelnen Schüler mit wachsender Autonomie möglich, eigene Argumentation gemäß einer gegebenen Beweislogik zu entwerfen. Jedoch muss die interaktionistisch-argumentationstheoretische Sichtweise von Krummheuer auf das Veranschaulichen als ein Argumentationsformat mit Blick auf eine alle Inhaltsbereiche umfassende mathematische Denkentwicklung von Kindern stärker durch eine inhaltlich-mathematische Sichtweise ergänzt bzw. modifiziert werden. Wie aus den empirischen Daten der Studie erStMaL (**ea**r**l**y **St**eps in **Ma**thematics **L**earning) zur mathematischen Denkentwicklung bei Kindern im Kindergartenalter im Rahmen des IDeA-Forschungszentrums hervorgeht, greifen Kinder z.B. in einer arithmetisch konzipierten Spielsituation nicht ausschließlich auf eine arithmetische Begründungslogik zurück, sondern variieren individuell in der Konzeption ihrer Lösungsstrategien zwischen verschiedenen mathematischen Bereichen. So ist zu beobachten, dass Kinder in einer Situation, welche das „gerechte“ oder gleiche Verteilen von acht Nüssen auf zwei Fingerpuppen als ein fundamentales Prinzip der Division thematisiert, auf geometrische Anordnungen zurückgreifen. Initiiert werden diese geometrischen Anordnungen in der Situation zunächst durch die Erwachsene, die vier von den Kindern in eine Reihe gelegte Nüsse über einen topologisch erfassbaren Begriff von „räumlicher Zugehörigkeit“ in Paaren jeweils einer Fingerpuppe zuordnet. Diese geometrische Anordnung wird von einem der Kinder aufgegriffen und im Folgenden scheinbar zur Verifizierung des Verteilprozesses durch einen Abgleich der Mächtigkeit über die Kongruenz der geometrischen Figuren genutzt, indem er weitere Nüsse so anordnet, dass sie die Eckpunkte ebener geometrischer Figuren (Dreieck, Quadrat) bilden. Mit den Nüssen im Beispiel wird demnach weniger eine Veranschaulichung als vielmehr eine alternative, geometrische Rahmung supportiert. Man kann demnach von einer geometrischen Formatierung der Situation bzw. des Supports sprechen.

Hierbei wird deutlich, dass anders als im Spracherwerb, der die Grundlage für Bruners Ansatz bildet, Mathematik eine spezifische semantische bzw. inhaltliche Komplexität aufweist. Für die Beschreibung mathematischer Formate ergibt sich für eine mathematikdidaktische Forschung daher die Notwendigkeit, die Thematisierungen von verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen und ihr flexibles Aufeinander-Bezugnehmen aufzugreifen. Der Begriff des „Formats" sowie in zweiter Instanz der Begriff der „Zone der nächsten Entwicklung" von Vygotsky (1978), den Bruner in späteren Arbeiten durch das sogenannte „Scaffolding" (Bruner 1986, S.70ff) als eng mit Interaktionsformaten verknüpft ansieht, als Strukturierungsmuster mathematischer Lern- und Erwerbsprozesse benötigen eine theoretische Weiterentwicklung in Hinblick auf Besonderheiten mathematischer Interaktionsprozesse. Diese Weiterentwicklung soll anhand weiterer empirischer Befunde vorgenommen werden. Durch eine Schnittstellenbetrachtung zwischen dem Support-System mathematischer Lern- und Erwerbsprozesse und mathematischem Lern- und Erwerbsprozess selbst sollen so Rückschlüsse auf kognitive mathematische Umstrukturierungsprozesse der Rahmungen von Kindern gezogen werden.

Literatur

Bruner, J.S. (1986). *Actual Minds, Possible worlds*. Cambridge: Harvard University Press.

Bruner, J.S.(1987). *Wie das Kind sprechen lernt*. Bern: Verlag Hans Huber.

Goffman, E. (1980). *Rahmen-Analyse*. Frankfurt a.M.: Suhrkamp.

Krummheuer, G. (1989). Die Veranschaulichung als "formatierte" Argumentation im Mathematikunterricht. *Mathematica Didactica, 12,* 225-243.

Oevermann, U., Allert, T., Gripp, H., Konau, E., Krambeck, F.(1976). Beobachtungen zur Struktur der sozialisatorischen Interaktion. Theoretische und methodologische Fragen der Sozialisationsforschung. In: Auwärter, M., Kirsch, E., Schröter, M.(Hrsg.), *Seminar: Kommunikation Interaktion Identität*. Frankfurt: Suhrkamp.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in Society: Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.

HANS HUMENBERGER, Wien

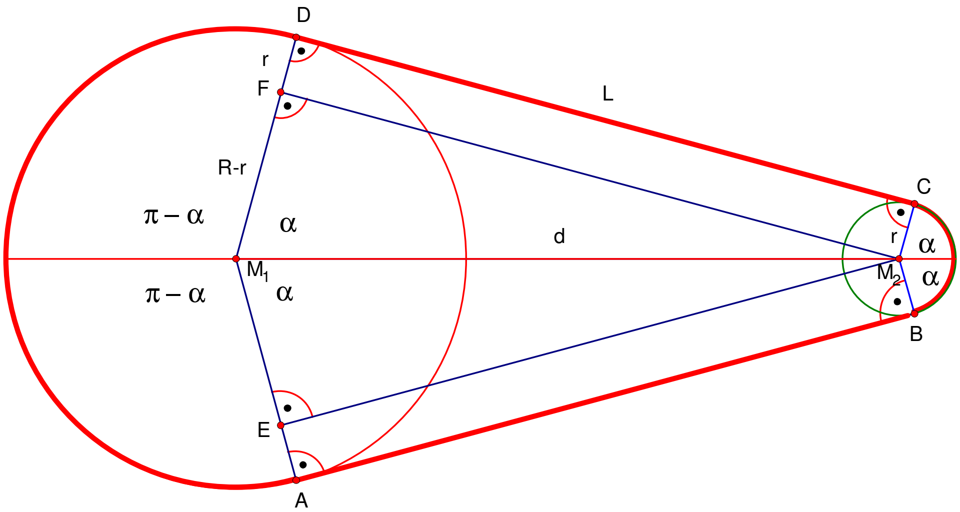
Riemengetriebe mit Zylindern und Kegeln

Im Maschinenbau sind immer wieder Riemengetriebe anzutreffen, auch heute noch, obwohl sie früher natürlich viel weiter verbreitet waren. In früheren Werkstätten ging die ganze Energieerzeugung von einer einzigen Quelle aus (z. B. Mühlrad oder Dampf) und wurde dann mittels zahlreicher Riemengetriebe auf die einzelnen Maschinen übertragen.

Man hat dabei oft das folgende Problem zu lösen **(A)**:

- Wie lang muss der Riemen sein, wenn man den Achsenabstand und die beiden Radien der beteiligten „Riemenscheiben" kennt?

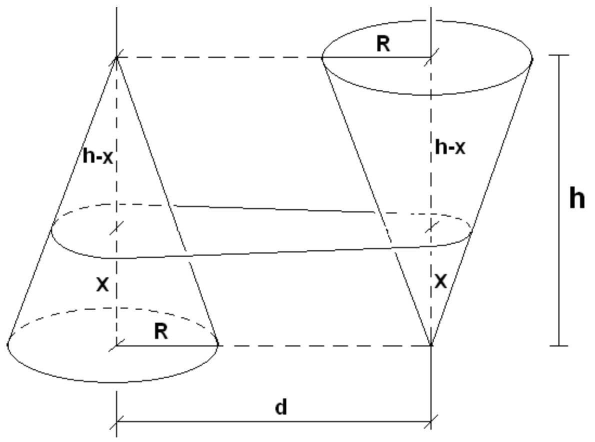
Dieses Problem kann einerseits als – relativ anspruchsvolle – Modellierungsaufgabe für Schüler(innen) formuliert werden (insbesondere in Technischen Gymnasien) oder andererseits als innermathematische Aufgabe zum selbständigen Erklären, indem Skizze und fertige Formel vorgegeben werden: „Erkläre die Formel, wie kommt sie zustande?" Auch in dieser Form müssen die Schüler(innen) wertvolle Aktivitäten an den Tag legen: Skizze interpretieren, Erkennen der Zusammenhänge (rechtwinkliges Dreieck M_1M_2F, Parallelität von M_1D und M_2C – Winkel α, etc.).



$$L = 2\left(\sqrt{d^2 - (R-r)^2} + (r-R)\cdot \arccos\frac{R-r}{d} + \pi \cdot R\right) \qquad (1)$$

Eine weitere Aufgabe **(B)** für Schüler(innen) könnte im Zusammenhang mit Riemengetrieben auch so gestellt werden (vgl. Busse 2009, S. 45):

Als Riemen denken wir uns ein dünnes elastisches Gummiband und als „Riemenscheiben" zwei kongruente Kegel (Basisradius R und Höhe h) mit Achsenabstand d (es soll klarer Weise $d > R$ gelten), wobei einer der beiden auf seiner Spitze steht.

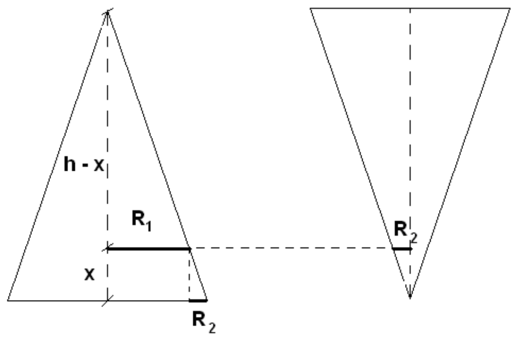


Angenommen, hier angelegte Gummibänder als „Riemen" bleiben beim Betrieb stabil auf der jeweiligen Höhe und parallel zu den Grundflächen. Auf welcher Höhe x muss man dann ein Gummiband setzen, wenn man ein „Übersetzungsverhältnis" 1 : 3 (bzw. 5 : 2) zwischen den Rotationsgeschwindigkeiten haben will? Welche Übersetzungsverhältnisse $a : b$ sind hier theoretisch überhaupt denkbar? Auf welcher Höhe muss das Gummiband dafür angelegt werden?

Die Schüler(innen) müssen dabei erkennen, dass das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten bzw. der „Umdrehungen pro Minute" ($u_1 : u_2$) durch das reziproke Verhältnis der beiden beteiligten Radien gegeben ist und dieses wiederum durch das Verhältnis der beiden Teilstrecken x und $h - x$ auf der Achse (Höhe).

$$u_1 : u_2 = R_2 : R_1 = \boxed{x : (h - x) \overset{!}{=} a : b}$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{a+b} \cdot h$$



Theoretisch ist hier also jedes vorgegebene Verhältnis $a : b$ denkbar, *praktisch* – bei festen vorgegebenen Kegeln – wohl nicht, da man mit Gummibändern der Spitze nicht beliebig nahe kommen kann. Hier ist wieder eine gute Gelegenheit, über die Unterschiede zwischen dem mathematischen Modell und der Realität nachzudenken. Dass diese fragliche Höhe x, um das Übersetzungsverhältnis $a : b$ zu erreichen, nicht von der Achsendistanz d abhängt, ist wohl ziemlich klar, aber dass sie gar nicht vom Basisradius R der Kegel abhängt, ist für manche vielleicht überraschend.

In einem Unterricht sollten an dieser Stelle auch konkrete **Experimente** nicht fehlen („Mathematik zum Begreifen"); dazu kann man z. B. Holzkegel (erhältlich in einem Laden für Holzspielzeug) relativ genau durchbohren und sie auf festen Drehachsen montieren. Als Riemen können Gummiringe dienen. Hier kann man dann gut testen, ob die ausgerechnete Höhe für z. B. das Übersetzungsverhältnis 1 : 3 passt.

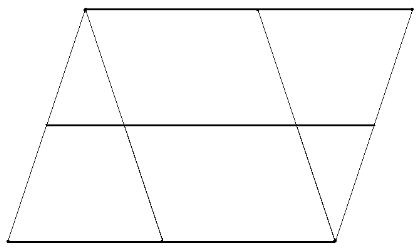
Wenn Schüler(innen) diese Aufgaben selbständig bearbeiten und sinnvolle Ergebnisse bekommen, so ist dies schon eine gute Leistung.

Bei leistungsstärkeren Klassen könnte man noch eine interessante dazu passende Frage anschließen:

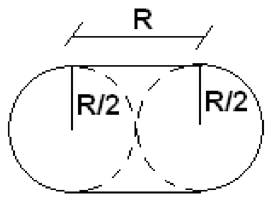
(C) Die Länge des Gummibandes auf verschiedenen Höhen

Wie entwickelt sich die Länge des Gummibandes in den möglichen Lagen (hier ist wieder parallel zu den Kegelgrundflächen gemeint) von oben nach unten bzw. von unten nach oben? Es ist klar, dass die Entwicklung symmetrisch um die Mitte erfolgt, aber nimmt die Länge zur Mitte hin zu oder ab, oder verändert sich die Länge des Gummibandes dabei vielleicht überhaupt nicht?

Ein Achsenschnitt (Aufrissdarstellung) verleitet vielleicht zur trügerischen Vermutung, dass die Bandlänge immer konstant bleibt („Parallelogramm-Argument"):



In einem leichten Spezialfall kommt man aber unmittelbar zur Tatsache $L_{\text{Mitte}} < L_{\text{Rand}}$ (auch durch Messen kommt man auf diese Vermutung):
Wir nehmen $d = R$ (d. h. die Kegel haben keinen Abstand). Dann ist das Gummiband am oberen bzw. unteren Rand ein Kreis mit Radius *R*: $L_{\text{Rand}} = 2\pi R \approx 6R$; in der Mitte ergibt sich die rechts abgebildete Konstellation:



$$L_{\text{Mitte}} = 2\frac{R}{2}\pi + 2R = R(\pi + 2) \approx 5R < 6R \approx L_{\text{Rand}}.$$

Auch im allgemeinen Fall $d \geq R > 0$ kann man auf einige Arten bestätigen, dass immer $L_{\text{Mitte}} < L_{\text{Rand}}$ gilt, was hier aber aus Platzgründen nicht ausgeführt werden kann.
Mit Hilfe von Formel (1) kann man sogar relativ leicht zu einer Funktion kommen, die die Längenentwicklung des Gummibandes in Abhängigkeit der Höhe beschreibt. Dabei kann man auch *analytisch* leicht bestätigen, dass das Minimum der Gummibandlänge auf halber Höhe ist.

Dieses Thema hat ein hohes fachdidaktisches Potential, d. h. viele wertvolle, in neuerer Zeit von der Fachdidaktik immer wieder geforderte Charakteristika aufzuweisen. Wir geben im Folgenden eine kurze stichwortartige Zusammenfassung einiger Punkte:

- Die Fragestellungen haben durchaus Realitätsbezug und sind als Modellierungsaufgabe auch im Regelunterricht gut geeignet, insbesondere in Technischen Gymnasien.

- Das Ausmaß der Hilfestellung kann gut dosiert werden, die Aufgabe ist also nicht von der Sorte: entweder alles oder nichts verraten.

- Ausgehend von einem konkreten (nicht allzu schwierig nachzubauenden) Phänomen kann hier prozessorientiert substanzielle Mathematik betrieben werden.

- Das Thema bietet eine gute Gelegenheit für Vernetzungsmöglichkeiten: Geometrie, Trigonometrie, Funktionen, Differentialrechnung, Grenzwerte, Ungleichungen, Begründungen, etc.

- Neue Medien (CAS) kommen zu einem sinnvollen Einsatz: Zeichnen von Graphen, (näherungsweises) Lösen von Gleichungen, etc.

- Die Fragen bzw. Themen A, B, C müssen nicht alle behandelt werden, sie können auch einzeln relativ unabhängig voneinander gestellt und bearbeitet werden. Das mathematische Niveau bei C ist sehr flexibel.

- Das wichtige funktionale Denken wird gefordert und gefördert:
  A: Die Riemenlänge in Abhängigkeit von R, r, d
  B: Die Höhe in Abhängigkeit des angestrebten Übersetzungsverhältnisses
  C: Riemenlänge in Abhängigkeit der Höhe

Literatur

Busse, A. (2009). Umgang Jugendlicher mit dem Sachkontext realitätsbezogener Mathematikaufgaben. Ergebnisse einer empirischen Studie. Franzbecker, Hildesheim.

MELANIE HUTH, Frankfurt

Gestik und Lautsprache in mathematischen Gesprächen – multimodale Ausdrucksweisen mathematischer Ideen von Kindern

Beschäftigen sich Grundschüler/innen mit mathematischen Problemen, drücken sie ihre Ideen und Vorstellungen auf vielfältige Weise aus. Mit Gestik, Lautsprache, Schrift, Handlung usw. interagieren sie und setzen sich mit dem kulturell eingebundenen mathematischen Angebot auseinander. Die verschiedenen Ausdrucksmodi wirken dabei komplex ineinander und generieren so zusammen das, was als Ausdruck wahrgenommen wird. Dabei folgen die Ausdrucksweisen verschieden konventionalisierten Systemen: Während z.B. Lautsprache grammatikalisch beschreibbar ist und einem hierarchischen, linearen System folgt, wird Gestik stärker spontan und intuitiv geäußert und kann komplexe zeitlich-räumliche Beziehungen ausdrücken. Um sich der Komplexität dieser vielfältigen Ausdrucksweisen anzunähern, fokussiert der Beitrag geäußerte Gestik im Zusammenhang mit auftretender Lautsprache in mathematischen Gesprächen von Kindern.

1. Gestik und Lautsprache – ein integratives Sprachsystem

Empirische Befunde belegen, dass Gestik und Lautsprache bereits im frühen Spracherwerb einem integrativen Sprachsystem angehören (vgl. Goldin-Meadow 2005, 16ff). Gestische und lautsprachliche Äußerungen werden als semantisch und zeitlich co-expressiv bezeichnet mit je eigenen Ausdrucksmöglichkeiten. Ihnen wird zudem eine bedeutende mentale Rolle zugeschrieben als verschiedene Seiten eines gemeinsamen mentalen Prozesses (vgl. McNeill 1992, 1). Gesten sind Bewegungen der Arme und Hände mit kommunikativer Funktion und keine funktionale Handlung an einem/r Objekt/Person (vgl. Goldin-Meadow 2005, 8). Dies kann zunächst als Arbeitsdefinition gelten. Im Allgemeinen geht man von drei Phasen einer Geste aus: Anfangspunkt, Kern mit hoher Informationsdichte und Endpunkt. Dabei können im Kern der Geste mehrere semiotische Signifikanzpunkte je nach Komplexität der Gestenbewegung auftreten (vgl. Sager 2005, 23ff). McNeill (1992) geht von vier nicht trennscharfen Gestenkategorien aus: deiktischen, ikonischen, metaphorischen und beat Gesten, wobei deiktische Gesten Zeigegesten sind und ikonische Gesten ein konkretes Objekt beschreiben (vgl. McNeill 1992, 12ff; Huth 2010). Zur näheren Bestimmung des Zeichenbegriffs eignet sich in besonderer Weise die Zeichentheorie nach Peirce (vgl. Fricke 2007, 182f). Danach besteht ein Zeichen aus dem wahrnehmbaren *Repräsentamen* (*hier* Wort, Geste), dem *Interpretanten* (ein zum Repräsentamen äquivalentes/weiterentwickeltes Zeichen des Zeichenlesers) und dem *Objekt* für welches das Repräsentamen in einer gewissen Hinsicht – dem *Ground* des Repräsentamens – steht. Schreiber (2010) beschreibt dies als Rahmung des Komplexen Semiotischen Prozesses. Jeder Interpretant kann in das Repräsentamen einer neuen Triade im so unendlichen Zeichenprozess eingehen (vgl. Schreiber 2010).

2. Gestik und Lernprozess

Für das vorliegende Forschungsinteresse bedarf geäußerte Gestik in mathematischen Lernsituationen einer näheren Betrachtung. Sfard (1991) beschreibt „the dual nature of mathematical conceptions“ und unterscheidet zwischen „operational conceptions“ (prozesshafte Vorstellungen dominieren) und „structural conceptions“ (statische Vorstellungen dominieren). Eine integrative Sichtweise – operational und strukturell – ermögliche tiefes mathematisches Verständnis (vgl. Sfard 1991, S. 4). Vosniadou (2007) misst dem „Conceptual Change“ im Lernprozess besondere Bedeutung bei: Bestehende Konzepte werden in Konfrontation mit einem (neuen) mathematischen Problem umstrukturiert und erweitert. Vosniadou (2007) betont, dass es hierbei nicht um den „Austausch“ bestehender mit „korrekten“ Konzepten gehe, sondern um Perspektiverweiterung – „an opening up of the conceptual space“ (Vosniadou 2007, 60). Givry/Roth (2006) verstehen Konzepte als eingebunden in Interaktion und betonen den Einfluss von Lautsprache, Gestik und der Kontextstruktur der Situation auf die mathematischen Vorstellungen von Lernenden. „Conceptual Change“ wird verstanden als „[...] temporal evolution of speech, gesture, and setting-related semiotic resources [...]“ (Givry/Roth 2006, 1105). Goldin-Meadow (2005) stellt in Bezug auf Lernen die Theorie der *matches* (Gestik u. Lautsprache übermitteln sich überschneidende Inhalte) und *mismatches* (Gestik u. Lautsprache übermitteln sich nicht-überschneidende, aber kontext-kohärente Inhalte) auf. „Mismatches marks a child as being open to instruction, and thus on the precipice of learning.“ (Goldin-Meadow 2005, 40).

3. Untersuchungsdesign und Forschungsfokus

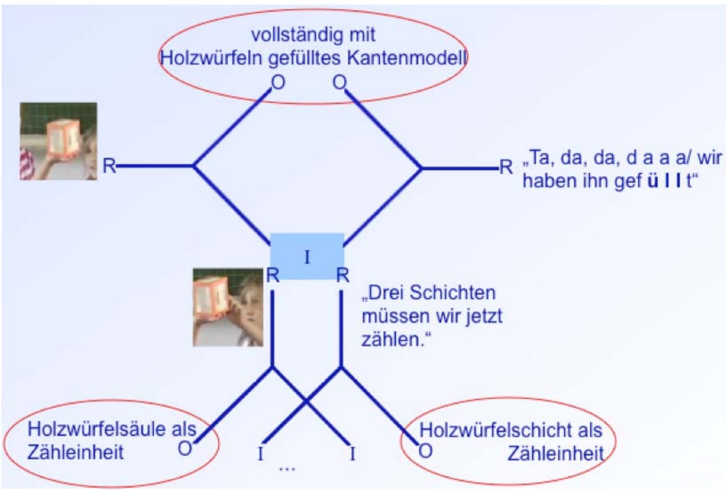
In konstanten Paarungen wurden Zweitklässler/innen mathematische Aufgaben aus den Bereichen Kombinatorik, Geometrie und Größen gestellt. Diese mathematischen Gespräche wurden videografiert und ausgewählte Sequenzen transkribiert. Das Forschungsinteresse betont den Zusammenhang von Gestik und Lautsprache: Welche mathematischen Konzepte von Kindern zeigen sich an der geäußerten Gestik im Zusammenhang mit der ausgedrückten Lautsprache?

4. Analyseverfahren am Beispiel Miranda und Viola

Miranda & Viola (7 Jahre) beschäftigen sich im auf der Tagung dargestellten Beispiel mit der Volumenbestimmung von Würfelkantenmodellen. Nachdem ein 3x3x3 Kantenmodell vollständig mit Holzwürfeln gefüllt wurde, schlägt nun Miranda eine Strategie zur Anzahlbestimmung vor. Holzwürfel und Kantenmodell standen als Material zur Verfügung. Analysegrundlage ist eine Gesten- und Lautsprachentranskriptpartitur mit einer räumlich-zeitlichen Beschreibung der Gestenbewegungen und -phasen[1] (vgl. Huth 2010). Zunächst erfolgt eine Gesprächsanalyse „Gesture-by-Gesture“, bei der Deutungsalternativen mit der lautsprachlichen Äußerung evaluiert werden. Mit einer semiotischen Analyse auf der Mikroebene werden Gestik und Lautsprache dann im Zusammenhang anhand der Zeichentriade nach Peirce näher betrachtet (vgl. Fricke 2007, 186; Schreiber 2010).

5. Erste Erkenntnisse: Miranda und Viola bestimmen das Volumen

Gesten (*hier* ikonische und deiktische Gesten) und Lautsprache („gefüllt“, „Schicht“, Zahlwörter) werden zum Zählen der Holzwürfel in einer für den Aufbau des Würfels geeigneten 3er Bündelung genutzt und entwickeln gemeinsam mit Fixierungen und Pausen eine Zählrhythmik zur Markierung gezählter Würfel und Unterstützung der Zählstrategie: Das statische Objekt „Schicht“ wird in einem Zählprozess erfasst. Miranda verweist gestisch auf Holzwürfelsäulen, Viola bezieht sich gestisch im Verlauf der



Situation stärker auf Holzwürfelschichten. In der semiotischen Analyse der ersten beiden Äußerungen ergibt sich als gestisches Repräsentamen Violas Präsentationsgeste mit der lautsprachlichen Äußerung „Ta, da, da, da, wir haben ihn gefüllt“. Beide Ausdrücke verweisen auf *ein* Objekt. Der Interpretant, geht in die neue Zeichentriade ein: Miranda produziert gestisch als Repräsentamen eine deiktische Geste entlang einer Holzwürfelsäule. Gleichzeitig äußert sie lautsprachlich „Drei Schichten müssen wir jetzt zählen“. Gestisch wird auf das Objekt Holzwürfel*säule*, lautsprachlich auf Holzwürfel*schicht* verwiesen. Nach der dargestellten Theorie der *mismat-*

[1] Aus Platzgründen kann hier keine Transkriptpartitur abgebildet werden.

ches, übermitteln hier Gestik und Lautsprache gleichzeitig zwar kontextkohärente, jedoch verschiedene Informationen. Im Sinne des „Conceptual Change“ verweist dies auf eine Perspektiverweiterung des Volumenkonzeptes (Säulen, Schichten) und damit auf verdichtete Lernmöglichkeiten.

6. Fazit und Ausblick

Gestik und Lautsprache werden genutzt, um als relevant identifizierte mathematische Aspekte und Strategien darzustellen und zu entwickeln. Mithilfe der semiotischen Analyse lassen sich Stellen identifizieren, die mit Blick auf die mathematischen Konzepte und den Zusammenhang von Gestik und Lautsprache besonders zentral erscheinen: *Mismatches* – sichtbar an verschiedenen Objekten in den Triaden – verweisen auf verdichtete Lernmöglichkeiten/Perspektiverweiterung. In der weiteren Forschungsarbeit kann eine vorbereitende Funktion von Gesten bei mathematischen Konzepten und „Conceptual Change“ sowie Gestenübernahme und -etablierung im Situationsverlauf auch im Vergleich zur frühen mathematischen Denkentwicklung fokussiert werden (erStMaL Projekt, IDeA Forschungszentrum).[2]

Literatur

Goldin-Meadow, S. (2005). *Hearing Gesture. How our hands help us think*. Cambridge: Belknap Press of Harvard University Press.

Givry, D., Roth, W.-M. (2006). Toward a New Conception of Conceptions: Interplay of Talk, Gestures, and Structures in the Setting. Online publiziert in Wiley InterScience (www.interscience.wiley.com) [30.03.09].

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought*. Chicago, IL: Chicago University Press.

Sager (2005). Ein System zur Beschreibung von Gestik. *Osnabrücker Beiträge zur Sprachtheorie, 70*, 19-47.

Schreiber, Christof (2010; erscheint demnächst). *Semiotische Prozess-Karten – chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen*. Münster: Waxmann.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1–36.

Vosniadou, S. (2007). The Cognitive-Situative Divide and the Problem of Conceptual Change. *Educational Psychologist*, 42(1), 55–66.

Huth (2010, in Druck). Gestik als Ausdruck mathematischer Ideen in Gesprächen von Grundschüler/innen. In K.-H. Arnold et al. (Hrsg.), *Zwischen Fachdidaktik und Stufendidaktik. Perspektiven für die Grundschulpädagogik.* Wiesbaden: VS Verlag.

Fricke, E. (2007): Origo, Geste und Raum. Lokaldeixis im Deutschen. Berlin: de Gruyter.

2 Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

Beat JAGGI, Pädagogische Hochschule Bern, Schweiz

Mathematik mit Flaggen

Flaggen (genauer Nationalflaggen) dienen als Zeichen von Staaten. Für viele dieser Flaggen gibt es genaue Vorgaben, wie diese gezeichnet oder konstruiert werden müssen: Bei der Schweizerflagge ist das Kreuz so darzustellen, dass dessen unter sich gleiche Arme je einen Sechstel länger sind als breit, bei der Nationalflagge von Togo ist das Verhältnis von Länge zu Breite gleich dem goldenen Schnitt, die exakte Darstellung der Flagge von Nepal ist eine äusserst anspruchsvolle Konstruktionsaufgabe.

Die Internetseite http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Nationalflaggen, enthält die Flaggen aller 192 Mitgliedstaaten der UNO sowie die Flaggen jener Staaten, die mindestens von einem UNO-Mitglied als unabhängig anerkannt sind. Bei jeder Flagge ist das Seitenverhältnis (Verhältnis von Höhe zur Breite der Flagge) und ein Link „Flaggenerklärung" angegeben. Diese Erklärungen und die Beschreibungen auf http://www.crwflags.com/fotw/flags/index.html, der weltgrössten Internetseite über Flaggen, geben Anlass zu vielfältigen mathematischen Fragestellungen.

Im Folgenden sind einige mathematische Aspekte im Zusammenhang mit Flaggen beschrieben. Die aufgeführten Aufgaben sind als Anregung für Lehrpersonen gedacht, selber entsprechende Aufgaben zu erfinden.

„Klassische" Aufgaben
Es gibt bereits eine Fülle von Ideen, wie Flaggen im Mathematikunterricht eingesetzt werden können. Dazu gehören Flächenberechnungen, Schätzen von Flächen, Zeichnen und Konstruieren von geometrischen Figuren, Prozentrechnungen und Ähnliches.

Ein Beispiel aus dem *mathbu.ch*, einem Lehrmittel für die Sekundarstufe I in der Schweiz ist auf der nächsten Seite abgebildet.

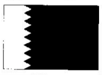
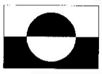
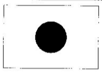
Flaggen

3.1 Die Flaggen einiger Staaten sind rot–weiss.

A Schätze den Anteil der beiden Farben an der Gesamtfläche in %.

B Welche Prozentwerte kannst du genau bestimmen?

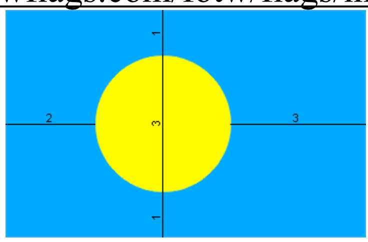
C Wie könnte man die Werte für Kanada möglichst genau bestimmen?

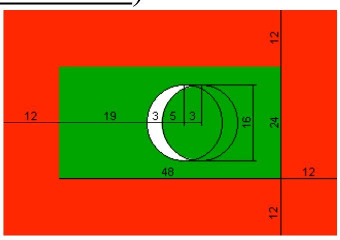
Land / Kontinent	Flagge	% rot	% weiss
Bahrain (Asien)			
Grönland (Europa)			
Japan (Asien)			
Österreich (Europa)			
Dänemark (Europa)			
Polen (Europa)			
Kanada (Nordamerika)			
Schweiz (Europa)			

Quelle: mathbu.ch 7, Arbeitsheft der Lernumgebung 21 „Prozente“

Konstruktionsaufgaben mit Flaggen

Zu zahlreichen Flaggen gibt es so genannte „Construction sheets“ (siehe http://www.crwflags.com/fotw/flags/index.html)





Aufgabe: Konstruiere die Flaggen massstabgetreu nach.

In der „Flaggenerklärung von Ghana steht: „Der schwarze fünfzackige Stern in der Mitte der Flagge [...] wird oft falsch dargestellt: Der Stern sollte den oberen sowie den unteren Streifen berühren.“

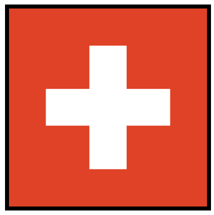
Aufgabe: Wähle einen Streifen (zwei parallele Geraden) und konstruiere einen fünfzackigen Stern, der beide Geraden berührt.

Mathematik mit den Seitenverhältnissen von Flaggen

Bei den Flaggen der UNO-Mitgliedstaaten kommen 22 verschiedene Seitenverhältnisse vor: 4:3, 1:1, 13:15, 6:7, 4:5, 28:37, 3:4, 8:11, 18:25, 5:7, 7:10, 2:3, 9:14, 7:11, 5:8, 11:18, 3:5, 4:7, 6:11, 10:19, 1:2, 11:28. Bei der Flagge von Togo ist das Seitenverhältnis gleich dem goldenen Schnitt und kann somit nicht als Verhältnis natürlicher Zahlen angegeben werden.

Aufgaben: Bei der Flagge Deutschlands ist das Seitenverhältnis 3:5, bei der Schweizerflagge 1:1.

Seitenverhältnis 3:5



Seitenverhältnis 1:1

Kann man die beiden Flaggen so herstellen, dass sie gleiche Fläche haben? [Die Masse sind mit natürlichen Zahlen (in Zentimetern) anzugeben.]
Finde alle Paare von Flaggen (resp. Seitenverhältnissen), für die flächengleiche Flaggen mit ganzzahligen Seitenlängen existieren.
Gib eine geometrische Konstruktion an, die eine Flagge mit vorgegebener Fläche erzeugt.
Beispiel: Konstruiere Länge und Breite der deutschen Flagge so, dass die Fläche 1 dm^2 beträgt. (Das Seitenverhältnis muss 3:5 sein.)

Weitere Ideen

Aufgaben zu geometrischen Konstruktionen und Berechnungen: Bei den in wikipedia aufgelisteten Flaggen kommen eigentlich alle grundlegenden geometrischen Figuren wie Dreiecke, reguläre Vielecke, Trapeze, Parallelogramme, Kreise, etc. vor; eine schier unerschöpfliche Quelle für Konstruktions- und Berechnungsaufgaben.

Aufgaben zu Symmetrien: Untersuche Flaggen auf Ihre Symmetrien. Suche Flaggen, die keine Symmetrien aufweisen. Suche Flaggen, die genau diejenigen Symmetrien aufweisen, die schon das Rechteck selber hat.

Aufgaben mit GeoGebra: Zeichne mit GeoGebra eine Flagge so, dass Ihre Länge mit einem Schieberegler verändert werden kann. Das Seitenverhältnis muss konstant bleiben.
Konstruiere die Flagge von Nepal mit GeoGebra nach
(siehe http://www.crwflags.com/fotw/flags/index.html)

Aufgaben zum Vorstellungsvermögen: Aus der Beschreibung der Flagge von Madagaskar (siehe „flags of the world"): „Tricolor consisting of white field by hoist and two horizontal fields of red over green in the fly. Each of the fields is of the same area, i.e. each has ratio 1:2, with overall proportion 2:3."   Zeichne die Flagge von Madagaskar.

Flaggen und fächerübergreifender Unterricht

Auf Flaggen ist oft eine wichtige Begebenheit des jeweiligen Landes dargestellt. Solche Begebenheiten können Ausgangspunkt für geographische, historische oder politische Exkursionen sein.

Beispiele:

Brasilien: „Der blaue Bereich in der Raute stellt den Himmel über Rio de Janeiro am 15. November 1889 um 8:30 Uhr dar – der Ort und die Zeit der Proklamation der Republik."

Griechenland: „Die Farben Blau und Weiß lassen sich bis in das byzantinische Kaiserreich zurückführen. Das Blau variierte sehr oft. Während der Zeit des Königs Otto I. wurde ein Mittelblau nach Vorbild des Wappens der bayrischen Wittelsbacher verwendet."

Fazit

Flaggen bieten „Stoff" zu vielfältigen mathematischen und aussermathematischen Aktivitäten. Die Frage, wie man eine Flagge herstellt, könnte Anlass sein, ein Unternehmen zu besuchen, welches Flaggen herstellt. Es wäre schliesslich eine schöne Nebenerscheinung, wenn die (mathematische) Auseinandersetzung mit Flaggen auch zu einem respektvollen Umgang von Schülerinnen und Schülern gegenüber fremden Ländern und deren Menschen beitragen könnte. Flaggen „kleiner" Länder sind (mathematisch gesehen) oft interessanter sind als Flaggen von „Schwergewichten". So werden politisch und wirtschaftlich bedingte Hierarchien auf den Kopf gestellt.

Literatur

Affolter W. et al (2002): *mathbu.ch 7*. Schulverlag blmv AG, Bern und Klett&Balmer Verlag, Zug, 2002

Links

http://de.wikipedia.org/wiki/Liste_der_Nationalflaggen (Abruf: 1.3. 2010)
http://www.crwflags.com/fotw/flags/index.html (Abruf: 1.3. 2010)

Thomas JAHNKE, Potsdam

Vom mählichen Verschwinden des Fachs aus der Mathematikdidaktik

Wie tief und in welchem Ausmaß und Umfang sich die Forschung deutschsprachiger Mathematikdidaktik mit Mathematik selbst befasst, also dem Bearbeiten, Durchdringen und -denken des Sujets, mit dessen Lehren und Lernen sie sich wissenschaftlich auseinandersetzt, lässt sich unter anderem an den publizierten Forschungsbeiträgen ablesen. Eine einschlägige Quelle dafür ist Journal für Mathematikdidaktik (JMD), als die prominenteste referierte deutschsprachige Zeitschrift auf diesem Gebiet, bei der es in der Regel keine inhaltlichen Vorgaben etwa in Form von Themenheften gibt. Daher kann man das JMD als einen Spiegel von Forschungsfeldern, -interessen und -aktivitäten ansehen, der freilich auch gewissen Einschränkungen unterliegt, die sich aber wohl wollend als Konsens unserer scientific community interpretieren lassen, wenn man einmal von einer Kritik des Gutachterwesens und -unwesens für einen Moment absieht. Das JMD erscheint seit 1980, es liegt damit nahe, die dort erschienenen Artikel zeitlich nach Jahrzehnten zu ordnen, in die jeweils zehn Bände umfassenden 80er, 90er und 00er Jahre; eine inhaltliche Kategorisierung bietet sich nicht so einfach an. Recht grob und pragmatisch haben wir die Beiträge einer oder mehrerer der Kategorien Stoffdidaktik/quantitative Empirie/qualitative Empirie/Sonstiges zugeordnet – eher großzügig auf Grund der Abstracts und bei Unklarheiten einer kurzen Sichtung des Textes. Von zentraler Bedeutung war für uns dabei der vielleicht falsche Konnotationen hervorrufende Begriff ‚Stoffdidaktik', dem wir die Artikel zugeordnet haben, die sich ganz oder teilweise mit mathematischen Stoffen und ihrem Lehren und Lernen befassen. Das kann sich auf schulischen Curricula und die Auswahl der Inhalte aber auch auf andere Felder beziehen. Wir haben dazu sowohl die Zahl solcher Artikel als auch deren Seitenumfang ausgezählt.

Für den summierten Seitenumfangs der ‚Stoffdidaktik'-artikel erhielten wir für die folgende Zahlen.

	‚Stoffdidaktik'-Anzahl der Seiten	Restseiten
80er	792	3194
90er	540	2953
2000er	180	2275

Der Umfang der ‚Stoffdidaktik'-artikel ist also in den letzten drei Jahrzehnten wesentlich zurückgegangen: Während in den 80er Jahren etwa jede vierte Seite zu einem solchen Artikel gehörte, galt dies im letzten Jahrzehnt noch etwa für jede zwölfte Seite.

Einen weiteren Hinweis auf das mähliche Verschwinden des Faches aus der deutschsprachigen Mathematikdidaktik lässt sich bei den Dissertationen beobachten. Das JMD veröffentlicht seit 1982 ein- bis zweiseitige Selbstanzeigen mathematikdidaktischer Promotionen und Habilitationen. Schon wegen des Umfangs sind diese Arbeiten den oben genannten Kategorien schwerer als die Artikel zuzuordnen. Die Ergebnisse solcher Zuordnungen sind also mit einer gewissen Vorsicht zu betrachten, lassen aber den gleichen Trend erkennen. Insgesamt sind in den dreißig Jahren von 1980 bis 2009 durch Selbstanzeigen im JMD 193 Dissertationen und Habilitationsschriften dokumentiert. Die nachstehende Tabelle zeigt die Zuordnung zu den Kategorien Stoffdidaktik, sowie quantitativer und qualitativer Empirie.

	Dissertationen/ Habilitationen	Stoffdidaktik	Empirie -quantitativ	Empirie -qualitativ
80er	48	20	9	22
90er	53	13	13	31
2000er	92	21	40	76

Die Zahl der Qualifikationsarbeiten, die sich auch (!) der Stoffdidaktik zuordnen lassen, ist i.w. gleich geblieben ist, aber ihr Anteil ist wesentlich zurückgegangen von 42% über 25% auf 23%.

Die Betrachtung von Qualifikationsarbeiten des letzten Jahrzehnts ist aus meiner Sicht von besonderer Bedeutung, weil sie – sicherlich nur mit einiger Vorsicht – einen Blick in die zukünftige Ausrichtung der Mathematikdidaktik ermöglicht. Aus dem Kreis dieser Qualifikantinnen und Qualifikanten werden sich zu einem Gutteil die künftigen Professorinnen und Professoren mathematikdidaktischer Provenienz rekrutieren, wobei dieser

Prozess fließend schon eingesetzt hat. Wenn nur noch ein knappes Viertel dieser Arbeiten sich selbst den Gegenständen der Wissenschaft, um deren Lehren und Lernen es geht, aussetzt, sie ventiliert, sich auch an ihnen didaktisch katalysierend abarbeitet, dann stellt sich die Frage, ob und wie der benannte Personenkreis künftig der produktive Träger einer Fachdidaktik sein kann, für die das fachliche Wissen in Forschung und Lehre konstitutiv ist.

Im Kern geht es mir nicht um den bedauerlichen Rückgang oder das Verblassen der Stoffdidaktik als einer möglichen, im deutschsprachigen Raum besonders gepflegten und erfolgreichen und möglicherweise von der nachfolgenden Generation unterschätzten fachdidaktischen Dimension, die eben heute – wie man lapidar und furchtlos konzedieren kann – Konkurrenz bekommen hat, sondern es geht mir um das Schwinden mathematischer Expertise in den Publikationen unserer community.

Meine zentrale These ist, dass nicht nur die mathematische Expertise in der Mathematikdidaktik schwindet sondern auch das Bewusstsein, dass diese in der Fachdidaktik Mathematik erforderlich ist. Sie stellt sich eher als hinderlich heraus. Ich beleuchte das beispielhaft an der so genannten quantitativ empirischen Forschung.

Die heute gängigen Serienuntersuchungen drängen geradezu programmatisch darauf, die austauschbaren mathematischen Inhalte nicht im Einzelnen zu betrachten und zu würdigen, sondern sie so genannten Kompetenzen zu subsummieren. Bei den dabei üblichen 0-1-Auswertungen zählt eben gerade nicht der mathematische Gedanke sondern das richtige Kreuz. Die Auseinandersetzung mit dem, was die Testandi tatsächlich gedacht haben, muss bei solcher Wertung systematisch entfallen.

- Die Items bei solchen Untersuchungen, sofern sie überhaupt noch selbst produziert sind und nicht mehr oder minder schlecht übersetzt aus anderen Quellen stammen, sind in erster Linie nach psychometrischen und statistischen Erfordernissen konstruiert rsp nach diesen in Vortests gefiltert. Häufig erreichen sie nicht einmal ein halbwegs passables Schulbuchniveau, was die Auswertung offensichtlich eher befördert als behindert.

- Dass die Items häufig nicht veröffentlicht werden, also den an der Untersuchung nicht Beteiligten und damit einer externen Überprüfung nicht zugänglich sind, gibt natürlich Anlass zu mancherlei Scharmützel, ob hier überhaupt noch wissenschaftliche Leitlinien

> eingehalten werden, verhindert aber in jedem Fall, dass sie öffentlich und wissenschaftlich diskutiert werden. Die Auseinandersetzung mit ihrem mathematischen Gehalt verschwindet aus dem Fokus der Betrachtung, sie wird als verzichtbar angesehen. Der mathematische Gehalt der Items wird so zu einem rein untersuchungstechnischen und -internen Gegenstand, auf den es nicht wesentlich – zumindest was die Resultate der Untersuchung anlangt – ankommt.

Es gibt durch die Zunahme quantitativer empirischer Arbeiten in der Mathematikdidaktik aber auch eine Zunahme an ‚Kompetenz' auf einem speziellen mathematischen Gebiet, nämlich dem statistischer Methoden und der zugehörigen Software. Aber diese Zunahme belegt gerade die von den Protagonisten solcher Mausklick-SPSS-Forschung ganz offen und explizit bekundete Abnahme der Bereitschaft, sich mit diesen erkenntnisformenden und -leitenden, mathematischen Methoden auseinanderzusetzen. Die mathematische ‚Expertise' besteht hier gerade nicht in einer Durchdringung statistischer Verfahren sondern in einem Outsourcing mathematischen Denkens, das gerade angesichts der häufig geforderten didaktischen Thematisierung von Modellierungsprozessen nur Wunder nimmt.

Es übersteigt den Rahmen dieses Vortrages, die Aufgaben der Mathematikdidaktik insgesamt zu skizzieren oder detaillierter zu diskutieren. Ich greife daher hier nur einen Aspekt heraus. In einer posthum im Jahr 1983 erschienenen Note führt der Erziehungswissenschaftlers Herwig Blankertz in Anlehnung an den Geschichtsdidaktiker Erich Weniger aus:

> Der Sachverhalt, dass Unterrichtsinhalte nicht einfach aus einem unabhängig von Lehr- und Erziehungsabsichten, von Schule und Ausbildungssituationen existierenden Zusammenhang abgeleitet sind, bedingt die Notwendigkeit einer Didaktik als Theorie der Bildungsinhalte und des Lehrplans.
>
> Herwig Blankertz: Thesen zur Stellung der Mathematikdidaktik an einer Universität. JMD 4 (1983), Heft 3, S. 257)

Wie will eine Mathematikdidaktik, der die fachliche Expertise fehlt, dieser Aufgabe nach kommen, wie will sie künftige Mathematiklehrerinnen und -lehrer ausbilden, wie will sie – um einen Terminus von Wittmann aufzunehmen – als design science wirken, wenn ihr die Kenntnisse und das Interesse am Gegenstand fehlen?

Die den Ausführungen zugrunde liegende Rubrizierung der im JMD publizierten Artikel und annoncierten Dissertationen/Habilitationsschriften hat Frau Kaganova vorgenommen.

Heike Hahn und Stefanie Janott, Erfurt

Heuristische Strategien durch geometrische Aufgaben fördern

Anlage und Konzeption des Projektes

Im vergangenen Jahr wurde in einer Erfurter Grundschulklasse im zweiten Schulhalbjahr der Klassenstufe 3 und zu Beginn der Klassenstufe 4 ein Projekt durchgeführt, das der Förderung heuristischen Arbeitens diente. Anliegen des Projektes war es, heuristisches Arbeiten von Schülern mit Hilfe von Problemaufgaben geometrischen Inhalts zu fördern. Dazu wurde wöchentlich eine Problemaufgabe im Mathematikunterricht nach folgendem Vorgehen bearbeitet: Die Aufgabe, die in eine kurze Geschichte integriert war, wurde im Sitzkreis präsentiert. Zudem wurde diese Phase genutzt, um notwendige Vorkenntnisse der Schüler zu aktivieren. Es folgte eine Einzelarbeit, in der sich jeder Schüler mit der Aufgabe befasste. Dabei war die Nutzung von Material möglich. In dieser Phase waren die Schüler angehalten, nicht nur die Lösung festzuhalten, sondern zugleich ihr Vorgehen beim Bearbeiten der Aufgabe schriftlich zu dokumentieren. Schließlich erfolgte eine gemeinsame Reflexion, in der die Schüler ihre Lösungsansätze, Lösungen oder sonstigen Ideen vor der Klassengemeinschaft präsentierten. Auf diese Weise konnten sie unterschiedliche Vorgehensweisen und Bearbeitungsstrategien beim Lösen problemhaltiger Aufgaben kennen lernen.

Alle Aufgabenbearbeitungen mit den Lösungswegbeschreibungen, aber auch Lösungsversuche oder –ansätze wurden von den Schülern in einem Forscherhefter gesammelt.

Forschungsinteresse an der Thematik

Heuristisches Arbeiten als Untersuchungsgegenstand in der mathematikdidaktischen Forschung ist nicht neu. Deshalb konnte bei der Konzeption des Projektes an bereits dokumentierte Erfahrungen anderer Untersuchungen angeknüpft werden. Diese Aspekte werden im Weiteren kurz erläutert.

Heuristische Strategien kommen zur Anwendung, wenn eine Aufgabe anspruchsvolle Anforderungen stellt und Problemlösefähigkeiten erfordert. Der Problemlöseprozess kann durch heuristische Strategien unterstützt werden, jedoch führt ihre Anwendung nicht zwangsläufig zur erfolgreichen Problembearbeitung. Werden heuristische Strategien beim Lösen problemhaltiger Aufgaben bewusst herausgearbeitet, wirkt sich dies förderlich auf die Bearbeitung weiterer Problemaufgaben aus (u.a. Bardy 2007, S. 127; König 1992, S. 24). Deshalb wurden die Reflexionsphasen genutzt, um den Schülern heuristische Strategien bewusst zu machen.

In verschiedenen Untersuchungen konnte die Bedeutung von Strategiediskussionen zu heuristischen Vorgehensweisen beim Bearbeiten von Problemaufgaben bestätigt werden (u.a. Rasch 2001; Fuchs 2006, S. 293). Gespräche zwischen Lernenden zur Nachbesprechung der individuell vollzogenen Problembearbeitung haben gezeigt, dass sich Schüler dadurch ihres Vorgehens bewusst werden und somit ihr Repertoire an Vorgehensweisen erweitern können. Auch schriftliche Reflexionen dienen diesem Ziel. Aus diesen Gründen wurden sowohl Gesprächsrunden als auch schriftliche Formen von Lösungswegbeschreibungen als unterrichtliche Gestaltungselemente in die Projektkonzeption integriert.

Dass das Problemlösen im Mathematikunterricht der Grundschule eine wichtige Rolle spielt, bestätigen aktuell die Bildungsstandards mit der darin ausgewiesenen gleichlautenden allgemeinen mathematischen Kompetenz (KMK 2004). Der Erwerb dieser Kompetenz ist mit der Erwartung und mit der Verpflichtung verbunden, Schüler zu befähigen, problemhaltige Aufgaben erfolgreich zu lösen. Es galt, dieses Ziel mit Aufgaben zu geometrischen Inhalten zu unterstützen.

Über diese direkten Anknüpfungspunkte hinaus konnten in die Projektkonzeption weitere Impulse integriert werden, die zwar keinen unmittelbaren Transfer zuließen, jedoch dem Projekt wichtige Anregungen gaben und dessen Fragen spezifizierten.

Durch die Arbeit mit mathematisch potentiell begabten Schülern konnte nicht nur die Bedeutung des Problemlösens zur Förderung dieser Schüler bestätigt, sondern auch spezifische Vorgehensweisen beim Bearbeiten problemhaltiger Aufgaben identifiziert werden (u.a. Käpnick 1989, Fuchs 2006, Bardy 2007). In Ergänzung dessen interessierte für das Projekt die Frage, ob für Schüler mittlerer oder niedrigerer Leistungsgruppen vergleichbare Vorgehensweisen gefunden werden können.

Im Kontext von Untersuchungen zur Bearbeitung problemhaltiger Textaufgaben von Grundschülern (u.a. Rasch 2001) konnte das Erkennen und Nutzen inhaltlich gebundener heuristischer Strategien nachgewiesen werden. Zudem zeigten diese Studien, dass Schüler in Ansätzen allgemeine heuristische Strategien erkennen und anwenden können. Forschungsbefunde von Schülern der Sekundarstufe sind darüber hinaus zu dem Ergebnis gekommen, dass sie eine bestimmte Lösungsbewusstheit besitzen und dadurch in der Lage sind, allgemeine heuristische Strategien beim Lösen von Problemaufgaben zu nutzen (Bruder 2003). Für das Projekt interessierte die Frage, inwiefern geometrische Problemaufgaben über die inhaltsgebundenen heuristischen Strategien hinaus Potenzen für die Herausbildung allgemeiner heuristischer Strategien in sich tragen.

Für das Projekt wurden Problemaufgaben geometrischen Inhalts gewählt. Mit diesem Aufgabenbereich sind nach unserer Auffassung besondere Potenzen verbunden: Einerseits können mit Problemaufgaben geometrischen Inhalts weitere Aufgaben neben denen mit arithmetischem oder kombinatorischem Gehalt generiert werden, die die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten unterstützen können. Andererseits repräsentieren geometrische Problemaufgaben einen Aufgabeninhalt, an dessen Bearbeitung die Schüler mit einer positiveren motivationalen Ausgangslage herangehen als an Textaufgaben mit arithmetischem Inhalt. Zudem weisen die zum Lösen der Aufgaben erforderlichen Vorkenntnisse oft weniger oder geringere Wissenslücken auf, die gerade für Schüler aus mittleren und niedrigeren Leistungsgruppen ein Bearbeitungshindernis sind. Geometrische Aufgaben motivieren ferner zum Gebrauch von Anschauungs- oder Arbeitsmaterialien, deren Nutzen als wichtige Lösungshilfe sowie als Form der Lösungsdarstellung nachgewiesen ist (u.a. Fuchs 2006, S. 292).

Erste Ergebnisse des Projektes

Bezüglich der Entwicklung heuristischen Arbeitens kann resümiert werden, dass sich alle Schüler im Verlauf des Projektes an das Bearbeiten problemhaltiger Aufgaben gewöhnt haben. Dies kann nicht nur mit der wachsenden Zahl sichtbarer Problembearbeitungen nachgewiesen werden, sondern lässt sich auch durch die Zunahme verschiedener kreativer Lösungswege und das Anwenden heuristischer Strategien zeigen. Insbesondere für Schüler aus den mittleren und unteren Leistungsgruppen ist es ein wesentlicher Entwicklungsfortschritt, dass sie mit dem Problembearbeitungen überhaupt begonnen und diese schließlich teilweise richtig beendet haben. Diesen Schülern gelang es außerdem zunehmend besser, die Problemaufgaben nachvollziehbar zu bearbeiten und Rückschlüsse von ihren Bearbeitungsansätzen auf die Problemlösung zu ziehen.

Auch in den Lösungswegbeschreibungen wurde eine Entwicklung sichtbar: Die schriftlichen Äußerungen wurden zunehmend ausführlicher, detaillierter und als Wiedergabe einzelner Gedankenschritte sowie angereichert mit Erklärungen oder Begründungen verfasst.

Die Gewöhnung an das heuristische Arbeiten, die genaueren Lösungswegbeschreibungen und die erweiterte Bereitschaft, mit individuellen Ideen an eine Problemlösung heranzugehen, führten schließlich auch zu einer gesteigerten Qualität der Reflexionen. Die Schüler waren mehr und mehr in der Lage, heuristische Strategien als solche zu erkennen, in ihr eigenes Repertoire aufzunehmen und bei geeigneten Aufgaben erneut anzuwenden. Dabei dominierten inhaltsgebundene Strategien wie Verfahren zum Flächenvergleich, während allgemeine heuristische Strategien wie das Vorwärts- oder Rückwärtsarbeiten erst in Ansätzen bewusst gemacht werden konnten.

Ausblick

Nachdem mit dem Pilotprojekt erste Erfahrungen zur Förderung heuristischen Arbeitens durch geometrische Problemaufgaben gesammelt werden konnten, wird das Projekt im folgenden Schuljahr auf weitere Klassen und Klassenstufen ausgedehnt. Ziel ist, geeignete Problemaufgaben mit geometrischen Inhalten zu generieren und deren Einsatz im Unterricht zu analysieren, um den im vorherigen Abschnitt genannten Fragen intensiver nachgehen zu können.

Literatur

Bardy, P. (2007): *Mathematisch begabte Grundschulkinder. Diagnostik und Förderung*. München: Elsevier.

Bruder, R. (2003): *Methoden und Techniken des Problemlösens.* Material im Rahmen des BLK-Programmes „SINUS“. Kiel: IPN.

Fuchs, M. (2006): *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen. Empirische Untersuchung zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile.* Berlin: LIT Verlag.

Käpnick, F. (1989): Mathematisch begabte Kinder: Modell, empirische Studien und Förderprojekte für das Grundschulalter. Frankfurt a.M.: Peter Lang Verlag.

König, H. (1992): Einige für den Mathematikunterricht bedeutsame heuristische Vorgehensweisen. In: *Der Mathematikunterricht,* 3, 24 - 38.

Rasch, R. (2001): *Zur Arbeit mit problemhaltigen Textaufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule. Eine Studie zu Herangehensweisen von Grundschulkindern an anspruchsvolle Textaufgaben und Schlussfolgerungen für eine Unterrichtsgestaltung, die entsprechende Lösungsfähigkeiten fördert.* Hildesheim: Franzbecker

www.uni-erfurt.de/grundschulpaedagogik/mathematik/forschung.html

Zimmermann, B. (1991): *Heuristik als ein Element mathematischer Denk- und Lernprozesse.* Hamburg: Habilitationsschrift

ELEN ANDREA JANZEN, Würzburg/Curitiba - Brasilien

Zielgerichtete Hilfen beim Beweisen mit DGS[1]

Diesem Vortrag liegt ein Projekt zugrunde, das das Beweisen in der Geometrie in einer computergestützten dynamischen Umgebung untersucht und analysiert. Dabei wird die Sichtweise des Lehrers oder Universitätsdozenten eingenommen, der das Lernen des Beweisens bei Studierenden unterstützen und fordern möchte. Beweise werden dabei nicht nur als ein formales Endprodukt, sondern vielmehr als ein Prozess auf dem Weg zum Verständnis von Geometrie angesehen. Das Arbeiten mit Beweisen soll dazu beitragen, das „mathematische Denken" zu entwickeln.

Die Kompetenzen und Fähigkeiten, die heutzutage vom Lehrer gefordert werden, sind nicht dieselben wie vor Jahrzehnten. Heutzutage ist er nicht nur ein Übermittler von Wissen - er hat vielmehr eine „formative" Rolle - das Formen des „Mathematisches Denkens".

Das Mathematische Denken beschreiben Watson und Mason (in Ball, 2002) mit: Illustrieren, Spezialisieren; Vollenden, Löschen, Korrigieren, Vergleichen, Sortieren, Organisieren, Ändern, Variieren, Verändern, Generalisieren, Vermuten, Erklären, Rechtfertigen, Überprüfen, Überzeugen. Barbara Ball (2002) erläutert es in ähnlicher Weise und behauptet dass das Mathematische Denken während des Verarbeitens der Dinge erfolgt.

Das kommt auch sehr nahe an das heran, was Edwards (1990) für einen Prozess des Beweisens hält. Er nennt es "Territory before proof", das bedeutet Denkarten und Handlungen festzulegen, die die Suche Mathematischen Wissens unterstützen. Dabei sieht er folgende Elemente in diesem „Territory":

- Finden von Mustern, Regelmäßigkeiten und Invarianten;
- Beschreiben solcher Muster, was auf unterschiedliche Arten getan werden kann;
- Vermutungen aufstellen;
- Validieren durch induktive Argumentation (spezifische Fälle überprüfen);
- Validieren durch deduktive Argumentation (oder Beweis) - verursachen einer Argumentation, um zu zeigen, warum eine Verallgemeinerung richtig ist.

[1] DGS = Dynamische Geometrie Software

Bei diesem Prozess kann DGS einen Beitrag leisten. Der dynamische Aspekt des DGS, d. h. das Variieren von Objekten (Zugmodus), kann den Studenten bei diesem Prozess helfen. Die Objekte, die mit einem DGS konstruiert werden, haben einen anderen Status als einfache Zeichnungen; sie beginnen, generische Beispiele zu sein, mit der Möglichkeit der dynamischen Erforschung der Eigenschaften. Auf diese Weise liefern sie die Visualisierung von mehreren verschiedenen Darstellungen der gleichen Kategorie von Figuren. Die Visualisierung fokussiert deshalb auf das Verständnis von Figuren, und dieses verlangt das „Lernen des Sehens und Lesen" dieser Figuren. Deshalb spielen Figuren eine intuitive und heuristische Rolle in der geometrischen Darstellung. Sie erlauben es, eine Situation im größeren Umfang zu analysieren und damit verschiedene Aspekte eines Problems zu erforschen (Duval, 1999). So gilt es u.a. Subkonfigurationen zu begreifen, die die Schlüsselideen enthalten und letztlich zur Beweisidee führen sollen. Es ist allerdings nicht einfach, einen Überblick über die Eigenschaften von Figuren im größeren Rahmen zu erhalten.

Für das Beweisen ist DGS ein Werkzeug, das es den Studenten ermöglicht, zu erforschen und Vermutungen aufzustellen sowie eine Beweisidee zu finden. Die Frage dabei ist, welche Rolle der Lehrer dabei spielt, damit dieser Prozess bei den Studenten in der gewünschten Weise erfolgt. Wie wird der Student dazu befähigt, seine Kenntnisse sachgerecht einzusetzen?

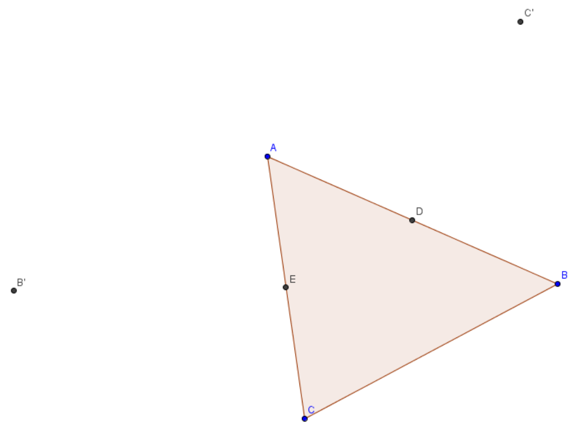
1. Empirische Studie

Das Ziel einer empirischen Studie ist es, eine beschreibende Analyse der Interventionen des Lehrers zu erhalten, während er dem Studenten Hilfestellungen bei Beweisfindungen in der Geometrie gibt. Dabei wird ein DGS eingesetzt, das diese Beweisfindung unterstützen soll.

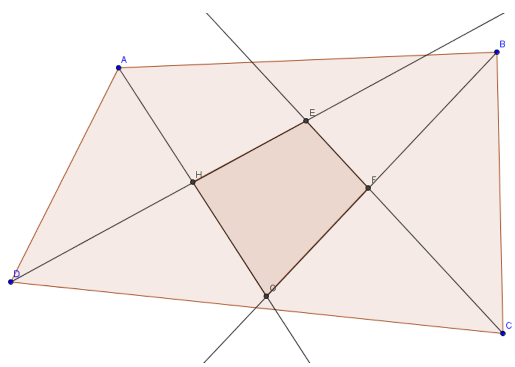
Es soll analysiert werden, wie der Lehrer Eigenschaften der Software (wie etwa den dynamischen Aspekt – Zugmodus – und die Visualisierung überhaupt) benutzt, um diesen Prozess bei Studenten anzuregen.

Dazu wurden zunächst zwei Aufgaben gewählt, die Studie wurde mit drei Dozenten und drei Studenten durchgeführt. Im Mittelpunkt der Beobachtung stand der Lehrer, der dem Studenten bei der Beweisfindung und –führung hilft. Es wurden Videoaufzeichnungen angefertigt, die gerade transkribiert werden.

Die erste Aufgabe lautet: „ABC ist ein Dreieck, D ist der Mittelpunkt der Strecke [AB] und E ist der Mittelpunkt der Strecke [AC]. Die Punkte B'und C'sind Punksymmetrisch zu B und C bzgl. Der Punkte E und D. Variieren Sie die Ecken des Dreiecks und Beobachten Sie die Beziehung zwischen den Punkten B‘, A und C‘. Welche Beziehung vermuten Sie? Begründen Sie Ihre Vermutung.“



Die zweite Aufgabe: ABCD ist ein (konvexes) Viereck mit den Winkelhalbierenden der vier Innerwinkel. Die Schnittpunkte dieser Winkelhalbierenden werden mit E, F, G und H bezeichnet. Variieren Sie die Punkte A, B, C, D. Was geschieht mit dem Viereck EFGH? Welche besonderen Vierecke können sich für EFGH ergeben? Warum? Können sich die Winkelhalbierenden auch in EINEM Punkt schneiden? Wann ist das der Fall? Äußeren Sie Vermutungen und versuchen Sie, diese zu beweisen.



2. Vorüberlegungen

Interessant waren die unterschiedlichen Strategien, mit denen die Studierenden die Aufgaben lösten, mit denen sie die Vermutungen zu beweisen suchen. Die Studenten waren in der Lage, ihre Ideen auszudrücken, sie konnten also einen Weg angeben, um ein Beweis zu finden, aber alle brauchten an bestimmten Stellen die Hilfe des Lehrers, um den nächsten Schritt durchführen zu können. Diese Hilfen waren von unterschiedlicher Art: Sie waren manchmal stärker organisatorische geprägt. So beschritten die Studenten gelegentlich Wege und „verloren die Orientierung“ im Hinblick auf das Ziel. Der Dozent musste dann den augenblicklichen Stand in einen größeren Rahmen einordnen. Einige Beispiele für solche organisatorischen Hinweise:

- „Also, sie haben jetzt die Vermutung geäußert, jetzt müssen Sie sich vielleicht mal überlegen, was Sie dazu eigentlich zeigen müssen."
- „Genau, damit haben Sie jetzt gezeigt was Sie eben zeigen wollten. Nützt ihnen das was?"
- „Allerdings sind wir jetzt natürlich ein bisschen von der Ausgangsfrage weg, es geht darum, dass das Viereck etwas Besonderes ist."

Anderseits gaben die Hilfen des Dozenten eine mathematische, inhaltliche Orientierung. Die inhaltlichen Hinweise können mit Visualisierung und dem Entdecken oder Konstruieren von Subkonfigurationen einhergehen, oder sie stützen sich auf das Variieren; d.h. auf die Möglichkeit der Visualisierung mit Hilfe des Zugmodus. Dadurch konnten mathematische Gesetzmäßigkeiten und Zusammenhänge erkannt werden, die etwa in den Subkonfigurationen auftraten. Dies kann dann zum nächsten Beweisschritt führen. Beispiel:

- „Gut, wenn Sie jetzt die Punkte B und C' verbinden, das haben Sie ja gemacht durch diese zusätzliche Hilfslinie, ist jetzt eine neue Figur entstanden. Können wir über diese Figur vielleicht etwas sagen?"

Hier spielen Visualisierung und das Erstellen von Subkonfigurationen eine Rolle. Nachdem der Student die Dreiecke erkannte und derer Kongruenz bemerkte, zieht er richtige Schlüsse, um zum Beweis zu kommen.

Die Ergebnisse dieser empirischen Untersuchung liegen noch nicht vor. Das wird der nächste Schritt sein. Insbesondere werden die Hinweise der Dozenten ausführlich analysiert und beschrieben um sie mit theoretischen Vorüberlegungen in Beziehung zu setzten.

Literatur

Ball, B. (2002). What is Mathematical Thinking? *Mathematics Teaching*, 181, 17 – 19.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. In: *Proceedings of PME 21*, Vol.1, 3 -26.

Edwards, L. D. (1990). Exploring the territory before proof: students'generalizations in a computer microworld for transformation geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 2*, 187 - 215.

Jordan, R., Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Das Projekt Mathe-Meister: Entwicklung einer Übungs-CD zur Förderung des Textverständnisses

1. Problembeschreibung

Große wie auch kleine und mittelständische Unternehmen beklagen seit Jahren, dass sie kaum geeigneten Ausbildungsnachwuchs finden. Sie stellen große Mängel in den Fächern Deutsch und Mathematik fest und kommen ebenso wie Wissenschaftler zu dem Ergebnis, dass viele der angestellten Auszubildenden „nur bedingt oder überhaupt nicht ausbildungsfähig" (Biedebach 2004, S. 42) seien. Stein zeigt im Rahmen des Projektes Mathe-Meister auf, dass diese Defizite auch in Weiterqualifizierungskursen von berufsbildenden Institutionen im erheblichen Maße auftreten und fertig ausgebildete Facharbeiter in Meisterkursen ebenfalls große Probleme in diesem Bereich haben (vgl. Stein, Winter 2009, S. 887).

Neben den Defiziten im mathematischen Bereich fallen dabei vor allem große Defizite im Bereich der Lesekompetenz bei den Teilnehmern von Weiterbildungs- und Meisterkursen auf. Diese werden bereits während oder vor Beginn einer Berufsausbildung diagnostiziert, so dass viele Betriebe eine fehlende Ausbildungsfähigkeit der potenziellen Ausbildungsplatzanwärter bemängeln. Bildungsforscher im berufsbildenden Bereich führen diese mangelnde Ausbildungsfähigkeit in erster Linie auf eine gering ausgeprägte Lese- und Schreibkompetenz der jungen Erwachsenen zurück (vgl. Grundmann 2008, S.110; Grundmann 2009, S.186; Bals et al. 2008, S. 110; Gartz et al. 1999, S. 132).

2. Leseanforderungen im Berufsalltag

Nussbauer findet bezüglich der Sprachkompetenz eine Erklärung, warum eine Diskrepanz zwischen den von den Betrieben geforderten Anforderungen und den Bewerbern vorhanden Qualifikationsprofilen existiert. Er erklärt, dass die Textsorten der allgemeinbildenden Schulen nicht den außerschulischen im Berufsleben vorkommenden Textsorten entsprechen und die Jugendlichen daher mit den Anforderungen der Berufswelt teilweise überfordert sind (vgl. Postpiech, Bitterlich 2006, S. 29). Grundmann sieht in diesem Zusammenhang als Gegensatz zu den im Schulunterricht eingesetzten literarischen Texten im Verstehen von Sachtexten wie z. B. Emails, Berichte, Dokumentationen, Bedienungsanleitungen, Broschüren, Bestellungen und Mahnungen die notwendige Bedingung für die berufliche Handlungsfähigkeit (vgl. Grundmann 2007, S. 40). Becker-Mrotzek und Kusch, die sich im Rahmen des Kölner Modellversuchs „Leseförderung in der Berufsschule“ intensiv mit den Anforderungen von beruflichen Texten auseinander setzten, sehen die Besonderheiten von Sachtexten in der Berufswelt in ihrer Empraxie, d. h. ihrer „funktionalen Einbettung in praktische Handlungszusammenhänge“ (Becker-Mrotzek, Kusch 2007, S. 31) – daraus resultiert, dass Texte im Berufsumfeld meist eine Kombination aus Fließtext, Bildern, Diagrammen und Tabellen darstellen (vgl. Linnemann 2006, S. 22). Innerhalb der PISA-Untersuchungen werden diese Textsorten in kontinuierliche (Fließtexte) und nicht kontinuierliche Texte unterschieden (Bilder, Diagramme, Tabellen) (vgl. Artelt et al. 2001, S. 80).

Die Anforderungen, die heutzutage an das Lesen gestellt werden, unterscheiden sich gerade durch die Verbreitung der neuen Medien im Wesentlichen von den Anforderungen, die vor dem „Internetzeitalter“ an die Lesenden gestellt wurden. Nicht zuletzt aufgrund der Medienintegration werden die Lesenden mit immer komplexeren Darstellungsformen konfrontiert – es geht nicht mehr um das bloße Lesen eines kontinuierlichen Textes, sondern vielmehr um eine Kombination von Schrift, Bild und ggf. auch Ton (vgl. Holly 2000). Im Rahmen der IALS-Studie (vgl. OECD 1998) wurden die teilnehmenden Probanden gefragt, wie oft sie verschiedene Lesetätigkeiten im Arbeitsleben einsetzen (vgl. Bonerad 1999; Jones 1998). Abgefragt wurde dabei, wie häufig die folgenden Lesematerialen bei der Arbeit gelesen werden (vgl. Jones 1998, S. 104):

- Briefe oder Aktennotizen
- Berichte, Artikel, Zeitschriften oder Zeitungen
- Hand- oder Referenzbücher, einschließlich Kataloge
- Diagramme oder Schemata
- Rechnungen, Lieferscheine, Tabellenkalkulationen oder Buchführungen
- Anweisungen oder Gebrauchsanweisungen für Medikamente, Rezepte oder andere Produkte

Aus den Angaben der befragten wurde ein sog. Leseindex ermittelt. Durch den Leseindex wird bestimmt, wie viele der sechs Textarten pro Tag von den jeweiligen Probanden gelesen werden. Dabei wurde ermittelt, dass dieser Leseindex bei allen befragten Berufen bei mindestens 1,5 lag, teilweise sogar über 3 (vgl. Bonerad 1999, S. 122).

3. CD-Entwicklung

Im Projekt Mathe-Meister wird auf Anfrage der Handwerks- und Industrie- und Handelskammern zur Förderung der Lesekompetenz in einem eigenständigen Projektteil eine Übungs-CD entwickelt. Im Rahmen dieses Projektteils wurden in der Konzeptionsphase elf verschiedene Aufgabenformate herausgearbeitet, die zum großen Teil auf bereits bestehende Trainingskonzepte zur Lesekompetenz der Deutsch-Didaktik zurückzuführen sind (vgl. Simon 2006; Haas 2002; Grabe, Spanjardt 2004; OECD 2000]. Als Beispiele für mögliche Aufgabenformate sind Lückentexte, Schiebpuzzle und Zuordnungen zwischen Satzteilen zu nennen. Weitere konzeptionelle Aufgaben lagen im Grobentwurf der Benutzeroberfläche (GUI) sowie in der Erstellung von Texten nach den oben beschriebenen Anforderungen. Innerhalb der ersten Entwicklungsphase wurden die einzelnen Aufgabenformate nach Vorgaben des Projektträgers mit der Entwicklungsumgebung „Macromedia-Director“ programmiert. Die entstandenen Prototypen der elf Aufgabenformate wurden im Rahmen einer formativen Evaluation an zwölf Berufsschülern drei verschiedener Berufe ausgetestet. Dabei wurden auftretende Probleme bei der Bedienung und des Verständnisses der Programme ermittelt und die Prototypen überarbeitet, so dass diese Fehler innerhalb einer zweiten Evaluationsphase nicht weiter festgestellt werden konnten. Im weiteren Projektverlauf werden zu den erstellten Texten passende Aufgaben entwickelt und diese dann an die jeweiligen Prototypen der Aufgabenformate angepasst. Zur Fertigstellung der CD wird im letzten Schritt die Benutzerverwaltung sowie die Menüstruktur programmiert.

Literatur

Artelt, C., Schneider, W., Stanat, P., Schiefele, U. (2001). Lesekompetenz: Testkonzeption und Ergebnisse. In Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J., Weiß, M. (Hrsg.) (2001). *PISA 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opdladen: Leske/Budrich.

Bals, T., Hegmann, K., Wilbers, K. (Hrsg.) (2008). *Qualität in Schule und Beruf. Forschungsergebnisse und gute Praxis*. Köln: Qualitus GmbH Publications.

Becker-Mrotzek, M., Kusch, E. (2007). Sachtexte lesen und verstehen. *Der Deutschunterricht, 59 (2007) 1*, S. 31-38.

Biedebach, W. (2004): Der Modellversuch „Vocational Literacy (VOLI)“: welche sprachlichen und methodischen Kompetenzen benötigen Schüler in der beruflichen Bildung?. In HeLP (Hessisches Landesinstitut für Pädagogik) (2004): *Sprachliche und kulturelle Bildung in den beruflichen Schulen – Ansätze des Beurteilens und Förderns*. Wiesbaden.

Bonerad, E.-M. (1999). Leseaktivitäten im Alltag. In Notter, P., Bonerad, E.-M., Stoll, F. (1999). *Lesen – eine Selbstverständlichkeit? – Schweizer Bericht zum „International Adult Literacy Survey“*, S. 113 – 130. Chur/Zürich: Rügger Verlag.

Gartz, M., Hüchtermann, M., Mrytz, B. (1999). *Schulabgänger*. Köln: Deutscher Instituts-Verlag.

Grabe, A., Spanjardt, E. (2004). *Arbeitstechniken fürs Textverständnis*. Mühlheim: Verlag an der Ruhr.

Grundmann, H. (2007). *Sprachfähigkeit und Ausbildungsfähigkeit*, Baltmannsweiler: Schneider-Verlag.

Grundmann, H. (2008). Die Förderung der Sprachfähigkeit als Beitrag zur Verbesserung der Ausbildungsqualität in Schule und Beruf. In Bals, T., Hegmann, K., Wilbers, K. (Hrsg.) (2008). *Qualität in Schule und Beruf. Forschungsergebnisse und gute Praxis*, S. 110-119. Köln: Qualitus GmbH Publications.

Grundmann, H. (2009). Die lernschwachen Hauptschulabsolventen - die größte Herausforderung für die berufsbildenden Schulen?. In *Die berufsbildende Schule: Eine Zeitschrift des Bundesverbandes der Lehrerinnen und Lehrer an beruflichen Schulen. 61. Jg., Nr. 6,* S. 183-189.

Haas, K. (2002). *Texte lesen, Inhalte verstehen – Ein systematisches Training zur Lesekompetenz.* Mühlheim: Verlag an der Ruhr.

Holly, W. (2000). Was sind „Neue Medien“ – was sollen „Neue Medien“ sein?. In Voss, G.; Holly, W., Boehnke, K. (2000). *Neue Medien im Alltag: Begriffsbestimmungen eines interdiszsplinären Forschungsfeldes.* Opladen: Leske + Budrich.

Jones, S. (1998). Anwendung(en) der Grundqualifikationen. In OECD (1998). *Grundqualifikationen, Wirtschaft und Gesellschaft: Ergebnisse der ersten internationalen Untersuchung von Grundqualifikationen Erwachsener*. Paris: OECD Publishing.

Lenhard, W., Schneider, W. (Hrsg.) (2009). *Diagnostik und Förderung des Leseverständnisses.* Frankfurt/Würzburg: Hogrefe Verlag.

Linnemann, M. (2006). *Kölner Beiträge zur Sprachdidaktik (Reihe B) – Entwicklung und Validierung eines Tests zur Erfassung der Lesekompetenz von Berufsschülern und –schülerinnen.* Köln: Gilles&Francke Verlag.

OECD (1998). *Grundqualifikationen, Wirtschaft und Gesellschaft: Ergebnisse der ersten internationalen Untersuchung von Grundqualifikationen Erwachsener.* Paris: OECD Publishing.

OECD Programme for International Student Assessment (2000). *PISA 2000 Beispielaufgaben aus dem Lesekompetenztest.*

Postpiech, U., Bitterlich, A. (2006). Alle wollen es schriftlich – Formen und Funktionen des Schreibens im Beruf. *Der Deutschuntterricht (2006), Heft 1,* S. 19-30. Seelze: Friedrich Verlag.

Simon, P. (2006). *Texte erschließen 9/10*. Berlin: Cornelsen.

Stein, M., Winter, K. (2009). Das Projekt Mathe-Meister: Strukturen & Konzeption. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik, Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 02.03. bis 06.03.2008 in Oldenburg*, S. 887-890.

Steffen JUSKOWIAK, Braunschweig

Zur Erkundung selbstreflektorischer Aktivitäten beim Bearbeiten mathematischer Probleme

Selbstreflexion als eine Möglichkeit zur Förderung der Problemlösefähigkeit

Probleme lösen zu lernen ist seit langen ein wichtiges und anerkanntes Ziel von Mathematikunterricht. Insbesondere seit TIMSS ist die Befähigung zum Lösen von mathematischen Problemen wieder stärker in das Zentrum fachdidaktischer Diskussion gerückt. Unter dem Begriff des Problemlösens wird dabei sowohl das Lösen gegebener Probleme als auch das Auffinden neuer Probleme verstanden. Im Hinblick auf mein eigenes, hier beschriebenes, Forschungsvorhaben möchte ich unter dem Begriff jedoch nur das Problemlösen im engeren Sinne, also lediglich das Lösen von gegebenen Problemen verstehen. Anregungen zur Beantwortung der Frage, wie die Problemlösefähigkeit von SchülerInnen besser als bisher gefördert werden kann, können z. B. aus empirischen Erkundungsstudien erwachsen, die darauf ausgerichtet sind, mehr Details über Problemlösungsprozesse zu erfahren.

Geleitet durch die Vermutung, dass selbstreflektorische Aktivitäten geeignet zur Förderung der Problemlösefähigkeit sind, habe ich mich auf die Untersuchung der Selbstreflexion beim mathematischen Problemlösen spezialisiert. Dabei sehe ich die Selbstreflexion als eine besondere Form von *reflection* an, die bei KILPATRICK (1985) neben *osmosis*, *memorization*, *imitation* und *cooperation* eine bedeutsame Maßnahmengruppe zur Förderung der Problemlösefähigkeit darstellt. *Reflection* beruht auf der Annahme, dass Menschen nicht nur durch eigene Tätigkeit, sondern auch durch das Nachdenken über Problemlösetätigkeiten, insbesondere auch der eigenen, lernen.

Der hier verwendete Begriff der Selbstreflexion ist aus der Denkpsychologie entlehnt und wurde dort maßgeblich durch DIETRICH DÖRNER geprägt. Zusammenfassend wird in dieser Wissenschaftsdisziplin unter Selbstreflexion das Auseinandersetzen mit bisher Getanem verstanden, was sowohl das Denken als auch das Handeln einschließt (vgl. z. B. REITHER 1979, DÖRNER 1994, KRETSCHMER 1983). Forschungsgegenstand soll hier jedoch nur die Selbstreflexion vor Abschluss der Problemlösebemühungen des Individuums sein, also keine Selbstreflexion im Sinne der Phase *Rückschau* im Problemlöseplan von POLYA (1949).

Eigenes Erkundungsvorhaben zur Selbstreflexion

Die bisher zur Thematik der Selbstreflexion bekannt gewordenen Studien, wie die von HESSE (1979), REITHER (1979), KRETSCHMER (1983) und TISDALE (1998), zeichnen sich dadurch aus, dass bei ihnen zumeist außermathematische Probleme als Probleme für Untersuchungen zur Wirkung der Selbstreflexion verwendet wurden. Des Weiteren wurden bei den Probanden selbstreflektorische Aktivitäten im Rahmen von Selbstreflexionstrainings explizit durch entsprechende Untersuchungsdesigns extern angeregt. Als Probanden wurden bei den genannten Studien außerdem überwiegend Studierende und Berufstätige eingesetzt.

Zusammenfassend handelt sich bei den oben genannten Studien um präskriptiv-normative Studien, so dass sich ein Defizit an deskriptiv orientierten Studien ausmachen lässt. Dies zeigt sich auch darin, dass unser Wissen im Hinblick auf das *natürliche* Vorkommen von Selbstreflexion beim Bearbeiten mathematischer Probleme noch sehr lückenhaft ausfällt. Wenn es aber gelingt, diese Wissenslücke zu verringern, können sich daraus möglicherweise Anregungen für eine gezielte didaktische Einflussnahme zur Förderung der Problemlösefähigkeit ergeben. In diesem Zusammenhang scheint die folgende Aussage von KRAUSE (1995, S. 33) bedeutsam: „Eine alte Weisheit der Pädagogik und Pädagogischen Psychologie besagt: Methoden zur Verbesserung geistiger Leistungen sollten so ausgelegt sein, dass sie den *natürlich* ablaufenden Denkprozess unterstützen."

An diesem Punkt setzt mein Forschungsvorhaben an, für das ich mir zum Ziel gesetzt habe, anhand empirischer Erkundungen zur natürlichen Selbstreflexion beim Bearbeiten von mathematischen Problemen durch SchülerInnen folgende Forschungsfragen zu beantworten:

- An welchen *Stellen* des Problembearbeitungsprozesses tritt Selbstreflexion auf?
- Durch welche *Ereignisse* wird die Selbstreflexion ausgelöst?
- Welche *Wirkung* für die Lösungsfindung hat die Selbstreflexion? Unter welchen Bedingungen ist sie lösungsförderlich bzw. lösungshinderlich?
- Welche *Aspekte* des Problembearbeitungsprozesses sind Gegenstand der Selbstreflexion? Stehen eher rechnerische oder strategische Überlegungen im Mittelpunkt?

Entsprechend der Einteilung von Handlungen des Problemlösens in obligatorische und fakultative Teile gemäß AEBLI / RUTHEMANN (1987) zähle ich die selbstreflektorischen Aktivitäten einer Versuchsperson zu den fakultativen Teilen. Sie sind Ausdruck metakognitiver Prozesse (vgl. KLUWE / SCHIEBLER 1984).

Bei der Durchführung der empirischen Erkundungen arbeite ich mit einem Design, das sich an empirische Erkundungen von HEINRICH (2004) anlehnt: Die jeweilige Versuchsperson ist angehalten, innerhalb von 60 min. ein vorgegebenes mathematisches Problem zu lösen und dabei laut zu denken. Dabei wird sie videographiert. Die Auswertung der so aufgenommenen Filme einschließlich der Identifizierung von Selbstreflexionsszenen erfolgt mit Hilfe der Methode der konsensuellen Validierung (vgl. MAIER 1991). Zur Identifizierung von selbstreflektorischen Aktivitäten auf der sprachlichen Ebene findet folgender Arbeitsbegriff Verwendung: „Selbstreflexion ist das Auseinandersetzen mit bisher Getanem beim Bearbeiten mathematischer Probleme *vor* Abschluss der Problemlösebemühungen.“

Als Probanden standen mir in einer ersten Vorstudie vier Lehramtstudentinnen der Lehrämter GHR und Gymnasium zur Verfügung. Nachdem die Auswertung dieser Erkundungsstudie hinsichtlich der Identifikation von Selbstreflexionsszenen erfolgreich verlaufen ist, wurde eine zweite Vorstudie, die aktuell ausgewertet wird, mit fünf Elft- und ZwölfklässlerInnen eines Braunschweiger Gymnasiums durchgeführt.

Erste vorläufige Befunde und ein Ausblick

Die bei der Auswertung der ersten Vorstudie identifizierten Selbstreflexionsszenen geben Anlass anzunehmen, dass sich Selbstreflexionen im Hinblick auf die oben genannten Forschungsfragen durch ein zunächst sechsgliedriges Kategoriesystem charakterisieren lassen. Es umfasst folgende (teilweise miteinander verbundene) Kategorien, die durch die nebenstehenden Fragen kurz beschrieben werden:

- *Auslöser:* Was bzw. welches Ereignis hat die Selbstreflexion ausgelöst?
- *Ergebnis:* Was hat die Selbstreflexion unmittelbar bewirkt? Hat die Versuchsperson z. B. einen rechnerischen oder strategischen Fehler in ihrem bisherigen Vorgehen entdeckt?
- *Folge:* Welche Folge hat die Selbstreflexion für den weiteren Problemlösegang? Hat die Selbstreflexion z. B. geholfen, das aktuelle Problem zu lösen oder war sie eher hinderlich?
- *Struktur:* Handelt es sich bei der Selbstreflexion um eine allein stehende Szene oder ist diese mit mehreren anderen, z. B. thematisch, vernetzt?
- *Reichweite:* Wie weit reicht die Selbstreflexion in dem Problemlöseprozess zurück? Bezieht sich die Versuchsperson beispielsweise auf den Lösungsanlauf, der direkt vor der Selbstreflexion stattgefunden hat?
- *Gegenstand:* Welche Aspekte betrachtet die Versuchsperson während der Selbstreflexion? Beispielsweise eher rechnerische Details oder steht das strategische Vorgehen im Vordergrund?

Perspektivisch ist geplant, die empirischen Erkundungen zur Thematik der Selbstreflexion im Laufe dieses Jahres mit einer umfangreichen Hauptstudie mit 15 ElfklässlerInnen Braunschweiger Gymnasien, die jeweils fünf Probleme bearbeiten, fortzuführen. Die bei der Auswertung des Videomaterials gewonnen Erkenntnisse werden aller Voraussicht nach dazu dienen können, das beschriebene Kategoriesystem zu präzisieren und dadurch Anregungen für ein besseres Verständnis von Selbstreflexionsphänomenen zu erlangen. Möglicherweise können dadurch auch bestehende Problemlösemodelle angereichert werden. Schließlich sollen die Ergebnisse auch einen Beitrag zur Sensibilisierung von Lehrkräften für solche Selbstreflexionen beim Bearbeiten mathematischer Probleme leisten und, wie bereits eingangs erwähnt, möglicherweise ergänzende Anregungen zur Förderung der Problemlösefähigkeit geben.

Literatur

Aebli, H. / Ruthemann, U. (1987). Angewandte Metakognition: Schüler vom Nutzen der Problemlösestrategien überzeugen. In: *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, 19, S. 46 – 64.

Dörner, D. (1994): Selbstreflexion und Handlungsregulation: Die physischen Mechanismen und ihre Bedingungen. In: Lübbe, W.: *Kausalität und Zurechnung – über Verantwortung in komplexen kulturellen Prozessen*. Berlin: De Gruyter.

Heinrich, F. (2004). *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Dr. Kovac.

Hesse, F. W. (1979): *Trainingsinduzierte Veränderungen in der heuristischen Struktur und ihr Einfluss auf das Problemlösen*. Technische Hochschule Aachen.

Kilpatrick, J. (1985): A Retrospective Account of the Past 25 Years on Teaching Mathematical Problem Solving. In: Silver, E.A. (Ed.): *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives* (S. 1 – 15). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kluwe, R. H. / Schiebler, K. (1984): Entwicklung exekutiver Prozesse und kognitive Leistungen. In: Kluwe, R. H. (Hrsg.): *Metakognition, Motivation und Lernen*. Kohlhammer: Stuttgart.

Krause, W. (1995): Kreativität zwischen Psychologie und Technik. In: Spies, K. (Hrsg.): *Ein methodischer Weg zu innovativen Technologien*. Aachen: Augustinus.

Kretschmer, I. F. (1983): Problemlösendes Denken im Unterricht. Frankfurt a. M.: Lang

Maier, H. (1991). Interpretative Forschung im Bereich der Mathematikdidaktik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1991* (S. 97 – 107). Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Polya, G. (1949): *Schule des Denkens*. Bern: Francke.

Reither, F. (1979): *Über die Selbstreflexion beim Problemlösen*. Universität Gießen.

Tisdale, T. (1998): *Selbstreflexion, Bewusstsein und Handlungsregulation*. Weinheim: Psychologie Verlags Union.

Rainer KAENDERS, Köln

Entwicklung des mathematikdidaktischen Internetlabors math-il.de

Seit 2010 ist das mathematikdidaktische Internetlabor math-il.de im Internet unter der Adresse http://math-il.de zu finden. In diesem Beitrag werden die Hintergründe bei der Entwicklung des Labors dargestellt.

Das Internetlabor math-il.de soll engagierten Mathematiklehrern die Möglichkeit bieten, gemeinsam mit Kollegen und Fachdidaktikern ihren eigenen Unterricht (und nicht in erster Linie Materialien) anhand konkreter mathematikdidaktischer Problemstellungen weiter zu entwickeln.

math-il.de wurde von der Berliner Firma Webwerk produziert. Eine Reihe deutscher wie niederländischer Kollegen aus Schule und Universität haben uns dankenswerterweise mit Rat und Tat zur Seite gestanden. Vorbild für die Arbeit in diesem Labor waren verschiedene niederländische Lehrerforschungsprojeke an denen der Autor beteiligt war (Kaenders, 2006, 2007; Kaenders & Oolbekkink, 2009; Van den Aarssen et al., 2004).

1. Entwicklungskreislauf

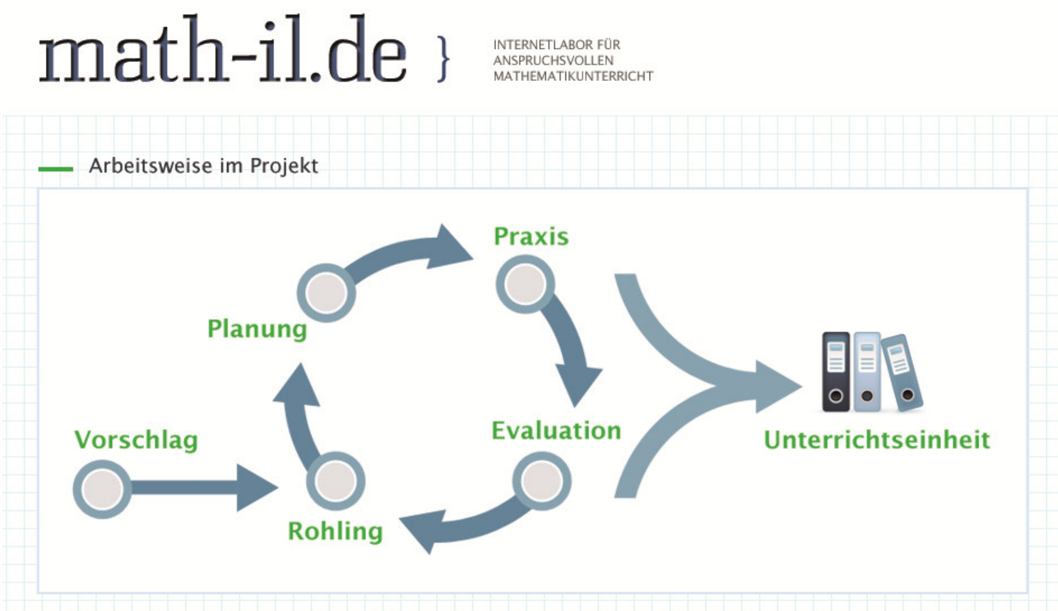
Eine verbreitete Herangehensweise zur Veränderung von Unterrichtspraxis besteht darin, zunächst Erkenntnisse anhand der hypothetisch-deduktiven Methode empirisch zu gewinnen und auf der Basis dieser Erkenntnisse Veränderungen mit Hilfe von Fortbildungen, Veränderungen der Randbedingungen und Curricula, zentraler Prüfungen und anderer Maßnahmen von außen in der Schule zu bewirken. In den vergangenen Jahrzehnten hat sich gleichwohl gezeigt, dass die Veränderung nach dieser Methode, die bekannt ist als *Research, Development and Diffusion* (RDD), kaum gelingt. Freudenthal (1978) wendete sich immer vehement gegen diese empirische Herangehensweise: “Separating design and realisation is detrimental.”

Heute wissen wir, dass innovative Unterrichtspraxis vor allem dann entsteht, wenn die Veränderungen direkt in Verbindung stehen mit der persönlichen Weiterentwicklung der Unterrichtspraxis der Lehrer (z.B. Freudenthal, 1991, S.158; Walker, 1992). Bei Freudenthal (1978) heißt es: “Observation and intelligent analysis of learning processes in service is itself a learning process in further training, which is again reinforced by being analysed. Formal further training should not only serve the teacher’s spiritual enrichment but should by means of the discussion of experiences also increase the profundity and the refinement of observation and analysis.”

Mathematikdidaktik wird dabei als Entwurfswissenschaft (Wittmann 1995; Lesh, 2005) und Mathematikunterricht als ein Prozess begriffen, der anhand fortschreitender Einsichten weiterentwickelt wird, die ihrerseits durch theoretische Perspektiven auf die Praxis entstehen. Gravemeijer (1994) nennt dies "theory-guided bricolage". So entsteht Mathematikunterricht, der sich wirklich durchführen und an seinen Zielen messen lässt. Vor allem diejenigen Personen, die in den Mathematikunterricht involviert sind, haben die Möglichkeit, ihn aufgrund theoretisch unterbauter Beobachtungen zu verändern. Dabei lernen Lehrer und Didaktiker nicht individuell sondern als Gruppe (community of practice). In der so genannten *kollaborativen Interventionsforschung* (Krainer, 2003) laufen diese diversen Ansätze zusammen: eine Forschungsmethodik, bei der Lehrer mit Didaktikern anhand gemeinsamer konkreter mathematikdidaktischer Zielstellungen ihre eigene Unterrichtspraxis erforschen und weiterentwickeln. Lehrer erforschen dabei ihre eigene Praxis (action research). Didaktiker tragen mathematikdidaktische Erkenntnisse empirischer wie auch stoffdidaktischer Art zu der Entwicklung des Unterrichts bei (Intervention). Hilft dieser Unterricht bei den teilnehmenden Lehrern nachweisbar bei der Lösung des Ausgangsproblems mit, kann der so entwickelte Unterricht über gute Erfahrungen veröffentlicht und weiter verbreitet werden (good practice). Auch verschiedene deutschsprachige Projekte, wie das Sinus-Projekt in NRW oder das IMST-Projekt in Österreich arbeiten auf eine solche Weise und können hierdurch die Unterrichtspraxis konstruktiv und nachhaltig verändern.

Bei der Entwicklung von math-il.de hat der Entwicklungszyklus die folgende Gestalt: Die Analyse und Diagnose der Problemstellung führt zu einem Vorschlag, der zu einem *Unterrichtsrohling* entwickelt wird. Dieser *Rohling* enthält eine Problemanalyse, eine Diagnose, eine ausgearbeitete und im Schulsystem verortete Zielstellung sowie vorläufige Unterrichtsentwürfe mit Materialien und ein an der Problemstellung und den Entwürfen orientiertes Messinstrument, mit dessen Hilfe sich die Gruppe darüber klar werden kann, ob sie der Zielstellung näher gekommen ist.

Die aus fünf bis zehn gleichberechtigten Lehrern und Didaktikern bestehende Entwicklergruppe beginnt mit dem Rohling, den sie zunächst sorgfältig zur Kenntnis nimmt. Dann werden der Unterricht und der Einsatz des Messinstruments geplant, in der Praxis durchgeführt und die Ergebnisse in der Gruppe evaluiert und interpretiert. Daraufhin wird der Entwurf des Rohlings aufgrund der gewonnen Einsichten verändert und der Prozess beginnt auf's Neue. Wenn die Entwicklung des Unterrichts weiter fortgeschritten ist, werden die Früchte der Arbeit in einem Lehrerhandbuch als so genannte *Unterrichtseinheit* veröffentlicht. Dazu gehört neben den Materialien vor allem auch eine Beschreibung des Entwicklungsprozesses, mit Hilfe dessen erfahrene Lehrer erste naive Herangehensweisen für sich selbst vermeiden und den Unterricht in seiner Zielstellung übernehmen und ihren eigenen Bedürfnissen und Vorlieben anpassen können.



2. Zusammenarbeit

Es wird bei der Zusammenarbeit davon ausgegangen, dass die Lehrer kompetent, gleichberechtigt, professionell, kollegial, lernfreudig, kreativ, akademisch gebildet und etwas idealistisch sind. So werden Sie bei math-il.de auch angesprochen. Gemeinsam mit Kollegen wollen sie Unterrichtseinheiten für ihren eigenen Unterricht entwickeln.

Anhand der in das Labor implementierten Methoden der kollaborativen Interventionsforschung bietet das Labor die entsprechende elektronische Umgebung zur gemeinsamen Entwicklung dieses Unterrichts an. So steht etwa ein methodisch strukturierter Blog mit einer Materialsammlung und anderen Funktionen zur Verfügung. Die Beweggründe der Lehrkräfte und der Wissenschaftler zur Teilnahme an einem solchen Projekt sind in der Regel nicht deckungsgleich. Lehrer sind in erster Linie daran interessiert, über wertvolle Ideen, Entwürfe und Materialien für ihren eigenen Unterricht zu verfügen. Mathematikdiaktiker hingegen sind an allgemeineren Aspekten und Erkenntnissen zu Unterricht und Entwicklungsarbeit interessiert und wollen/müssen sich über diese Arbeit auch profilieren. Trotz unterschiedlicher Motivationen von Lehrern und Wissenschaftlern in einer solchen Gruppe können gemeinsame Ziele formuliert werden. Dies ist durch verschiedene *userstories* im Entwurf des Labors bedacht und entsprechend verwirklicht worden. Für eine vertrauensvolle Zusammenarbeit muss sich jedoch vor allem eine soziale Gruppe bilden (z.B. durch persönliche Treffen). Die Umgebung des Blogs bietet dann in der Folge einen Rahmen für eine fruchtbare alltägliche Zusammenarbeit.

3. Ausblick

Inzwischen sind drei Projekte ganz konkret in Angriff genommen, über die auf der GDM-Tagung 2010 in München berichtet wurde.

a) Kreativität mit dem Zahlenteufel.

b) Topologie der Flächen

c) Geometrisches Propädeutikum zur Begriffsbildung der Analysis

Näheres zu diesen und weiteren Projekten finden Sie auch bei math-il.de.

Das mathematikdidaktische Internetlabor math-il.de erlaubt, Herausforderungen zur Weiterentwicklung von Mathematikunterricht anzunehmen und damit die wichtige Arbeit unserer Kollegen in der Schule zu unterstützen.

Literatur

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and Sowing, Preface to a Science of Mathematical Education*, Dordrecht, Boston: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1991). *Revisting Mathematics Education, China Lectures*, Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Kaenders, R.H. (2006). Zahlbegriff zwischen dem Teufel und der tiefen See. Der *Mathematikunterricht*, 52(5).

Kaenders, R. (2007). Kreiseln im Weltraum: Lehrerforschung zwischen Wissenschaft und Schulpraxis. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Hildesheim: Franzbecker.

Van den Aarssen, M., Alink, H., van den Hombergh, A., Jordens, B., Kaenders, R., Klein Breteler, R., Tacken, C. (2004). Spelen op een slimme manier. *Nieuwe Wiskrant* 23 (4), 10-16.

Kaenders, R.H. & Oolbekkink, H. (2009). Leerlingen leren wiskunde bedrijven, in: Jeroen Imants & Helma Oolbekkink (Red.) *Leren denken binnen het schoolvak*, Garant Uitgevers nv, 103 -113.

Krainer, K. (2003). Interventionsstrategien. Auf dem Weg zu einer „kooperativen Interventionsforschung". In: Schmidt, E. (Hrsg.:) *Interventionswissenschaft – Interventionsforschung. Erörterungen zu einer Prozesswissenschaft vor Ort*. Bd. 2 der Klagenfurter Beiträge zur Interventionsforschung, 43-66.

Lesh, R. (2005). Mathematics Education as a Design Science. *Zentralblatt der Didaktik der Mathematik*, 37 (6).

Wittmann E.Ch. (1995). Mathematics Education as a "Design Science". *Educational Studies in Mathematics* 29, 355-374.

Gabriele KAISER, Nils BUCHHOLTZ, Björn SCHWARZ, Hamburg, Sigrid BLÖMEKE, Rainer LEHMANN, Ute SUHL, Berlin; Johannes KÖNIG, Köln; Hans-Dieter RINKENS, Paderborn

Kompetenzentwicklung in der Mathematik-Gymnasiallehrerausbildung – eine empirische Studie an fünf deutschen Universitäten

1. Ziele der Studie

Zentrales Ziel der von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Studie ist die Evaluation des ebenfalls von der Stiftung finanzierten Projekts „Mathematik Neu Denken“ zur Verbesserung der Gymnasiallehrerausbildung an den Universitäten Siegen und Gießen (ab WS2009/2010 auch Duisburg-Essen). Diese innovativen Ansätze wurden nun aus einem externen Blickwinkel in Hinblick auf die erzielten Effekte im Bereich der mathematischen und mathematikdidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Kompetenzentwicklung der Studierenden und der Entwicklung der zugehörigen Überzeugungen *(beliefs)* untersucht.

2. Anlage und Kontext der Evaluationsstudie

Die Evaluationsstudie konzentriert sich im Bereich Mathematik und Mathematikdidaktik auf die in den ersten Semestern der Mathematiklehrerausbildung für Gymnasien zentralen Wissensdomänen bzw. die zugehörigen Überzeugungen (*beliefs*):

- Universitäres mathematisches Wissen im Bereich Analysis und Lineare Algebra/Analytische Geometrie;
- Mathematikdidaktisches Wissen im Bereich Didaktik der Oberstufe;
- Elementarmathematik vom höheren Standpunkt als Verzahnung dieser beiden Wissensdomänen im Sinne von Felix Klein;
- Berücksichtigung der Überzeugungen *(beliefs)* zur Mathematik als Wissenschaft und zum Lehren und Lernen von Mathematik;

Im Bereich der Erziehungswissenschaft wurde erziehungswissenschaftliches Wissen als zentraler Baustein für die Ausbildung von Lehrerprofessionswissen, fokussiert auf handlungsrelevante Aspekte wie Motivation, Klassenführung, Leistungsbeurteilung, Unterrichtsplanung und Umgang mit Heterogenität erhoben.

Zurückgegriffen wurde dabei unter anderem auf Ansätze der internationalen Lehrerbildungsstudie Teacher Education and Development Study – Learning to Teach Mathematics (TEDS-M 2008), einer Studie der IEA zur

Wirksamkeit der Lehrerausbildung, die einen externen Bezugsrahmen darstellt und deren Ergebnisse ab April 2010 verfügbar sind.

Einen weiteren externen Maßstab bilden Universitäten, die unter freiwilliger Teilnahme an der Evaluation für Testungen gewonnen werden konnten. Insgesamt konnten so die Anfängerkohorten an den fünf Universitäten Gießen, Siegen, Bielefeld, Essen und Paderborn getestet werden. An der Universität Siegen nahmen zudem für einen direkten Vergleich sowohl die fortgeschrittenen Studierenden der geförderten Projektjahrgänge als auch die neue Eingangskohorte an der Erhebung teil.

Um Aussagen über den Lernstand und die Lernstandsentwicklung der Anfängerkohorten treffen zu können, ist die Studie als echter Längsschnitt angelegt. Bisher liegen Ergebnisse aus den ersten beiden Testzeitpunkten vor. Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über die Größen der bereinigten getesteten Kohorten zu den beiden Erhebungszeitpunkten T1 und T2.

Gruppe	**T1**	**T2**
Universität A, Lehramt	18	13
Universität A, Nicht-Lehramt	31	22
Universität Gießen, Lehramt	64	38
Universität C, Lehramt	36	24
Universität C, Nicht-Lehramt	22	13
Uni Siegen, Lehramt, Anf.	27	16
Uni Siegen, Lehramt, Fortg.	27	17
Universität E, Lehramt	35	14
Gesamt	**260**	**157**

Die einzelnen Kohortengrößen bewegten sich in den jeweiligen Standorten im Bereich von 60-80. Mit einer Wiedererreichbarkeitsquote von 60% (von T1 zu T2) wurde eine äußerst gute Quote für eine Studie im Tertiärbereich erreicht, da bedingt durch Studienabbruch mit einem größeren Anteil von nicht mehr wieder zu erreichenden Studierenden zu rechnen war.

Der Anteil Nicht-Lehramtsstudierender an der Studie setzt sich zusammen aus Studierenden für den Bachelor in Mathematik oder einen Bachelor im Ingenieurbereich, in Informatik oder in Naturwissenschaft. Zu erwarten war hier insbesondere eine hochselektive Gruppe, die ein hohes Leistungsniveau erwarten ließ, nicht zuletzt auch wegen der freiwilligen Teilnahme an einem lehramtsspezifischen Test.

Zentrale Annahmen für die Auswertung der Ergebnisse der Testungen waren messbare Leistungsfortschritte vom ersten zum zweiten Erhebungszeitpunkt, also vom Beginn des ersten Semesters zum Ende des zweiten Semesters, sowie, dass diese Leistungsfortschritte in ihrer Höhe variieren nach dem erzielten Eingangsniveau, den Lernvoraussetzungen der Studierenden und den an den Universitäten angebotenen Lerngelegenheiten , also dem Innovationspotential der Studiengänge (Integration der Wissensdomänen, Umfang der Lerngelegenheiten usw.).

3. Entwicklung des mathematischen und mathematikdidaktischen Wissens

Die erhobenen Testdaten wurden mit IRT-Modellen ausgewertet, wobei bei der Skalenbildung zwischen den im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Wissensdomänen unterschieden wurde.

Im Bereich des universitären Wissens zeigen sich an beiden Erhebungszeitpunkten bei den Ergebnissen deutliche Leistungsunterschiede zwischen den einzelnen Universitäten. Die Nicht-Lehramtsstudierenden zeigen - erwartungsgemäß - bessere Leistungen als die Lehramtsstudierenden, nicht aber höhere Fortschritte zwischen den beiden Erhebungszeitpunkten.

Die Anfängerstudierenden der Universität Siegen zeigen deutliche Leistungsfortschritte, und auch die fortgeschrittenen Studierenden halten ihr hohes Ausgangsniveau. Dies weist auf die Effektivität der geförderten Programme hin. Bei den Studierenden der Universität Gießen zeigen sich hingegen kaum Fortschritte, was wohl durch die Strukturierung der Curricula bedingt ist, da an der Universität Gießen die Studierenden ihr Studium zunächst mit einer Veranstaltung zur Analytischen Geometrie und Linearen Algebra beginnen und erst zu einem späteren Zeitpunkt die Veranstaltung zur Analysis besuchen. Interessant werden daher die Ergebnisse der Gießener Gruppe zum dritten Messzeitpunkt werden.

In der Domäne „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ zeigt sich ein eher uneinheitliches Bild. Hier nahm die Varianz der Ergebnisse unter den einzelnen Gruppen zum zweiten Erhebungszeitpunkt zu. Auch in dieser Domäne erbringen die Nicht-Lehramtsstudierenden gegenüber den Lehramtsstudierenden höhere Leistungen. Hinsichtlich der geförderten Projekte sind die Leistungen der Lehramtsstudierenden jedoch nicht erwartungsgemäß. Die Lehramtsstudierenden an den Universitäten Gießen und Siegen (Anfängerkohorte) zeigen relativ niedrige Leistungen, einzig die fortgeschrittene Gruppe der Lehramtsstudierenden in Siegen zeigt gute Ergebnisse, wenn auch mit leichten Vergessenseffekten zwischen dem ersten und dem zweiten Erhebungszeitpunkt.

Im Bereich der Fachdidaktik wiederholen sich die Ergebnisse aus der Domäne des Fachwissens. Auch hier treten zwischen den einzelnen Universitäten wieder hohe Leistungsunterschiede auf. Die Anfängerkohorte an der Universität Siegen verzeichnet eine starke Leistungszunahme und auch die Fortgeschrittenengruppe der Lehramtsstudierenden in Siegen verzeichnet hohe Leistungszuwächse, selbst, nachdem bereits bei der ersten Erhebung von dieser Gruppe das höchste Leistungsniveau aller Gruppen erreicht wurde. Offenbar gelingt es der Universität Siegen, das fachdidaktische Wissen nachhaltig zu fördern. Leider zeigen sich diese Effekte an der Universität Gießen nicht, was ggf. ebenfalls durch die Strukturierung der Lehramtscurricula bedingt ist. Auch hier werden erst die Ergebnisse der dritten Erhebung weitergehende Aufschlüsse ermöglichen.

4. Entwicklung des erziehungswissenschaftlichen Wissens

Im Bereich des erziehungswissenschaftlichen Wissens zeigen sich ebenfalls deutliche Unterschiede zwischen den einzelnen Universitäten, sowohl zum Zeitpunkt der ersten Erhebung als auch beim Lernzuwachs. Erwartungsgemäß zeigten sich hier niedrigere Ergebnisse bei den Nichtlehramtsstudierenden. Signifikante Leistungszuwächse ließen sich für die Lehramtsstudierenden der Universität Siegen sowohl bei der Anfängerkohorte als auch bei der Fortgeschrittenenkohorte nachweisen, auch hier lässt sich dieses Ergebnis allerdings nicht auf die Studierenden der Universität Gießen übertragen.

5. Zusammenfassung der ersten Ergebnisse der Evaluation der innovativen Konzepte und Ausblick

An der Universität Siegen gelingt eine Implementierung eines Studiengangs, der alle drei Wissensdomänen eines Lehrerprofessionswissens entwickelt (also mathematisches, mathematikdidaktisches und erziehungswissenschaftliches Wissen). Die enge Verzahnung des Erwerbs des Fachwissens mit dem Erwerb des fachdidaktischen Wissens erwirkt offenbar nicht nur in der Studieneingangsphase, sondern auch im Laufe des Studiums die Förderung des Wissenserwerbs (speziell den Erwerb des fachdidaktischen Wissens). Gleichzeitig zeigt die Universität Siegen eine geringe Selektivität der Studierendenkohorten im Vergleich mit den anderen Universitäten, deren gute Ergebnisse im Bereich des universitären Fachwissens z.T. an eine hohe Eingangsselektion gekoppelt sind. Auch der Universität Gießen gelingt die Realisierung einer niedrigen Eingangsselektivität, allerdings zeigten sich hier noch wenig Fortschritte im Bereich der Erziehungswissenschaften und der Mathematikdidaktik, dies deutet auf eine fehlende Integration der zentralen Domänen eines Lehrerprofessionswissens hin.

Die Untersuchung der Kompetenzentwicklung über ein weiteres Jahr, d.h. gegen Ende des 4. Semesters durch weiterentwickelte Instrumente (Juli 2010) befindet sich bereits in der Planung. Des Weiteren sind ergänzende qualitative Untersuchungen geplant, da auch deutliche Effekte der innovativen Projekte im Bereich der Überzeugungen, der Selbstwirksamkeit und des „Selbstbewusstseins" vermutet werden.

HANSRUEDI KAISER, Zollikofen (Bern)

Situiertes Wissen, subjektive Erfahrungsbereiche und Mathematik in der Berufsbildung

Problemstellung

Es gibt so gut wie keine berufliche Tätigkeit, bei welcher der Umgang mit Größen, Zahlen, Plänen, Graphiken etc. keine Rolle spielt. Berufsbezogene Mathematik im weitesten Sinn oder „Fachrechnen“ ist daher aus der Berufsbildung nicht wegzudenken.

Auf der anderen Seite generiert das Fachrechnen – zumindest in der Schweiz – einen grossen Bedarf an Stütz- und Fördermassnahmen. Viele Lernende werden von ihren Lehrkräften in Zusatzkurse geschickt. Das ist unbefriedigend und wirft die Frage auf, wie man Fachrechnen in der Berufsbildung sinnvoll und wirksam gestalten kann.

Handlungswirksames Wissen

Heymanns (Heymann, 1996, S. 207) Schilderung seiner Tochter illustriert, was auch Berufsschullehrende in einem etwas anderen Kontext immer wieder erleben: „Katharina hatte, im Rahmen einer Hausaufgabe, unter ordnungsgemäßer Anwendung der Bruchrechenregeln die Zahl 2 durch 1/4 dividiert und kam dann zu mir, weil sie sich über die 8 als Ergebnis wunderte. Wieso konnte das Ergebnis größer sein als der Dividend? Sie hatte doch ‚geteilt’."

Wissenspsychologisch lässt sich argumentieren, dass Katharinas Problem daher rührt, dass unser Denken und Problemlösen v.a. über Erinnerungen an konkrete, selbst erlebte Situationen gesteuert wird (Kaiser, 2005a, 2008). Wir erinnern uns in einer neuen Situation an ähnliche, bereits erlebte Situationen und handeln in Analogie zum damaligen Vorgehen. Bei Katharina ist es die Situation des „Verteilens“, an die sie erinnert wird. Ihr Problem ist, dass sie die neue Aufgabe fälschlicherweise als ähnlich zu dieser Situation wahrnimmt, d.h. sie assimiliert die neue Aufgabe fälschlicherweise an einen bestimmten, wahrscheinlich gut ausgebildeten „Subjektiven Erfahrungsbereich“ (Bauersfeld, 1983).

Situationskreise

Helfen könnte ihr das Wissen, dass noch andere Problemsituationen existieren, die man zwar auch mit einer Division bewältigen kann, die aber einer ganz anderen Fragestellung entsprechen. Eine typische zweite Situation wäre die Problemsituation des „Aufteilens“, etwa: „2 kg Mehl sollen in

Beutel zu ¼ kg abgefüllt werden. Wie viele Beutel benötigt man?". In diesem Kontext wird kaum jemand damit Probleme haben, dass das Resultat 8 größer ist als die Anzahl kg in der Ausgangsmenge. Weitere solche „Sachsituationen" lassen sich finden, welche je mit eigenen Grundvorstellungen verbunden sind (Gerster & Schultz, 2004).

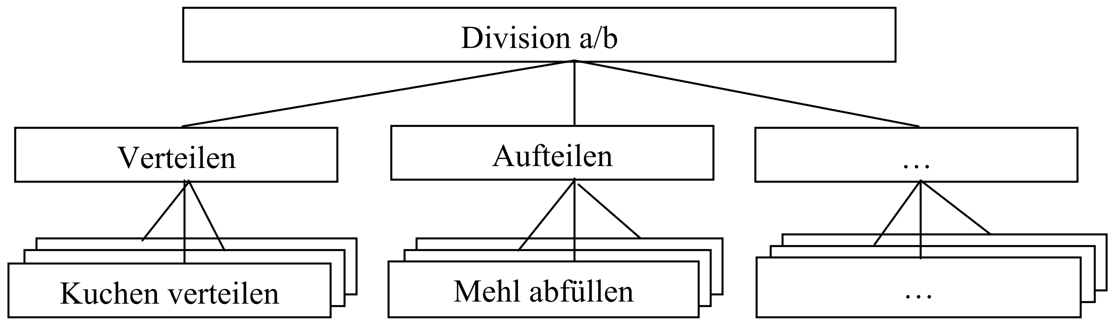


Abbildung 1: Unterschiedliche „Divisionssituationen"

Wir erhalten also das Bild einer Vielzahl von Problemsituationen mit je ihrer eigenen (Sach)Logik und einer Hierarchie von immer abstrakteren Ähnlichkeitsbeziehungen zwischen diesen Situationen. Natürlich möchte man bei den Lernenden erreichen, dass sie diese Ähnlichkeiten sehen und auch nutzen können. Bei der untersten Ebene in Abbildung 1 wird man damit wohl auch Erfolg haben, d.h. man wird z.B. erreichen können, dass die Lernenden das Verteilen einer Pizza oder eines Kuchens oder von 20 Gummibärchen als strukturell gleiche Situationen erkennen und angehen.

Wie die leidvollen Erfahrungen vieler Lehrender und Lernender zeigt (s. Katharina), ist jedoch nicht sicher, dass es gelingt, mit allen Lernenden auch die zweite Ebene in Abbildung 1 zu erreichen, d.h. zu erreichen, dass alle Lernende sämtliche darunter liegende Situationen als ähnlich erkennen und sie alle als Division zweier Zahlen modellieren können.

Angemessene Abstraktionsebene

Es ist deshalb sorgfältig abzuklären, wie groß die Kreise der Situationen, welche als ähnlich erkannt werden und zwischen denen Erfahrungswissen übertragen werden kann, tatsächlich sein müssen.

Gerade bei schwächeren Lernenden ist es entscheidend, dass man sie hier nicht unnötigerweise überfordert. Oft ist es sinnvoller, zwei verschiedene Anwendungskontexte wie „Verteilen" und „Aufteilen" zu unterscheiden und unterschiedlich zu behandeln, auch wenn sie, mit professionellem mathematischem Wissen analysiert, dieselbe Struktur aufweisen. In der Berufsbildung ist dies oft unproblematisch, da meist nur einige wenige solche Anwendungskontexte bzw. Situationskreise unterschieden werden müssen.

Diese Situationskreise lassen sich finden, indem man Berufsleute bei ihrer Arbeit beobachtet und befragt, bis deutlich wird, welche Situationen von ihnen als unterschiedlich erlebt werden (Kaiser, 2005b).

Didaktische Konsequenzen

Sind die relevanten Situationen einmal gefunden, kann dann der Unterricht bezogen auf jede einzelne Situation all dem folgen, was aktuell als mathematikdidaktisch sinnvoll gilt.

Entscheidend ist, dass man dabei „von unten“ beginnt, bei den Vorerfahrungen der Lernenden anknüpft und die notwendigen Vorstellungen aus der konkreten Berufssituation heraus aufbaut.

Dabei geht es keineswegs nur darum, Rechenverfahren zu vermitteln. Im Gegenteil: Damit die Lernenden in der beruflichen Praxis sicher mit den entsprechenden Situationen umgehen können, müssen sie sich in die Logik der Situation eindenken können (Kaiser, 2009). Wenn wir beim Beispiel mit „Verteilen“ und „Aufteilen“ bleiben, dann muss für sie etwa beim „Verteilen“ selbstverständlich werden, dass die Teile immer kleiner werden, je mehr Empfänger sich dieselbe Menge teilen. Und beim „Aufteilen“ muss für sie sonnenklar sein, dass es umso mehr Gefäße braucht um dieselbe Menge abzufüllen, je kleiner diese Gefäße sind.

Der Prozess des Aufbaus von unten nach oben kann so lange fortgesetzt werden, wie Zeit bleibt und wie die Lernenden folgen mögen. Die situationsunabhängigeren Konzepte und Vorstellungen sind aber auf diesem Weg nicht Voraussetzung für das Handeln in den konkreten Situationen, sondern sozusagen eine Bonus für die Lernenden, die sich darüber auch freuen können.

Ein Beispiel: Der Tangens bei Zimmerleuten

Ein schönes Beispiel, wie wenig es oft braucht, um eine mathematisch abstrakte Situation für Berufsleute zu konkretisieren, ist die Arbeit eines Studenten am EHB (Altenbach, 2005).

Zimmerleute müssen aus dem Neigungswinkel des Daches und der Breite des Gebäudes die Länge der benötigten zentralen Stützbalken berechnen können. Traditionell wird dazu im Unterricht zuerst abstrakt Trigonometrie betrieben (Abbildung 2, linke Seite) und dann das Gelernte angewendet.

Altenbach hat dieses Vorgehen „auf die Füße gestellt“. Selbstverständlich stehen immer noch Dreiecke und ihre Eigenschaften im Zentrum. Nur wird etwa das für die Berechnungen zentrale Dreieck nicht in irgendeiner Position an die Tafel gezeichnet, sondern so, wie es sich in der Problemsituation präsentiert. Und die Seiten erhalten nicht irgendwelche Buchstaben als Be-zeichnungen, sondern sind mit den entsprechenden Fachbegriffen angeschrieben (Abbildung 2, rechte Seite).

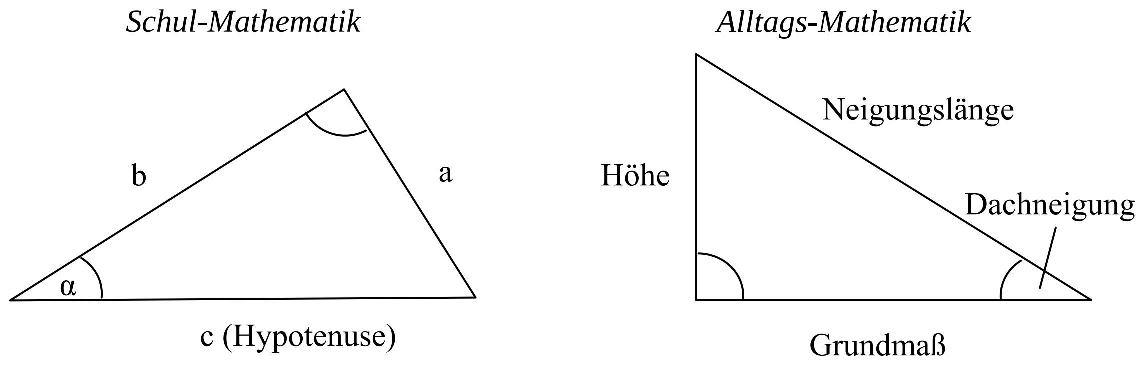


Abbildung 2: Trigonometrie für Zimmerleute

Diese Umstellung und eine Didaktik, die vom vorhandenen Vorwissen der Lernenden ausgeht, genügt, um wesentlich mehr Lernenden einen Zugang zum Thema zu verschaffen.

Literatur

Altenbach, U. (2005) *Übergang von Ähnlichkeitsrechnungen zur Trigonometrie.* Zollikofen: EHB (http://www.pfm.ehb-schweiz1.ch und dort: Weiterbildung/Umsetzungsarbeiten von Studierenden)

Bauersfeld, H. (1983). Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In H. Bauersfeld, H. Bussmann, G. Krummheuer, J. H. Lorenz & J. Voigt (Eds.), *Lernen und Lehren von Mathematik, Analysen zum Unterrichtshandeln II* (pp. 1-56). Köln: Aulis.

Gerster, H.-D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Bericht zum Forschungsprojekt "Rechenschwäche – Erkennen, Beheben, Vorbeugen".* Freiburg i.Br.: Pädagogische Hochschule Freiburg, Institut für Mathematik und Informatik und ihre Didaktiken.

Heymann, H. W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim: Beltz.

Kaiser, H. (2005a). *Wirksames Wissen aufbauen - ein integrierendes Modell des Lernens.* Bern: h.e.p. verlag.

Kaiser, H. (2005b). *Wirksame Ausbildungen entwerfen - Das Modell der Konkreten Kompetenzen.* Bern: h.e.p. verlag.

Kaiser, H. (2008). *Berufliche Handlungssituationen machen Schule.* Winterthur: Edition Swissmem.

Kaiser, H. (2009). Modelle bauen und begreifen. Mehr als blindes Rechnen bei angewandten Aufgaben. In L. Hefendehl-Hebeker, T. Leuders & H.-G. Weigand (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 74-85). Berlin: Cornelsen

Kaiser, H. (in Vorbereitung). *Rechnen und Mathematik anwendungsbezogen unterrichten.* Winterthur: Edition Swissmem.

Romualdas KAŠUBA (KASCHUBA), Vilnius

Schöner Text bei Aufgaben – wie wertvoll und warum?

Kurz gesagt alles ruht auf dem festen Glauben und Überzeugung, dass man aus jeder einfachen Aufgabe immer eine Schönere gestalten kann.

Ein eigenes einfaches Beispiel, was daraus gleich sofort entstehen kann:

Jedes Jahr schenkt Papa Geppetto dem ihm so geliebten, geduldig und bescheiden wirkenden Pinocchio eine recht angemessene Summe als Taschengeld. Die Geldsumme in Cent ausgedrückt entspricht immer dem Produkt des Alters von Pinocchio selbst and des Patron Gepetto. In diesem Jahr hat Pinocchio genau 7,81 Euro bekommen. Wieviel Geld hat Pinocchio im vorigen Jahr erhalten?

Das oben Genannte kann man als einfache Aufgabe ansehen. Die Lösung ist ebenso leicht. Der ganze Erfolg ist der Tatsache, dass 781 wenig echte Teiler besitzt, zuzuschreiben. Nach der Feststellung, dass 781 nur zwei echte Teiler hat, nämlich 11 und 71, folgt gleich, dass diese Zahlen verraten auch das erwünschte Alter dieser Beiden verraten. Vor einem Jahr hat also das gesamte Vergnügen genau 7 Euro gekostet.

Nehmen wir etwas Bunteres.

In ihrer so seltenen Freizeit teilten das unsterbliche Bremer Quartett – Esel, Hund, Kater und Huhn ein gewöhnliches Schachbrett in vier Teile auf und schauten äusserst aufmerksam auf ein Viertel davon, das aus 16 Feldern – 8 Weissen und 8 Schwarzen bestand, welches in der üblichen Art und Weise markiert war.

Der Zigzagformige Weg, der aus vier weissen Feldern besteht – je aus einem der vier Reihen, sodass die Felder von den Nachbarreihen nur einen gemeinsamen Eckpunkt besitzen. Dies wird als Bremer Pfad benannt. Nach dieser Bestimmung welcher von den vier weissen Felder bestehende Pfad einen Bremer Pfad bildet, haben sie gleich eine heftigen Streit angefangen, wieviele Bremer Pfade es insgesamt in diesem recht kleinen 4 x 4 Quadrat gibt. Patron der Stadt Roland hat einen wahres Zeugnis davon abgelegt, dass sie sich alle bis tief in die Nacht nicht einig werden konnten wieviele Bremer Pfade es überhaupt auf diesem 4 x 4 Brett gibt.

Können Sie in einer verständlicher Weise diesem unsterblichen Quartett erklären wieviele Bremer Pfade es da auf diesen kleinen 4 x 4 Brett gibt?

Als Aufgabe selbst ist sie allerdings auch leicht – es ist eine Aufgabe vom Typ „Zählen sie nur einfach so, aber genau“. Der Fall 8 x 8 – übliches Schachbrett – kam zuletzt im Landeswettbewerb von Grossbritannien AD 2009 vor.

Zur Geschichte der Entstehung von eben Jenem kann Folgendes gesagt werden. Im vorigen Sommer war der Verfasser auch ein Teilnehmer an der 50. IMO in Bremen. So ist es eigentlich kein grosses Wunder, dass es bereit im Herbst während der litauischer Landes Olympiade bei den jüngeren Schülern die Stadtmusikanten praktisch schon die ganze Bühne beherrschten. Die folgende Beispiele werden es noch bestätigen.

Aber vorher noch zwei historische Bemerkungen – wie bekannt, das Märchen *Die Bremer Stadtmusikanten* erzählt von vier Tieren (Hahn, Katze, Hund und Esel), die ihren Besitzern infolge ihres Alters nicht mehr nützlich sind und daher getötet werden sollen. Es gelingt den Tieren zu entkommen, worauf sie sich zufällig treffen. Alle folgen dem Vorschlag des Esels, in Bremen Stadtmusikanten zu werden. Und zweitens – in der ehemaligen UdSSR waren die Bremer Stadmusikanten ungeheuer popular, da schon im Jahre 1969 ein Trickfilm darueber gemacht wurde. Der Film war mit solcher Kunst und Geschick gemacht, dass ich mutig aber ohne Gefahr riskieren würde eine kategorische Bemerkung zu machen, dass die Bremer Stadtmusikanten damals in Bewusstsein Aller anwesend waren – wie heute es nur die allerbesten Stars – meist vergebens – erhoffen könnten. Aus einem Wettbewerb in Grossbritanien kommt auch die Folgende – genauso demokratische – Aufgabe, die nach einer Bremer Färbung suchte, wie es unten gerade dargetellt ist, aus:

Heute ist es nur wenige Leute bewusst, dass in Vergangenheit, als die Mitglieder der unsterblichen Vier überhaupt noch nicht bekannt waren, sie schon auf dem Gebiet der Stadtsicherheit als gewöhnliche Nachstwächter arbeiteten. Patron der Stadt Bremen Roland als allwissender Augenzeuge hat bestätigt, dass es dann zu ihren Pflichten unvermeidlich auch gehörte jede Nacht vor dem Morgengrauen um die ganze Stadt herumzuschleichen, um feststellen zu können, ob da alles wirklich anständig und richtig verläuft. Derselbe Roland ist überzeugt, Bescheid zu wissen, dass der Esel zweimal so viel wie die Katze herumgeschlichen ist, dreimal so viel wie der Hund und sogar viermal so viel wie das Huhn. Alle Vier zusammen sind um die Stadt Bremen genau 400 Male herumgelaufen. Wieviel Male hat der Esel die Stadt Bremen umlaufen? (Die Lösung selbst fordert nur die Aufteilung der gegebenen Zahl in gegebene Proportion).

Im Bremerland sind gestern die Spiele zum Gewinn des Nationpokales beendet worden, währenddessen jede Mannschaft genau ein Spiel gegen jede andere Mannschaft ausgetragen hat. Die Spiele waren nach den folgenden Regeln durchgeführt worden: Für einen Sieg wurden 3 Punkte vergeben, für ein Unentschieden wurde ein Punkt vergegeben, und schliesslich 0 Punkte für ein verlorenes Spiel. Als bereits alle Spiele abgeschlossen waren wurde festgestellt, dass alle Mannschaften zusammen genau 21 Punkten erobert hatten. Die Stimme der Spiele Maestro Huhn war 3 Tage nach den Spielen der Meinung, dass wenn nur soviel bekannt ist, wie es hier geäußert wurde, dann ist es ganz und gar unmöglich festzustellen, wieviel Mannschaften bei diesem Pokal der Nationen gespielt haben und um so mehr unmöglich ist auch zu erschliessen wieviel Punkten die einzelnen Mannschaften errungen hatten.
Hat Maestro Huhn die ganzen drei Tage immer recht gehabt? Wieviele Mannschaften haben bei dem Pokal der Nationen teilgenommen? Wieviel Punkte haben die einzelnen Mannschaften errungen? (Herstellungsland hier scheint auch Grossbritannien zu sein).

Direkt beruflich wirken die Musikanten gerade in der folgender Aufgabe:

Die unsterblichen Bremer Vier – Esel, Hund, Kater und Huhn – konnten es sich nicht mehr erlauben, gemeinsam aufzutreten als sie zu den absoluten Klassiker der Volksmusik geworden waren. Auftritte zu Dritt waren schon sehr selten und nur die wurden dann *Bremer Ekstasen* genannt. Als im letzten Sommer in Bremen die mathematischen Weltspiele hervorragender Talente in Mathematik stattfanden, hatten die Mitglieder der unsterblichen Vier einige Auftritte ausschließlich in Form als Bremer Ekstasen durchgeführt. Die Seele der Stadt Roland war selbstverständlich als Augenzeuge bei allen Bremer Ekstasen anwesend und hat gleich bekannt gegeben, dass Maestro Huhn mehr Auftritte als jeder der Anderen gehabt hat, oder insgesamt acht davon und Maestro Esel hatte weniger Auftritte als alle Anderen, er ist insgesamt nur fünf Mal aufgetreten. Die Seele der Stadt Roland hat auch ohne ein einziges Wort zu sagen alle Anwesenden sofort darauf aufmerksam gemacht, dass jeder, der zumindest ein wenig fähig ist, sich zu konzentrieren, auch ohne Weiteres berechnen kann, wie viele *Bremer Ekstasen* durch diese unsterblichen Bremer Stadtmusikanten durchgeführt worden sind.

Ohne Fußball – wie man sieht – gab es, zum Glück, schon damals sowohl nicht nur kein volles Lebensbild, sowie auch kein würdigen Lebenslauf. Dazu noch ein Beispiel.

Zu Spielen in der Sonderliga des Bremer Landes wurden insgesamt fünf Mannschaften zugelassen. Jede Mannschaft hat gegen jede andere der vier übrigen Mannschaften genau ein Spiel durchgeführt. Jede Mannschaft hat für jedes gewonnene Spiele 3 Punkte bekommen, 1 Punkt für jedes unentschiedene Spiel und für ein verlorenes Spiel wurden überhaupt keine Punkte verteilt. Am Ende aller ausgetragenen Spielen erlangten die Löwen der Prärien 10 Punkte, die Büffel der Wüste 9 Punkte, die Alpiner Enkelsöhne 4 Punkte, die friedlichen Bulldoggen 3 Punkte, und schließlich haben die Windmühlen insgesamt 1 Punkt erobert.

Die Stimme der Liga Maestro Huhn hat gleich angefangen, überall zu erzählen, dass es genug ist, nur soviel wie es hier gesagt wird zu wissen, um folgende fundamentale Einsichten herauszubekommen und zwar nicht nur (A): wie viele Spiele unentschieden ausgegangen sind, aber um so mehr noch zu erschließen, wie auch (B): oder wie sich alle Spiele, wo Alpiner Enkelsöhne sich beteiligten, ausgegangen sind. Fest ist unser Glaube, dass auch sie, wenn sie sich nur ein bisschen Zeit dafür nehmen könnten, es auch herausfinden könnten.

An der Stelle muss der Verfasser bestehen, dass er weitaus noch nicht über alle ihm bekannte arithmetische Abenteuer dieser Tiere erzählt hat. Weitere Beispiele von Belletrisierungen dieser Sorte mit anderen wirkenden Kräften sind auch in drei Heften, die in der englischer Sprache erschienen sind, enthalten.

Selbst die Bremer Stadtmusikanten sind zur Zeit beim Verfasser schon in 5 Sprachen übersetzt worden – die deutsche Beispiele sind zuletzt entstanden und wurden hier auch dem Leser vorgeschlagen.

An der Stelle mein allerherzlichter Dank geht an Orlando Döhring aus London, der mich mit meinen Bremer Übersetzungen moralisch unterstützte und geholfen hat und ebenso auch an Prof. Bernhard Brockman, der von Augsburg aus über meine von mir aus so geliebte aber z. Z. leider recht einsam gebliebene deutsche Sprache meiner vielen GDM Veröffentlichungen sorgt.

Literatur.

1. Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle,* Part I, Riga, University of Latvia, 2008, 59 p., ISBN 978-9984-45-045-2
2. Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle,* Part II, Riga, University of Latvia, 2008, 67 p., ISBN 978-9984-18-102-8
3. Romualdas Kašuba, *Once upon a time I saw a puzzle,* Part III, Riga, University of Latvia, 2009, 88 p., ISBN 978-9984-45-133-6

Stefan-Harald KAUFMANN, Köln

Schülerauffassungen von Variablen in der analytischen Geometrie

Im Unterricht der linearen Algebra und analytischen Geometrie bearbeiten Schülerinnen und Schüler häufig geometrisch motivierte Probleme mit Hilfe von Objekten, die durch algebraische Gleichungen beschrieben werden. Variablen können in solchen Gleichungen unterschiedliche Funktionen einnehmen bzw. unterschiedlich interpretiert werden. In der Regel werden bei derartigen Gleichungen bestimmte Eigenschaften bzw. Aspekte von Variablen fokussiert, vgl. dazu beispielsweise Malle (Malle, 1993).

1. Forschungsprojekt

In dem hier vorgestellten Forschungsprojekt sollen die Variablenauffassungen, die Schülerinnen und Schüler bei der Arbeit mit algebraischen Gleichungen im Unterricht der linearen Algebra und analytischen Geometrie entwickeln, untersucht werden. Ein Schwerpunkt des Forschungsprojekts ist die Analyse des Zusammenhangs von Variablenauffassungen und den Vorstellungen der mit Hilfe der Variablen beschriebenen Objekte.

Außer einer fachwissenschaftlichen und stoffdidaktischen Analyse bildet die Auswertung von Schülerinterviews zu ausgewählten Objekten der analytischen Geometrie den Schwerpunkt. Diese Auswertung wird auf der Basis der Grounded Theory (Glaser, 2005) realisiert. Die Interviews wurden im Januar 2010 an der Universität zu Köln durchgeführt und beinhalten Fragen zu Vektoren, Geraden und verschiedenen Typen von Geradengleichungen.

2. Schülerinterviews

Der Beitrag konzentriert sich auf erste Ergebnisse aus den Interviews zu Zusammenhängen von Variablenauffassungen und geometrischen Objekten. Diese sollen hier an zwei Fallbeispielen zur geometrischen Interpretation einer Geradengleichung in Vektorform konkretisiert werden. Eine ähnliche Untersuchung zu speziell dieser Frage wurde von Wittmann (Wittmann, 1999) bereits durchgeführt. Bei den Ergebnissen lassen sich einige Übereinstimmungen erkennen. Es können aber auch weitere Aspekte ergänzt werden.

Im Interview wurden allen Schülerinnen und Schülern insgesamt sieben vorher festgelegte Fragen gestellt. Exemplarisch wird hier eine dieser Fragen beschrieben. Dabei wurde den Schülerinnen bzw. Schülern eine Karte mit der Aufschrift

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

vorgelegt. Anschließend stellte der Interviewer die folgende Frage: „Ich habe hier eine Geradengleichung. Kannst Du erklären woraus sie sich zusammensetzt."

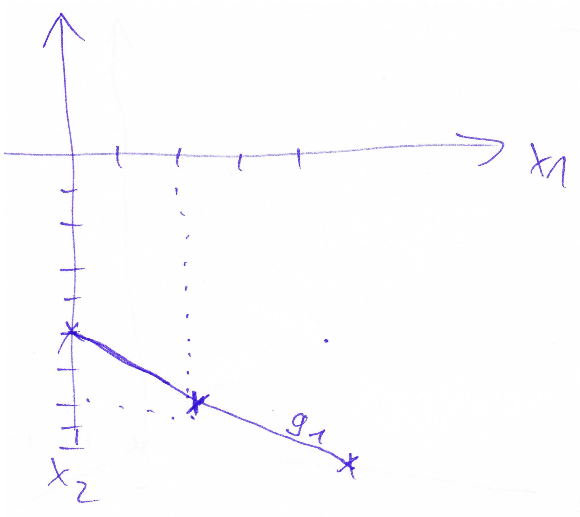
Die Antworten der Lernenden sind zum Teil sehr unterschiedlich, lassen aber bereits Zusammenhänge zwischen Variablenauffassung und den Vorstellungen zu den beschrieben Objekten erkennen. Dies soll im Folgenden mit Hilfe von zwei Fallbeispielen verdeutlicht werden.

3. Fallbeispiel Mathias

Mathias beantwortet die oben beschriebene Frage, indem er zunächst die einzelnen Komponenten der Gleichung zu erklären versucht. Im Laufe des Gesprächs bemerkt er, dass er dabei große Schwierigkeiten hat, bricht ab und setzt nochmal neu an mit dem wesentlichen Unterschied, dass er seine Antwort an einer Grafik erläutert:

Also wir hatten hier unsern äh so unsern äh so Ortsvektor gesetzt. Das der Ort, der uns den Ursprung gibt.
(*Skaliert die senkrechte Achse und zeichnet auf dieser einen Punkt ein.*)
Und dann mit dem mit ne Verschiebung von vier Einheiten in x-Ebene und vier Einheiten in äh x eins Ebene und vier Einheiten in x zwei Ebene dann.
(*Skaliert die waagerechte Achse und läuft anschließend vom Startpunkt aus 4 Einheiten in x_1-Richtung und -4 Einheiten in x_2-Richtung. Den Endpunkt dieses Wegs markiert er mit einem Punkt.*)
Dann wären wir ungefähr bei, drei eins zwei drei vier. Dann wären wir ungefähr hier. So sähe dann in etwa unsere Gerade aus.
(*Verbindet die beiden Punkte durch eine Strecke.*)
Ausgehend von beiden Vektoren dann.

Dazu zeichnet Mathias die folgende Grafik:



Mathias identifiziert den Ortsvektor als einen Punkt (Z. 165-167) und den Richtungsvektor als eine Verschiebung (Z. 167), die als Strecke realisiert wird. Die Strecke ist für Mathias gleichzeitig die Gerade (Z. 177/178.). In dem gesamten Interview realisiert Mathias die Gerade ausschließlich über den Ortsvektor und den Richtungsvektor, wie er selbst am Ende in Zeile 179 nochmals erklärt. Die Variable λ wird von ihm anscheinend nicht wahrgenommen oder zumindest äußert er zu keinem Zeitpunkt, dass sie eine Bedeutung für die Beschreibung der Geraden besitzt. Das mag eine Erklärung dafür sein, dass die Gerade aus seiner Sicht begrenzt zu sein scheint bzw. eine Strecke ist.

4. Fallbeispiel Felix

03:06 F: Ähm. Wir haben zuerst einen Stützvektor, der uns vom
(Zeigt auf den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.)
Nullpunkt aus zu auf die Gerade führt.
Dann einen Richtungsvektor, der uns eben sacht, in
(Zeigt auf den Vektor $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$.)
welche Richtung die Gerade verläuft und einen
Vorfaktor vom Richtungsvektor,
(Zeigt auf λ.)
der das Ganze zu einer Geraden macht, weil ja der Richtungsvektor nur eine bestimmten Punkt anzeigen würde, aber auf diese Weise halt in jede beliebige Richtung auf dieser Geraden; kann halt der Punkt verschoben werden, der auf der Geraden eben liegt und dann dargestellt wird.

Felix erklärt zuerst die Bedeutung des Stützvektors (Z. 57-59) und des Richtungsvektors (Z. 60-62) für die Gerade. Anschließend geht er auf die

Bedeutung des Vorfaktors λ ein. Felix geht dabei auf zwei entscheidende Aspekte ein: Die Notwendigkeit dieses Vorfaktors und dessen Funktionsweise. Der Vorfaktor ist seiner Aussage nach notwendig, da andernfalls nur ein Punkt der Geraden und nicht die gesamte Gerade dargestellt wird (Z. 65-67). Die Begründung liefert er direkt danach durch seine Erklärung der Funktionsweise. Der Punkt, den Stützvektor und Richtungsvektor ohne den Vorfaktor anzeigen (Z. 66), kann mit Hilfe des Vorfaktors auf der Geraden verschoben werden. Hier lässt sich erkennen, dass Felix die Gleichung funktional interpretiert. Leider gibt er keine exakte Auskunft darüber wie er das exakt realisiert. Weitere Informationen über die Vorstellung von Felix konnten aus der Antwort auf diese Frage nicht gewonnen werden, so würde etwa interessieren ob er sich für den Vorfaktor eine Zahl denkt, die den durch den Stützvektor dargestellten Punkt entlang der Gerade auf einen anderen Punkt verschiebt oder ob er sich eine Zahl denkt, diese dann verändert und dadurch die Position des Punktes auf der Geraden verändert. Zu Beantwortung dieser und ähnlicher Fragestellungen sind weitere Auswertungen der Interviews erforderlich.

5. Schluss

Die beiden Beispiele demonstrieren, dass ein gewisser Zusammenhang zwischen Variablenvorstellung und Objektvorstellung erkennbar ist. Im Fall Mathias wird deutlich, dass eine Interpretation einer Geradengleichung in Vektorform ohne die entscheidende Variableneigenschaft zu Fehlvorstellungen des beschrieben Objektes führen kann. Im Fall Felix führt die Interpretation der Variablenfunktion zu einer tragfähigen Geradenvorstellung. Um Felix Variablenauffassung besser einordnen zu können, müssen bei einer genaueren Untersuchung weitere Aspekte, wie beispielsweise Felix Vorstellung eines Vektors mit einbezogen werden. Das Ziel ist dann, die Variablenvorstellung in bereits bestehende Konzepte für Funktionsvariablen (z. B. Malle, 1993, S.263-266), einzuordnen.

Literatur

Malle, Günther (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg.

Glaser, B.G./Strauss, A.L. (2005). *Grounded Theory*, 2. Auflage. Bern: Huber.

Wittmann, G. (1999). Schülerkonzepte zur geometrischen Deutung der Parametergleichung einer Geraden. *Mathematica Didactica* 22 (1) (S. 23-37).

Christa KAUNE, Elmar COHORS-FRESENBORG, Osnabrück
Silke KRAMER, Springe

Aufgaben zur Förderung metakognitiver Kompetenzen

1. Einleitung

In der internationalen mathematikdidaktischen Debatte wird als eine wichtige Maßnahme zur Verbesserung der Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts angesehen, metakognitive Aktivitäten im Unterricht zu steigern: Es gilt die Unterrichtskultur so zu verändern, dass die Lernenden ihre eigenen Denkprozesse vermehrt planen, überwachen und reflektieren.

In einem zweijährigen Kooperationsprojekt zwischen dem Institut für Kognitive Mathematik (Universität Osnabrück) und dem Otto-Hahn-Gymnasium (Springe) wird dazu ein Konzept entwickelt und erprobt. Es fußt auf bewährten Ideen aus dem von der Deutschen Telekom Stiftung geförderten Projekt *Mathematik Gut Unterrichten* (Kaune u.a., 2010). Insbesondere werden vermehrt Aufgaben konzipiert, mit denen metakognitive Aktivitäten von Lernenden gesteigert werden sollen. Dies soll die Entwicklung einer metakognitiv-diskursiven Unterrichtskultur verstärken. Die Wirksamkeit dieser komplexen Implementationsmaßnahme wird mit einem Kontrollgruppendesign untersucht.

2. Aufgabenbeispiele zur Evozierung von Planungsaktivitäten

Während in neueren Schulbüchern Aufgaben zu finden sind, die die Lernenden zur Überwachung und zur Reflexion anregen (vgl. z.B. Lergenmüller und Schmidt, 2001) sind Aufgaben, die bei den Lernenden Planungsaktivitäten auslösen sollen, sehr selten zu finden. Wohl aber findet man Vorschläge, die die Lernenden zum Befolgen von Strategien anhalten (vgl. Griesel u.a., 2006, S. 109). Dies steht im Einklang mit internationalen Bemühungen, Lernende im Befolgen solcher Strategien zu trainieren (Mevarech u.a., 1997). Es scheint aber schwierig zu sein, dass die Lernenden diese Strategien zu ihren eigenen machen, ohne dass sie von den Lehrenden dazu jedes Mal aufgefordert werden (Depaepe u.a., 2010). Wenn man dieses ändern will, muss man die Unterrichtskultur insgesamt beeinflussen. Ausgangspunkt können geeignete Aufgaben sein, die die Lernenden motivieren, selbständig planerisch tätig zu werden. Dies kann eine Lehrkraft beispielsweise in einer Situation erreichen, in der ein Schüler (krankheitsbedingt) den Unterricht versäumt hat indem sie allen Schülern die folgende Hausaufgabe stellt:

Schreibt für Dennis auf, was wir heute im Unterricht erarbeitet haben, so dass er in die Lage versetzt wird, die Hausaufgaben ohne weitere Hilfe zu machen.

Eine Schülerin wählt sich das Beispiel: $3(x+4) - 10 = 7x + 10 + 3x$ und stellt am Anfang ihrer Hilfe die Notwendigkeit einer Strategie heraus.

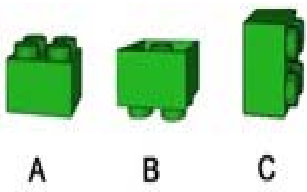
Da du ja nicht da warst konnst du ohne eine Strategie wahrscheinlich die Aufgaben nicht lösen. Da ich freundlich bin sage ich dir mal meine Strategie. Demnach empfele ich dir als erstes die Klammern aufzulösen. Danach würde ich die Terme zusammen-fassen. Das würde ich immer machen wenn es geht. Hier nach empfele ich dir die Terme zu ordnen also auf eine Seite die x-Terme und auf die andere Seite die nor-malenzahlen. Wenn du dies gemacht hast würde ich so weiter rechnen das auf der Linken Seite nur ·x steht und auf der rechten nur eine normale Dann teile durch die zahl die mit x multipliziert wird.

Die nächsten Sätze beschreiben Planungen von Tätigkeiten, wie: Klammern auflösen, Terme zusammenfassen, Terme ordnen. Dann wechselt sie zu Planungen von Zwischenergebnissen: auf eine Seite die x-Terme, auf der anderen Seite normale Zahlen, einen Term „mal x", nur eine normale Zahl. Zum Ende plant sie wieder eine Tätigkeit: Teilen durch die Zahl, die mit x multipliziert wird.

Das selbständige Formulieren der Strategie setzt voraus, dass diese Schülerin über ihre Erfahrungen beim Gleichungslösen reflektiert hat. Die Art, wie sie sich präzise an ihren Mitschüler wendet, lässt vermuten, dass sie dies auch in einem Diskurs im Unterricht praktiziert.

Das folgende zweite Aufgabenbeispiel zeigt, wie bei anspruchsvollen Aufgaben mathematisches Sachwissen, darauf aufsetzende kognitive Prozesse und sie steuernde metakognitive Aktivitäten miteinander verwoben sind. Es handelt sich um eine Weiterentwicklung von Aufgabe 11 aus Lergenmüller und Schmidt (2001, S. 205).

Fällt ein Lego-Vierer auf den Boden, so kann er „4 Augen" oder „1 Auge" zeigen oder auf einer Seite liegen bleiben. In der Tabelle findest du verschiedene Prognosen für die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis A, B oder C auftritt.



a) Welche der Schätzungen sind eurer Meinung nach gut, welche nicht? Begründet eure Meinung.

b) Plant, wie man untersuchen kann, wie groß die Wahrscheinlichkeiten sein könnten.

c) Notiert eure eigene Prognose.

d) Führt euren Plan aus. Wer hat die beste Prognose aufgestellt?

	A	B	C
Inge	0,33	0,33	0,33
Peter	0,4	0,4	0,2
Jutta	0,4	0,55	0,05
Hans	0,4	0,6	0
Fred	0,3	0,5	0,1

Bei der Analyse der Aufgabenteile und der Schülerlösungen greifen wir wieder auf Cohors-Fresenborg und Kaune (2007) zurück.

Schülergruppe 1:

wir glauben das Hans recht hat, weil
die Warscheinlichkeit sehr gering ist das
der Stein auf die Seite fällt (C).
Man kann den Stein auf die Seite
stellen doch vom Wurf aus bleibt er
nie auf der Seite stehen. Aber wir
vermuten das die Möglichkeit A
am häufigsten Auftritt, weil ihn die
Pinöpel schwerer machen und runterziehen.
Inge dagegen glauben wir das sie
nicht Recht hat, weil es nicht passieren
kann, das der Stein genauso viel gleich
liegen bleibt wie a & b).

Bei Bearbeitung des Aufgabenteils a sind sowohl fachspezifische Tätigkeiten zu kontrollieren, ein Ergebnis auf Plausibilität zu kontrollieren als auch der gewählte Modellierungsansatz zu überprüfen. Zur Begründung sind auch reflektierende Einschätzungen notwendig, wie die Bearbeitungen von zwei Schülergruppen zeigen.

Schülergruppe 2:

Wir stimmen keiner Prognose zu, weil es wahrschein-
licher ist, dass der Legostein wie A fällt, da
dann die größte Fläche auf dem Boden liegt.
Aus dem Grund ist auch B wahrscheinlicher als
C. Inge und Fred kommen nicht einmal mit
allen Prozentwerten auf 100.

Mit dem Aufgabenteil b werden die Lernenden zunächst zur Planung aufgefordert. Die in dieser Lerngruppe etablierte Unterrichtskultur erfordert, dass sie ihre Aktivitäten begründen. Dieses ruft Reflexionstätigkeiten auf, wie die folgenden Bearbeitungen zeigen:

Schülergruppe 3:

Unser Plan:
Wir haben uns überlegt weil wir 3 Leute
sind das 2 den Lego-Stein 33 mal
hoch werfen und einer ~~3~~ 34 mal den Stein
hoch wirft denn dann haben wir ihn 100
mal hoch geworfen und haben dann
sozusagen auch 100% und dann kann
man die Prozente besser ausrechnen.
(In der klasse kann man dann 3-Gruppen
bilden. Denn dann haben wir sozusagen tausend
mal gewürfelt und hat mehr Ergebnisse.)

Diese Schülergruppe plant (begründet) eine Methode zur Überprüfung einer Prognose, bevor sie über Rechenvorteile reflektiert. Eine zweite Gruppe (s. nächste Seite) plant ebenfalls eine Methode, und begründet sie nachträglich mit einer Reflexion über die Wirkungsweise.

Schülergruppe 4:

b) Jeder wirft 30x einen Lego-Vierer hoch, dann werden die Ergebnisse zusammengetragen und die relative Häufigkeit ausgerechnet.
Die relative Häufigkeit wird nah an der Wahrscheinlichkeit liegen, weil der Lego-Vierer 800x geworfen wurde.

Die Aufgabenteile c und d erfordern zunächst Aktivitäten auf der Sachebene. Anschließend wird eine reflektierende Einschätzung erwartet.

3. Fazit

Die Analysen der Aufgabenbeispiele und der Schülerlösungen zeigen, wie metakognitive Aktivitäten zum Erreichen der in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen *Argumentieren* und *Modellieren* beitragen. Für die Verbesserung der Unterrichtsqualität reicht es nicht, Lehrkräften lediglich solche Aufgaben an die Hand zu geben. Lernende werden sich nur dann schriftlich begründet argumentativ äußern, wenn es dieses auch Bestandteil des Unterrichtsdiskurses ist. Im Projekt *Mathematik Gut Unterrichten* wurde gezeigt, wie in einem Lehrercoaching durch Beteiligung der Lehrkräfte an der Analyse von Unterrichtsdiskursen das Bewusstsein für das Ineinandergreifen von kognitiven und metakognitiven Aktivitäten bei Lernenden und Lehrenden geschärft werden konnte (Kaune u.a., 2010).

Literatur

Cohors-Fresenborg, E. und Kaune, C. (2007): *Kategoriensystem für metakognitive Aktivitäten beim schrittweise kontrollierten Argumentieren im Mathematikunterricht.* Arbeitsbericht Nr. 44. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Depaepe, F. u.a. (2010): Teachers' metacognitive and heuristic approaches to word problem solving: analysis and impact on students beliefs and performance. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 42(2).

Griesel, H. u.a. (2006): *Elemente der Mathematik 7 Niedersachsen*. Hannover: Schroedel.

Kaune, C. und Cohors-Fresenborg, E. (Hrsg.) (2010): *Mathematik Gut Unterrichten - Analyse von Mathematikunterricht bezüglich metakognitiver und diskursiver Aktivitäten*. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Lergenmüller, A. und Schmidt, G. (2001): *Mathematik neue Wege 7*. Braunschweig: Westermann.

Mevarech, Z. R. und Kramarski, B. (1997): IMPROVE: A Multidimensional Method for Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research Journal*, 34(2), 365–394.

Katharina KLEMBALSKI, Berlin

Primzahltests als innermathematische Vernetzung von Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung

Große Primzahlen sind ein wesentlicher Konstruktionsbestandteil weit verbreiteter kryptografischer Algorithmen. Auch wenn das Wissen über die Erzeugung von Primzahlen (ebenso wie die kryptografischen Verfahren) aus Anwendersicht *nicht* notwendig ist, so ist es mit Schülern gut zu thematisieren. Primzahltests sind somit geeignet, um (exemplarisch) die *verborgene* und gleichzeitig moderne Mathematik unseres durch Technik und mithin mathematisch geprägten Alltags sichtbar zu machen. Überraschenderweise sind es Methoden der Stochastik, die das innerhalb der Zahlentheorie grundsätzlich exakt lösbare Problem, solche Zahlen zu finden, in der Praxis zugänglich machen. Günstig für den Unterricht ist es, dass dafür nur wenig zusätzliches Wissen bereitgestellt werden muss.
Besondere Chancen für den Mathematikunterricht bestehen darin, dass Schüler

- sich mit einem authentischen Problem der modernen Mathematik beschäftigen.
- zwei mathematische Herangehensweisen zur Lösung eines Problems verbinden: die zufallsbestimmte der Stochastik und das (scheinbar) exakte Vorgehen aus der restlichen Schulmathematik. Der Beitrag der Stochastik zur Lösung eines innermathematischen Problems steht im besonderen Kontrast zu den dominierenden außermathematischen Bezügen der Stochastik.
- Probabilistik als (durch den Computer zugängliche) Denkweise zum Problemlösen erfahren.

Wesentliche mathematische Grundlagen einer entsprechenden Unterrichtseinheit sind das Rechnen mit Kongruenzen, der kleine Satz von Fermat (Wahlpflichtunterricht Kl. 9/10) sowie mehrstufige Zufallsexperimente (Kl. 9/10) [1]. Nahe liegende Orte der Integration in den Schulunterricht sind daher insbesondere im Anschluss an die entsprechenden Elemente der Zahlentheorie oder Stochastik angesiedelt.

Meldungen aus der Presse über neue größte (bekannte) Primzahlen oder Faktorisierungsrekorde [u.a. 6, 7] können Anlass sein, die scheinbar vertrauten Primzahlen vom höheren Standpunkt zu betrachten. Ein anderer Zugang ergibt sich ausgehend von asymmetrischen Kryptosystemen, deren Sicherheit auf dem Einsatz großer Primzahlen beruht.[1]

Ein natürliches Vorgehen auf der Suche nach Primzahlen ist es, einen Primzahlkandidaten p durch alle (Prim)Zahlen kleiner der Quadratwurzel von p probehalber zu dividieren. Das nach ähnlichem Prinzip funktionierende Sieb des Eratosthenes liefert eine Liste aller Primzahlen kleiner gleich p. Die Suche nach einer möglichst großen Primzahl wird Schüler jedoch schnell zu Grenzen des Taschenrechereinsatzes bzw. der eingesetzten Software führen.
Systematisches Testen der Primzahleigenschaft ausgewählter Zahlen – zunächst per Hand, dann mit einem CAS – illustriert, dass der Berechnungsaufwand mit zunehmender Stellenzahl von p stärker steigt als durch den Einsatz von Computern ausgeglichen werden kann.[2] Hintergrund ist der exponentiell zur Stellenzahl steigende Berechnungsaufwand. Beispielsweise benötigt MATHEMATICA (6.0, 1.5 GHz) für die Bestimmung der Primfaktorzerlegung der 50 bzw. 100stelligen Zahlen p_1 und p_2 nur 3ms bzw. 8ms. Hingegen wurde der Versuch, die Primalität von $p_3 = p_1 p_2$ durch Faktorisieren zu widerlegen, nach einer Woche abgebrochen.[3]
$p_1 = 94287619113665765837947743093327783016721912346\,47$
$p_2 = 474550322658040399227946680361391348349834052582090918312$
$305089457525828781603608274863153788923037$
Der MATHEMATICA-Befehl „PrimeQ[p]" benötigt erheblich weniger Zeit und liefert Aussagen über Primalität ohne Rückgriff auf die Primfaktorzerlegung: 2ms (p_1), 10ms (p_2) bzw. 14ms (p_3). Wie aber können die Zahlen ohne Zerlegung auf Zusammengesetztheit überprüft werden? Hinter dem genannten Befehl verbirgt sich der Miller-Rabin-Test.

Dessen zahlentheoretische Grundlagen sind der *kleine Satz von Fermat* und der von *Miller*. *Fermat*: Für Primzahlen p mit $(a, p) = 1$ gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

Die Umkehrung gilt nicht. Beispielsweise ist $2^{341-1} \equiv 1 \bmod 341$, aber $341 = 11 \cdot 30$ ist zusammengesetzt. Zahlen mit dieser Eigenschaft heißen *pseudoprim zur Basis a*. Sogenannte *Carmichaelzahlen* sind sogar zu allen Basen pseudoprim. Es gibt sogar unendlich viele Carmichaelzahlen. Wie

1 RSA oder auch der Diffie-Hellman-Schlüsseltausch arbeiten mit Hilfe von Primzahlen mit mehr als 150 Stellen [1]. Sie sind Sicherheitselemente des verbreiteten SSL-Protokolls, mit dem via Internet ausgetauschte Daten verschlüsselt werden.

2 Das steht durchaus im Widerspruch zur Schulerfahrung, das der Einsatz größerer (Stellen)Zahlen durch den Taschenrechnereinsatz ausgeglichen wird.

3 Der MATHEMATICA-Befehl FactorInteger[n] nutzt für große Zahlen zwar fortgeschrittenere Algorithmen als die einfache Probedivision, aber auch deren Laufzeit ist von exponentieller Laufzeit in Abhängigkeit von p.

können wir trotzdem auf die Primalität einer Zahl schließen? Betrachten wir zunächst einige Folgerungen aus dem kleinen Satz von Fermat. Für Primzahlen $p > 2$ gilt: $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p \Leftrightarrow a^{p-1} - 1 \equiv 0 \bmod p$
$\Leftrightarrow a^{(p-1)/2} - 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \bmod p$, da $p - 1$ gerade ist.
$\Leftrightarrow (a^{(p-1)/4} - 1)(a^{(p-1)/4} + 1)(a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \bmod p$, falls 2 auch $(p - 1)/2$ teilt. Ebenso folgt für $d = (p - 1)/2^k$ mit k als höchste 2er-Potenz, die $p - 1$ teilt:
$\Leftrightarrow (a^d - 1)(a^d + 1) \ldots (a^{(p-1)/2} + 1) \equiv 0 \bmod p$.
Da p prim ist, muss einer der Faktoren kongruent Null und somit a^d kongruent ± 1 sein; oder eine der folgenden Potenzen ist kongruent $-1 \pmod p$.
Um nun einen Kandidaten p auf Primalität zu testen, berechnen wir für eine zu p teilerfremde Basis $a < p$ die Potenzen a^d, ... $a^{(p-1)/4}$, $a^{(p-1)/2} \pmod p$. Der Test auf Primalität gilt als erfolgreich, wenn $a^d \equiv \pm 1 \bmod p$ oder eine der folgenden Potenzen kongruent -1 ist. Im anderen Fall ist p eindeutig als zusammengesetzt identifiziert. Besteht p den Test, so heißt *a Zeuge* gegen die Zusammengesetztheit von p.
Welche Aussagekraft hat dieser Test? Wegen des Satzes von Fermat kann keine Primzahl fälschlich als zusammengesetzt identifiziert werden. Umgekehrt ist es möglich, dass eine zusammengesetzte Zahl, für die gewählte Basis den Test besteht. Eine solche Zahl heißt *starke Pseudoprimzahl zur Basis a*. Beispielsweise gilt für $p = 781$: $5^{781-1} \equiv ((5^{195})^2)^2 \bmod 781$ und $5^{195} \equiv 1 \bmod 781$, d.h. 5 ist Zeuge gegen die Zusammengesetzheit von 781, aber es ist $781 = 11 \cdot 71$.
Glücklicherweise lässt sich die Zahl solcher Basen nach oben abschätzen [1, S. 129]: Maximal für ein Viertel aller möglichen Basen a besteht eine zusammengesetzte Zahl p fälschlicherweise diesen Test (Satz von Miller).
Die zentrale Idee des Miller Rabin-Tests ist es, diese zahlentheoretisch gewonnene Abschätzung mit einem probabilistischen Verfahren zu kombinieren. Denn besteht eine Zahl mit einer (zufällig gewählten) Basis den Test, so lässt sich durch Wiederholung mit anderen Basen die Fehlerwahrscheinlichkeit mit jedem Durchlauf um den Faktor 4 verringern. Nach r Wiederholungen beträgt die Fehlerwahrscheinlichkeit daher höchstens $(¼)^r$. Die Sicherheit des Tests kann also durch die Wahl von r beliebig erhöht werden.

Anknüpfungspunkte und Vertiefungen im Unterricht ergeben sich je nach dem Vorwissen der Schüler und dem Umfang einer entsprechenden Unterrichtseinheit. Zu reflektieren ist in jedem Fall die Algorithmisierbarkeit der einzelnen Rechenschritte und deren Ausführung durch den Computer, die erst die fruchtbare Kombination von Zahlentheorie und Stochastik möglich macht. Vertiefungen sind insbesondere durch den euklidischen Algorithmus bzw. den des schnellen Potenzierens möglich. Andere Vertiefungen in

Richtung Zahlentheorie sind gegeben durch die Beweise des Satzes von Fermat und des Satzes von Miller (bzw. einer leichter beweisbaren Abschätzung durch ½ statt ¼ [vgl. 5]), wobei letzterer in Relation zum Primzahltest elementar sehr aufwändig ist.
Fragen, die vorhandenes Wissen der Stochastik einbinden sind die Folgenden: Wie finde ich eine zufällige Basis a? Und ähnlich: Wie finde ich einen zufälligen Kandidaten p? Wieso ist die Abschätzung von ¼ auch bei mehrfacher Durchführung korrekt? Was heißt *beliebig sicher*?
Die letzte Frage ist nicht trivial, denn es scheint überraschend, wenn nicht sogar „unmathematisch", in sicherheitskritischen Anwendungen nur „primzahlverdächtige" Zahlen zu verwenden. Das durch Wahl von r beliebig hohe Maß an Sicherheit ist daher als spezifische Anforderung an ein probabilistisches Verfahren hervorzuheben. Für ausgewählte Werte von r sollte dieses von Schülern durch Vergleich mit geeigneten Ereignissen fassbar gemacht werden.

Zum Abschluss wollen wir hervorheben, dass es sich bei dem vorgestellten probabilistischen Nachweis der Primzahleigenschaft nicht um einen Beweis im engen mathematischen Sinn handelt, denn absolute Sicherheit gibt es hier nicht.[4] Jedoch gewinnt man durch diesen Verzicht ein Werkzeug für Probleme jenseits der klassischen Beweis- und Berechenbarkeit, die sonst nur schwer oder gar nicht zugänglich sind.
Stichworte für weitere Anwendungen, die sich ähnliche Prinzipien zunutze machen seien Zero-Knowledge-Protokolle [2] und Monte-Carlo-Algorithmen zur Berechnung von Integralen [4].

Literatur

[1] Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport Berlin (2006): Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I Mathematik.

[2] Beutelspacher, A.; Schwenk, J.; Wolfenstetter, K.-D. (2006): Moderne Verfahren der Kryptografie von RSA zu Zero-Knowledge. Vieweg.

[3] Buchmann, J. (2005): Einführung in die Kryptologie. Springer.

[4] Shonkwiler, R. W.; Mendivil, F. (2009): Explorations in Monte Carlo methods. Springer.

[5] Lasse, R.; Waldecker, R. (2009): Primzahltests für Einsteiger. Vieweg+Teubner.

[6] Unbekannt: Neuer Entschlüsselungsrekord: Einen sogenannten RSA-Schlüssel von 768 Bit. Spiegel Online, Meldung vom 8.1.2010.

[7] Dambeck, H.: Zwei neue Rekordprimzahlen entdeckt. Spiegel Online, Meldung vom 13.9.2008.

4 Es sei denn, der Test wird mit hinreichend vielen Basen wiederholt. Jedoch würde wegen des resultierenden Aufwandes für große Kandidaten p der Einsatz des Primzahltests hinfällig.

Joost KLEP, Justus Liebig Universität Gießen

D2M: Didaktik der Didaktik der Mathematik: Niederländische Ideen

Um die mathematikdidaktischen Kompetenzen der künftigen GrundschullehrerInnen zu fördern, brauchen HochschullehrerInnen eine geeignete Hochschuldidaktik: Didaktik der Didaktik der Mathematik, oder kurz: D^2M.

Die heutige Praxis der Lehrerbildung beabsichtigt einerseits, dass die Studierenden professionelle Grundlagen gewinnen, d.h. die Grundschulmathematik auf einem lehrergeeigneten Niveau verstehen, ihre mathematischen Kompetenzen weiterentwickeln und einen Überblick über die Didaktik der Grundschulmathematik und deren besondere Inhalte gewinnen.
Andererseits strebt diese Didaktik idealiter an, dass die künftigen LehrerInnen eine Praxistheorie (theory in action) entwickeln, indem sie das Mathematiklernen der Kinder kennenlernen, immer wieder beobachten, begutachten und fördern.

Tatsächlich wird die gegenwärtige Praxistheorie von GrundschullehrerInnen eher von Erinnerungen an den eigenen Unterricht („nostalgisches Curriculum“) und von eigenen Erfahrungen im Praktikum und Referendariat bestimmt. Diese Beobachtung kann für HochschuldidaktikerInnen ein Anlass für Reflexion sein: Wie kann man Studierende so ausbilden, dass die künftigen LehrerInnen eine optimale Praxistheorie entwickeln? Oder: Was sind Bausteine für ein D^2M?

1. Didaktik: das Fördern von mathematischer Aktivität?

„Knowing a piece of mathematics too well may be a serious impediment to teaching it decently as long as the teacher is unconscious about the learning process that produced his excellence“, meinte Freudenthal (1981) in seinem Vortrag ‚Major Problems of Mathematics Education’ am ICME 1980.

Diese Bemerkung führt zur Frage, was genau das Hindernis sein könnte. Es gibt in der Sekundarstufemathematik erfolgreiche Studenten, die offensichtlich nicht offen für die Frage sind, was für Kinder schwierig sein kann. Ist rein (deduktives) mathematisches Verständnis an sich didaktisch kontraproduktiv?

Freudenthal (1982) sagte dazu: ‘Mathematik ist keine Menge von Wissen. Mathematik ist eine Tätigkeit, eine Verhaltensweise, eine Geistesverfassung. Immer gilt: Der Schüler erwirbt Mathematik als Geistesverfassung nur über Vertrauen auf seine eigenen Erfahrungen und seinen eigenen Verstand. … Eine Geisteshaltung lernt man aber nicht, indem einer einem schnell erzählt, wie er sich zu benehmen hat. Man lernt sie im Tätigsein, indem man Probleme löst, allein oder in seiner Gruppe – Probleme, in denen Mathematik steckt'.

Diese Bemerkung von Freudenthal lässt Zweifel aufkommen, ob die Beteiligung von L1-StudentInnen an rein fachmathematischen Vorlesungen geeignet ist, und weitere Fragen, wie: Welche Mathematik / mathematische Aktivität sollten StudentInnen entwickeln und erlernen, um die mathematischen Aktivitäten und das Mathematiklernen von Kindern zu fördern ?

2 Welche Vorstellungen von Mathematik, Mathematiklehren und -lernen und Mathematikdidaktik sind hilfreich für LehrerInnen?

Goffree und Dolk (1995) meinen, dass die Mathematik, die Grundschul-LehrerInnen brauchen, eine Mathematik ist mit Elementen wie zum Beispiel: Kompetenzen (inhaltlich und allgemein, wie in den Deutschen Bildungsstandards), persönliche Rechenfertigkeit, Interesse und Freude an Mathematik, Kenntnis deduktiver Mathematik und mathematischer Strukturen, Anwendung- (und Phänomenologische) Orientierung, und Wissen wie Kinder Mathematik lernen. In ihrem Buch beschreiben Goffree und Dolk, welche Interpretationen und welche Kombination dieser Komponenten ihnen vor Augen schweben.

In der niederländischen Lehrerbildung versteht man Didaktik oft als ‚die Wissenschaft des Intervenierens in Lernprozesse' auf unterschiedlichen Unterrichtsebenen. Didaktisch handeln ist im Sinne von Enwerfen und Gestalten von Unterricht auf Schul- und Klassenebene, auf der Ebene der Behandlung spezifischer Inhalte, Sachthemen, Unterrichtstunden und auf der Ebene eines individuellen Kindes zu verstehen. Wichtige Kompetenzen sind nach Goffree und Dolk (1995) u.a.: das Verwenden von Schulbüchern und Tests; das diagnostische Unterrichten inklusive spezifischer Fördermaßnahmen; Kenntnis von Curricula; das Gestalten von mathematischer Kommunikation und das Fördern des Selbstvertrauens von Kindern (vgl. Beschreibung der Lehrerrolle in KMK 2004, Seite 3).

Der Lehrer-Didaktiker in der niederländischen Grundschule entwirft und strukturiert seine Unterrichtsangebote, gemeint als Interventionen in die Lernprozesse der Kinder, einerseits mit dem Blick auf das Lernen / den Lernweg der (individuellen) Kinder und andererseits mit Blick auf den Lehrplan. LehrerInnen sollten Schulbücher, Materialien usw. immer ‚konstruktiv' analysieren und nach dem Lernstand der Kinder umgestalten.

Die Frage ‚Welche Vorstellungen von Mathematik, Mathematiklehren und -lernen und Mathematikdidaktik hilfreich für LehrerInnen sind' wird also im Buch von Goffree und Dolk (1995) für die niederländische Situation im Jahr 1995 beantwortet. Die Frage lautet: wie kann eine deutsche Antwort aussehen?

3 D2M: Gezielt auf Praxistheorie?

Im Denken von niederländischen MathematikdidaktikerInnen ist eine Tendenz dahingehend zu beobachten, dass das Lernen von Mathematikdidaktik analog wie das Lernen von Mathematik zu verstehen ist. Mathematikdidaktik sollte man im Rahmen von mathematikdidaktischem Tätigsein lernen. Genau wie Mathematik wird auch Mathematikdidaktik als menschliche Aktivität verstanden. Prinzipien wie, ‚Guided reinvention', ‚Verwendung richtunggebender Paradigmen mathematischer Aktivität und mathematikdidaktischer Aktivität', ‚Lehren durch das Fördern einer studentischen ‚Theory in Action' können auch in der Lehrerbildung zum Tragen kommen.

‚Theory in Action' sieht man als eine durch Reflektion wachsende Kompetenz, die sowohl aus eigenen Erfahrungen (praktisch) wie aus systematisch reflektiertem und kommuniziertem Verstehen entsteht. Reflektieren und Kommunizieren beziehen sich auf Kommilitonen, Dozenten, Praktikumsbegleiter und Literatur und werden in einem Lerntagebuch beschrieben. Wil Oonk (2009) spricht in diesem Sinn von ‚Theory-Enriched practical knowledge'. Diese Theorie kann entstehen, indem Studenten u.a. eine Liste von wichtigen Stichworten (Oonk, 2009) angeboten wird, die mit Hilfe der Hochschuldozenten systematisch beim Reflektieren verwendet wird. Die Stichworte bekommen immer mehr Bedeutung und werden auf der persönlichen Ebene der StudentInnen immer mehr durch gemeinsames Reflektieren von Studenten und Dozenten im Kontext von praxisnahen Situationen vernetzt (vgl §2.3 Didaktisch-methodische Ansätze der Bildungswissenschaften in der Lehrerbildung, KMK 2004, Seiten 5 und 6).

Ein ‚Theory-Enriched practical knowledge' ist keine rein didaktische Theorie, weil rein didaktische Theorie in der täglichen Arbeit des Lehrers immer praktische Umsetzung braucht. Gerade in dieser Umsetzung steckt ein Problem: die kontextrelevante Vernetzung und Bewertung von theoretischen Elementen ist eher eine Sache der Erfahrung als der Theorie (vgl. Unterschied zwischen die Aristotelischen Phronesis und Episteme).

4 Gestaltung eines Curriculums und einer Lernumgebung

Aus der Perspektive eines Hochschulcurriculums kann man sich überlegen, ob die oben genannte Analogie zwischen der D^2M und der Mathematikdidaktik stimmt und ob das zu den mathematikdidaktischen Kompetenzen führt wie der KMK und GDM meinen (KMK 2004 und Ziegler et al. 2008).

Ein Curriculum sollte nicht nur eine Beschreibung von Lehrinhalten sondern auch eine Beschreibung von möglichen Lernwegen (Hypothetical learning trajectories, vgl. Gravemeijer 2004) und geeigneten didaktischen Entscheidungen sein, um das Lernen der StudentInnen gezielt zu fördern.

Studenten lernen anhand von schriftlich oder multimedial (vgl. zum Beispiel das KIRA-Projekt) angebotenen Paradigmen mathematischer Aktivität von Kindern und mathematikdidaktischer Aktivität von LehrerInnenn. Der Hochschullehrer macht implizite und entstehende (emergent) Kenntnis der StudentInnen explizit und bereichert diese, indem er didaktische Entscheidungen bewusst macht, die Studenten reflektieren lässt und Befunde fachdidaktisch versprachlicht.

Ob so ein Curriculum, das nicht zu gründlichem Lernen auf Vorrat führt, aber auf ein praxisorientiertes, vernetztes und wissenschaftlich gestütztes fachdidaktisches Teil-Repertoire als Grundlage für weiteres Lernen in der dritte Phase der Lehrerbildung gezielt ist, wirklich zu besserer Professionalität von GrundschullehrerInnen führt, kann erst durch ‚Educational design research' (van den Akker et al, 2006) festgestellt werden. Vielleicht bietet Oonk (2009) einen Ansatz?

Literatur

Akker, J. van den, Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2006). *Educational design research.* Oxon, Routledge.

Freudenthal, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, Vol. 12, No. 2* (May, 1981), 133-150

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. *Die Grundschule, 4*, 140-142.

Goffree, F. & Dolk, M. (Eds) (1995). *Proeve van een nationaal programma rekenen-wiskunde & didaktiek op de PABO.* Enschede, SLO.

Gravemeijer, K. (2004). Local instruction theories as means of support for teachers in reform mathematics education. *Mathematical thinking and learning, 6(2), (Special issue: Hypothetical learning trajectories)*, 105-128

KIRA-projekt: http://www.kira.uni-dortmund.de/

Kultusministerkonferenz (2004). *Standards für die Lehrerbildung: Bildungswissenschaften.* Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland

Oonk, W. (2009). *Theory-enriched practical knowledge in mathematics teacher education.* Leiden, ICLON.

Ziegler, G.M., Weigand, H.G., a Campo, A. (2008). *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU.* http://madipedia.de/index.php/ Stellungnahmen#2008

Eva KNOPP, Kiel

Das Inventar „Rechenfische“ für Klasse 1 – Konzeption & Ergebnisse der Erprobungsstudie

Für den Anfangsunterricht Mathematik besteht ein Bedarf an diagnostischen Verfahren. Dieses belegen u.a. die folgenden exemplarisch angeführten Forschungsergebnisse:

Die Studien von Grassmann, Klunter, Köhler, Mirwald, Raudies und Thiel (2002, 2003), Hengartner & Röthlisberger (1999) weisen daraufhin, dass Lehrkräfte die Fertigkeiten und Schwierigkeiten ihrer Schülerinnen und Schüler im Anfangsunterricht Mathematik nicht präzise wahrnehmen und ihre Einschätzungen häufig nicht dem Leistungsstand der Kinder entsprechen. Bereits im Anfangsunterricht Mathematik ist das Spektrum der mathematischen Kompetenzen der Erstklässler sehr weit. Dieses demonstrieren u.a. die Studien von Rinkens (1997), Rinkens & Eilerts (2001), Grassmann et al. (2002, 2003), Hasemann (2003) sowie Stamm (2005). Dementsprechend ist es fatal, wenn der Unterricht auf das Durchschnittskind bzw. die Durchschnittsklasse ausgerichtet ist. Es ist notwendig, die Lernstände jedes Kindes individuell zu erfassen, um die Lernangebote weitgehend passend zu gestalten. Zudem ist der Erfolg im mathematischen Anfangsunterricht entscheidend für den weiteren Lernerfolg. Dieses belegen u.a. die Ergebnisse der Studien von Krajewski (2003), Stern (2003), Aunola, Leskinen, Lerkkanen und Nurmi (2004), Mazzocco und Thompson (2005), Grube und Hasselhorn (2006), Weberschock und Grube (2006). Entsprechend sollte eine erfolgreiche Prävention von Lernschwierigkeiten in Mathematik bereits in der ersten Klasse ansetzen. Für effektive und effiziente Präventionsmaßnahmen ist eine vorausgehende detaillierte Diagnostik der Lernstände jedoch unerlässlich. Daher sprechen die genannten Forschungsergebnisse ebenfalls dafür, ein Verfahren zur Diagnostik mathematischer Kompetenzen im Anfangsunterricht Mathematik einzusetzen.

Im aktuellen Spektrum diagnostischer Verfahren für den Anfangsunterricht Mathematik kommen aber standardisierte Messungen, die Lernfortschritte detailliert in relativ kurzen Abständen abbilden, Längsschnittdaten innerhalb eines Jahres liefern und mit der Gesamtklasse durchgeführt werden können, nicht vor. Dieses wäre jedoch im Kontext einer formativen Evaluation von Lernprozessen notwendig.

Ziel des Forschungsvorhabens war es daher ein standardisiertes Inventar für den Anfangsunterricht Mathematik zu entwickeln und zu evaluieren. Das Inventar „Rechenfische“ soll es Lehrkräften ermöglichen, mehrmals im laufenden Schuljahr den aktuellen Lernstand ihrer Erstklässler differenziert und trotzdem zeitlich effizient zu erfassen. Es ist insbesondere für Lehrkräfte konzipiert, die fachfremd den Anfangsunterricht Mathematik in einer Klasse gestalten müssen, noch sehr unerfahren sind, mit der Klassensituation als solche bereits stark gefordert sind und/oder Einzeltestungen im Rahmen ihres Unterrichts nicht ermöglichen können. Die Auswahl der Items des Inventars erfolgte auf Basis einer Analyse der fachdidaktischen sowie entwicklungspsychologischen Annahmen und Modelle zum Erwerb erster arithmetischer Kenntnisse.

Nach einer Pilotierungsstudie im August 2006 konnte das Inventar im Rahmen der übergreifenden wissenschaftlichen Begleitstudie des Projekts „Primarstufe“ (Koch, Hartke & Blumenthal, 2008) mit einer Stichprobe von 1688 Erstklässlern an drei Messzeitpunkten von Januar bis Juli 2007 durchgeführt werden. Im Rahmen dieser Studie sollten die folgenden Fragen beantwortet werden:

1. Kann ein unter fachdidaktischen und entwicklungspsychologischen Aspekten modelliertes sowie auf drei MZP normiertes Inventar zu Leistungsständen im Anfangsunterricht Mathematik objektiv, reliabel, valide und für die Durchführung mit der gesamten Klasse gestaltet werden?
2. Lassen sich mit dem Inventar die Lernstände einzelner Kinder sowie ihre Lernfortschritte beim Erlernen arithmetischer Kenntnisse dokumentieren?

Die erste Frage lässt sich auf Basis der Daten aus der Erprobungsstudie bejahen. Das Inventar „Rechenfische“ ist als Gruppentest konzipiert und erfasst die arithmetischen Kenntnisse von Erstklässlern zu drei Messzeitpunkten in ihrem zweiten Schulhalbjahr objektiv, reliabel und valide. Die Annahme der Objektivität gründet sich auf einer detaillierten Durchführungsinstruktion sowie expliziten Auswertungsvorgaben. Als reliabel lässt sich das Inventar u.a. aufgrund seiner relativ hohen Test-Retest-Reliabilitätswerte einschätzen. Zudem fielen als weitere Indikatoren für eine gute Reliabilität sowohl Guttmans split-half-Koeffizient als auch Cronbachs alpha für die Gesamttestwerte hoch aus. Die Validität des Inventars „Rechenfische“ zeigte sich in mehreren Ergebnissen der Studie.

Neben einer Einschätzung der Inhaltsvalidität des Inventars wurden Berechnungen zur Bestimmung der Konstrukt- und Kriteriumsvalidität durchgeführt. So lässt sich beispielsweise das Merkmal, welches mit dem Inventar „Rechenfische“ erfasst wird im Sinne der diskriminanten Validität als ein Teilbereich der Konstruktvalidität von Merkmalen abgrenzen, die andere Diagnoseverfahren abtesten. Deutlich zeigt sich hier eine Abgrenzung im Vergleich zum KFT 1-2 R (Kawthar & Perleth, 2005) und zur WLLP (Küspert & Schneider, 1998). Die Abgrenzung zum IEL-1 (Diehl & Hartke, 2006) ist weniger eindeutig, so dass hier weiterer Forschungsbedarf besteht. Für die Kriteriumsvalidität des Inventars „Rechenfische“ spricht u.a. die Güte der Prognosen auf den weiteren Lernerfolg in Mathematik, die relativ hoch ausfallen. Auch die hohe Korrelation mit den Ergebnissen im DEMAT 1+ (Krajewski, Küspert, Schneider und Visé, 2002) als Außenkriterium spricht für eine gute Kriteriumsvalidität des Inventars.

Die zweite Frage lässt sich ebenfalls bejahen. Allerdings ist das Ja dadurch eingeschränkt, als dass das Inventar anhand der klassischen und nicht probabilistischen Testtheorie ausgerichtet ist. Das Inventar „Rechenfische“ erfasst die Veränderungen in den Ausprägungen der arithmetischen Kenntnisse von Schülerinnen und Schülern im Laufe des zweiten Schulhalbjahres der ersten Klasse. Dieses wird an der signifikanten Verschiebung der Mittelwerte der Häufigkeiten richtig gelöster Items über die drei Messzeitpunkte hinweg deutlich. Auch konnte gezeigt werden, dass das Inventar die Lernstandsveränderungen von Kindern mit Schwierigkeiten beim Erlernen mathematischer Unterrichtsinhalte dokumentieren kann.

Literatur

Aunola, K., Leskinen, E., Lerkkanen, M.-K. & Nurmi, J. E. (2004). Developmental Dynamics of Math Performance From Preschool to Grade 2. *Journal of Educational Psychology, 96*, 699-713.

Diehl, K. & Hartke, B. (2006). *Inventar Eingangsstufe Lesen (IEL). Versuchsversion.* Rostock: Universität, Institut für Sonderpädagogische Entwicklungsförderung und Rehabilitation.

Diehl, K. & Hartke, B. (2007). Curriculumnahe Lernfortschrittsmessung. *Sonderpädagogik, 37*, 195-211.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies, M. & Thiel, O. (2002). *Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Teil 1: Kinderleistungen* -

Lehrererwartungen. Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, 30. Universität Potsdam.

Grassmann, M., Klunter, M., Köhler, E., Mirwald, E., Raudies, M. & Thiel, O. (2003). *Mathematische Kompetenzen von Schulanfängern. Teil 2: Was können Kinder am Ende der Klasse 1? Potsdamer Studien zur Grundschulforschung, 31.* Universität Potsdam.

Grube, D. & Hasselhorn, M. (2006). Längsschnittliche Analysen zur Lese-, Rechtschreib- und Mathematikleistung im Grundschulalter: zur Rolle von Vorwissen, Intelligenz, phonologischem Arbeitsgedächtnis und phonologischer Bewusstheit. In I. Hosenfeld & F.-W. Schrader (Hrsg.), *Schulische Leistung. Grundlagen, Bedingungen, Perspektiven* (S.87-105). Münster: Waxmann.

Hasemann, K. (2003). *Anfangsunterricht Mathematik*. Heidelberg: Spektrum.

Hengartner, E. & Röthlisberger, H. (1999). Heterogenität als Herausforderung: Standortbestimmungen am Schulanfang. In E. Hengartner (Hrsg.), *Mit Kindern lernen. Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht* (S.22-28). Zug: Klett und Balmer & Co.

Kawthar, K.A. & Perleth, C. (2005). *Kognitiver Fähigkeitstest für die Primarstufe (KFT 1-2 R).* Versuchsversion. Rostock.

Koch, K., Hartke, B. & Blumenthal, Y. (2008). *Die Lernausgangslage von Kindern mit besonderem Förderbedarf in Grundschulklassen 1 und Diagnoseförderklassen.* Rostock: Universität, Institut für Sonderpädagogische Entwicklungsförderung und Rehabilitation.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule.* Hamburg: Kovac.

Krajewski, K., Küspert, P., Schneider, W. & Visé, M. (2002). *DEMAT 1+. Deutscher Mathematiktest für erste Klassen*. Göttingen: Hogrefe.

Küspert, P. & Schneider, W. (1998). *Würzburger Leise Leseprobe (WLLP). Ein Gruppentest für die Grundschule*. Göttingen: Hogrefe.

Mazzocco, M. M. M. & Thompson, R.E. (2005). Kindergarten Predictors of Math Learning Disability. *Learning Disabilities Research & Practice, 20*, 142-155.

Rinkens, H.-D. (1997). *Arithmetische Fähigkeiten am Schulanfang, Universität Paderborn*. Online verfügbar unter: www.rinkens-hd.de/_data/AritFaeh.pdf. Zugriff am 4.5.2009.

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. (2001). *Feldstudie zur beginnenden Rechenfertigkeit von Erstklässlern. Universität Paderborn*. Online verfügbar unter: www.rinkens-hd.de/_data/ErstklaesslerFaeh.pdf. Zugriff am 3.5.2009.

Stamm, M. (2005). *Zwischen Exzellenz und Versagen. Frühleser und Frührechnerinnen werden erwachsen.* Zürich: Rüegger.

Weberschock, U. & Grube, D. (2006). Zur Spezifität von Einflüssen der Arbeitsgedächtniskapazität und des arithmetischen Faktenwissens auf Rechenleistungen von Viertklässlern. *Psychologie in Erziehung und Unterricht, 53*, 291-302.

David KOLLOSCHE, Universität Potsdam

Sinn und Routine im Mathematikunterricht

Der Inhalt dieses Vortrags war der Auftakt zu einer Forschungsarbeit, der es um die Beschreibung der kulturell-gesellschaftlichen Funktionen des zeitgenössischen Mathematikunterrichtes geht. Unsere gesellschaftliche Kultur wird dabei als System aus Teilsystemen verstanden, welche interagieren und zu einem funktionierenden, stabilen System beitragen: Eine komplexe Gesellschaft, die nicht zerfällt. Eine Exploration dieser Gesellschaftstheorie steht noch aus.

Dieser deskriptive Ansatz distanziert sich deutlich von normativen Ansätzen, welche durch die Arbeiten von Wittenberg (1963), Winter (1995) und Heymann (1996) bekannt sind. Die zentrale Frage ist nicht, wie Mathematikunterricht zur kulturellen Prägung unserer Gesellschaft *beitragen soll*, sondern wie er zur kulturellen Prägung unserer Gesellschaft *aktuell beiträgt*. Meinem Ansatz geht es nicht primär um eine Bewertung zeitgenössischer Praxis, sondern schlicht um ein tieferes Verständnis ebendieser.

Wer an dieser Stelle ein Transskript meines Vortrags erwartet, wird enttäuscht werden. Der für dieses Format zu lange Aufsatz kann jedoch bei mir angefordert werden.

Routinelastigkeit und erste Erklärungen

Die Untersuchung des Verhältnisses von Sinn und Routine war die Dimension meiner Forschungsarbeit, welche mich zuerst gefesselt hatte. Der Ausgangspunkt meiner Überlegungen war die Tatsache, dass scheinbar die große Masse von Mathematikdidaktikern einem *routinelastigen* Mathematikunterricht sehr kritisch gegenübersteht und stattdessen *sinnhafteren* Mathematikunterricht fordert. Diese Geisteshaltung manifestiert sich im Aufkommen unterschiedlichster alternativer Unterrichtskonzepte wie dem genetischen Lernen wagenscheinscher Prägung, dem entdeckenden Lernen, dem problemlösenden Lernen, dem realitätsbezogen-modellierendem Lernen, dem dialogischen Lernen usw.

All diesen Konzepten ist gemein, dass sie nie einen großflächigen Siegeszug durch das Klassenzimmer feiern konnten. Die Erklärungsansätze hierfür sind zahlreich, bleiben aber auf einem oberflächlichen Niveau stehen: Der Lehrer sei zu faul, nicht kompetent genug oder schlicht überfordert. Die Lehrerbildung sei zu theorielastig, die Tradition der Schule dem frischen Lehrer gegenüber übermächtig. In diesem Sinne treibe der Erwartungsdruck der Kollegen, Eltern und sogar der Schüler selbst den alternativ beseelten Lehrer zu einem routinelastigen Unterricht. Insgesamt erscheint der Mathematikunterricht, als sei er in einem tradierten Teufelskreis gefangen, aus dem ihn die Anstrengungen der Mathematikdidaktik nur schwer entreißen können.

Auffällig ist die Normativität dieser Ansätze. Sie definieren, was *guter* Unterricht sein soll und setzten damit erst den Rahmen, in dem zeitgenössischer Unterricht *schlecht* sein kann. Durch ihre ideologische Voreingenommenheit versperren sie jedoch eine verständnisvolle Sicht auf die zeitgenössische Praxis. Wie eine solche aussehen kann, soll für den Fall der Routinelastigkeit im Folgenden angedeutet werden.

Die Begriffe ‚Sinn' und ‚Routine'

Eine begriffliche Exploration und Gegenüberstellung von *Sinn* und *Routine* steht noch aus. Für die weiteren Ausführungen soll es ausreichen, wenn unter *Routine* das weitgehend automatisierte Bewältigen einer gewissen Anforderung und unter *Sinn* die Assoziation solcher Routinen mit anderem, im Mathematikunterricht beispielsweise mit Begründungen oder Anwendungen, verstanden wird. Die antagonistische Gegenüberstellung von Sinn und Routine ist eine künstliche, die mir hier lediglich zur Zuspitzung meiner Gedanken dienen soll.

Die Berechnung der Nullstellung einer in der allgemeinen Form gegebenen quadratischen Funktion mit Hilfe der p-q-Formel ist eine Routine, die nach ausreichender Übung weitgehend automatisiert bewältigt werden kann. Sinn erhält sie für den Lerner aber erst, wenn er dieses Tun mit etwas assoziieren kann, beispielsweise verstanden hat, wie er von der allgemeinen Form zur p-q-Formel kommen kann, oder Situationen kennt, in denen die Berechnung der Nullstellen einer solchen Funktion sinnstiftend ist.

Mathematikunterricht und Gesellschaft

Die Beobachtung, dass der zeitgenössische Mathematikunterricht zu routinelastig ist, ist vor dem Hintergrund der Kritik an dieser Routinelastigkeit und der Popularität alternativer Unterrichtskonzepte verwunderlich und mit den oben aufgeführten naiven Erklärungen nicht in befriedigendem Maße zu verstehen. Hilfreich erscheint mir ein tiefergehendes soziologisches Erklärungskonzept, dessen Reichweite ich hier darstellen will.

Ich verstehe den Mathematikunterricht als einen der eingangs beschriebenen Teile der Gesellschaft. Er interagiert mit anderen Teilen der Gesellschaft und wirkt stabilisierend auf die Gesellschaft als Gesamtsystem. Er hat damit *systemstabilisierende* Funktionen für die Kultur unseres Zusammenlebens. Solche Funktionen des Mathematikunterrichts zu identifizieren und zu verstehen, ist das Hauptanliegen meiner Forschungsarbeit.

Für das Verständnis der Routinelastigkeit des Mathematikunterrichts ist es nun wichtig zu erkennen, dass der Mathematikunterricht in seiner Interaktion mit anderen Teilen der Gesellschaft und in seinem Beitrag zur Stabilität der Gesellschaft *gebunden* ist. Da vieles von seinem Funktionieren abhängt, ist der Mathematikunterricht nicht beliebig veränderbar. Da unser Blick für die kulturellen Funktionen des Mathematikunterrichts jedoch noch nicht geschult ist, bleibt uns größtenteils verborgen, welche Interaktionen und Funktionen den Mathematikunterricht an welche Form binden. Spürbar ist nur der Widerstand, mit dem sich der Mathematikunterricht bestimmten Veränderungen, beispielsweise einer Zurückdrängung der Routinelastigkeit, widersetzt.

Die Meraner Reform

Als Beispiel für einen solchen Widersetzungsprozess und den Versuch einer Zurückdrängung der Routinelastigkeit soll hier die Meraner Reform dienen. Im Jahre 1905 trafen sich Reformpädagogen mit dem Wunsch nach einer Erneuerung des Mathematikunterrichts im südtirolischen Meran. Felix Klein gelang es als Organisator der Reformbewegung, deren Bestrebungen in eine Forderung nach mehr industriell anwendbarer Mathematik zu kanalisieren. Dazu sollte vor allem die Analysis in die Sekundarstufe II eingeführt werden, wegfallen sollten „insbesondere alle Einzelheiten, deren Beherrschung eine Rutine voraussetzt, sowohl auf dem Gebiete der analytischen Umformungen als der geometrischen Konstruktionen“ (Mer. Lehrpl. 1905, S. 208f). Der Meraner Lehrplan wurde 1925 in Preußen eingeführt.

Mit der Meraner Reform lagen scheinbar gute Rahmenbedingungen für eine Veränderung im Sinne von weniger Routine und mehr Sinn (in der Form sinnvoller Analysis für den naturwissenschaftlich-technischen Nachwuchs) vor: Das Thema ‚Analysis‘ war nicht routinelastig vorgeprägt und konnte mit zahlreichen industriellen Anwendungsbeispielen sinnhaft untermauert werden. Darüber hinaus gab Klein den Lehrer mit seiner *genetischen Methode* ein Konzept zum sinnvollen Unterrichten an die Hand.

Dennoch ist das Projekt ‚Analysis in der Schule‘ gescheitert. Statt eines sinngefüllten Analysisunterrichts hat sich in der Schule die Kurvendiskussion etabliert, welche Analysis weitgehend ohne Bezug auf außerschulische Anwendungen vornehmlich routiniert betreibt. Die komplexe Historie dieses Phänomens zu untersuchen, mag viel zum Verständnis kultureller Funktionen des Mathematikunterrichts beitragen. Ich möchte mich vorerst jedoch damit begnügen, dieses Phänomen im Rahmen seiner Ausführungen zu interpretieren. Hier gelange ich zu folgender zu untersuchenden These: *Die Routinelastigkeit des Mathematikunterrichts ist eine kulturelle Funkti-*

on des Mathematikunterricht. Versucht eine Reform, die Routinelastigkeit zurückzudrängen, so wird sie scheitern. So im Falle der Analysis in der Schule, welche sich entgegen der ursprünglichen Bestrebungen als routinierte Kurvendiskussion etabliert hat.

Routine und Gesellschaft

Die Arbeit von Roland Fischer (2001) liefert einen Anhaltspunkt, inwiefern Routine und Gesellschaft zusammenhängen. Im Mittelpunkt sehe ich hierbei das automatisierte *Regelbefolgen*, welches in vielen Situationen ein (zeitlich) ökonomisches Handeln ermöglicht, das Handeln aber von seinen Motiven trennt. So denken wir nicht tagtäglich darüber nach, warum wir uns die Schuhe anziehen oder warum die schriftliche Division funktioniert, beides können wir dafür umso schneller bewältigen. Solche Analogien näher zu beleuchten, wird in nächster Zeit mein Anliegen sein.

Ausblick

Ich hoffe, dass ich meine Absichten klar umreißen konnte. Mir geht es um eine Identifikation und um ein Verstehen kultureller Funktionen des Mathematikunterrichts aus einer deskriptiven Sichtweise. Über Anregungen in dieser Richtung würde ich mich stets sehr freuen.

Schließlich könnte mein Ansatz auch nachdenklich stimmen. Der Mathematikdidaktiker soll sich die Fragen stellen: Welchen ideologischen Hintergrund hat meine Unterrichtsphilosophie? Wie kann ich damit kritisch umgehen? Und schließlich: Welche Last bürde ich Lehrern und Schülern auf, welche Konflikte zwischen didaktischen Idealen und kultureller Realität am unmittelbarsten erfahren müssen? Ein Nachdenken über die letzte Frage mag als Ausgangpunkt einer Rehabilitation des zu oft gescholtenen Lehrers dienen.

Literatur

Fischer, Roland (2001). Mathematik und Bürokratie. In Lengnink, Prediger & Siebel (Hrsg.) *Mathematik und Mensch. Sichtweisen der allgemeinen Mathematik.* Darmstatt: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Heymann, Hans Werner (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik.* Weinheim, Basel: Beltz.

Der Meraner Lehrplan für Mathematik (1905). In Klein, Felix & Rudolf Schimmack (1907). *Der mathematische Unterricht an den höheren Schulen.* Leipzig: Teubner. S. 208-220.

Winter, Heinrich (1995). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In den *Mitteilungen der GDM.* Heft 61. S. 37-46.

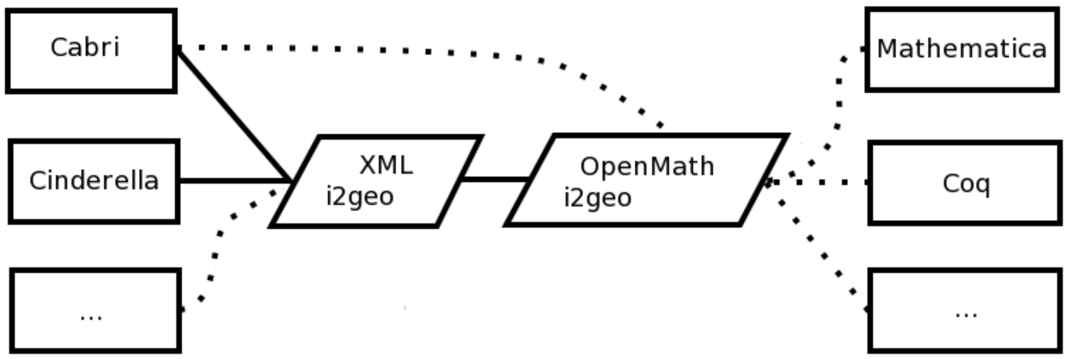
Wittenberg, Alexander Israel (1963). *Bildung und Mathematik.* Stuttgart: Klett.

Ulrich KORTENKAMP, Karlsruhe, Yves KREIS, Luxemburg

Konstruktionsbeschreibungen und DGS

1. Ausgangssituation

Intergeo (http://i2geo.net) ist ein europäisches eContent*plus*-Projekt, das sich u. a. zum Ziel gesetzt hat, dem Benutzer die Auswahl *seines* Dynmiaschen Geometrie-Systems (DGS) zu erleichtern, indem es ermöglicht, dass interaktive geometrische Konstruktionen mit Hilfe eines gemeinsamen Dateiformates leicht ausgetauscht werden können. Der Austausch von Dateien spielt aber nicht nur zwischen einzelnen DGS eine Rolle. Eine Kommunikation zwischen DGS und anderer Software (z. B. CAS, Beweisassistenten oder e-Assessment) erhält seit mehreren Jahren immer mehr Bedeutung.



Zusätzlich zu der technischen Komponente birgt das Thema auch eine erhebliche didaktische Komponente: Ist eine mathematisch und informatisch klare Beschreibung von Konstruktionen gewünscht, so muss man sich zuvor über die Bedeutung von Konstruktionsbeschreibungen beim geometrischen Arbeiten und im mathematischen Erkenntnisprozess klar werden.

2. Konstruktionsbeschreibungen

Ohne Frage haben die Dateien, mit denen ein DGS Konstruktionen abspeichert, viel mit Konstruktionsbeschreibungen zu tun. Sie sind eine sehr streng formalisierte Version der aus dem Lehrplan bekannten schriftlichen Darstellungen von Konstruktionen. Diese Parallele wurde auch schon früh, z. B. mit Geolog (HOLLAND), ausgenutzt und bei der Arbeit mit DGS wurde schon immer auf beide Möglichkeiten der Kommunikation zwischen Anwender und Computer hingewiesen: Die automatisierte *Ausgabe* von Konstruktionsbeschreibungen, die Schülerinnen und Schülern erlauben, ihre Aktionen zu reflektieren und kommunizieren, aber auch die *Eingabe* von Konstruktionsbeschreibungen in formalisierter und nicht-formalisierter (KORTENKAMP & WETH, 2003) Form.

Die exakte Beschreibung von Konstruktionen ist allerdings schwierig und sehr abhängig von den Kommunikationspartnern. Im Schulunterricht müssen hier Konventionen ausgehandelt werden, deren praktische Umsetzbarkeit dann zum Beispiel über die Mitteilung von Konstruktionen per Brief oder Telefon bewiesen werden kann. Dadurch können fächerübergreifende Unterrichtsziele (Vollständigkeit von Beschreibungen, sinnvolle Gliederung und Reihenfolge, Verwendung von Fachsprache,…) erlernt werden.

In unserer Situation tritt nun der Computer an die Stelle beider Kommunikationspartner. Da der Computer aber nicht in der Lage ist, Missverständnisse in der Kommunikation durch weiteres Aushandeln zu klären, muss diese – fachdidaktische – Arbeit bei der Schaffung eines Austauschformates vorher getan werden.

Eine Beobachtung, die die weiteren Überlegungen stark beeinflusst hat, ist die, dass DGS sich nicht gut als Unterstützung im kreativen Prozess des *Findens* von Konstruktionsbeschreibungen eignen. Da die Arbeit mit dem DGS bereits dem Konstruieren und damit dem Aufstellen einer Konstruktionsbeschreibung entspricht, muss dieser Plan bereits vor der Umsetzung vorhanden sein. Nach unserer Erfahrung nutzen selbst Experten lieber Stift und Papier um eine Skizze anzufertigen, die sie dann nutzen, um die eigentliche Konstruktion zu finden, als dass sie direkt mit dem DGS arbeiten. Dies wird auch durch die Studien von CHEUNG (2009) bestätigt.

3. Grundoperationen

Die erste auszuhandelnde Frage ist die nach den erlaubten Grundoperationen. Auch hier treffen wir auf eine Grundfrage des Geometrieunterrichts: Welche Grundbegriffe und -operationen können wir zulassen? Die Konstruktion des Mittelpunktes zwischen zwei Punkten kann mit Zirkel und Lineal erfolgen; die Frage wandelt sich, wenn wir nur den Zirkel zulassen! Sie wandelt sich noch viel mehr, wenn die Konstruktion des Mittelpunktes bereits als Grundoperation zur Verfügung steht. Hier verbirgt sich nicht nur die didaktische Grundfrage „Wie mächtig darf ein DGS sein?“, sondern wir müssen auch einen Weg finden, wie Konstruktionen zwischen verschieden mächtigen DGS möglichst gut vermittelt werden können. Siehe hierzu auch den Dillinger Katalog (KORTENKAMP, 2002).

4. Reihenfolge und Contraint-based Systems

Ein weiterer wichtiger Aspekt ist die *Reihenfolge* in Konstruktionsbeschreibungen. Die übliche Sichtweise ist, dass die Reihenfolge in einer Konstruktion über eine Halbordnung festgelegt ist, der Abhängigkeitsgraph also azyklisch ist. Dies ist im Allgemeinen aber nicht der Fall, z. B. für ein

DGS, welches Strecken mit fester Länge und freien Endpunkten (vorhanden z. B. in Euklid Dynageo) unterstützt. Die Reihenfolge kann aber auch über Operationen wie „Punkte binden/lösen" geändert werden. Diese Änderung der Objekte ist eigentlich eine Änderung der Konstruktion also der Beziehungen zwischen den Objekten.

5. Technische Realisierung

Das Intergeo Konsortium hat sich nicht nur vorgenommen ein gemeinsames Dateiformat für DGS (HENDRIKS et al., 2009a) zu entwickeln sondern auch dazu verpflichtet dies in den jeweiligen DGS zu implementieren. Hierzu wurden zwei wichtige Design-Entscheidungen getroffen: Die Speicherung als zip-Archiv und die Wahl eines Ansatzes, der in der Grundlage ein Konstruktionsansatz ist, aber auch eine *constraint-based approach* zulässt.

Das i2g Format benutzt – wie viele andere moderne Dateiformate – ein zip-Archiv, also eine gepacktes Archiv, das mehrere Dateien enthalten kann. Die wichtigste und zentrale Datei heißt *intergeo.xml* und wird im Ordner *construction* gespeichert; optionale Dateien sind z. B. Bilder oder Ton und werden in dem entsprechenden Ordner *resources* abgelegt.

Die einzelnen geometrischen Objekte in einem DGS haben gewisse Relationen zueinander. Ohne weitere Spezifikation sind die Objekte freie Objekte. Die im Dateiformat definierten Relationen setzen Einschränkungen (*constraints*) im Bezug auf die möglichen Bewegungen – die Dynamik – der Objekte:

line_through_point(l, P)

Die Einschränkungen beschreiben jedoch die Position der einzelnen Elemente nicht eindeutig. Dies führt zu dem Problem, ob bzw. wie eine Instanz für eine gegebene Menge an Einschränkungen erzeugt werden kann. Deshalb wird auch die aktuelle statische Information (*elements*) gespeichert. Dies erlaubt einem DGS sehr schnell die freien bzw. abhängigen Objekte zu identifizieren sowie ev. auch einem Grafikprogramm ein Bild anzuzeigen. Alle visuellen Informationen (*display*) werden gesondert gespeichert; dies erlaubt unterschiedliche Formatierungen für jede Ansicht.

Eine Datei, die diese drei Teile enthält, bezeichnen wir als *Konstruktion*.

6. Fazit

Ein eingeschränkt zugänglicher Report (HENDRIKS et al., 2009b) von Oktober 2009 dokumentiert die Fortschritte der Implementierung durch die einzelnen Partner. In der Zwischenzeit haben *alle* Partner eine Implementierung der Version 1 (HENDRIKS et al., 2008) des Dateiformats vorgelegt und zum Teil auch mit der Testsuite geprüft. Dies ermöglicht nun reale Tests zum Austausch von Konstruktionen und demonstriert zugleich, dass die Schaffung eines Austauschformates keine Illusion ist.

Aus den vorangestellten Überlegungen wird deutlich, dass wir *didaktisch motivierte* Grundoperationen und die dazugehörige Diskussion brauchen. Dabei muss die Trennung zwischen Objekt und Definition deutlich gemacht werden. Weiterhin muss ob der großen Komplexität überlegt werden, ob Konstruktionsbeschreibungen tatsächlich ein gutes Thema im Mathematikunterricht sind. Können die bisher damit transportierten Ziele (Vollständigkeit, Korrektheit, Gliederung, Fachsprache) eventuell mit anderen Inhalten besser erreicht werden?

Literatur

Abánades, M., Botana, F., Escribano, J., Hendriks, M., Kortenkamp, U., Kreis, Y., Libbrecht, P., et al. (2009). The Intergeo File Format in Progress. In: *Proceedings of the 22nd OpenMath Meeting*.

Cheung, C. Y. (2009). *Experimental-theoretical interplay in dynamic geometry environments* (PhD Thesis). Hong Kong: The University of Hong Kong.

Hendriks, M., Kortenkamp, U., Kreis, Y., & Marquès, D. (2008). *Common File Format v1* (Public Deliverable D3.3).

Hendriks, M., Kortenkamp, U., Kreis, Y., & Marquès, D. (2009a). *i2g Common File Format Draft v2* (Public Deliverable D3.6).

Hendriks, M., Kortenkamp, U., Kreis, Y., & Marquès, D. (2009b). *Report on Implementations of the Common File Format* (Restricted Deliverable D3.8).

Kortenkamp, U. (2002). Notwendige Anforderungen an DGS („Dillinger Katalog“). In: Herget, W., Sommer, R., Weigand, H.-G., Weth, Th. (Hrsg.), *Medien verbreiten Mathematik* (S. 171-172). Hildesheim: Franzbecker.

Kortenkamp, U., Weth, Th. (2003). *Syntaxfreie Konstruktionsbeschreibungen mit Cinderella.* In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim: Franzbecker.

Kortenkamp, U. (2009). *i2g API Specification* (Public Deliverable D3.5).

Kortenkamp, U., Blessing, A. M., Dohrmann, C., Kreis, Y., Libbrecht, P., & Mercat, C. (2009). Interoperable Interactive Geometry for Europe - First Technological and Educational results and future challenges of the Intergeo project. In: *Proceedings of CERME 6 - Sixth Conference of European Research in Mathematics Education.*

Kortenkamp, U., & Kreis, Y. (2008). Intergeo – Interoperable Interactive Geometry for Europe. In É. Vásárhelyi (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 533-536).

GÜNTER KRAUTHAUSEN, Hamburg, PETRA SCHERER, Bielefeld

Heterogenität, Differenzierung, Individualisierung – Hintergründe des EU-Projekts NaDiMa (Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht)

1. (K)ein neues Problem?

Stärkere Individualisierung des Lernens und individuelle Förderung in heterogenen Lerngruppen wurden in Rahmenkonzepten (z. B. BSB 2009), Schulgesetzen (z. B. MSW 2006) und in den Standards für die Lehrerbildung (KMK 2008) festgeschrieben. Sind Heterogenität und Differenzierung aber neue Phänomene? Wohl kaum (vgl. Winkeler 1976). Eher ist wohl eine graduelle Verschiebung zu konstatieren, ein größeres Spektrum, in dem Leistungsunterschiede im Unterricht heute streuen können.

Als bildungspolitisches Etikett sind die Begriffe derzeit aber gleichwohl en vogue. Differenzierung/Individualisierung gehören zu jenen pädagogischen Begriffen, die von so großer Allgemeinheit und damit auch Vagheit sein können, dass sie in der Gefahr stehen, zum bloßen Schlagwort zu verkommen. Und gerade weil die Schlagwort-Gefahr besteht, macht es Sinn, hier genauer hinzuschauen. Diesen genaueren Blick hat sich das EU-Projekt NaDiMa zum Ziel gesetzt. Denn es ist und bleibt eine überzeugende Leitvorstellung, für jedes einzelne Kind möglichst günstige Lernbedingungen zu schaffen (Wielpütz 1998).

2. Die ›Klassiker‹ als Lösung?

Ein Blick in die Literatur und in die Praxis der Lehreraus- und -fortbildung zeigt, dass zahlreiche Empfehlungen zum Umgang mit Heterogenität zu finden sind, wie z. B. soziale, methodische, mediale, quantitative, qualitative, inhaltliche Differenzierung. Sie werden seit den 1970er Jahren in zahlreichen pädagogischen Publikationen von Auflage zu Auflage nahezu unverändert wiederholt. Und gewiss sind diese Empfehlungen auch nicht per se negativ zu bewerten oder unwirksam. Allerdings gibt es Indizien dafür, dass sie nicht immer intentionsgemäß realisiert werden und zudem zwar notwendig, aber nicht hinreichend sein könnten.

Gemeinsam ist ihnen, dass die Maßnahmen i. d. R. extern vorgegeben sind (durch die Lehrperson oder dem Material aufgeprägt – wenn nicht der Beliebigkeit einer Auswahl durch die Kinder überlassen) und die Spezifika des Faches oft vernachlässigen (vgl. auch 3.). Zwei klassische Probleme dabei sind Folgende:

a) Schwierigkeitsgrade: Viele vorkonfektionierte Lernangebote übersehen allzu leicht, dass der angenommene Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe eine subjektive Größe darstellt. Die Anpassung der Schwierigkeit an die Bedarfe der Schüler setzt voraus, dass man den subjektiven Sinn versteht, den ein Thema für das einzelne Kind hat (vgl. Bromme 1992). Selbst wenn Lehrpersonen nach Kräften bemüht sein mögen, Aufgabenstellungen für ein ›schweres‹, ›mittleres‹ und ›leichtes‹ Arbeitsblatt zu kategorisieren, bleibt es eine Tatsache, dass sie nicht in die Köpfe der Kinder schauen können. Damit ist ein Angebot bei der Unterrichtsvorbereitung kaum passgenau vorauszuplanen – so verführerisch die Versprechungen auch sein mögen, die mit dem Anspruch der Individualisierung suggeriert werden. Auch kann der Schwierigkeitsgrad von Aufgaben nicht allein daran gemessen werden, welche formal-syntaktischen Schritte zur Lösung erforderlich sind. Beide Punkte relativieren deutlich die mitunter vorgetragene Behauptung, dass ein Lernangebot den Lernvorgang nach Schwierigkeitsstufen individualisiere (oder die Kinder dies ohne Weiteres selbst steuern könnten).

b) Individualisierung vs. Vereinzelung: Nicht selten kann man den Eindruck gewinnen, dass über das Postulat der Individualisierung – oder zumindest bei einer gewissen Form der methodischen Umsetzung – das soziale Lernen aus dem Fokus gerät oder auf ein allgemein-pädagogisches Verständnis in Form von Regeln und Ritualen für das verträgliche soziale Miteinanderumgehen reduziert wird.

Wenn jedes Kind sich mit seinen eigenen, individuell unterschiedlichen Aufgabenstellungen oder gar Inhalten beschäftigt, wenn alle potenziell an etwas anderem arbeiten, wie soll da gemeinsames Argumentieren und Kommunizieren über gemeinsam erlebte Inhalte aufkommen oder auch nur plausibel erscheinen? Das Von- und Miteinanderlernen an der gemeinsamen Sache bleibt dann außen vor. Dies betrifft v. a. Plenumsrunden, die in manchen Ansätzen bewusst und fast schon mit Stolz als (vermeintliches Relikt lehrerzentrierten Unterrichts) ›ausgemustert‹ werden.

3. Wo bleibt das Fach?

Ein nicht unerhebliches Problem besteht auch in der Tatsache, dass die Diskussion um Heterogenität und Differenzierung zum einen vorrangig *organisatorisch-methodisch* geführt wird und zum anderen stark *allgemein- bzw. schulpädagogisch* dominiert ist. Dadurch bleiben die Spezifika des Faches und seiner Didaktik nicht selten außen vor.

Praxisberichte und Fortbildungen machen Vorschläge zur Organisation von Lernstationen, Werkstattarbeit, Lerntheken und (letztlich) zur Vergrößerung der Materialflut. Weniger Aufmerksamkeit und Bewusstheit wird aber der Frage gewidmet, welche *Inhalte* man denn in diesen organisatorischen Rahmen mit welcher *mathematischen Tiefe* bearbeiten möchte.

Von mathematikdidaktischer Seite liegen durchaus gehaltvolle Unterrichtsbeispiele und Lernumgebungen vor, in denen eine wünschenswerte Differenzierung wirksam werden kann – weil sie gleichsam in die Sache implementiert wurde (z. B. Hengartner et al. 2006; Hirt/Wälti 2009): die sog. natürliche Differenzierung (ND). Ein umfassenderer Beitrag aber, der sich theoretisch aus ausdrücklich mathematikdidaktischer Sicht und fokussiert mit dem Konzept der natürlichen Differenzierung auseinandersetzt, gibt es bislang nicht. Sie wird lediglich auf einer halben Seite im Lehrerhandbuch zum Zahlenbuch knapp umrissen (Wittmann/Müller 2004, 15). Gleichwohl ist der Begriff immer häufiger zu finden – wenn auch nicht immer seine konsistente Umsetzung. Ein Grund liegt in der offensichtlichen Bandbreite der Verständnisse, die mit den konstituierenden Merkmalen verbunden und daher Anlass für potenzielle Missverständnisse sein können.

Denn was *genau* bedeuten die dort genannten Kennzeichen einer ND? Ein gemeinsames Lernangebot für alle Kinder; (inhaltliche) Ganzheitlichkeit und ein Mindestmaß an Komplexität (woraus sich naturgemäß unterschiedliche Schwierigkeitsgrade ergeben); Freiheit des Bearbeitungsniveaus, der Lösungswege, Hilfsmittel und Darstellungsweisen sowie ggf. auch der Problemstellungen selbst; soziales Lernen von- und miteinander (vgl. ebd.).

4. Das EU-Projekt NaDiMa

Im Rahmen des vom Comenius-Programm geförderten NaDiMa-Projekts (2008-2010) arbeiten Wissenschaftler/innen und Lehrpersonen/Schulen aus Polen, Tschechien, den Niederlanden und Deutschland an der empirischen Erprobung von Chancen und Schwierigkeiten einer ND. Grundüberzeugung ist die Notwendigkeit einer Differenzierung, die verstärkt auf die Natur des Faches setzt. Die Lehrperson wird ausdrücklich in der Verantwortung gesehen für eine sachgerechte Identifikation, Auswahl und Rahmung der Aufgabenangebote. Hilfreich sind dazu die vier Merkmale, die Wittmann (2001) zur Definition einer so genannten ›substanziellen Lernumgebung‹ etabliert hat (vgl. auch Krauthausen/Scherer 2007, 197 ff.). Unter derartigen Voraussetzungen kann sich die in der Sache selbst liegende natürliche Differenzierung entfalten.

Im Projekt NaDiMa werden ausgewählte Lernumgebungen konzipiert (Etappenpläne, Arbeitsblätter, unterstützende Materialien), erprobt und unter folgendem Erkenntnisinteresse evaluiert (vgl. auch den Beitrag von Scherer/Krauthausen in diesem Band): Wie und unter welchen Voraussetzungen kann der Einsatz geeigneter Lernumgebungen sowohl die fachliche

Substanz des Lernens als auch die Entwicklung allgemeiner Lernstrategien erhöhen, das gemeinsame Lernen in heterogenen Lerngruppen inhaltlich (inhaltliche *und* allg. mathematische Kompetenzen) und sozial befördern und dadurch zu einer Stärkung der Motivation zum Mathematiklernen beitragen? Des Weiteren soll es auch um eine Schärfung des theoretischen Begriffs der ND gehen, um sie als Konzept klarer beschreiben zu können als es der derzeitige Sprachgebrauch und die Nutzung in der Praxis nahelegen. Und nicht zuletzt sollen die Ergebnisse zu Hinweisen und Materialien für Lehrpersonen führen, um ihnen praktikables und effektives Handlungswissen für den Unterricht an die Hand geben zu können.

Teil 2 dieses Beitrags: Scherer/Krauthausen in diesem Band.

Literatur

Bromme, R. (1992). *Der Lehrer als Experte: Zur Psychologie des professionellen Wissens*. Bern: Huber.

BSB, Freie und Hansestadt Hamburg (2009, Hrsg.). *Hamburger Bildungsoffensive. Rahmenkonzepte für Primarschule, Stadtteilschule und das sechsstufige Gymnasium*. Hamburg: Behörde für Schule und Berufsbildung.

Hengartner, E. et al. (2006). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett & Balmer.

Hirt, U./Wälti, B. (2009). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze: Kallmeyer.

KMK, Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (2008). *Ländergemeinsame inhaltliche Anforderungen für die Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in der Lehrerbildung*. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 16.10.2008.

Krauthausen, G./Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik*. 3. neu bearbeitete Auflage. Heidelberg: Spektrum.

MSW, Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (2006). *Jedes Kind mitnehmen! Das neue Schulgesetz in Nordrhein-Westfalen*. Düsseldorf: MSW.

Wielpütz, H. (1998). Das besondere Kind im Mathematikunterricht – Anmerkungen aus der Sicht einer reflektierten Praxis, Beobachtung und Beratung. In A. Peter-Koop (Hrsg.), *Das besondere Kind im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 41-58). Offenburg: Mildenberger.

Winkeler, R. (1976). *Differenzierung: Funktionen, Formen und Probleme*. Ravensburg: Otto Maier.

Wittmann, E. Ch. (2001). Developing Mathematics Education in a Systemic Process. *Educational Studies in Mathematics*, 1, S. 1-20.

Wittmann, E. Ch./Müller, G. N. (2004). *Das Zahlenbuch 1. Lehrerband*. Leipzig: Klett Grundschulverlag.

Das Projekt NaDiMa (Motivation via Natural Differentiation in Mathematics) wird gefördert unter 142453-LLP-1-20089-1-PL-COMENIUS-CMP (vgl. www.nadima.eu).

Felix KRAWEHL, Hamburg

Entwicklung eines Evaluationsinstruments zur fachdidaktischen Bewertung von Unterrichtssoftware für das Grundschulalter

Vorgestellt werden Zwischenergebnisse eines laufenden Forschungsprojektes zur Entwicklung eines mathematikdidaktischen Evaluationsinstrumentes für Unterrichtssoftware[1] für das Grundschulalter. Dieser Beitrag konzentriert sich auf die Anforderungen an ein solches Vorhaben, die sich aus den wissenschaftstheoretischen Gütekriterien von Kohärenz und Gegenstandsangemessenheit einer Qualitätsbewertung ergeben.

Warum die fachdidaktische Qualität von USW betrachten?

Im Gegensatz zur Geschwindigkeit des technologischen Fortschritts scheint die didaktische Qualität von Unterrichtssoftware im Wesentlichen die Gleiche geblieben zu sein wie vor knapp 20 Jahren. Typische Mängel, wie bei Krauthausen, 1991, konstatiert, finden sich heute noch genauso bei den meisten am Markt erhältlichen Programmen. Dennoch ist Unterrichtssoftware empirischen Studien zufolge die meistgenutzte Anwendung digitaler Technologien in der Grundschule und hat durchaus spezifische mathematikdidaktisch interessante Möglichkeiten.

Die konstatierte Stagnation der fachdidaktischen Qualität verfügbarer USW mag überraschen, nicht nur angesichts der zeitgleichen technologischen Entwicklung, sondern auch angesichts einer Vielzahl vorliegender wissenschaftlicher Evaluationsinstrumente für sog. Bildungssoftware und einer fruchtbaren mediendidaktischen Forschung.

Ein genauerer Blick zeigt, dass mediendidaktische Ansätze unabhängig von der Methodologie die fachdidaktische Qualitätsfrage ausblenden oder nur sehr allgemein abhandeln. Es existieren zwar auch fachdidaktische Ansätze zur Qualitätsbewertung von USW, allerdings sind diese wenig umfangreich und methodologisch eher pragmatisch ausgerichtet.

Ziel dieser Arbeit ist daher die Entwicklung eines dezidiert fachdidaktischen Evaluationsinstruments für USW für das Grundschulalter, wie es u.a. bei Krauthausen, 2008, gefordert wird.

Theoretische Aspekte fachdidaktischer Evaluation von USW

Anders als in der sozialwissenschaftlichen Maßnahmenevaluation kann eine fachdidaktische Bewertung von Unterrichtsmedien nicht empirisch,

[1]USW: Unterrichtssoftware

wie etwa über messbare Lernerfolge als Qualitätskriterium erfolgen, da der konkrete Einsatz zu vielen unkontrollierbaren Einflüssen ausgesetzt ist. Eine fachdidaktische Qualitätsdiskussion muss sich daher auf ihre eigenen Postulate und Prinzipien beziehen. Die resultierenden Aussagen haben eher grundsätzlichen Charakter, abstrahieren von konkreten Zielgruppen und orientieren sich an fundamentalen Rahmenbedingungen. Zielgruppe für ein solches Instrument sind Fachdidaktiker.

Evaluationsansätze für Unterrichtssoftware

Die dominante Methode der Software-Evaluation stellen Kriterienlisten dar. Kriterien sind dabei grundsätzlich als handhabbarer und ökonomischer Methodenbaustein von Evaluationsinstrumenten anerkannt. Die verbreitete Kritik (für eine prägnante Zusammenstellung vgl. Wirth) an Kriterienkatalogen bezieht sich u. a. auf mangelnde Reliabilität, Inkonsistenz sowie fragwürdige Aussagekraft für tatsächliche Lernergebnisse. Kriterienlisten können problematisch sein, wenn sie sich nicht auf ein vorab geklärtes, konsistentes Qualitätsmodell beziehen, sondern eklektizistisch vorgehen, Kriterien aus Produktbeschaffenheiten ableiten oder sich auf verschiedene Einsatzzwecke beziehen. Natürlich erzeugt die Forderung, Einsatzfälle zu unterscheiden einen Zielkonflikt zum Anspruch, ein auf vielfältige Produkte anwendbares Evaluationsinstrument anzubieten.

Ein zweites evaluationstheoretisches Problem liegt im Bereich der Gegenstandsangemessenheit älterer Evaluationsinstrumente. Deren Gegenstandsverständnis zufolge ließe sich didaktische Qualität direkt aus Produktmerkmalen ableiten. Dem steht die Auffassung entgegen, dass das Vorhandensein relevanter Beschaffenheiten (wie bspw. guter Aufgaben) zwar eine notwendige Voraussetzung für eine Qualitätsaussage. Deren Tragfähigkeit ist jedoch begrenzt, wenn nicht gleichzeitig der Unterrichtskontext berücksichtigt wird, der von den Eigenschaften der Unterrichtssoftware Gebrauch macht und deren Wirksamkeit wesentlich bedingt. Die Herausforderung dieser Arbeit liegt in dieser Hinsicht

- im Verständnis von USW als Artefakt in einem sich darauf beziehenden Unterrichtskontext, der dessen Wirksamkeit bedingt und gleichzeitig seinerseits durch die Beschaffenheit des Artefakts transformiert wird,
- ohne reale Unterrichtskontexte empirisch einzubeziehen, da die Vielfalt der Einflussfaktoren ein theoretisch abstrahierendes, fundamentales fachdidaktisches Urteil eher verunklart.

Mein Forschungsvorhaben versucht, den genannten methodologischen Herausforderungen durch die Unterscheidung didaktischer Orte und ein Szenarien-basiertes Evaluationskonzept zu begegnen.

Szenarien-basiertes Evaluationskonzept

Die präskriptive Definition und die darauf bezogene Zuschreibung mathematikdidaktischer Qualität kann im konkreten Detail u. U. fragil sein. So wäre bspw. eine Fehlerrückmeldung in einer USW für die Einführungs- oder Übungsaktivität anders zu gestalten als für automatisierendes Üben. Anspruch eines wissenschaftlichen Evaluationsinstruments muss jedoch sein, annähernd tragfähige Urteile zu erlauben. Daher beschreitet diese Arbeit einen anderen Weg als herkömmliche Kriterienkataloge, indem sie die Zielsetzung des Evaluationsgegenstandes genauer spezifiziert. Für ein Evaluationsinstrument mit dem Anspruch, die Breite möglicher Anwendungen aufzunehmen, entsteht daraus die Anforderung einer regelgeleiteten Vorgehensweise. Diese besteht hier aus folgenden Schritten vor den eigentlichen Evaluationsschritten:

- einer kursorischen Sichtung des Materials bzw. seiner Dokumentation auf Hinweise für einen intendierten didaktischen Einsatzort
- die (ggf. probeweise) Festlegung eines didaktischen Ortes, auf den bezogen eine Evaluation erfolgen soll
- die Konstruktion eines fachdidaktischen präskriptiven Qualitätsmodells bezogen auf diesen gewählten didaktischen Ort, die in die Definition erwünschter Qualitätsstandards mündet.

Eine solche Verortung muss sich (i. S. des genuinen Auftrages einer Wissenschaft des Lehrens und Lernens von Mathematik) auf folgende Rahmenbedingungen beziehen:

- die inhaltliche und formale Verfassung des behandelten mathematischen Gegenstandes
- darauf bezogene mathematische Lernaktivitäten
- die Ziele des Lehrenden.

Zu erkennen sind hier die Dimensionen des klassischen didaktischen Dreiecks, interpretiert jedoch mit den Begriffen, Methoden, Gegenständen, Zielen und Konzepten des Faches.

Szenarien

Neben der Kohärenz des Qualitätsmodells habe ich die Gegenstandsangemessenheit des evaluatorischen Vorgehens als Mangel einiger vorhandener

Ansätze benannt. Hier lag das Problem in einer traditionell produktorientierten Betrachtungsweise, die von konkreten Eigenschaften direkt ein Qualitätsurteil abzuleiten versucht. Diese Arbeit orientiert sich hier am mediendidaktischen Topos des Szenarios (vgl. Schulmeister, 2003).

Konkret bedeutet das für das Evaluationsvorgehen zweierlei:

- Bei der Generierung eines Qualitätsmodells werden mathematikdidaktisch begründete Standards für ein (‚Blended Learning-‘) Unterrichtsszenario definiert, welche von der Software und/oder den darauf bezogenen Unterrichtsaktivitäten in toto zu erbringen sind. Die Formulierung von Ansprüchen an die Gesamtheit aus Software und Unterrichtskontext erleichtert letztlich diesen Schritt, da die Evaluatoren a priori nicht wissen müssen, was technologische Möglichkeiten von Unterrichtssoftware sind.
- Die Datenerhebung an der konkreten Unterrichtssoftware führt zur Erstellung eines Profils aus Software-Eigenschaften und Anforderungen an den Unterrichtskontext.
- Bei der Bewertung werden der Beitrag der Software zu den Szenarioanforderungen und der Umfang und die Qualität der Anforderungen für sachgerechte Nutzung betrachtet. Diese können verglichen werden mit anderen Produkten oder einem Unterricht mit der gleichen Zielsetzung, der mit analogen Arbeitsmitteln auskommt.

Das so generierte Profil einer Software in einem hypothetischen Unterrichtskontext bildet einerseits die Grundlage einer Bewertung der fachdidaktischen Qualität der Software. Andererseits stellen derartige Profile als solche wertvolle präskriptive Modelle für fachdidaktisch fundierte Unterrichtsszenarien dar.

Literatur

Krauthausen, G. (1991). Software im Mathematikunterricht: Eine Betrachtung aus fachdidaktischer Sicht. *Computer Bildung/Schulpraxis*, *5/6*, 36-41.

Krauthausen, G. (2008). Wie weiter mit dem Computer im Mathematikunterricht der Grundschule? In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Budapest: Gesellschaft für Didaktik der Mathematik GDM.

Schulmeister, R. (2003). *Lernplattformen für das virtuelle Lernen. Evaluation und Didaktik. Lernplattformen für das virtuelle Lernen. Evaluation und Didaktik*. München.

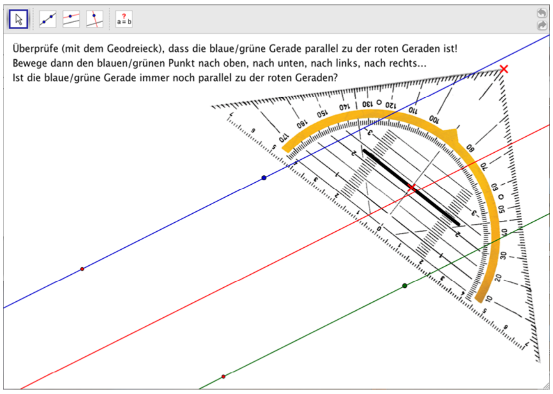
Yves KREIS, Luxemburg, Carole DORDING, Luxemburg, Ulrich KELLER, Luxemburg

GeoGebraPrim – GeoGebra in der Grundschule

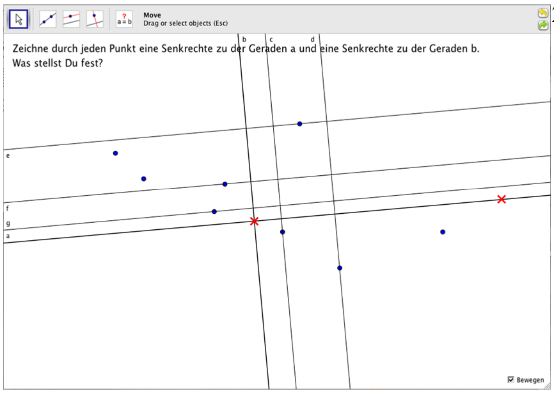
In diesem Artikel wird das von der Universität Luxemburg finanzierte Forschungsprojekt GeoGebraPrim – GeoGebra in der Grundschule vorgestellt. Wir geben zuerst einen kurzen Überblick über das Forschungsprojekt, erklären anschließend die angewandten pädagogischen und technologischen Konzepte und stellen schlussendlich einige Resultate vor.

1. Das Projekt

Das Projekt GeoGebraPrim hat im Januar 2007 begonnen und wurde 3 Jahre bezuschusst. Der Hauptfokus liegt auf dem Einsatz von GeoGebra(Prim) in der Grundschule sowie der Integration von GeoGebra(Prim) in TAO.



[1]



[2]

Die gewünschten Anpassungen der dynamischen Mathematiksoftware (DMS) GeoGebra an die Gegebenheiten der Grundschule wurden anhand von mehreren Beobachtungen von Kindern im Umgang mit dem DMS zusammengetragen. Minimale unabdingbare Änderungen – mehr hat das Projekt nicht zugelassen und auch nicht unbedingt benötigt – beschränkten sich auf die Vereinfachung der Benutzeroberfläche wobei nicht benötigte Eigenschaften und Werkzeuge ausgeblendet wurden (vgl. Abbildungen).

TAO (http://www.tao.lu) ist das französische Akronym für „Testing Assisté par Ordinateur“ (Computerbasiertes Testen) und bietet den Rahmen für die Erfassung eines umfassenden Protokolls – im Gegensatz zum einfachen Resultat – der Handlung eines jeden Schülers.

[1] Überprüfe (mit dem Geodreieck), dass die blaue/grüne Gerade parallel zu der roten Geraden ist! Bewege dann den blauen/grünen Punkt nach oben, nach unten, nach links, nach rechts... Ist die blaue/grüne Gerade immer noch parallel zu der roten Geraden?

[2] Zeichne durch jeden Punkt eine Senkrechte zu der Geraden a und eine Senkrechte zu der Geraden b. Was stellst Du fest?

2. Die Studie

Die Studie besteht aus einem Pre-/Post-Test – der Post-Test wurde nach den Sommerferien erneut durchgeführt – verbunden mit Darstellungen und pädagogischen Reflexionen besonders interessanter Beobachtungen. Insgesamt nahmen 59[3] Kinder im Alter von 9 Jahren (4. Klasse) am Experiment teil; 30 von Ihnen wurden auf herkömmliche Art und Weise – Papier und Bleistift – unterrichtet, während 29 auch mit GeoGebra arbeiteten.

Der Bewegen-Modus in GeoGebra erlaubt eine interaktive Erforschung bzw. Veränderung der dargestellten mathematischen Objekte; Haftendorn (2005) spricht in diesem Zusammenhang von Dynamischer Mathematik. Die didaktischen Möglichkeiten gehen weit über jene eines traditionellen Unterrichts hinaus (Straesser, 2002; Kreis, 2004). Demzufolge erwarten wir, dass der Einsatz dieser Software zu einem tieferen Verständnis der elementaren Geometriekenntnisse bei den Kindern führt.

Der Wunsch nach einer Verbindung zwischen einem dynamischen Geometriesystem (DGS) und einem Computeralgebrasystems (CAS) zu einem DMS wurde regelmäßig thematisiert (Schumann, 1991; Schumann & Green, 2000; Hohenwarter & Fuchs, 2005). Die aus diesem Wunsch resultierende bidirektionale Verbindung zwischen den grafischen Darstellungen (Strecke, Rechteck, usw.) und den dazugehörigen numerischen bzw. algebraischen Ausdrücken (Länge, Umfang, usw.) erlaubt den Kindern die Formeln für Umfang und Flächeninhalt experimentell zu entdecken und anschließend direkt in der Eingabezeile anzuwenden. Demnach vermuten wir, dass die Kinder eine tiefere Einsicht in die Zusammenhänge zwischen Geometrie und Algebra erlangen.

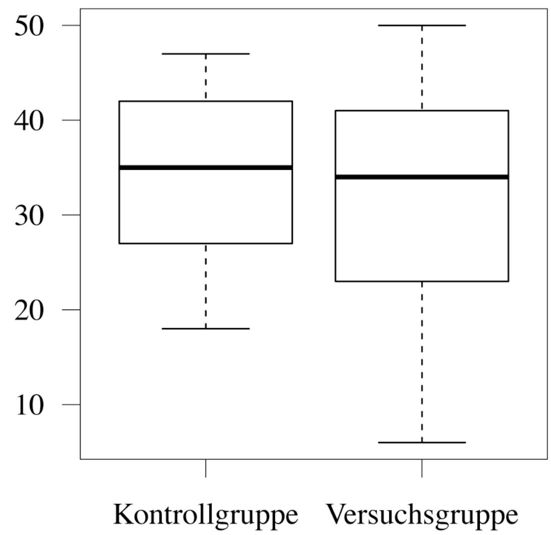
Die Schulen wurden zufällig ausgesucht; die einzige Bedingung war eine ausreichende Anzahl an Computern. In jeder Schule gab es sowohl eine Versuchs- als auch eine Kontrollgruppe, um eine annährend gleiche soziokulturelle Zusammensetzung der beiden Gruppen zu gewährleisten.

Wir befürworten einen entdeckenden Unterricht in dem die Kinder eine größere Autonomie in ihrem Lernprozess haben und der ihr Interesse weckt. Alle Aufgaben und Erforschungen wurden unter diesem Paradigma entworfen; wir haben jedoch nur einen geringen Einfluss auf den Unterricht in den verschiedenen Klassen, obwohl detaillierte Beschreibungen der einzelnen Unterrichtssequenzen vorbereitet wurden.

[3] Geplant waren eigentlich 200 Kinder; einige Schulklassen haben sich leider aus unterschiedlichen Gründen kurz vor bzw. sogar während dem Versuch zurückgezogen.

3. Resultate

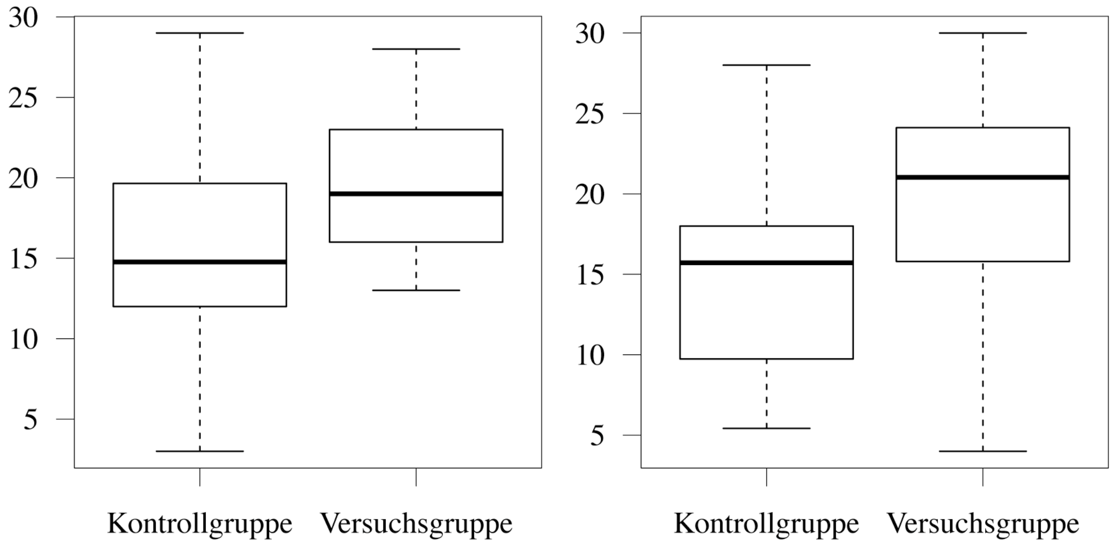
Wir können in diesem Artikel nur kurz und separat auf die einzelnen Tests eingehen. In einer ausführlicheren Publikation werden wir eine detailliertere Analyse sowie eine Verknüpfung der einzelnen Daten präsentieren.



Die Kinder verfügen bereits über schulische Vorkenntnisse in Geometrie: die Begriffe Parallele und Senkrechte sowie Quadrat und Rechteck wurden bereits in der dritten Klasse eingeführt. Dies erlaubt uns eine schriftliche Standortbestimmung zu diesen Begriffen durchzuführen.

Die Resultate des Pre-Tests (maximale Punktzahl 50) in der Versuchs- und Kontrollgruppe unterscheiden sich nicht signifikant ($t[57] = -0{,}44$; $p = 0{,}66$; $d = -0{,}12$).

Nach dem Versuch wurde der Post-Test (maximale Punktzahl 31) durchgeführt. Zwei Kinder waren an dem Tag krank; die fehlenden Daten wurden mit dem Programm Amelia II zehnfach imputiert. Die Ergebnisse der beiden Gruppen mit den Mittelwerten 15,25 (Kontrollgruppe) vs. 19,76 (Versuchsgruppe) unterscheiden sich statistisch signifikant ($t[57] = 3{,}16$; $p = 0{,}002$) und in inhaltlich bedeutsamem Ausmass; gemessen an den von Cohen (1988) vorgeschlagenen Richtwerten liegt starker Effekt vor ($d = 0{,}84$).



Post-Test 1 Post-Test 2

Nach den Sommerferien wurde der gleiche Post-Test erneut organisiert; sechs Kinder nahmen nicht mehr an der Untersuchung teil. Die Ergebnisse – erneut zehnfach imputiert – entsprechen sehr weitgehend jenen des ersten Post-Tests (14,85 vs. 19,78 Punkte; t[57] = 3,01; p = 0,003; d = 0,81).

4. Schlussfolgerungen

Wir haben in diesem Artikel einen kurzen Überblick über die möglichen Vorteile des Einsatzes eines DMS in der Grundschule geliefert und aufgezeigt, dass die Versuchsgruppe sowohl kurz nach der Studie als auch nach den Sommerferien bessere Resultate aufweisen konnte als die Kontrollgruppe. Unsere Erfahrungen lassen aber auch vermuten, dass der Erfolg vom Unterricht der jeweiligen Lehrer abhängt (Krauthausen, 2005) und dementsprechend die Aus- sowie die Weiterbildung der Lehrer ein zentrales Anliegen beim Einsatz von Computern in der Schule bleibt.

Literatur

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences* (Second Edition.). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Haftendorn, D. (2005). Dynamische Geometrie - Bewegung beflügelt Verstehen. In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 235-238).

Hohenwarter, M., Borcherds, M., & Kreis, Y. (2009). *GeoGebra 3.2*.

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2005). Combination of dynamic geometry, algebra and calculus in the software system GeoGebra. In C. Sárvári (Hrsg.), *Computer algebra systems and dynamic geometry systems in mathematics teaching* (S. 128-133).

Honaker, J., King, G., & Blackwell, M. (2010). *Amelia II: A Program for Missing Data.* http://gking.harvard.edu/amelia

Krauthausen, G. (2005). Computer im Mathematikunterricht der Grundschule – Ernüchterung eingekehrt? In G. Graumann (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005* (S. 25-32).

Kreis, Y. (2004). *Mathé mat TIC : Intégration de l'outil informatique dans le cours de mathématiques de la classe de 4e* (Travail de candidature). Luxembourg: MEN.

Kreis, Y., & Dording, C. (im Druck). GeoGebraPrim – GeoGebra for Primary School. In *Proceedings of the The Ninth International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 9)*.

Schumann, H. (1991). *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer : Beiträge zur Didaktik des interaktiven Konstruierens*. Stuttgart: Metzler und Teubner. http://www.mathe-schumann.de/computer/

Schumann, H., & Green, D. (2000). New protocols for solving geometric calculation problems incorporating dynamic geometry and computer algebra software. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(3), 319-339.

Straesser, R. (2002). Cabri-géomètre: Does Dynamic Geometry Software (DGS) Change Geometry and its Teaching and Learning? doi:10.1023/A:1013361712895

ISABELL KUHNKE-LERCH, REGINA BRUDER, Darmstadt

Wie analysieren Lehramtsstudierende Unterrichtsentwürfe? Vorstellung eines Instruments zur Erfassung von Lernprozessen im Lehramtsstudium

Ein zentrales Ziel der ersten Phase der Lehrerausbildung ist es die Lehrerinnen und Lehrer zu befähigen „Unterricht fach- und sachgerecht [zu planen]" (KMK, 2004). Eine Lehrkraft für Mathematik gestaltet auf der Grundlage von Professionswissens (Shulman, 1986), Vorstellungen über Lehren, Lernen und Mathematik und eigenen Erfahrungen ihren Mathematikunterricht. Der realen Gestaltung des Unterrichts gehen immer mehr oder weniger explizite Planungsprozesse voraus. Sie sind eine notwendige aber sicherlich nicht hinreichende Voraussetzung für gelingenden Unterricht. In unserer Studie konzentrieren wir uns auf das fachdidaktische Wissen für solche Planungsprozesse mit folgender Fragestellung: Wie kann die Kompetenz zur Planung von Mathematikunterricht im Lehramtsstudium erfasst und gefördert werden? In diesem Zusammenhang ist von Interesse, wie sich die individuellen Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht während der Lehrerausbildung entwickeln und verändern und was diese Veränderungen beeinflusst.

1. Analyse individueller Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht mit der Repertory Grid Methode

In der Psychoanalyse wird zur Erfassung von persönlichen Konstrukten u.a. die sogenannte Repertory Grid Methode nach Kelly (1955) verwendet. Im Zentrum dieser Methode steht das paarweise Vergleichen von Objekten. Die durch das Vergleichen gefundenen Gemeinsamkeiten und Unterschiede bilden die persönlichen Konstrukte der befragten Person.

Der Vorteil dieser Methode ist, dass die Konstrukte in der eigenen Sprache der Probanden formuliert werden und dass durch die offene Fragestellung anders als bei geschlossenen direkten Befragungen oder Tests Anpassungsleistungen vermieden werden können. Ebenfalls von Vorteil ist, dass durch das standardisierte Vorgehen einerseits und durch das subjektive Nennen der Merkmale andererseits sowohl nomothetische als auch ideografische Untersuchungen (Scheer, 1996) möglich sind.

Um die persönlichen Konstrukte über guten Mathematikunterricht zu erfassen, wurden Unterrichtsentwürfe als Vergleichsobjekte gewählt. Innerhalb einer Befragung wurden Unterrichtsentwürfe verwendet, die dieselben mathematischen Inhalte haben und sich dennoch in ihrer Gestaltung grundsätzlich unterscheiden. Um die Entwicklung individueller Vorstellungen von gutem Mathematikunterricht zu untersuchen, ist die Studie längsschnittlich angelegt und in obligatorische Lehrveranstaltungen zur Fachdidaktik der Mathematik an der TU Darmstadt eingebettet.

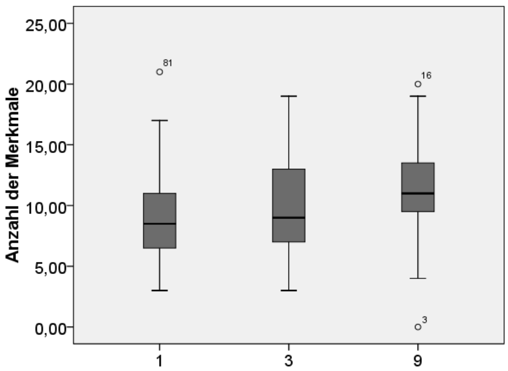
Eine Befragung ist für 45 Minuten konzipiert. Die Teilnehmer werden zunächst aufgefordert Merkmale einer gut geplanten Mathematikstunde zu notieren, um sich auf das Thema „Unterrichtsqualität“ einzustimmen. Im Anschluss an dieses individuelle Brainstorming erhalten die Studierenden zwei Unterrichtsentwürfe, die sie miteinander vergleichen sollen. Der Vergleich wird durch individuelles Generieren von Merkmalen in Form einer Tabelle dokumentiert, so dass gemeinsame und unterscheidende Merkmale den Unterrichtsentwürfen zugeordnet werden.

2. Erste Ergebnisse der Studie

Im Wintersemester 2008/2009 wurden insgesamt 126 Lehramtsstudierende an der TU Darmstadt (LaG) und 37 Studierende an der University of Technology Sydney unter der Leitung von Prof. Dr. Anne Prescott befragt. Die Daten der australischen Studierenden werden zurzeit ausgewertet.

Bei den Studierenden der TU Darmstadt konnte eine Zunahme der Merkmalsnennungen mit steigendem Semester beobachtet werden, siehe Abb. 1.

Dies ist ein quantitativer Unterschied, der noch keine Aussage zur Qualität



Befragung	Mittel-wert	N	Standard-abweichung
Proseminar (1)	8,77	48	3,5
Grundlagen (3)	10	42	4
Examen (9)	11,2	36	4,3

Abb. 1: Durchschnittliche Anzahl der Merkmalsnennungen im WS 2008/2009

zulässt. Um die Qualität der Merkmale zu analysieren, wurde mithilfe der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2008) ein Kategoriensystem gewonnen. Um das entstandene Kategoriensystem zu stützen, wurde dieses mit verschiedenen Publikationen zur Qualität von Mathematikunterricht und Unterrichtsplanung verglichen. Insgesamt wurden zwölf Kategorien zur Charakterisierung der Unterrichtsentwürfe formuliert, siehe Abb. 2.

Die Kategorien „Strukturierung des Unterrichtsentwurfs“, „Ausgangssituation“, „Ziele“, „Inhaltsanalyse“ und „Reflexion des Unterrichtsentwurfs“ beinhalten Merkmale, die sich auf die Gestaltung und Formulierung des Unterrichtsentwurfs beziehen. Merkmale, die die geplante Stunde charakterisieren, sind in den Kategorien „Strukturierung der Stunde“, „Zielorientierung und Motivierung“, „kognitive Aktivierung“, „Binnendifferenzierung“, „Wiederholen, Üben und Ergebnisse sichern“, „Medien“ und „Lehr-/Lernformen“ zu finden (vgl. Kuhnke-Lerch, 2010).

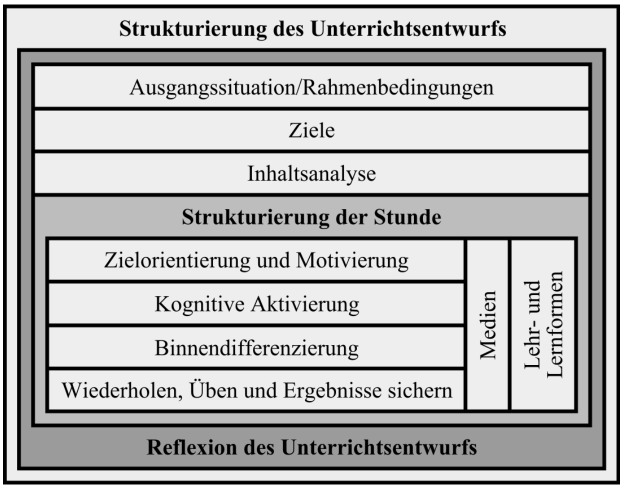


Abb. 2: Kategoriensystem zur Analyse des Grids

In Abb. 3 sind Ergebnisse der Befragung im Wintersemester 2008/2009 an der TU Darmstadt dargestellt.

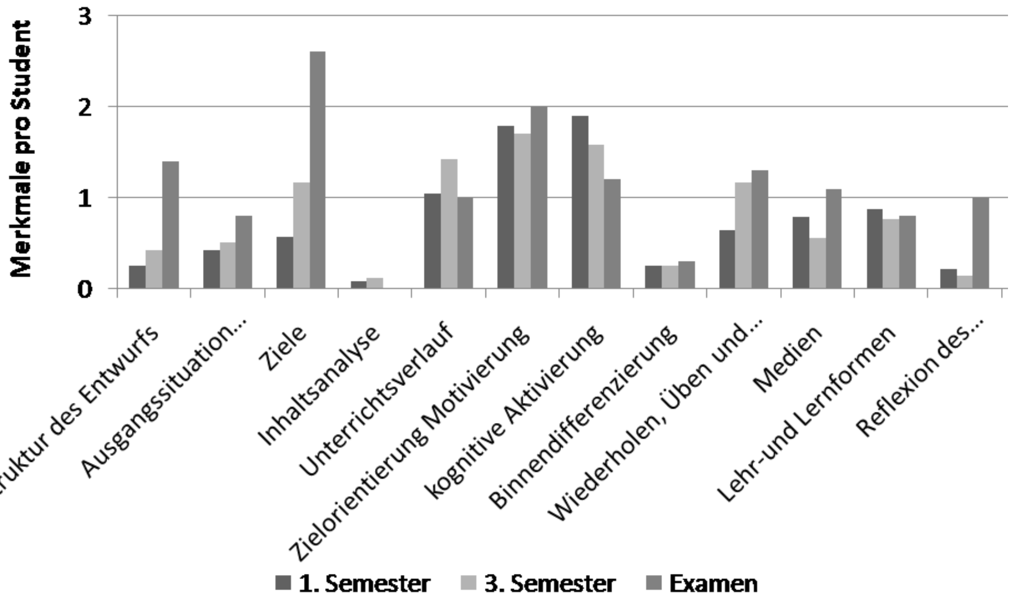


Abb. 3: Ergebnisse der Befragung im WS 2008/2009

In der Kategorie „Ziele“ ist eine deutliche Zunahme der Merkmalsnennungen mit steigendem Semester zu erkennen. Ebenso nehmen die Merkmalsnennungen in der Kategorie „Reflexion des Unterrichtsentwurfs“ zu. Die Kategorie „kognitive Aktivierung“ hingegen zeigt eine sinkende Tendenz.

Allgemein ist festzustellen, dass sich die Sicht auf Unterrichtsentwürfe sowohl quantitativ, als auch qualitativ verändert. Wie das konkret aussehen kann, zeigen beispielhaft die Ergebnisse für einen Studierenden.

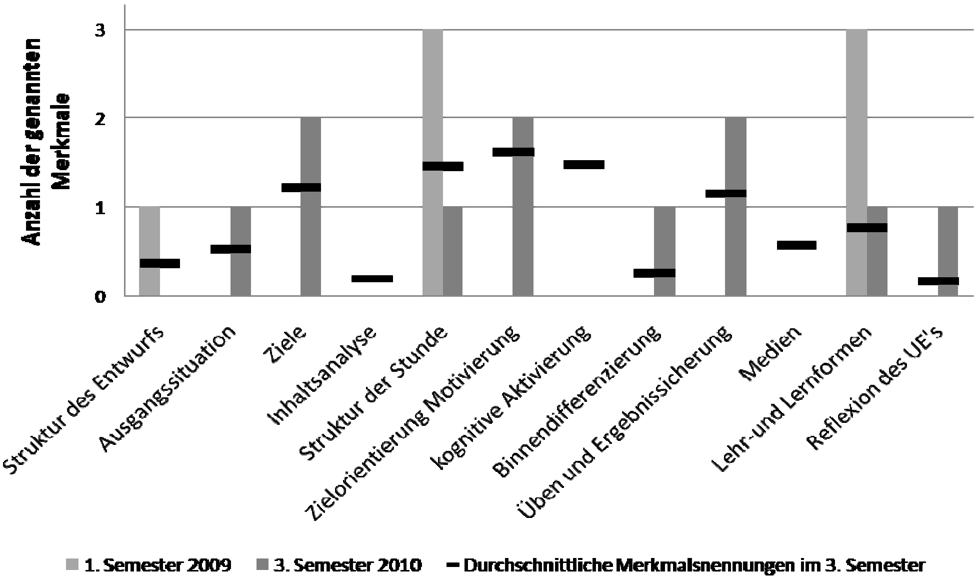


Abb. 4: Beispiel einer individuellen Auswertung

Abb. 4 zeigt die Merkmalsnennungen eines Studierenden im ersten und dritten Semester. Im ersten Semester lag der Schwerpunkt des Vergleichs der Unterrichtsentwürfe auf der Struktur und den Lernformen der Stunde. Im dritten Semester wird die Analyse vielfältiger. Sowohl die individuelle Entwicklung als auch der Vergleich mit den durchschnittlichen Merkmalsnennung im dritten Semester kann für ein individuelles Feedback zur Kompetenzentwicklung im Lehramtsstudium genutzt werden.

Zurzeit wird ein solches Feedback für die teilnehmenden Studierenden der TU Darmstadt und UT Sydney entwickelt und soll Teil eines phasenübergreifenden Portfolios werden. Es ist ebenso geplant, den Einfluss dieses Feedbacks zu untersuchen und die Befragung auch in der zweiten Phase der Lehrerausbildung durchzuführen.

Literatur

Kelly, G. A. (1955). The psychology of personal constructs. New York: Norton.

Kuhnke-Lerch, I. (2010). Unterrichtsentwürfe reflektieren und entwickeln. In: mathematik lehren (158). Seelze: FriedrichVerlag, S. 60-61.

KMK (2004). Standards für die Lehrerausbildung: Bildungswissenschaften.

Scheer, J.W. (1996). A short introduction to Personal Construct Psychology. In: J.W.Scheer & A. Catina (Eds.). Empirical Constructivism in Europe – The Personal Construct Approach. Giessen: Psychosozial Verlag, S. 13-17.

Shulman, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. In: *Educational Researcher*, 15, S. 4-14.

Mayring, P. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken. Beltz.

SEBASTIAN KUNTZE, Ludwigsburg

Sichtweisen von Studierenden zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht – „Rich pictures“ und Multiple-Choice: Gegenüberstellung zweier Erhebungsformate

Sichtweisen angehender und praktizierender Mathematiklehrkräfte zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht werden als bedeutsame Einflussgrößen auf das Gestalten von Lerngelegenheiten für Schülerinnen und Schüler angesehen. Diese Sichtweisen stehen deshalb immer wieder im Zentrum empirischer Untersuchungen, die sich unterschiedlicher Erhebungsmethoden bedienen können. Im Folgenden werden beispielhaft die Erhebungsformate Multiple-Choice-Fragebogen und das Zeichnen von sog. „Rich pictures“ in einer empirischen Studie gegenübergestellt.

Theoretischer Hintergrund

Vorstellungen angehender Lehrkräfte zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht lassen sich in einer pragmatischen Herangehensweise (Pajares, 1992) als Komponenten professionellen Wissens einordnen, da sich zwischen Wissen und Überzeugungen bzw. Beliefs Überschneidungen kaum vermeiden lassen. Eine Grobübersicht über Komponenten professionellen Wissens, die zusätzlich die Bereiche nach Shulman (1986) und verschiedene Ebenen an Globalität (vgl. Törner, 2001) einbezieht, bietet ein z.B. in Kuntze & Zöttl (2008) vorgestelltes Modell. Als Beispiel für Sichtweisen zum Lehren und Lernen im Mathematikunterricht können etwa die konstruktivistische oder rezeptive Sicht des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht nach Staub & Stern (2002) in diesem Modell als globale, d.h. situationsübergreifende Pedagogical Content Beliefs eingeordnet werden. Bittet man angehende Lehrkräfte, ihr Bild vom Mathematikunterricht in Form eines Bildes oder einer Zeichnung zu skizzieren (sog. „Rich pictures“, vgl. Bescherer & Spannagel, 2008), so dürfte ebenfalls eine globale Ebene von auf das Lehren und Lernen von Mathematik bezogenen Vorstellungen angesprochen werden, denn selbst Bildern von Unterrichtssituationen dürfte von den Befragten eine sinnbildartige Bedeutung zugedacht worden sein. Diese Annahme liegt auch den Studien von Bulmer und Rolka (2005) sowie Rolka und Halverscheid (2006) zugrunde, die das Zeichnen von Rich Pictures allerdings zur Erhebung Statistik- und Mathematik-bezogener epistemologischer Beliefs einsetzten. Das Codebook von Bescherer und Spannagel (2008) erlaubt demgegenüber, Rich Pictures nach „Instruktion vs. Konstruktion“ zu kategorisieren, was mit dem oben angesprochenen Untersuchungsanliegen der Studie von Staub und Stern (2002) eine hohe inhaltliche Passung aufweist. Dies führt zu dem nahe liegenden

Forschungsinteresse an Vergleichen der beiden Erhebungsmethoden und an Möglichkeiten einer gegenseitigen Validierung der mit den jeweiligen Instrumenten gewonnenen Ergebnisse:

- Inwiefern können Auswertungsergebnisse der „Rich Pictures“ als prädiktiv für mit Fragebögen erhobene Sichtweisen angesehen werden?
- Welchen illustrierenden Aufschluss kann die kumulative Sichtung der Bilder für die mittlere Ausprägung der mit Fragebögen erhobenen Sichtweisen der Befragten geben?

Untersuchungsdesign und Stichprobe

Befragt wurden N=69 Lehramtsstudierende mit komplettem Datensatz (52 Studentinnen und 17 Studenten; durchschnittliche Semesteranzahl 5,33 (SD=1,47); Durchschnittsalter 23,4 Jahre, SD=3,1) zu Beginn einer Lehrveranstaltung. Zunächst sollten die Befragten nach der Aufgabenstellung „Wie sieht Ihr Bild von Mathematikunterricht aus? Malen, zeichnen, kritzeln Sie!“ Bilder erstellen. Dieses Instrument stammt einschließlich des verwendeten Codebooks von Bescherer und Spannagel (2008). Die Top-Down-Codierung zu diesem Instrument bezieht sich auf die Merkmale „Instruktion vs. Konstruktion“, „Emotionen“ und „Sicht von innen vs. Sicht von außen“. Zwei mit dem Codebook geschulte Rater stuften die Bilder jeweils unabhängig voneinander ein. Die Inter-Rater-Reliabilitäten lagen bei (Cohen’s Kappa) $\kappa = 0,86$ (Instruktion vs. Konstruktion), $\kappa = 0,82$ (Emotionen), $\kappa = 0,80$ (Sicht von innen vs. Sicht von außen) und war damit für den Aspekt „Instruktion vs. Konstruktion“ akzeptabel, während die beiden anderen Aspekte nur noch annähernd akzeptable Kappa-Werte aufwiesen. Im Falle abweichender Zuordnungen kam ein Konsensverfahren zwischen den beiden Ratern zum Einsatz, das in allen Fällen zu einer übereinstimmenden Zuordnung führte.

Nach dem Zeichnen des Bildes wurden die Lehramtsstudierenden gebeten, einen Multiple-Choice-Fragebogen auszufüllen, der insbesondere die bewährten Skalen der Studien von Staub und Stern (2002) (Reliabilitätswerte zwischen $\alpha = 0,73$ und $\alpha = 0,80$) sowie flankierend auch die Skalen von Grigutsch, Raatz und Törner (1998) zu epistemologischen Beliefs über Mathematik enthielt (Anwendungs-, Prozess-, Formalismus- und Schemaorientierung). Es handelte sich jeweils um vierstufige Likert-Skalen.

Ergebnisse

Die deskriptiven Ergebnisse der Auswertung der Rich Pictures sind in Tabelle 1, die zur Multiple-Choice-Fragebogen-Auswertung zu den Skalen von Staub & Stern (2002) und Grigutsch, Raatz und Törner (1998) in Tabelle 2 zusammengestellt. Die Skalen „konstruktivistische“ und „rezeptive Sicht des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht“ korrelieren erwartungsgemäß mit r = -0,48 (Korrelation zweiseitig signif. mit p<0,001).

Merkmal	Codes und Häufigkeiten (gesamt: N=69 Rich Pictures mit zuordenbarem Fragebogen)			
Instruktion vs.	konstruktionsorientiert	instruktionsorientiert	indifferent	
Konstruktion	12	38	19	
Emotionen	positiv	negativ	beides	emotionsneutral
	3	5	8	53
Sicht von innen vs.	Sicht von innen	Sicht von außen		
Sicht von außen	5	64		

Tabelle 1: Ergebnisse der Codierung der Rich Pictures

	M	SD
Konstruktivistische Sicht des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht	3,37	0,48
Rezeptive Sicht des Lehrens und Lernens im Mathematikunterricht	2,27	0,47
Anwendungsorientierung	3,13	0,50
Prozessorientierung	2,83	0,51
Schemaorientierung	2,76	0,56
Formalismusorientierung	2,77	0,57

Tabelle 2: Globale Sichtweisen (Fragebogenskalen, M und SD)

Zur Beantwortung der ersten Forschungsfrage wurden nach der Codierung „Instruktion vs. Konstruktion“ zu den Rich Pictures zwei Gruppen von Lehramtsstudierenden unterschieden und trotz der kleinen Anzahl Lehramtsstudierender mit konstruktionsorientierten Rich Pictures T-Tests bezüglich der Ausprägung der Skalen des Multiple-Choice-Fragebogens gerechnet. Die Ergebnisse in Abbildung 1 deuten auf vorhandene erwartungskonforme Tendenzen teils in der Größenordnung starker Effekte hin.

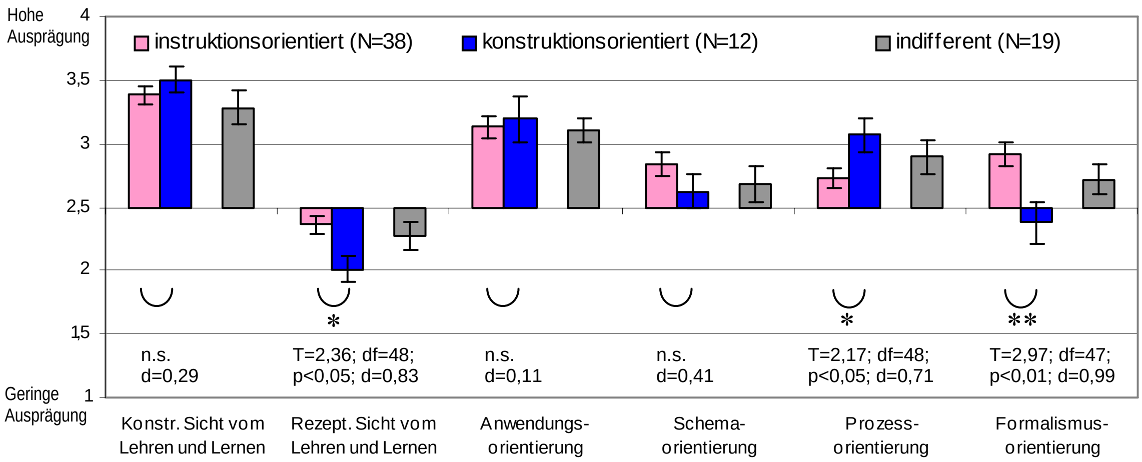


Abb. 1: Vergleiche der Ausprägungen globaler Sichtweisen zwischen Studierenden mit konstruktions- und instruktionsorientierten Rich Pictures

Entsprechend der zweiten Forschungsfrage erlauben die Rich Pictures illustrierende qualitative Einblicke in die Vorstellungen einer Gruppe mit den in Tabelle 2 wiedergegebenen Mittelwert-Kenndaten. Da hier aus Platzgründen nur ein Gesamteindruck der Ergebnisse zusammengefasst werden kann, sei hervorgehoben, dass die nicht untypische positive durchschnittliche Ausprägung der konstruktivistischen Sicht vom Lehren und Lernen in der Summe mit doch relativ zahlreichen instruktionistischen/rezeptiven oder im Hinblick auf kognitiv anregende Lernkontexte teils auch recht oberflächlichen Darstellungen in den Rich Pictures korrespondiert.

Diskussion

Während Skalen eines Multiple-Choice-Fragebogens den Vorteil einer interindividuellen Normierbarkeit bieten, können offene Formate qualitative Einblicke geben. Beispielsweise räumt das Zeichnen der Rich Pictures den Befragten beim Darstellen eigener Gedanken eine größere Freiheit und eine aktivere Rolle ein. Es zeigt sich jedoch, dass die Studierenden bei den Rich Pictures variierende Gedanken in den Vordergrund stellten, was zu einer Streuung und letztlich auch interindividuellen Nichtcodierbarkeit bezüglich mancher Merkmale führte. Ein potentiell sich eröffnender qualitativer Reichtum steht also einem zu erwartenden Informationsverlust bei der Interpretation und inhaltlichen „Reichweite" der Rich Pictures gegenüber.

Die Gegenüberstellung beider Formate gibt Anlass, Folgerungen aus mit den jeweiligen Methoden erzielten Ergebnissen kritisch zu reflektieren, auch wenn sich Anzeichen einer gegenseitigen Validierung zeigen.

Literatur

Bescherer, C. & Spannagel, C. (2008). *Bilder von (erlebtem) Mathematikunterricht.* [Poster auf der 42. Tagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Budapest].

Bulmer, M. & Rolka, K. (2005). The A4-Project – Statistical World Views Expressed through Pictures. In H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)*, Vol. 2 (pp. 193-200). Melbourne: PME.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematikdidaktik*, 19(1), 3-45.

Kuntze, S. & Zöttl, L. (2008). Überzeugungen von Lehramtsstudierenden zum Lernpotential von Aufgaben mit Modellierungsgehalt. *mathematica didactica*, 31, 46-71.

Pajares, F.M. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.

Rolka, K. & Halverscheid, S. (2006). Die Mathematik im Bild – Zeichnungen zur Erforschung mathematischer Weltbilder. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 433-436). Hildesheim: Franzbecker.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Staub, F., & Stern, E. (2002). The nature of teacher's pedagogical content beliefs matters for students' achievement gains: quasi-experimental evidence from elementary mathematics. *Journal of Educational Psychology*, 94 (2), 344-355.

Ladislav KVASZ, Prag; Rainer KAENDERS, Köln

Mathematisches Bewusstsein

Was ist die Lösung der Gleichung $3x^2 - 54x + 243 = 0$? Ist es 9? Was bedeutet es, sich der Lösung bewusst zu sein? Hat man dies vom Mitschüler erfahren? Wurde das Ergebnis durch Anwendung der pq-Formel bestimmt? Oder mit einer Wertetabelle? Betrachtet man den Graphen der Funktion mit Hilfe eines graphikfähigen Taschenrechners? Oder löst man die Aufgabe sogar mit einem Computer-Algebra-System? Führt man eine quadratische Ergänzung durch? Ist einem klar, dass 9 die einzige Lösung sein muss, da es die x-Koordinate des Scheitelpunktes des Graphen der Funktion $f(x) = 3x^2 - 54x + 243$ ist? Oder hat man sich vergegenwärtigt, dass f und f' eine gemeinsame Nullstelle haben? Schaut man sich die kritischen Stellen der reellen Funktion $f(x) = x^3 - 27x^2 + 243x$ an? Man könnte sich fragen, wann ein Feuerwerkskörper, der beinahe vertikal mit einer Steigung von 5400 Prozent und einer Geschwindigkeit von 69,048 m/s in den Himmel geschossen wird, seinen höchsten Punkt erreicht.

In dem Moment, in dem ein Kind geboren wird, wird mit diesem auch die Keimzelle eines persönlichen mathematischen Kosmos in die Welt gesetzt, der fortan zu expandieren beginnt. Doch ein Apfel wächst nicht ausschließlich – er verändert auch seinen Geschmack. Wenn alles gut geht: von sauer zu süß. Ebenso hat der persönliche mathematische Kosmos eines Menschen eine Qualität, die auf seine *Reife* hindeutet. Dies ist eine Qualität dessen, was wir *mathematisches Bewusstsein* (mathematical awareness) nennen.

1. Hintergrund

Warum eine solche Begrifflichkeit? Sie erlaubt, die unterschiedlichen Charakteristika mathematischen Bewusstseins zwischen diagrammatisch und symbolisch, zwischen intuitiver und formaler Herangehensweise und letztlich zwischen Komplexität und Vereinfachung zu unterscheiden.

Wie kann Tiefe im Umgang mit Mathematik konzeptualisiert werden? Nicht wenige Mathematiker sind der Ansicht, dass so etwas wie Tiefe im Umgang mit Mathematik durch den Grad der *mathematischen Strenge* charakterisiert wird. Auch außerhalb der Mathematik ist es eine weit verbreitete Auffassung, dass das Erlernen von Mathematik gleichzusetzen wäre mit einer stets fortschreitenden formalen Präzisierung. Doch aktive Mathematik kennt viele Niveaus von Strenge und guer Unterricht sollte sie alle beachten (vgl. Freudenthal 1971, S.427 oder Polya, 1954). Eher heuristische Herangehensweisen und Tätigkeiten von geringerer Genauigkeit, wie das Zeichnen von Graphen, numerische Annäherung, das Experimentieren von

Hand oder mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen bzw. dynamischer Geometriesoftware liefern einen wertvollen Beitrag zur mathematischen Auseinandersetzung – auch wenn sie nicht den höchsten Standards mathematischer Strenge genügen.

Nachdem die mathematische Strenge in der New-Math Zeit sehr stark betont wurde, haben sich die Vorstellungen über Inhalte und Formen der Darstellung mathematischer Inhalte stark verändert: Mathematisches Wissen jeder Qualität – sei es das Ergebnis einer Berechnung, sei es am Graphen abgelesen, sei es durch Computersoftware zustande gekommen oder sei es das Ergebnis einer strengen Argumentation, wird als Bewusstsein gleichwertiger Qualität akzeptiert (vgl. Kaenders 2009). Statt über Qualitäten von Exaktheit wird auf der Ebene von *Kompetenzen* differenziert. Dabei wird die mathematische Tiefe an der Komplexität des praktischen Problems bemessen, mit welchem die/der Lernende sich möglicherweise eines Tages konfrontiert sehen könnte. Doch Inhalte können ganz unterschiedlich bearbeitet werden – vom Hersagen geeigneter Wörter bis zu tiefem Verständnis – und alle Arten von Aufgaben können entweder durch Nachahmung oder aber durch originelle eigene Ideen gelöst werden.

Es ist in unseren Augen fruchtbarer, das Wechselspiel zwischen plausiblen und demonstrativen mathematischen Denkweisen in den Blick zu nehmen (vgl. Polya,1957). Dazu kommt, dass *mathematisches Verhalten* beschrieben werden kann (Freudenthal,1991, S.122). Auch die Beschreibung verschiedener *Niveaustufen des Denkens*, wie sie von Pierre van Hiele (1986) geleistet wurde, bietet eine aufschlussreiche Perspektive auf die Tiefe mathematischen Bewusstseins. In einzelnen Teildisziplinen haben weitere Autoren Versuche unternommen, eine Qualität der Auseinandersetzung mit Mathematik zu beschreiben. So hat Arcavi (1994) das Konzept des *symbol sense* als Erweiterung von *number sense* (Sowder, 1989) eingeführt. In der Geometrie hat Hewitt (2001) *geometrical awareness* beschrieben.

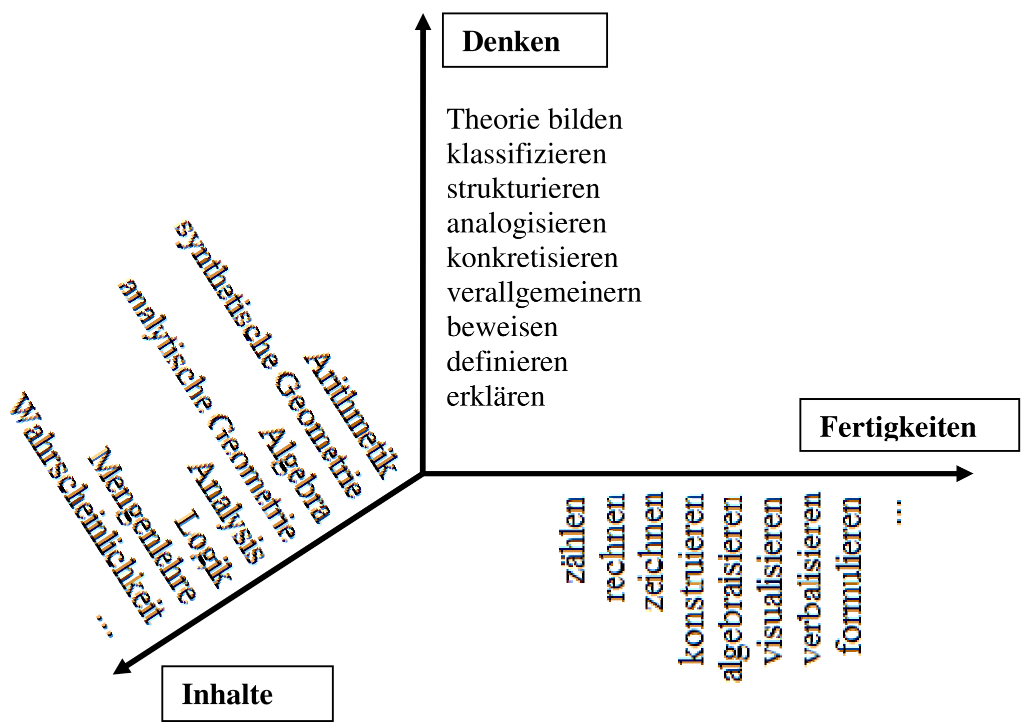
Um auszudrücken, was es bedeutet, Mathematik gelernt zu haben, scheint ein Ansatz notwendig, der diese Ansätze zusammenbringt.

2. Mathematisches Bewusstsein

Grundlage unseres Ansatzes ist der Ausspruch Caleb Gattegnos (1987): „Only awareness is educable in Man“, auf den sich sowohl van Hiele als auch Hewitt beziehen. Mathematiklernen begreifen wir nicht nur als Erweiterung sondern auch als Veränderung des mathematischen Kosmos (siehe Abbildung), d.h. Veränderung der Qualität des *mathematischen Bewusstseins* (im Sinne von *awareness* im Gegensatz zu *consciousness*).

Der Kosmos selbst wird in drei grundliegende Dimensionen zerlegt: Inhalte, Denkaktivitäten und Werzeugkompetenz (skills). In der Reihenfolge der Inhalte haben wir uns an historischen Entwicklungen und an der wachsenden Komplexität syntaktischer Regeln der mathematischen Sprache orientiert (Kvasz 2008). Im Unterschied zu Kompetenzmodellen unterscheiden wir zwischen der Dimension der Werkzeugkompetenz (skills, Fertigkeiten) und der Dimension der Denkaktivitäten. Fertigkeiten, bzw. Werkzeugkompetenzen können *geübt* werden. Das Erlernen solcher Werkzeugkompetenzen erfolgt am effektivsten in entsprechenden inhaltlichen Kontexten, wie z.B. zählen in Arithmetik und Zeichnen in synthetischer Geometrie etc. Gleichwohl ist es uns wichtig, Werkzeugkompetenz von den mathematischen Denkaktivitäten und vom inhaltlichen Kontext zu lösen. So kann man zum Beipiel nicht nur in der Artithmetik addieren sondern auch Intervalle, Polynome, Vektoren, Funktionen etc. können addiert werden.

Alle die genannten Denkaktivitäten beziehen Anwendungen oder Modellierungen nicht explizt ein, denn es gibt kein angewandtes oder auf Modellierung bezogenes mathematisches Denken. Gleichwohl kann eine praktische Problemstellung natürlich Motivation sein, bestimmte mathematische Denkaktivitäten in Gang zu setzen.



Mathematisches Bewusstsein, also die Qualität dieses Kosmos, muss ein *ganzheitliches Konzept*, d.h. thematisch neutral sein, so dass Transfer möglich ist. Ähnlich wie mathematische Strenge kennt auch mathematisches Bewusstsein verschiedene Graduierungen. Da wir die Entwicklung der Mathematik selbst als ein lingustisches Phänomen verstehen (Kvasz, 2008), sehen wir wie Van Hiele (1986, S. 109), dass auch die Qualität mathematischen Bewusstseins notwendigerweise eine linguistisch wahrnehmbares Phänomen darstellt.

Wir unterscheiden soziales, imitatives, manipulatives, instrumentelles, diagrammatisches, experimentelles, strategisches, kontextbezogenes, intuitives, argumentatives, logisches, theoretisches Bewusstsein. Mathematisches Bewusstsein ist eine adverbiale Konstruktion – es beschreibt die *Art und Weise*, wie wir etwas wissen und in der Lage sind mathematische Denkaktivitäten mit Hilfe bestimmter Fertigkeiten und Werkzeuge durchzuführen.

So kann z.B. jemand *diagrammatisch* in der A*rithmetik* durch *Addieren beweisen*, dass die Summe zweier ungerader Zahlen gerade ist: , wie die Pythagoräer dies taten.

Für eine ausführlichere Darstellung vgl. Kaenders & Kvasz (2010).

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 14(3), 24-35.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea, *Educational Studies in Mathematics*, 3, 413-435.

Freudenthal, H. (1991). *Revisting Mathematics Education, China Lectures*. Doordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gattegno, C. (1987). The Science of Education Part 1: Theoretical Considerations. *Educational Solutions*, New York, Restricted Printing.

Hewitt, D. (2001). Arbitary and Necessary: Part 3 Educating Awareness. *For the Learning of Mathematics*, 21 (2).

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2010). Mathematisches Bewusstsein. Eingereicht in: Lengnink, K. & Nickel, G. & Wille R. (Hrsg.) *Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven*, Siegen, 2010.

Kaenders, R. (2009). Von Wiskunde und Windmühlen – über den Mathematikunterricht in den Niederlanden. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM Verlag.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change, Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Birkhäuser Verlag.

Polya, G. (1954). *Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. 1) und *Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 2). Princeton/New Jersey: Princeton University Press.

Sowder, J. & Schapelle B.P. (Hrsg.) (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: report of a conference*. Center for Research in Mathematics and Science Education, College of Sciences, San Diego State University.

Gunta LACE, Riga

Lehrerfragen im Unterricht von Problemlösen

Die internationale Diskussion darüber, wie das Lernen von Mathematik verbessert werden kann, hat verstärkt das Augenmerk auf die Problemlöse-Kompetenz der Lernenden gerichtet. Es kann erst dann von einem Problem und demzufolge auch von Problemlösen gesprochen werden, wenn eine Aufgabe einen Adressaten mit entsprechender Wahrnehmung hat, wenn die Aufgabe also in eine konkrete, subjektiv als schwierig empfundene oder zumindest aus Sicht der eigenen mathematischen Vorerfahrungen ungewohnte Lernsituation gebracht wird (Bruder).

Problemlöse-Kompetenz kann man sich nur durch selbständiges Problemlösen aneignen. Trotzdem ist es wichtig, dass der Schüler mit seinem Problem nicht alleine gelassen wird, das heißt, der Lehrer muss bereit sein dem Schüler zu helfen. Eine der Lehreraufgaben besteht darin, die Schüler mit heuristischen Strategien bekannt zu machen.

Die Lehrer sind überzeugt, dass das Erlernen der heuristischen Strategien bei Schüler ebenso verläuft, wie das Erlernen konkreter mathematischer Kenntnisse – zuerst führt der Lehrer ein Beispiel vor, dann üben die Schüler mit Hilfe des Lehrers, danach üben sie selbständig und dann können sie Problemlöse-Kompetenz kreativ einsetzen. Lehrer geben zu, dass sie Schwierigkeiten bei der Entwicklung von Problemlöse-Kompetenz der Schüler haben. In dieser kleinen Forschung ist das Augenmerk auf ein vom Lehrer vorgeführtes Model gerichtet. In der qualitativen Forschung werden die Lehrermeinung nach wesentlichen Fragen analysiert, um den Schülern das Lösen von Problemaufgaben zu unterrichten.

Es wurden drei unterschiedliche Problemaufgaben analysiert: eine klassische Geometrieaufgabe, ein Problem aus dem realen Leben, das man leicht in eine klassische Geometrieaufgabe reduzieren kann und ein offenes Modellierungsproblem.

Aufgabe 1. *Eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks ist 3 cm länger als die andere. Die Dreiecksfläche sind 14 cm^2. Berechne, wie lang sind die Ränder des Dreiecks. Finde heraus, zwischen welchen hintereinander folgenden ganzen Zahlen liegt die Hypotenusenlänge.*

Aufgabe 2. *In eine Kiste werden Zylinderförmige Schachteln gelegt, deren Höhe 7 cm und Durchmesser 8 cm ist. Die Kiste ist ebenso hoch, wie die Schachtel. Die Kiste hat eine rechteckige Parallelepipede Form. Die Kiste ist 0,4 m breit und ihre Länge ist zweimal länger als Breite.*

Wie viele Schachteln passen in die Kiste, wenn man sie nebeneinander in eine Reihe legt?

Berechne das Gesamtvolumen der Schachteln in der Kiste!

Aufgabe3. *In diesem Jahr findet in Riga wieder das Sing- und Tanzfest der Schüler statt. Da nehmen mehr als 30 Tausend Sänger und Tänzer teil. Eine der gesehnten Festveranstaltungen ist der Festzug der Teilnehmer. Der Festzug beginnt am Freiheitsdenkmal und endet sich am Stadttheater. Wie viele Menschen können diesen Festzug live sehen?*

In der Forschung nahmen 32 Mittelstufenmathematiklehrer teil. Zuerst haben sie 20 Minuten lang die Aufgaben kennengelernt und gelöst. Obwohl es angenommen wurde, dass diese Aufgaben für die Lehrer keine Problemaufgaben sind, muss man trotzdem vermerken, dass viele Lehrer beim Lösen der Aufgabe aus dem realen Leben wesentliche Fehler gemacht haben. Danach hatten Lehrer die Aufgabe – die Problemlöseschritte, die man zusammen mit Schülern bei der Lösung jeder Aufgabe durchführen muss, zu planen. Welche sind die wichtigsten Fragen, die man beantworten muss? Dabei muss man beachten, dass für die Schüler die konkreten Aufgaben nur ein Mittel zum Erlernen der heuristischen Strategien ist.

Auf Grund der Lehrerfragen wurden ihre Vorstellungen von geplanten Schritten und Strategien beim Unterrichten der Problemaufgaben analysiert.

Es gibt folgende Lösungsphasen, auf die es beim Lösen mathematischer Probleme seines Erachtens entscheidend ankommt: Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Planes, Ausführung des Planes und Rückschau auf die Lösung (Polya). In den analysierten Transkriptionen werden zunächst die Textpassagen (Fragen, aber auch Teilsätze bis hin zu einzelnen Worten) identifiziert, denen eine Lösungsphase zugewiesen werden soll. Danach werden diejenigen Teile, die einer Lösungsphase zugeordnet werden, in entsprechende Farbe markiert. Besonders wurden die Fragen markiert, die eine wesentliche Abweichung von logischem Lösungsgang vorsehen, zum Beispiel, verschiedene Lösungsmethoden der quadratischen Gleichung gründlich zu wiederholen. Diese Darstellung gibt es bei qualitativen Analysen eine optische Unterstützung, gerade auch bei Phasenwechseln.

Aufgrund vieler Unterrichtsbeobachtungen beim Problemlösen und einiger grundsätzlicher Anregungen sei folgende Aufstellung von Hilfen vorgeschlagen: die Motivationshilfen, die Rückmeldungshilfen, allgemein – strategische Hilfen, inhaltsorientierte strategische Hilfen und inhaltliche Hilfen (Zech).

Die Motivationshilfen (Die Aufgabe ist nicht schwer! Du wirst die Aufgabe schon schaffen!) und die Rückmeldungshilfen (Du bist auf dem richtigen Wege! Da musst du noch mal nachrechnen!) wurden nicht in Betracht gezogen, da die Lehrer sie ohne „Anwesenheit der Schüler“ nicht planen können.

Die geplanten Lehrerfragen wurden in drei Kategorien untergeordnet: allgemein – strategische Hilfen (AS), inhaltsorientierte strategische Hilfen (IS) und inhaltliche Hilfen (II). Von inhaltlichen Hilfen wurden besonders die Fragen gesondert, die eine Abweichung vom logischen Lösungsgang vorsehen, um einige mathematischen Begriffe oder Algorithmen (IE) gründlich zu wiederholen.

Um festzustellen, welcher Kategorie jede Lehrerfrage zuordnen kann, wurde auch die Zeit der Frage in Betracht gezogen. Zum Beispiel, wenn man die Frage “Welche sind die ganze Zahlen?” in der Anfangsphase beim Kennenlernen der Aufgabe gestellt worden wäre, dann würde sie grün markiert und der Kategorie Verstehen der Aufgabe zugeordnet. Aber, wenn man diese Frage nur in der Lösungsphase vorgesehen worden wäre, dann wurde sie als eine Abweichung geschätzt.

Beim Planen der Fragen für die 1. Aufgabe, halten die Lehrer am wichtigsten die inhaltlichen Fragen und die Ausführung des Planes. 24 Fragen oder 8 % der vorgesehenen Fragen wurden als inhaltliche Abweichungen geschätzt.

Man kann beobachten, dass es die größte Bedeutung inhaltliche Fragen haben, und nur 17% aller Fragen kann man als Allgemein-strategische Hilfen einschätzen, obwohl die Lehrer die Aufgabe bekommen haben: „Welche sind die wichtigsten Fragen, die man beantworten muss?“ Dabei musste man beachten, dass für die Schüler die konkreten Aufgaben nur ein Mittel zum Erlernen der heuristischen Strategien ist.

Wenn man vergleicht, welche Bedeutung welche Lösungsphasen für Lehrer haben, dann sieht man, dass am wichtigsten scheint die Ausführung des Planes. Beim Lösen der ersten Aufgabe, aber nicht bei der zweiten und dritten, haben die Lehrer auch Rückschau auf die Lösung vorgesehen, denn eine der Wurzeln der quadratischen Gleichung kann man nicht beim Lösen der Geometrieaufgabe einsetzen.

Beim Planen der Fragen für die 2. Aufgabe, halten die Lehrer am wichtigsten ebenso die inhaltlichen Fragen und die Ausführung des Planes. Es wurde fast nicht angeboten die Lösung zu überprüfen, und auch gab es keine Frage zur Reflexion.

Es wurde auch die Modellierungsaufgabe über die Zuschauerzahl des Festzugs analysiert. Sechs von den Forschungsteilnehmern haben diese Aufgabe gar nicht gelöst, sie haben aber ihre Einstellung entweder nicht begründet, oder sie haben vermerkt, dass die Schüler diese Aufgabe nicht lösen können, weil es keine Größen gegeben worden sind. Die Lehrer, die die Aufgabe gelöst haben, finden noch immer die inhaltlichen Fragen und Ausführung des Planes am wichtigsten.

Im Vergleich zu den ersten zwei Aufgaben, wurde bei der Lösung dieser Aufgabe die größte Aufmerksamkeit dem Planen gewidmet: Allgemein - strategische Hilfen und Inhaltsorientierte strategische Hilfen.

Wenn man alle Aufgaben vergleicht, kann man beobachten, dass es nur 15 % aller Lehrerfragen als Allgemein - strategische Hilfen und 22% als Inhaltsorientierte strategische Hilfen klassifizieren kann. Das zeugt davon, dass die Lehrer noch immer die Rolle der Denk- und Lösestrategien im Problemlöseprozess nicht begreifen, oder sie meinen, dass das Erlernen dieser Strategien unbewusst, oder eingeboren ist. Das kann man auch aus den Lehrerinterwievs über ihre Meinung von Mathematiklernzielen in der Mittelstufe ableiten.

Wenn man die Einteilung nach Lösungsphasen sieht, es scheint alarmierend, dass es nur 9 % aller Lehrerfragen sich auf die Rückschau auf die Lösung beziehen.

Diese pessimistischen Ergebnisse kann man damit erklären, dass der Großteil der lettischen Mathelehrer, beim Studium der Mathematikdidaktik und Methodik in der Hochschule haben nicht gelernt, warum muss man und wie kann man die Problemlöse-Kompetenz der Schüler entwickeln. Im Vergleich zu Deutschland, wo es zurzeit diese Frage schon gründlich untersucht worden ist, hat man in Lettland nur in den letzten 10 Jahren die Entwicklung der Problemlösefertigkeit im Niveau der Staatspolitik für wichtig gehalten, die Lehrer halten es für ihre persönliche Aufgabe.

Literatur

Bruder, R., Büchter,A., Leuders,T. (2008). Mathematikunterricht entwickeln: Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten (S. 18-47). Berlin: Cornelsen Scriptor.

Polya, G., (1967^2). Schule des Denkens (Umschlagseite). Bern: Franzke Verlag.

Zech, F. (2002^{10}). Grundkurs Mathematikdidaktik. Theoretische und praktische Anleitungen für das Lehren und Lernen von Mathematik (S. 307 - 367). Weinheim und Basel: Beltz Verlag.

Claudia LACK, Gießen

Frühmathematische Entwicklung

Schon lange vor Fröbels Einrichtung des ersten ‚Kinder-Gartens' (1840) gab es in Deutschland die nebenfamiliäre Kinderbetreuung. Es ist jedoch Fröbel zuzuschreiben, dass zu dem Auftrag der Betreuung und Pflege von Kindern auch pädagogische Aufgaben in den Kindergarten kamen (vgl. Reyer 2006). So entwickelten sich als schwerpunktmäßige Aufgabenbereiche des Kindergartens die Betreuung und Erziehung von Kindern. Erst in den 70er Jahren des 20. Jahrhunderts kam in der damaligen BRD die Diskussion um einen Bildungsauftrag des Kindergartens auf, was in den letzten Jahren dann in den Bundesländern in Form von Bildungsplänen (die Begriffswahl variiert) Niederschlag fand. Es ist jedoch noch immer nicht abschließend geklärt, wie der Bildungsauftrag umgesetzt werden kann und soll.

Aus der Grundschulperspektive sollen Kinder im Kindergarten auf die Inhalte der Schulmathematik des ersten Schuljahres vorbereitet werden. Dieser Ansatz, der darauf basiert, aus den schulischen Inhalten sogenannte Vorläuferfähigkeiten abzuleiten, begründet sich in der Idee, dass Kinder am erfolgreichsten in der Grundschule lernen können, wenn sie schon in die Hauptthemen der Mathematik der ersten Klasse eingeführt worden sind. Es ist demnach Aufgabe der Erzieherinnen, die Kinder notfalls mit gezielten Kursen an die genannten Inhalte heranzuführen und die damit verbundenen Kompetenzen der Kinder durch Tests festzustellen. Eine derart auf Performanz ausgerichtete Annäherung an die frühmathematische Entwicklung junger Kinder birgt zwei grundlegende Gefahren: Erstens vertritt die hier skizzierte Perspektive einen Begriff von frühmathematischer Entwicklung, der relativ isoliert ist vom biologischen, pädagogischen und entwicklungspsychologischen Denken. Die allgemeine Entwicklung des Kindes – des einzelnen Kindes – bleibt somit außen vor. Zweitens kann diese Annäherung zu einer Forschungsmethode führen, die auf einem grundschulähnlichen testbasierten „Feststellen-was-Kinder-können" aufbaut und dann die Entwicklung spezieller Förder- oder Lernprogramme und deren Evaluation anstrebt. Es bleibt dabei außer Acht, dass die Fähigkeiten junger Kinder in der Regel nicht anhand von Tests erhoben werden können. Kinder leben, handeln, denken in lebensrelevanten Zusammenhängen. Dort können sie kompetent agieren. Tests hingegen – in ihrem klassischen Sinne – sind ausgerichtet auf Tätigkeiten und Vorgänge, die den Kindern eigentlich fremd sind.

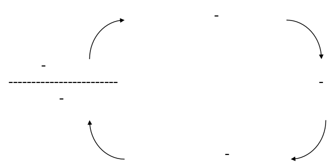
Das hier skizzierte Forschungsvorhaben strebt eine Alternative zur aufgeführten Annäherung, verbunden mit einer alternativen Forschungsmethode, an. Es ist das Ziel, der kindlichen Entwicklung gerechter zu werden. Kindergartenkinder bestimmen größtenteils selbst ihre Aktivitäten, entscheiden eigenständig, ob sie mit anderen Kindern oder mit der Erzieherin interagieren. Im Rahmen ihrer Tätigkeiten tauchen Fragen und Probleme auf: „Wir bauen einen hohen Turm. Wie hoch können wir wohl bauen?“ „Genügen die Bausteine?“ „Wie könnten wir eine Rampe zum Turm bauen?“ Sicherlich können sie nicht im Kontext alle Fragen abschließend beantworten und dennoch machen sie sich gerne Gedanken darüber und entwickeln eigene Lösungsideen. Somit konstruieren Kinder ihre eigene Mathematik, mit den für sie relevanten Fragestellungen und den ihnen möglichen Antworten. Unter dieser Perspektive wird Mathematik im Sinne von Besunden (Besuden 1975) verstanden als Prozess vom noch ungeordneten, experimentierenden Handeln zum systematischen Vorgehen. Eine vergleichbare Definition gibt Klep, indem er formuliert: „Eine alltägliche Tätigkeit ist umso mathematischer, je klarer, formaler und exakter begleitende Erklärungen sind.“ (Klep 2006, S. 213). Diese Aktivitäten führen zu (persönlichen und sozialen) Erfahrungsbereichen (Bauersfeld 1983), die sich durch mathematisches Reflektieren zu größeren Konzepten vereinigen können. Dieser Ansatz begründet sich auf einer aktivitätsorientierten Sicht auf Mathematik. Es wird davon ausgegangen, dass Kinder mathematische Operationen (Zählen, Schätzen, Messen etc.) im Kontext von Alltagsaktivitäten entwickeln (vgl. van Oers 2004). Im Sinne einer umfassenden mathematischen Bildung können individuelle Ergänzungen durch gezielte Übungen (z. B. zum Zählen und zum räumlichen Vorstellungsvermögen) jedoch erforderlich sein. Steinweg bezeichnet dies als ‚angereicherten Alltag‘ (2008). Unter Annahme dieser Voraussetzungen brauchen Kinder keine mathematischen Grundkurse. Sie brauchen vielmehr eine Erzieherin, die die Grundfragen der Kinder sieht und sie einlädt, Antworte zu suchen und kritisch zu diskutieren. Unter diesem Blickwinkel ist mathematische Bildung ein Mosaikstein eines Gesamtkonzeptes kindlicher Bildung und Erziehung. Wittmann beschreibt dies folgendermaßen: „Für die Verankerung der mathematischen Bildung in den Kindergärten sind konkrete Konzepte gefragt, die sich innerhalb eines Gesamtkonzeptes von vorschulischer Erziehung mit vertretbarem Aufwand realisieren lassen. Die Schlüsselrolle für die Umsetzung kommt den Erzieherinnen zu. Es erscheint relativ einfach, Erzieherinnen für Konzepte zu gewinnen, bei denen Zahlen und Formen ‚kindgemäß verpackt‘ sind. Fachlich fundierte Konzepte hingegen sind gewöhnungsbedürftig. Gleichwohl besteht eine reelle Chance dafür, dass sie an Boden gewinnen. Für sie spricht nicht nur ihre viel größere

Reichweite über die vorschulische Erziehung hinaus, sondern auch ihre kulturelle Reichhaltigkeit und Authentizität.“ (Wittmann 2006).

Frage ist, wie man eine multiperspektivische Thematisierung dieser Mathematik für und von jungen Kindern strukturieren und beforschen kann. Es geht nicht nur um die Mathematik der Kinder, auch um Erzieherinnen, ihre Kompetenzen, ihre Weiterbildung, um die Rahmenbedingungen, um die Eltern, um das Curriculum, um Ziele, usw. Letztendlich muss man das ganze System im Blick behalten und entwickeln und dementsprechend auch forscherisch systementwickelnd tätig sein. „Im Bemühen, der Komplexität sozialen Lebens gerecht zu werden, ist das empirische Erfassen von ganzen Systemen eine wichtige, wenn auch besonders aufwendige Aufgabe“ (Bortz/Döring 2006, S. 385). Unter dem Begriff des Systems sind Beziehungen zwischen zwei und mehreren Parteien zu verstehen. Um Systeme zu entwickeln, müssen diese zunächst ganzheitlich beschrieben und analysiert werden. Auf diese Weise können besondere Eigenheiten (wie Normen, Rahmenbedingungen, Gepflogenheiten etc.) aber auch Systemstörungen aufgezeigt werden. Die Systemanalyse dient als Grundlage zur Theoriebildung. Auf dieser Basis wird ein idealtypisches Lösungsmodell erarbeitet, welches dann implementiert und reflektiert wird. Eine vergleichbare Vorgehensweise, die es ermöglicht, in einem multiperspektivischen Problemspace zu arbeiten, beschreibt Klep (vgl. Klep 1998). Zur Methode:

- Problemdefinition und Erstellung eines konzeptuellen Modells
- Spezifizierung: Ein empirisches Modell des Problems und eine Verdeutlichung erwünschter Lösungen
- Problemlösung und Erstellung eines Lösungsmodells
- Implementierung der Lösung
- Feststellen der Veränderung des Problems und geg. erneutes Einsteigen in den Zyklus

Im Schaubild stellt sich dies wie folgt dar:



Es wird von einem reflektiven Lernprozess bei dem Entwerfer und den weiteren beteiligten Personen (Erzieherinnen) ausgegangen. So entstehen immer besser verstandene und allgemein akzeptiertere Modelle (von Lösungen) für die Problemsituation. Das Forschungsprojekt befindet sich zur Zeit in der Erkundungsphase. Am Beispiel eines Kindergartens wird momentan erarbeitet, ob und inwieweit die getätigten Annahmen und Vorgehensweisen angemessen und umsetzbar sind. Gemeinsam mit einem Entwicklungsteam (bestehend aus Erzieherinnen und Experten) wird im nächsten Schritt in den beschriebenen Prozess eingestiegen. Generell ist eine möglichst breite Forschung in unterschiedlichsten Kindergärten angestrebt.

Literatur

Bauersfeld, H. (1983): Subjektive Erfahrungsbereiche als Grundlage einer Interaktionstheorie des Mathematiklernens und -lehrens. In: Bauersfeld, H. u.a. (Hrsg.): *Lernen und Lehren von Mathematik. Untersuchungen zum Mathematikunterricht,* Band 6. Köln: Aulis Verlag Deubner. S. 1-56.

Besuden, H.: (1972): *Handreichungen für den Mathematikunterricht in der Grundschule* (Mitarb., 5. Kap.): Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium.

Bortz, J.; Döring, N. (2002): *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler.* Heidelberg: Springer.

Klep, J. (2006): Persönlichkeitsentwicklung und mathematische Aktivität: Förderung mathematischer Kompetenzen beim Übergang vom Kindergarten zur Grundschule in den Niderlanden. In: Peter-Koop, A.; Grüßing, M. (Hrsg.): *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule: Beobachten – Fördern – Dokumentieren.* Offenburg: Mildenberger. S. 200-216.

Reyer, J. (2006): Geschichte frühpädagogischer Institutionen. In: Fried, L.; Roux, S.: *Pädagogik der frühen Kindheit.* Weinheim, Basel: Beltz. S. 268-280.

Steinweg, A.-S. (2008): Zwischen Kindergarten und Grundschule – Mathematische Basiskompetenzen im Übergang. In: Hellmich, F.; Köster, H. (Hrsg.): *Vorschulische Bildungsprozesse in Mathematik und Naturwissenschaften.* Bad Heilbrunn: Klinkhardt. S. 143-159.

van Oers, B. (2004): Mathematisches Denken bei Vorschulkindern. In: Fthenakis, W.; Oberhuemer, P. (Hrsg.): *Frühpädagogik international. Bildungsqualität im Blickpunkt.* Wiesbaden: Verlag für Sozialwissenschaften/GWV Fachverlage. S. 313-329.

Wittmann, E. (2006): Mathematische Bildung. In: Fried, L.; Roux, S.: *Pädagogik der frühen Kindheit.* Weinheim, Basel: Beltz. S. 205-211.

Claudia LACK, Gießen

Junge Mathe-Asse angemessen fördern

Der vorliegende Beitrag basiert auf einem Praxisprojekt, welches gemeinsam mit einer hessischen Grundschule durchgeführt wurde. Im Rahmen dieses Projektes ging es um die Entwicklung, Durchführung und (Zwischen)Evaluation von Arbeitsgemeinschaften (AGs) für mathematisch interessierte Kinder im Alter von 5 bis 10 Jahren. Die betreffende Grundschule ist eine Eingangsstufenschule mit jahrgangsgemischtem Anfangsunterricht in den Klassen 0 und 1. Seit Beginn des Schuljahres 2009/2010 verfügt die Schule über das Gütesiegel ‚hochbegabungsfördernde Schule' des Landes Hessen. Als ein Baustein des Konzeptes wurden die bereits genannten AGs für Kinder aller Jahrgangsstufen eingeführt.

1. Theoretischer Einbettung

Junge Mathe-Asse

Als *Mathe-Asse* werden in dem Praxisprojekt die Kinder verstanden, die sich besonders für Mathematik interessieren. Mit den Kindern wurden weder Intelligenztests noch Tests zur Identifikation mathematischer Begabung (vgl. Käpnick 2001) durchgeführt. Dies war weder für das Projekt noch für die Tätigkeit im Rahmen des Gütesiegels ‚hochbegabungsfördernde Schule' notwendig, da angestrebt war, durch die individuelle Förderung aller Kinder auch mathematisch begabte Kinder angemessen zur fördern.
Junge Mathe-Asse sind demzufolge mathematisch interessierte Kinder im Schulanfangsalter (bis Klasse 2). Sie unterscheiden sich von älteren Kindern vorrangig dadurch, dass ihre mathematischen Fähigkeiten verstärkt in Form von Keimen auftreten, sie stärker die verschiedenen Darstellungsebenen nutzen und ihr emotionales Wohlbefinden einen größeren Einfluss auf ihre Leistungen hat (vgl. Lack 2009).

Fördermöglichkeiten

Zur Förderung interessierter und begabter Kinder existieren verschiedene Ansätze, die sich zu den drei folgenden Förderformen (vgl. Heinbokel 2001; HKM 1999) zusammenfassen lassen:
Unter *Akzeleration* sind Maßnahmen zu verstehen, die es einem Kind ermöglichen, den vorgesehenen Lehrplan oder Teile davon früher zu beginnen oder zu beenden (vgl. Ey-Ehlers 2001). Im Bereich der Grundschule kann dies durch eine vorzeitige Einschulung oder durch das Überspringen einer Klasse umgesetzt werden. Akzelerative Maßnahmen eignen sich für

Kinder, von denen man annimmt, dass sie die Situation aufgrund ihrer gesamten gefestigten Persönlichkeit (sozial-emotional, kognitiv, motorisch etc.) und aufgrund eines positiv unterstützenden Umfeldes gut bewältigen können.
Unter *Enrichment* sind Maßnahmen zu verstehen, die allen Kindern einer Klasse zur Verfügung stehen und auf einem Verbreitern, Vertiefen und Anreichern der aktuellen Lerninhalte basieren. Enrichment-Maßnahmen folgen dem Prinzip der Binnendifferenzierung und sollten grundlegendes Prinzip jeglichen (Mathematik)Unterrichts sein.
Unter *Grouping* versteht man das Bilden von möglichst begabungshomogenen Gruppen. Dies ist als eine Ergänzung des Regelunterrichts zu verstehen und findet meist in Form von Arbeitsgemeinschaften zum Beispiel an Universitäten oder an den Schulen selbst statt.

Die in dem Praxisbeispiel angewendete Förderform ist als eine Grouping-Maßnahme zu verstehen, die an der Schule während des Schultages und in der Regel von Lehrpersonal durchgeführt wird.

2. Erfahrungsbericht

Zur besonderen Förderung mathematisch interessierter Kinder wurden im 1. Halbjahr des Schuljahres 2009/2010 zwei AGs für Kinder im 0., 1. und 2. Schuljahr (je 12 Kinder) und eine AG für Kinder im 3. und 4. Schuljahr (15 Kinder) angeboten. Die Teilnahme war freiwillig. Zur Auswahl der Kinder besuchten die Leiterinnen der zukünftigen AGs im Laufe der ersten beiden Schulwochen alle Klassen. Im Rahmen dieses Besuchs wurde den Kindern ein ihnen unbekanntes operatives Übungsformat der Zahlenmauern vorgestellt. Daraufhin bat man sie zu überlegen, ob sie an der intensiven Arbeit mit ähnlichen Aufgaben in Form einer halbjährlichen AG interessiert seien. In Absprache mit den Klassenlehrerinnen und den Eltern wurden dann aus der Vielzahl der interessierten Kinder die drei genannten Gruppen gebildet. Die Erfahrungen in den Gruppen waren vielschichtig und teilweise divergent.

Zunächst zur AG für Kinder im 3. und 4. Schuljahr
Die Kinder gewöhnten sich schnell an die Arbeit in der AG. Sowohl das Zusammensein mit Kindern anderer Klassen als auch die intensive Auseinandersetzung mit mathematischen Problemstellungen bereitete ihnen im allgemeinen Freude, forderte sie heraus und führte zu einer produktiven Tätigkeit im Rahmen der AG. Die Kinder äußerten sich sehr positiv über

die hier gebotene Möglichkeit, mit gleichgesinnten Kindern arbeiten zu können. Kein Kind verließ die AG vorzeitig.

Die AGs für Kinder im 0., 1. und 2. Schuljahr
Den jungen Mathe-Assen fiel es deutlich schwerer, sich in die AGs einzugewöhnen. Bei einem Großteil der teilnehmenden Kinder, vornehmlich bei den ganz jungen Kindern, konnte erst nach den Herbstferien festgestellt werden, dass sie sich an den fremden Raum, die fremde Lehrerin und die meist fremden Gruppenkameraden gewöhnt haben. Erst dann war es möglich, mit der Gruppe produktiv an herausfordernden Aufgaben zu arbeiten. In Bezug auf die Aufgaben zeigte sich, dass die Kinder Zeit brauchten, um sich an diese Form von Aufgaben zu gewöhnen. Drei Kindern gelang es gar nicht, sich in die AG-Arbeit einzufinden. Sie schieden nach einigen Wochen freiwillig aus und es rückten andere Kinder nach.

3. Empfehlungen zur Förderung junger Mathe-Asse

Aus den hier gewonnenen und leider nur verkürzt aufgezeigten Praxiserfahrungen wird abschließend zur Förderung junger Mathe-Asse Folgendes vorgeschlagen:

Eine besondere Förderung mathematisch interessierter Kinder ist generell von Schulbeginn an notwendig, um das Interesse zu erhalten und auszubauen.

Die Kinder profitieren von einer fundierten (didaktischen, methodischen und pädagogischen) inneren Differenzierung (Enrichment).

Für Schulanfänger im ersten Schulhalbjahr sollte auf zusätzliche Maßnahmen (Grouping) verzichtet werden, da diese Kinder noch zu stark mit der eigentlichen Eingewöhnung in den Schulalltag beschäftigt sind.

Ab dem 2. Halbjahr bieten sich freiwillige Mathe-AGs an. Diese sollten von bekannten Lehrpersonen in gewohnter Umgebung betreut werden. Die AGs sollten flexibel und durchlässig sein und immer auf die Bedürfnisse der Gruppe ausgerichtet sein.

Der Einsatz von Aufgaben, die zum eigenständigen Entdecken, zur Interaktion und zum Austausch von Vorgehensweisen oder Lösungswegen anregen, wird empfohlen. So werden von Beginn an wichtige Grundsteine mathematischen Handelns und Lernens gelegt (vgl. Müller/Wittmann 1992).

Die Aufgaben sollten so angelegt sein, dass sie die Merkmale mathematischer Begabung herausfordern und fördern (vgl. Käpnick 1998).

Die Aufgaben sollten bekannte Kontexte oder Materialien aufgreifen und auf verschiedenen Repräsentationsebenen bearbeitbar sein.

Die Untergliederung der Aufgaben in aufeinander aufbauende Teilaufgaben ist zu empfehlen (vgl. Lack 2009; Lack/Thöne 2008 S. 11). So können ausgehend von einer einleitenden Problemstellung Schwierigkeitssteigerungen oder Variationen des Problems aufgegriffen werden. Die Kinder sollten dann die Möglichkeit haben, eigene Anschlussprobleme zu bearbeiten.

Des Weiteren sollte beachtet werden, dass jedwede Fördertätigkeit immer als ein Zusammenspiel zwischen Kindern, Aufgaben (Materialien), Lehrperson und den spezifischen Umständen ist. Somit können auch die angeführten Empfehlungen nur als Säulen eines entwicklungs- und korrekturfähiges Projektes verstanden werden (vgl. Bauersfeld 2006), welches in jeder Situation neu überdacht und angepasst werden muss.

Literatur

Bardy, P. (2007): *Mathematisch begabte Grundschulkinder – Diagnostik und Förderung.* München: Elsevier Spektrum Akademischer Verlag.

Bauersfeld, H.; Kießwetter, K. (Hrsg.) (2006): *Wie fördert man mathematisch besonders befähigte Kinder? – Ein Buch aus der Praxis für die Praxis.* Offenburg: Mildenberger.

Ey-Ehlers, C. (2001): *Hochbegabte Kinder in der Grundschule – eine Herausforderung für die pädagogische Arbeit unter besonderer Berücksichtigung von Identifikation und Förderung.* Stuttgart: ibidem.

Hahn, H.; Möller, R.; Carle, U. (Hrsg.) (2007): *Begabungsförderung in der Grundschule*. Baltmannsweiler: Schneider.

Heinbokel, A. (2001): *Hochbegabte: Erkennen, Probleme, Lösungswege.* Münster: LIT.

Hessisches Kultusministerium (Hrsg.) (1999): *Hilfe, mein Kind ist hochbegabt. Förderung von besonderen Begabungen in Hessen.* Wiesbaden: Hessisches Landesinstitut für Pädagogik.

Käpnick, F. (1998): *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderprojekte für das Grundschulalter.* Frankfurt am Main: Peter Lang.

Käpnick, F. (2001): *Mathe für kleine Asse. Empfehlungen zur Förderung mathematisch interessierter und begabter Kinder im 3. und 4. Schuljahr.* Berlin: Volk und Wissen.

Lack, C. (2009): *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr.* Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Lack, C.; Thöne, B. (2008): *Forderheft Denken und Rechnen 1.* Braunschweig: Westermann.

Müller, G.; Wittmann, E. (1992): *Handbuch produktiver Rechenübungen*. Band 2. Düsseldorf: Klett.

Diemut LANGE, Hannover

Studie zur Kooperation von Fünftklässlern beim Problemlösen

1. Kooperation und Problemlösen

In der Dissertationsstudie wird der Fokus auf die Kooperation beim Problemlösen gelegt. Mit dem Begriff *kooperatives Lernen* wird v.a. in der pädagogisch-psychologischen Forschung ein bestimmtes Unterrichtsarrangement im Rahmen von Partner- oder Gruppenarbeit verbunden (Rabenstein & Reh 2007, 25). Der Begriff *Kooperation* kann jedoch auch als „eine Form unterrichtlicher Interaktion“ verstanden werden, „in der SchülerInnen mit Bezug auf eine Aufgabenstellung interagieren“ (Naujok 2000, 12). Dieses Begriffsverständnis soll dem Dissertationsprojekt zugrunde gelegt werden: Durch die Gruppierung der Kinder zu Paaren ist die Sozialform, in der gearbeitet werden kann, festgelegt – die Form der aufgabenbezogenen Interaktion kann aber von den Paaren frei gewählt werden. Somit umfasst der Kooperationsbegriff in diesem Verständnis nicht nur ideale Interaktionsformen wie ein gemeinsames Aufgabenbearbeiten, ein kritisches Auseinandersetzen mit den Vorschlägen und Ideen des Partners oder eine symmetrische Art der Interaktion (Röhr 1995, 75), sondern auch jegliche Form des Helfens und des Nebeneinanderher-Arbeitens[1] (Naujok 2000, 171f.).

Naujok (2000) konnte im Rahmen von Wochenplanunterricht in der Grundschule die Kooperationshandlungen Erklären, Vorsagen, Abgucken, Vergleichen, Zur-Verfügung-Stellen von Arbeitsmaterialien, Erfragen und Metakooperieren interpretativ rekonstruieren. Dabei versteht sie *Kooperationshandlungen* als gemeinsames Interagieren und nicht als „isolierte Aktivitäten einzelner Beteiligter“ (Naujok 2000, 164). Da diese Kooperationshandlungen beim Bearbeiten von Lerninhalten verschiedener Fächer rekonstruiert wurden, ist davon auszugehen, dass diese bei der Analyse mathematischer Problemlöseprozesse von Fünftklässlern zu ergänzen und z.T. noch weiter auszudifferenzieren sind.

In Abgrenzung zu einer Routineaufgabe soll unter einer mathematischen *Problemaufgabe* eine Aufgabe verstanden werden, für deren Bearbeitung der Problemlöser kein schematisches Verfahren zur Verfügung hat, sondern eine Barriere überwinden muss, um den Endzustand des Problems zu erreichen (Dörner 1979, 10). Die Anwendungsmöglichkeit von Routineschema-

1 Naujok grenzt den Kooperationstyp *Nebeneinanderher-Arbeiten* von einem Nebeneinanderher-Arbeiten ohne interaktiven Austausch ab – erstes setzt mindestens einen, „eher punktuell zu nennenden Kurzaustausch“ voraus, zweites zählt Naujok nicht mehr zur Kooperation (Naujok 2000, 174f.).

ta oder heuristischen Strategien zum Lösen der Aufgabe könnte sich in der Art der Paarkooperation widerspiegeln (Johnson & Johnson 1992, 190).

2. Forschungsfragen

Hinsichtlich des forschungsleitenden Interesses lassen sich daraus für das Dissertationsprojekt die beiden folgenden Forschungsfragen ableiten:

- Wie kooperieren Fünftklässlerpaare beim Problemlösen?
  - Welche Kooperationshandlungen lassen sich rekonstruieren?
  - Lassen sich bestimmte Abfolgen in den Kooperationshandlungen erkennen? Lässt sich ein Zusammenhang zwischen Abfolgen in den Kooperationshandlungen und Problemlösephasen erkennen?
- Wie unterscheidet sich die Kooperation bei verschiedenen Aufgaben?

3. Design der Studie – Die Mathe AG an der Leibniz Universität

Im Rahmen einer überschulischen Mathe AG für Fünftklässler Hannoveraner Gymnasien[2] (MALU) wurden zwischen November 2008 und März 2010 einmal wöchentlich Paare interessierter und verschieden begabter Fünftklässler beim Bearbeiten von mehr als 21 Problemaufgaben videographiert. Zusätzlich wurden die Hauptgedanken der Kinder sowie Eindrücke der Beobachter in einem Beobachtungsprotokoll festgehalten.

Um der Forschungsfrage nachzugehen, ob und – wenn ja – inwiefern sich die Kooperation bei verschiedenen Problemaufgaben unterscheidet, wurden für die Studie „vielfältige“ Aufgaben ausgewählt, wobei das Stoffgebiet, der Problemlösecharakter und das heuristische Potential der Aufgaben zur Kennzeichnung der „Vielfältigkeit“ herangezogen wurden (Lange 2009). Um das Problemlösespezifische der Kooperation analysieren zu können, bearbeiteten die Kinderpaare neben Problemaufgaben auch Routineaufgaben aus Schulbüchern der fünften Klasse.

4. Auswertungsverfahren

Die Paarbearbeitungsprozesse sollen mit Hilfe der qualitativen strukturierenden Inhaltsanalyse (Mayring 2008) auf Kooperationshandlungen untersucht werden. Da davon auszugehen ist, dass sich einige der von Naujok (2000) rekonstruierten Handlungen auch in den MALU-Bearbeitungs-prozessen wiederfinden lassen (s.o.), wurden diese in ihren jeweiligen Ausprägungen definiert und mit Ankerbeispielen aus MALU versehen – hier am Beispiel der Kooperationshandlung '**Erklären**':

2 zur Auswahl der Kinder s. Gawlick / Lange (2010) in diesem BzMU-Band

Definition des 'Erklärens' nach Naujok (2000, 165f.):

Person A sagt Person B wie die Lösung oder Teile der Lösung zustande kommen. Das *Sagen-Wie* kann auch ein Vermitteln des Lösungsweges sein ohne die Lösung direkt zu nennen. Damit wird das Sagen-Wie von dem Sagen-Was, d.h. vom bloßen Mitteilen einer (Teil-)Lösung abgegrenzt. Beim Erklären *vollzieht* B den von A erklärten Lösungsweg *nach*.

Ausprägungen des 'Erklärens' nach Naujok (2000, 165f.):

a) A erklärt B Teile des Lösungsweges; B vollzieht nach [asymmetrisch]

b) A und B erklären und nachvollziehen wechselseitig innerhalb einer längeren Interaktionseinheit [symmetrisch]

Ankerbeispiel für ein symmetrisches Erklären aus einem MALU-Prozess zu folgender Aufgabe (Fritzlar et al. 2006, 55):

Schüleranzahl

Über die Klasse 5c ist bekannt:

A: Genau 12 Schüler spielen Fußball.	E: Genau 8 Fußballer gehen zum Tanzkurs.
B: Genau 18 Schüler besuchen einen Tanzkurs.	F: Genau 5 Fußballer singen im Chor.
C: Genau 14 Schüler singen im Schulchor.	G: Genau 7 Chorkinder gehen tanzen.
D: Genau 2 Schüler besuchen keine dieser drei Arbeitsgemeinschaften.	H: Genau 2 Kinder nehmen an allen drei Arbeitsgemeinschaften teil.

Findet heraus, wie viele Schüler in der Klasse 5c sind. Begründet eure Lösung!

Vor diesem Transkriptausschnitt haben beide Fünftklässler ihre Ergebnisse miteinander verglichen und sich gegenseitig erklärt. Inhalt dieser Klärungsphase war in erster Linie die Frage, wie mit doppelten AG-Teilnehmern umzugehen ist. Nun revidiert N. ihr ursprüngliches Ergebnis und erklärt H., wie sie auf das neue Ergebnis gekommen ist:

76 N ehm(..) also(.) 12 spielen Fußball *(schreibt dabei ins Heft)*

77 H mhm

78 N ne’ (..) ‚und 18 tanzen’ (.) ‚und 14 singen im Schulchor.

79 H ja

80 N und zwei besuchen ‚ehm hier *(zeigt auf die Aussage H im Aufgabentext)* zwei (...) nehmen an allen teil (.) ‚also (.) kann man (.)

81 H aber die zwei sind schon (.) ehm im Fußball Tanzen und Chor schon mitgezählt

82 N also müsste man (..) die bei zwei Sachen abziehen (..)

83 H nein ‚eigentlich muss man die überhaupt nicht beachten

84 N wieso’

85 H weil die ja schon hier drin mitgerechnet sind weil=

86 N =ja die sind ja überall mitgerechnet

87 H ja (..)

88 N aber sie sind ja nur einmal auf der Welt sozusagen nicht dreimal

Tabelle 1: Definition und Ankerbeispiel zu der Kooperationshandlung 'Erklären'

In dem Ankerbeispiel macht sowohl N. (Z.82) als auch H. (Z.83) einen Vorschlag, *wie* mit den Schülern der Aussage H, die bereits „mitgezählt“ wurden, zu verfahren ist. Dabei wechselt die Rolle zwischen Erklärendem und Nachvollziehendem innerhalb dieser Interaktion. Das *Sagen-Wie* geht ab Z.84 in ein *Sagen-Warum* über, so dass die o.a. Erklärens-Kategorie weiter ausdifferenziert werden müsste.

Aufgrund der unterschiedlichen Lernumgebungen und -inhalte ist denkbar, dass die von Naujok rekonstruierten Kooperationshandlungen bei der Analyse der MALU-Prozesse empiriegeleitet um weitere ergänzt werden müssen (s.o.). Bislang konnten nach Durchsicht weniger MALU-Prozesse zwei weitere Kooperationshandlungen ausgemacht werden – Person A *korrigiert* Person B und B reagiert auf Verbesserungsvorschlag; Person A *informiert* Person B und B reagiert auf diese Information –, bei denen allerdings an weiteren Transkriptstellen zu überprüfen ist, ob es sich hierbei um ein problemlösespezifisches Kooperationsverhalten handelt.

Möglicherweise mehr als in den Naujok-Prozessen finden sich in den MALU-Prozessen Passagen, in denen auf eine Kooperationseröffnung nicht oder nicht sofort eine Reaktion des Partners folgt, so dass eine Unterscheidung in „Zug“ und „Gegenzug“ (vgl. Naujok 2000, 164) sinnvoll erscheint.

Literatur

Dörner, D. (1979). *Problemlösen als Informationsverarbeitung*, 2. Auflage, Stuttgart: Kohlhammer.

Fritzlar, T., Rodeck, K. & Käpnick, F. (2006). *Mathe für kleine Asse*, Berlin: Cornelsen.

Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1992). Positive Inderdependence: Key to Effective Cooperation. In Hertz-Lazarowitz, R. & Miller, N. (Hrsg.): *Interaction in Cooperative Groups. The Theoretical Anatomy of Group Learning* (S. 174-199), Cambridge: Cambridge University Press.

Lange, D. (2009). Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: WTM-Verlag.

Mayring, P. (2008). *Qualitative Inhaltsanalyse*, 10. neue Ausgabe, Weinheim: Beltz.

Naujok, N. (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht.* Weinheim: Beltz.

Rabenstein, K. & Reh, S. (2007). Kooperative und selbständigkeitsfördernde Arbeitsformen im Unterricht. In Rabenstein, K. & Reh, S. (Hrsg.): *Kooperatives und selbständiges Arbeiten von Schülern. Zur Qualitätsentwicklung von Unterricht* (S. 23-38), Wiesbaden: VS.

Röhr, M. (1995). *Kooperatives Lernen im Mathematikunterricht der Primarstufe.* Wiesbaden: DUV.

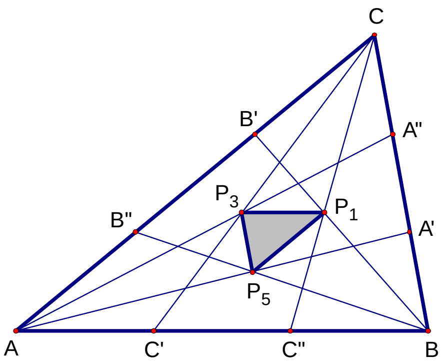
<u>Transkriptionsregeln</u> s. Langfassung
(online auf der IDMP-Homepage [http://www.idmp.uni-hannover.de/] unter Lange)

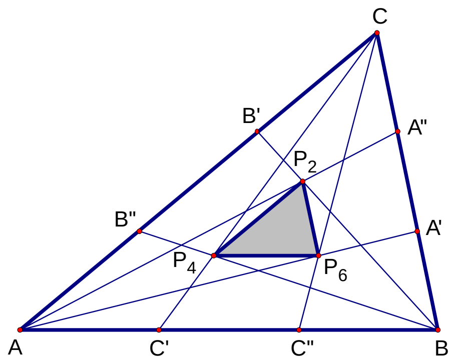
INGMAR LEHMANN, Berlin

Entdeckungen im Innern eines Dreiecks – Schnittfiguren mit überraschenden Invarianten

Dank Dynamischer Geometriesoftware (DGS) und Zugmodus lassen sich in der Schule Vermutungen aufstellen und erhärten. Eine falsche Vermutung wird durch den Zugmodus erledigt. Eine richtige Vermutung wird durch den Zugmodus zwar erhärtet; die Einsicht in die Beweisnotwendigkeit wird dagegen eher erschwert. Die folgenden Sätze habe ich (mit Ausnahme der Sätze 3 und 5) selbst entdeckt. Auch wenn ich später feststellen musste, dass einige davon längst publiziert worden sind, bleibt die schöne Erfahrung, es selbst vermutet (und bewiesen) zu haben.

Satz 1: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entstehen im Innern zwei Dreiecke $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$.

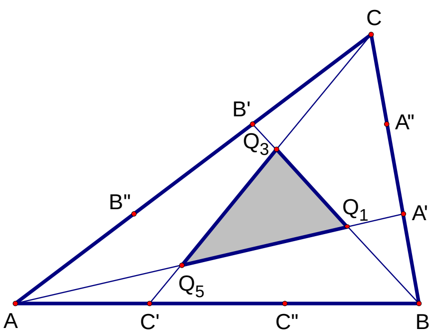


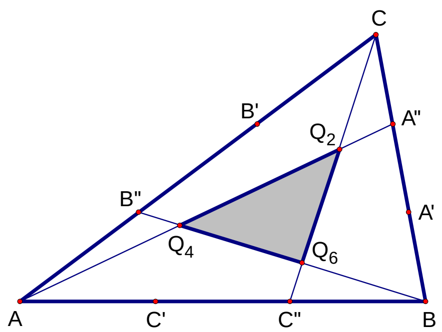


Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt dann
$u_{\Delta ABC} : u_{\Delta P_1P_3P_5} = 5$, $u_{\Delta ABC} : u_{\Delta P_2P_4P_6} = 4$, $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta P_1P_3P_5} = 25$, $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta P_2P_4P_6} = 16$.

Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, sind dies auch die (zueinander ähnlichen) Dreiecke $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$, ohne kongruent zu sein.

Satz 2: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunk-





ten, so entstehen im Innern zwei Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$ und $\Delta Q_2Q_4Q_6$.

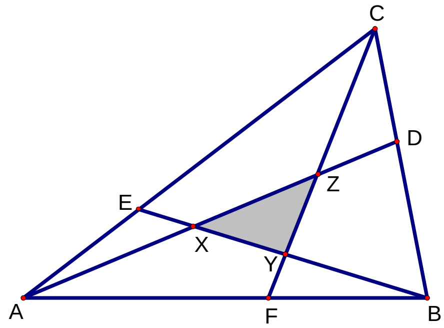
Dann gilt für diese Dreiecke $A_{\Delta ABC} : A_{\Delta Q_1Q_3Q_5} = A_{\Delta ABC} : A_{\Delta Q_2Q_4Q_6} = 7$.

Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, sind dies auch die Dreiecke $\Delta Q_1Q_3Q_5$ und $\Delta Q_2Q_4Q_6$ (und zueinander kongruent).

Satz 3 (*Satz von Routh*): Für die Seiten eines Dreiecks ΔABC, die durch die drei Transversalen AD, BE und CF geteilt werden, seien die Teilverhältnisse $AF : FB = r$, $BD : DC = s$ und $CE : EA = t$.

Verbindet man die entsprechenden Schnittpunkte dieser Transversalen, entsteht im Innern ein Dreieck ΔXYZ und es gilt

$$\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta XYZ}} = \frac{(rs+r+1)(rt+t+1)(st+s+1)}{(rst-1)^2}.$$

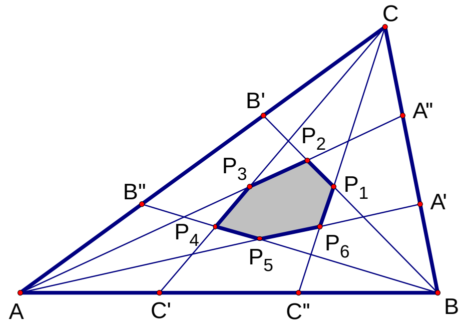


Wie Satz 2 ist auch der *Satz von Ceva* ein Spezialfall von Satz 3.

Satz 4 (*Satz von Walter*): Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt.

Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern ein Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ – kurz: P-Sechseck.

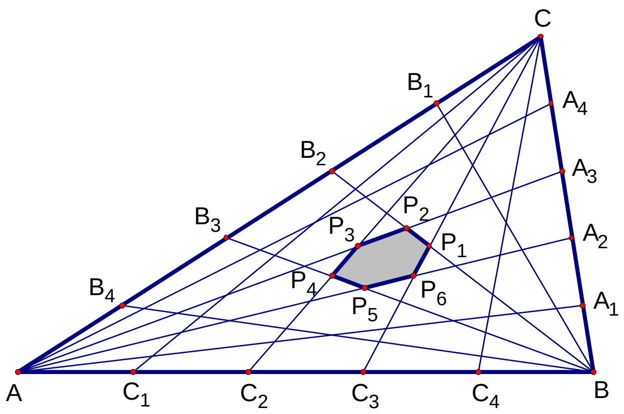
Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{P-\text{Sechseck}}} = 10$.



Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, ist das P-Sechseck zwar gleichseitig, aber nicht gleichwinklig. Benachbarte bzw. gegenüberliegende Winkel ergänzen sich jeweils zu 240°.

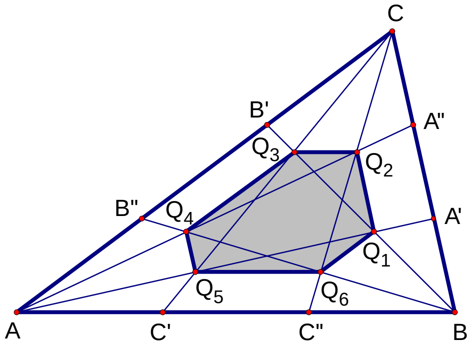
Ryan Morgan, ein Schüler der 10. Jahrgangsstufe in den USA, verallgemeinerte 1994 diesen *Satz von Walter*.

Satz 5 (*Satz von Morgan*):
Werden die Seiten eines Dreiecks ΔABC in n gleiche Teile geteilt, wobei n eine ungerade Zahl sei, und jeder dieser Teilungspunkte mit dem gegenüberliegenden Eckpunkt verbunden, entsteht im Innern ein P-Sechseck $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ (siehe Abb. für $n = 5$).



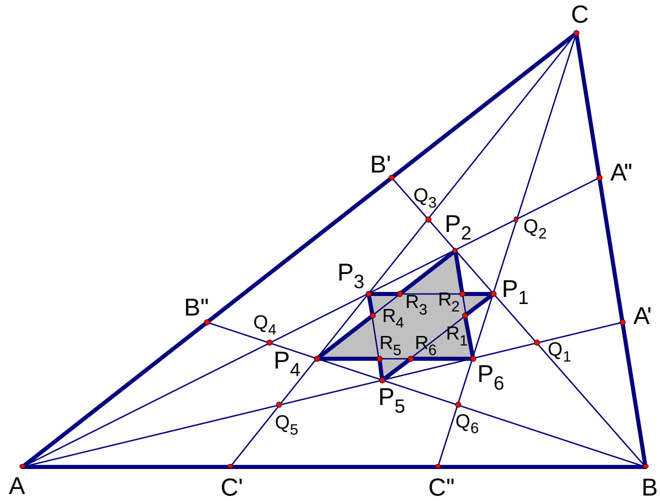
Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{P-\text{Sechseck}}} = \dfrac{(3n+1)(3n-1)}{8}$.

Satz 6: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, entsteht im Innern ein Q-Sechseck $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ mit zueinander parallelen Gegenseiten $Q_2Q_3 \parallel Q_5Q_6 \parallel AB$; analog gelten $Q_1Q_6 \parallel Q_3Q_4 \parallel AC$ und $Q_1Q_2 \parallel Q_4Q_5 \parallel BC$. Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt $\dfrac{u_{\Delta ABC}}{u_{Q-\text{Sechseck}}} = \dfrac{7}{3}$ bzw. $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q-\text{Sechseck}}} = \dfrac{49}{13}$.



Ist das Dreieck ΔABC gleichseitig, ist das Q-Sechseck gleichwinklig.

Satz 7: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten und darüber hinaus die Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 miteinander, entsteht im Innern ein P-Sechsstern $P_1R_2P_2R_3P_3R_4P_4R_5P_5R_6P_6R_1$; dieser P-Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck mit zueinander parallelen Gegenseiten $P_1P_3 \parallel P_4P_6 \parallel AB$, $P_2P_4 \parallel P_1P_5 \parallel AC$ und $P_2P_6 \parallel P_3P_5 \parallel BC$.

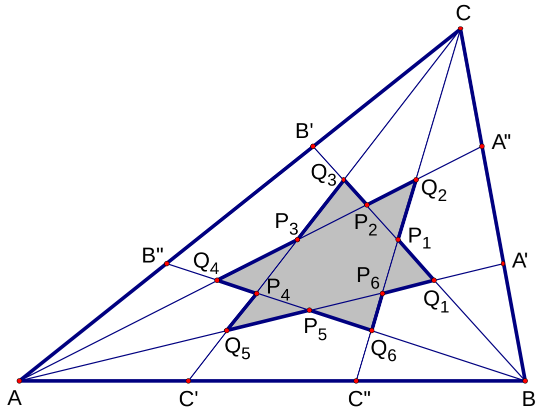


Für das Verhältnis der Umfänge und Flächeninhalte gilt $\dfrac{u_{\Delta ABC}}{u_{P\text{-Sechsstern}}} = \dfrac{10}{3}$ bzw. $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{P\text{-Sechsstern}}} = \dfrac{100}{7}$. Im Fall, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, besteht der P-Sechsstern aus den beiden (nichtkongruenten) gleichseitigen Dreiecken $\Delta P_1P_3P_5$ und $\Delta P_2P_4P_6$.

Satz 8: Die Seiten eines Dreiecks ΔABC seien gedrittelt. Verbindet man die entsprechenden Drittelungspunkte mit den gegenüberliegenden Eckpunkten, so entsteht im Innern ein Q-Sechsstern $Q_1P_1Q_2P_2Q_3P_3Q_4P_4Q_5P_5Q_6P_6$; dieser Q-Sechsstern ist ein nichtkonvexes unregelmäßiges Zwölfeck.

Dann gilt für das Verhältnis der Flächeninhalte $\frac{A_{\Delta ABC}}{A_{Q\text{-Sechsstern}}} = \frac{70}{13}$.

Im Fall, dass das Dreieck ΔABC gleichseitig ist, ist der Q-Sechsstern zwar nicht gleichseitig, aber zu jeder Seite gibt es eine gleichlange Nachbarseite.



Fazit

Dreiecksgeometrie – mit oder ohne DGS – ist ein „weites Feld“. Mit DGS können Schüler selbstständig auf Entdeckungsreise gehen. Dank Zugmodus lassen sich Vermutungen aufstellen, widerlegen oder erhärten. Die hier betrachteten Sätze beschränken sich auf Dreiecke mit wohlbestimmten Transversalen. Schwächere Schüler können anstelle eines beliebigen Ausgangsdreiecks ein gleichseitiges Dreieck wählen. Nachdem Strecken, Winkel, Umfänge und Flächeninhalte gemessen worden sind, erweisen sich einige Verhältnisse als konstant. In manchen Fällen ist diese Konstante wahrscheinlich ein gerundeter Wert. Wie soll man „erraten“, was sich hinter diesem Näherungswert verbirgt? Hinter 2,65 kann sich zum einen $\sqrt{7}$, zum anderen aber auch $\frac{130}{49}$ “verstecken“. Oder ist der Wert korrekt und steht für $\frac{53}{20}$? Da hilft nur „Papier und Bleistift“, um den geometrischen Hintergrund tiefer auszuleuchten. Hier ist der Lehrer gefordert – zumal das Bedürfnis, etwas beweisen zu sollen, per DGS nicht gefördert wird.

Literatur

Coxeter, H. S. M. (1963). *Unvergängliche Geometrie*. Basel: Birkhäuser.

Cuoco, A., Goldenberg, P., Mark, J. (1993). Marion's Theorem (Reader Reflections). *Mathematics Teacher 86/8*, 619.

Dörrie, H. (1943). *Mathematische Miniaturen*. Breslau: Hirt.

Sielaff, K.; Usbeck, F. W. (1994). *Hamburger Schülerzirkel Mathematik 1991-93*. Hamburg: Hereus.

Steinhaus, H. (1959). *Kaleidoskop der Mathematik*. Berlin: DVW.

Watanabe, T.; Hanson, R.; Nowosielski, F. D. (1996). Morgan’s Theorem. *Mathematics Teacher 89/5*, 420-423.

Brigitte Leneke, Magdeburg

Graphentheorie im MU – Von Knoten, kürzesten Wegen und Gerüsten

1. Einleitung

Überall dort, wo netzartige Strukturen (Computernetze, Versorgungsnetze, Verkehrsnetze, wirtschaftliche Verflechtungsbeziehungen) zu analysieren und zu bearbeiten sind, finden „Graphen“ als Modelle Anwendung. Alltägliche Probleme, z. B. pünktliches Abfahren von Bahnen und Bussen, schnelles Herstellen von Telefon- und Internetverbindungen, Senken der Kosten für die Müllabfuhr, Finden einer möglichst kurzen Autoroute und vieles mehr können mit mathematischen Instrumentarien der Graphentheorie dargestellt, bearbeitet und gelöst werden. Schon diese Themen für sich genommen sind für die Lernenden interessant und motivierend und die Fragestellungen spontan verständlich. Aus ihrem eigenen Umfeld können sie weitere ähnliche Problemstellungen beschreiben.

Einige typische Fragestellungen

- Fünf Orte (vgl. Abb. 1) sind durch ein Straßennetz verbunden. Diese Verbindungen haben verschiedene Wertungen. Welche Wege führen von V_1 nach V_5 und welcher davon ist der kürzeste (längste)?
- Kann man von einem beliebigen Ort losfahren, alle anderen Orte genau einmal besuchen und zum Ausgangspunkt zurückfahren?
- Fünf Stationen A, B, C, D und E sind durch ein System von Versorgungsleitungen (Gas, Telefon, Wasser) so miteinander verbunden, dass jede Station mit jeder verbunden ist (vgl. Abb. 2). Um eine Neuverlegung kostengünstiger zu gestalten, wird überlegt, sie mit kleinster Anzahl von Leitungen nur untereinander zu verbinden. Welche Möglichkeiten gibt es?
- Jede Leitung hat seinen Preis. Welches Leitungsnetz ist das kostengünstigste?

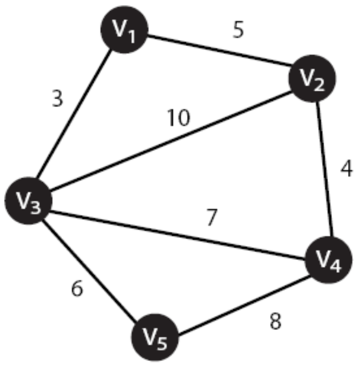


Abb. 1

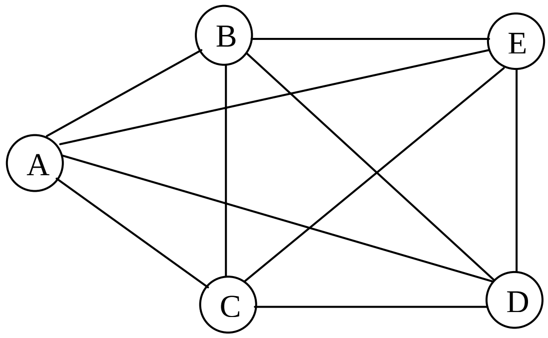


Abb. 2

2. Didaktisch-methodische Orientierung

Die **Modellbildung** steht bei jeder Problemlösung im Mittelpunkt. Zunächst werden in Verbindung mit den hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten einige notwendige Begriffe eingeführt, die dann durch die Bearbeitung typischer graphentheoretischer Fragestellungen ausgehend von praktischen Problemstellungen gefestigt werden. Die genutzten Lösungsverfahren haben algorithmischen und auch heuristischen Charakter. Sie können sowohl für die Untersuchung von Existenzproblemen, als auch von Anzahl- bzw. Optimierungsproblemen (vgl. Abb. 3) ausgewählt werden. So kann den Lernenden u. a. am Beispiel des „Kürzesten – Wege – Problems “ dies über das Finden **eines** „Weges“ vom Ort A zum Ort B, über das Suchen nach **weiteren** Wegen bis zum „Herausfiltern“ des **„besten“** Weges sehr anschaulich verdeutlicht werden

Problemkreise	Ziele des MU
Existenzprobleme	Argumentieren, Begründen, Beweisen
Anzahlprobleme	Argumentieren, Kombinatorik
Optimierungsprobleme	Heuristisches und algorithmisches Arbeiten

Abb. 3

Die Lernenden können spielerisch-experimentell Rundreisen realisieren und gestalten, intuitiv-heuristisch die kürzeste Rundreise finden, aber z. B. auch algorithmisch „Gerüste“ auf Graphen konstruieren. Dabei entdecken sie, dass es „leichte“ und „schwere“ Probleme gibt und vervollständigen so ihr Bild von der Mathematik. In Abb. 4 sind weitere unterrichtlichen Potenzen zusammenfassend dargestellt:

Begriffssystem aufbauen	
Kompetenzentwicklung der Schülerinnen und Schüler	
Entdeckendes Lernen	Umgang mit offenen Aufgaben
Experimentelles Arbeiten	Inner- und außermathematische Vernetzungen
Anwendungsorientierung	Methode der Aufgabenvariation
Modellierung	Kooperatives Arbeiten
Heuristisches und algorithmisches Arbeiten	Visuelles Arbeiten

Abb. 4

3. Zur Behandlung von Grundbegriffen

Die Einführung und Festigung von grundlegenden Begriffen der Graphentheorie sollte schrittweise anhand konkreter Problemstellungen erfolgen. Weniger ist hier sicher mehr! Durch kleinere und übersichtliche Aufgaben können die Lernenden mit Knoten, Kanten, gerichteten und ungerichteten Graphen, Wegen und Bäumen, Teilgraphen und Gerüsten …bekannt gemacht werden. Es ist maßgeblich von der Unterrichtssequenz abhängig, wie breit und tief der zur Verfügung stehende Begriffsapparat werden sollte. Die Palette ist groß!!

In einem ersten Teil einer Unterrichtssequenz könnte eine Konzentration auf die Einführung der Begriffe Graph, Knoten, Kanten und Wege erfolgen. Ausgangspunkt ist eine sehr anschauliche Situation. Es werden die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“, „gerichteter Graph“, „bewerteter Graph“ erarbeitet. Dabei sollen anhand des Beispiels eines Straßennetzes einer Stadt und wesentlicher Institutionen (Schule, Einkaufszentrum, Stadtpark, Krankenhaus) die Äquivalente in der Graphentheorie gefunden werden. Weitere Begriffe, wie z. B. Weg, Rundweg, zusammenhängend, Baum könnten dann folgen.

4. Kürzeste Wege, Rundreisen und Gerüste

Die Suche nach kürzesten Wegen in Graphen, nach Rundreisen und kürzesten Rundreisen sowie nach Minimalgerüsten eröffnet im Unterricht die Möglichkeit, sowohl heuristische als auch algorithmische (wenn überhaupt möglich) Lösungsvarianten und –strategien einzubeziehen. In offenen Aufgabenstellungen tritt Offenheit auch bei der Wahl der Lösungsmethoden zu Tage.

Beispiel :

a) Erstelle für deinen eigenen Wohnkreis einen Graphen mit mindestens fünf Knoten, die für die umliegenden Orte stehen.

b) Recherchiere die Entfernungen zwischen den Orten und bewerte die Kanten deines Graphen entsprechend.

c) Finde den jeweils kürzesten Weg von deinem Wohnort zu allen anderen Orten.

Eingebettet in solche und ähnliche Aufgabenstellungen könnte z. B. die Idee des Dijkstra-Algorithmus angewendet werden.

Im Unterschied dazu ist die Lösung eines „Rundreiseproblems" etwas anders zu realisieren. Hier treten heuristische Vorgehensweisen in den Vordergrund. In einem vollständigen Graphen mit 7 Knoten gibt es 360 Rundreisen (Existenz- und Anzahlproblem)! Die Lernenden erkennen die Schwierigkeit: einfach Durchprobieren dauert zu lange und ist bei größerem n kaum möglich. Ausgangsproblemstellung kann z. B. die Auslieferung von Gütern per Lastwagen in n Städte und die Rückkehr ins Depot sein. Hinsichtlich der Modellierung kann von einem vollständigen Graphen ausgegangen werden: Jede Stadt ist von jeder anderen direkt erreichbar.

Die Lernenden erkennen sehr schnell, dass die Vorgehensweise, immer von einem Ort ausgehend die nächstgelegene Stadt zu besuchen, nicht immer zum besten Ergebnis führt und sie suchen automatisch nach anderen Wegen, noch kürzere Rundreisen zu finden. Dem gegenüber kann das Finden eines Minimalgerüstes wieder algorithmisch, z. B. mit dem Algorithmus nach Kruskal gelöst werden. Für die algorithmische Umsetzung finden die Lernenden die Idee des Algorithmus relativ selbstständig:

Die Kanten in der Reihenfolge aufsteigender Kantengewichte durchlaufen und jede Kante wählen, die mit allen zuvor gewählten Kanten keinen Kreis schließt. Dabei werden alle Knoten erreicht. Alle übrigen Kanten werden entfernt. Es entsteht ein minimal spannender Baum.

Anhand weiterer praktischer Problemstellungen (z. B. Energieverbundnetz einer Region) können die Lernenden zunächst den jeweiligen Graphen konstruieren (Modellierung), ein Gerüst bestimmen (Existenzproblem), verschiedene Gerüste bestimmen (Anzahlproblem) und dann das Minimalgerüst ermitteln (Optimierungsproblem).

Literatur

Leneke, B. (2005). *Einführung in die Graphentheorie – mit Graphen kürzeste Wege finden.* 42 RAAbits. Stuttgart: RAABE Fachverlag für die Schule.

Céline LIEDMANN, Dortmund

Modellieren in europäischen Schulen

Einleitung

Das Comenius Projekt „Developing Quality in Mathematics Education II“ (DQME II) ist ein Netzwerk aus elf europäischen Ländern. Sein wesentliches Merkmal ist die Vernetzung von Theorie und Praxis, die durch die Partnerinstitutionen (Universitäten, Lehrerfortbildungsinstitutionen und Schulen) gewährleistet wird. Im Zentrum des Aufgabenfeldes steht das Entwickeln und Modifizieren von Modellierungs- und realitätsnahen Aufgaben.

Hintergrund und Intention

Die erstrebenswerte Vernetzung zwischen Mathematik und Realität ist keine neue Erkenntnis. PISA (2003) orientierte die Testkonzeption des mathematischen Schwerpunktgebiets unter dem Ansatz einer „realistischen Mathematik“ wie sie auch schon 1977 von Freudenthal aufgestellt wurde (vgl. Freudenthal, 1977). In ähnlicher Form findet sich dieser Bezug in der Grundorientierung an den Winter´schen Grunderfahrungen in vielen Kernlehrplänen in Deutschland wieder. Leider zeigt sich jedoch, dass das „Modellieren auch für *Lehrer* schwer ist, der Unterricht […] komplexer und weniger vorhersagbar [zu werden scheint]“ (Blum, 2007, S. 3). Hier setzt DQME II durch seine internationale und praxisorientierte Ausrichtung an. Die Grundintention des Projekts ist es „gute“ realitätsnahe Aufgaben und Modellierungsaufgaben in den europäischen Mathematikunterricht zu implementieren.

Entwicklung, Modifizierung und Umsetzung von Aufgaben

Im Folgenden werden zwei Aufgaben und deren Entwicklungsprozesse vorgestellt, eine davon ist die Swimming-Pool Aufgabe.

Wegen des eher kalten Wetters im Winter sind kleine Garten-Pools in Schweden sehr beliebt. Stell Dir einen Pool vor, der rund ist und einen Radius von 2,75m hat, sowie eine Tiefe von 1,18m. Die Entfernung der Wasseroberfläche und des Poolrandes beträgt 0,06m. Jeden Frühling wird der Pool durch zwei Rohre mit Wasser gefüllt. Jedes dieser Rohre bringt 20l Wasser pro Minute in den Pool. Das Wasser kostet 2 Euro pro Kubikmeter.

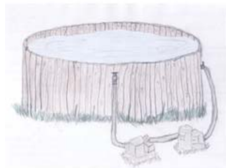
<u>Fragen:</u>

- Wie viel Wasser passt in den Pool? (Beantworte die Frage in Kubikmetern!)
- Wie teuer ist es, den Pool zu füllen?
- Wie lange dauert es, bis der Pool voll ist?
- Wie viele Menschen können gleichzeitig in dem Pool schwimmen, bevor das Wasser überschwappt? Finde das mittlere Volumen einer mittleren Person selbst.

Abb. 1: Swimming Pool Aufgabe (Matte Direkt Grade 9, 2003, p. 53)

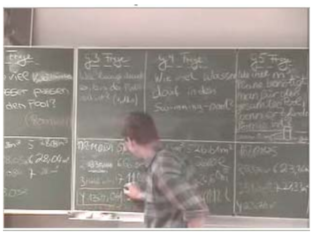
Die Aufgabe stammt aus dem schwedischen Mathematikbuch „Matte Direkt“ für die Jahrgangsstufe 9. Die Arbeitsaufträge sind sehr klar und detailliert formuliert. Es wird auch ein Hinweis zur Bearbeitung gegeben - „Beantworte die Frage in Kubikmetern!“. Die Aufgabe wurde nach Deutschland geschickt, wo ein Projektlehrer sie öffnete und gleichzeitig eine Unterrichtsmethode dazu entwickelte.

Wegen des eher kalten Wetters sind im Winter kleine Gartenpools in Schweden sehr beliebt. Stell Dir einen Pool vor, der rund ist und einen Radius von 2,75m hat, sowie eine Tiefe von 1,18m. Die Entfernung zwischen der Wasseroberfläche und dem Poolrand beträgt 0,06m. Der Pool wird durch zwei Rohre mit Wasser gefüllt. Jedes dieser Rohre bringt 20l Wasser pro Minute in den Pool. Das Wasser kostet 2 Euro pro Kubikmeter.



- Denkt euch zwei (möglichst originelle) mathematische Fragestellungen zu dem Text aus und beantwortet diese mit einer Rechnung.
- Einigt euch auf eine Frage in der Gruppe, die ihr an die Tafel schreiben wollt.
- Löst die Fragen der anderen Gruppen und schreibt eure Lösung unter die entsprechende Frage.

Abb. 2: Modifizierte Swimming Pool Aufgabe (J.H. Müller)



Der Lehrer zeichnet eine Matrix an die Tafel, und jede Schülergruppe schreibt ihre Frage in ein Feld der Matrix. Danach versucht jede Gruppe alle Fragen zu beantworten und schreibt ihre Lösung jeweils unter die entsprechende Frage (s. Abb.3).

Abb. 3: Tafelbild der Matrix

Hier ein paar Beispielfragen, die von den Schülern selbst entwickelt und anschließend bearbeitet wurden:

- Wie teuer ist es, wenn man den Pool komplett mit Wasser füllt?
- Wie viel Wasser passt in den Pool?
- Wie lange dauert es bis der Pool voll ist?
- Wie viel Wasser darf man in den Pool füllen?
- Wie viel Folie braucht man, um den Pool herzustellen?
- Wie teuer ist es, 170 l in den Pool zu füllen?
- Wie lange dauert es den Pool zu reinigen, wenn eine Pumpe 17,5 l pro Stunde pumpen kann?

Es wird deutlich, dass Schüler durchaus in der Lage sind sich mathematisch sinnvolle Fragen zu überlegen. In den Gruppengesprächen fanden rege Diskussionen über den Schwierigkeitsgrad der Fragen statt. Verworfen wurden häufig Fragen, die der eigenen Gruppe zu schwer oder zu einfach waren.

Deutlich sichtbar war die Motivation seitens der Schüler, die nach ihren eigenen Aussagen auf den selbstentwickelten Fragen beruhte. In einigen Fällen konnten Diskussionen über nicht präzise formulierte Fragen beobachtet werden. Die Frage „Wie viel Folie braucht man für den Pool?“ warf das Missverständnis zwischen Abdeckfolie und Folie für die Herstellung des Pools auf. Eine solche Diskussion führte zu zwei Erkenntnissen: Erstens wurde den Schülern bewusst, dass sie auf eine präzise Fragestellung achten müssen. Zweitens, dass unterschiedliche Lösungen nicht gleich bedeuten müssen, dass nur eine Lösung mathematisch sinnvoll ist. Es kann z.B. auf unterschiedliche Auffassungen der Aufgabenstellung zurückzuführen sein. Die Bedeutung des Validierens und Reflektierens der Ergebnisse lässt sich auf Grund solcher Situationen besonders gut thematisieren. Dieser Aspekt des Validierens und Reflektierens ist ein zentraler Aspekt des Modellierens und wird besonders durch die vom Lehrer eingeworfene Frage „Wie viele Menschen können in dem Pool stehen, bevor er überläuft?“ behandelt.

Die im Folgenden vorgestellte Aufgabe stammt aus der Kategorie „Experimente im Mathematikunterricht“. Die Aufgabenidee stammt aus einem ungarischen Schulbuch und wurde zunächst in folgender Form in Deutschland eingesetzt:

Die Schnur

Begründe, ob und wenn ja, um wie viel Meter man das waagerecht gehaltene 3 Meter lange Seil verlängern muss, damit der Schüler auf dem 50cm hohen Stuhl darunter passt. Begründe, ob die Verlängerung des Seils von der Position des Stuhls zwischen den Schülern abhängig ist.

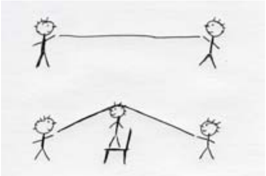
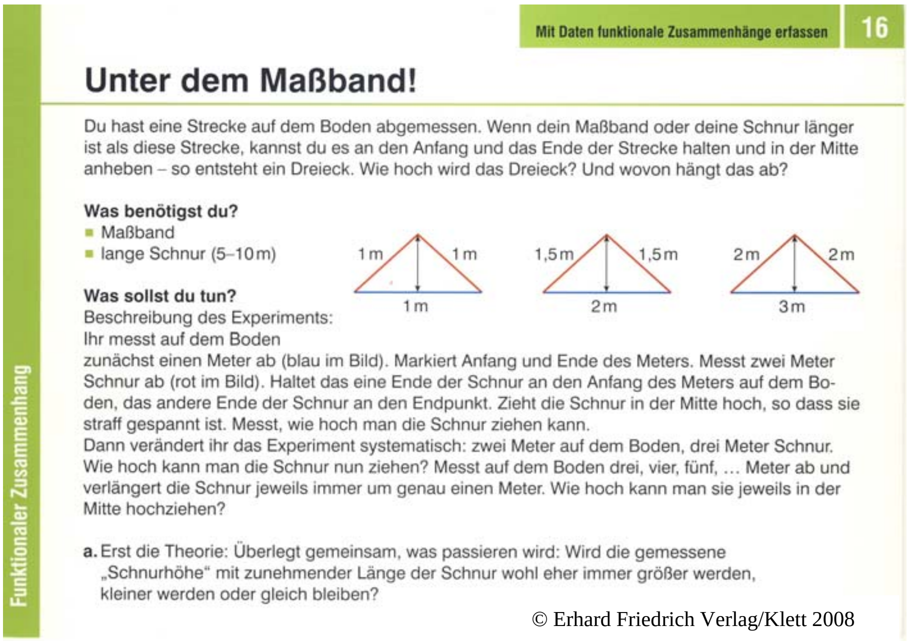


Abb. 4: Die Schnuraufgabe (J.H. Müller)

Im Rahmen des Mathekoffers (Müller, 2008) wurde die Aufgabe aufgegriffen und weiterentwickelt. Die Aufgabe bringt nicht nur Schüler, sondern auch Lehrer zum Staunen, denn die Vermutung wird nach mathematischer Prüfung in den meisten Fällen verworfen.

Hierbei handelt es sich um eine in unserem Projekt anerkannte Modellierungsaufgabe, auch wenn sie nicht der Definition von Modellierungsaufgaben nach Gabriele Kaiser entspricht. „Dabei geht es um die Lösung realer und authentischer Probleme, die kaum vereinfacht sind, und deren Bearbeitung zu einem besseren Verständnis der Realität beitragen soll.“(Kaiser und

Borromeo Ferri, 2006) Sie legt besonderen Wert darauf, dass die Aufgaben authentisch wirken und die Schüler nicht an dem Bezug zum alltäglichen Leben zweifeln.


Funktionaler Zusammenhang

Mit Daten funktionale Zusammenhänge erfassen **16**

Unter dem Maßband!

Du hast eine Strecke auf dem Boden abgemessen. Wenn dein Maßband oder deine Schnur länger ist als diese Strecke, kannst du es an den Anfang und das Ende der Strecke halten und in der Mitte anheben – so entsteht ein Dreieck. Wie hoch wird das Dreieck? Und wovon hängt das ab?

Was benötigst du?
- Maßband
- lange Schnur (5–10 m)

Was sollst du tun?
Beschreibung des Experiments:
Ihr messt auf dem Boden zunächst einen Meter ab (blau im Bild). Markiert Anfang und Ende des Meters. Messt zwei Meter Schnur ab (rot im Bild). Haltet das eine Ende der Schnur an den Anfang des Meters auf dem Boden, das andere Ende der Schnur an den Endpunkt. Zieht die Schnur in der Mitte hoch, so dass sie straff gespannt ist. Messt, wie hoch man die Schnur ziehen kann.
Dann verändert ihr das Experiment systematisch: zwei Meter auf dem Boden, drei Meter Schnur. Wie hoch kann man die Schnur nun ziehen? Messt auf dem Boden drei, vier, fünf, … Meter ab und verlängert die Schnur jeweils immer um genau einen Meter. Wie hoch kann man sie jeweils in der Mitte hochziehen?

a. Erst die Theorie: Überlegt gemeinsam, was passieren wird: Wird die gemessene „Schnurhöhe“ mit zunehmender Länge der Schnur wohl eher immer größer werden, kleiner werden oder gleich bleiben?

Abb. 5: Mathekofferkarte *Unter dem Maßband*

In der obigen Aufgabe ist der Alltagsbezug zwar nicht erkennbar, aber das Experiment an sich ist in der Realität ausführbar und stellt somit die „Reale Situation“ beim Modellieren dar. Auf Grund der Vielfalt der kulturellen Einflüsse in unserem Projekt ist der Begriff des Modellierens sehr weit gefasst. Nach Erprobung dieser Aufgabe kam es auf dem DQME II-Meeting in Schweden zu einer Reihe von neuen Anregungen, die Jan Hendrik Müller aufnahm und seine Aufgabe modifizierte (s. Aufgabe *Unter dem Seil* unter www.dqme2.eu).

Literatur

Blum, W. (2007): Mathematisches Modellieren- zu schwer für die Schüler und Lehrer? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007*, Hildesheim: Franzbecker, S. 3-12.

Borromeo Ferri, R. und Kaiser, G. (2006): Perspektiven zur Modellierung im Mathematikunterricht - Analysen aktueller Ansätze. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006*. Hildesheim: Franzbecker, S. 50-52.

Freudenthal, H. (1977): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Bd. 1, Stuttgart: Klett.

Müller, J. H. (2008). Themenbox: Funktionaler Zusammenhang. In: *Mathekoffer* (Hrsg.) Büchter, A. und Henn, H.-W.. Hannover: Friedrich und Stuttgart: Klett.

Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., u.a. (2004): *PISA 2003: Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs.* Münster: Waxmann.

Winter, H. (1996): Mathematikunterricht u. Allgemeinbildung. In: *Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik,* S.35-41.

Georg LILITAKIS, Kassel

Untersuchungen zur Entwicklung von Kompetenzen und Einstellungen bei Studierenden des Faches Mathematik für das Lehramt an Grundschulen an der Universität Kassel

Im Rahmen der Modularisierung des Studiums Lehramt an Grundschulen (L1) sind die Studierenden in Hessen verpflichtet, neben einem frei wählbaren Fach, die Fächer Mathematik und Deutsch zu studieren.

Das zugrunde liegende Dissertationsvorhaben untersucht mathematische Kompetenzen, Einstellungen zum Fach, Lernmotivation und Selbstkonzept der Studierenden im Pflichtfach Mathematik und versucht deren Veränderungen im Verlauf eines Jahres zu erfassen. Ergänzend zu der Erhebung von quantitativen Daten mit Hilfe von Fragebögen wurden im Rahmen von Examensarbeiten qualitative Interviews geführt.

Die Ergebnisse dieser Interviews eröffnen Perspektiven von Studierenden auf das Studium aus verschiednen Blickwinkeln.

Die Interviews wurden von Studierenden im Rahmen von wissenschaftlichen Hausarbeiten zur Erlangung des ersten Staatsexamens durchgeführt. Grundsätzlich sind zur Einbindung von Studierenden in den Forschungsprozess verschiedene Überlegungen notwendig:

- Die wissenschaftliche Hausarbeit hat das Ziel, eine vertiefte wissenschaftliche Qualifikation zu prüfen (§16 des GVBl. I 322-111 von 1995 und GVBl I S. 481 von 1999 (Hessen).
- Die Themen der Arbeiten sind ergänzend oder vertiefend zu den Inhalten der übergeordneten Dissertation zu wählen.
- Die Arbeiten sollen qualitative Untersuchungen sein.
- Die Vereinbarkeit von Abschlussarbeit und den Erfordernissen des Forschungsprozesses muss gewährleistet sein.

Diese vielfältigen Anforderungen wurden mit einem Vorbereitungskolloquium und einem Examenskolloquium beantwortet.

Im Vorbereitungskolloquium wurde vor der Vergabe der Examensarbeiten die Grundschätze eines qualitativen Forschungsansatzes (Interview, Leitfaden, Fragetypen, Auswertungsmethoden) erarbeitet und die inhaltlichen Schwerpunkte des Dissertationsvorhabens vorgestellt. Die Studierenden entwickelten selbstständig mehrere Ideen für Untersuchungsvorhaben und prüften diese auf den inhaltlichen Zusammenhang mit der Dissertation und auf Machbarkeit und Eignung als qualitatives Thema. Aus den herausgearbeiteten Interessengebieten wurden die Themen für die Examensarbeiten gestellt.

Im Rahmen des begleitenden Examenskolloquiums stellten die Studierenden Abschnitte und Probleme ihres Forschungsprozesses vor und diskutierten diese unter Anleitung eines wissenschaftlichen/pädagogischen Mitarbeiters.

Im Rahmen ihres Forschungsprozesses entwickelten die Studierenden eigenständig halbstandardisierte leitfadenbasierte Interviews (z.B. Lamnek 2005, Mayer 2004, Scholl 2003), nahmen Kontakt zu den Interviewteilnehmern, organisierten die Interviews und werteten diese mit der qualitative Inhaltsanalyse nach Mayring (2008) aus. Die teilnehmenden Studierenden waren Freiwillige, die sich im Rahmen der Fragebogenbefragung bereit erklärt hatten, für ein Interview zu Verfügung zu stehen.

Die Gruppe der Interviewteilnehmer ist nicht repräsentativ! Es davon auszugehen, dass in dieser Gruppe Studierende mit einem positiven Mathematikbild überrepräsentiert sind.

Insgesamt wurden ca. 60 Studierende aus unterschiedlichen Semestern zu folgenden Themen befragt.

- Zum Belastungserleben von Studierenden (I. Hittscher)
- Zum Erfolgserleben bei Studierenden (E. Bäume)
- Zu Emotionen im Zusammenhang mit dem Studium des Faches Mathematik für das Lehramt an Grundschulen (V. Gartemann)
- Zu Überzeugungen und Einstellungen von Studierenden zu Inhalten der Fachvorlesungen Mathematik (C. Maier)
- Zum Verhalten bei Klausurvorbereitung (D. Rizou)
- Zum Berufsbild „Mathematiklehrer an Grundschulen“ (H. Kroll)

In diesem Rahmen ist es nicht möglich die Ergebnisse dieser Befragungen vollständig darzustellen. Deshalb werden zu jedem Thema einige vom Autor ausgewählte Befunde vorgestellt.

Zum Belastungserleben

Als Belastung werden die Studienstrukturen des modularisierten Studiengangs, vor allem aber die fehlende Wahlfreiheit bei den Veranstaltungen und die zeitliche Belastung und das Anforderungsniveau der Vorlesungen und der ergänzenden Übungsblätter empfunden. Entlastend werden Strukturen und Inhalte empfunden bei denen ein direkter Bezug zur Grundschule erkennbar ist. In der Fachwissenschaft werden Inhalte als bedeutungsvoll angesehen, wenn sie interessant sind, eine neue Erkenntnis darstellen oder wenn sie sich auf den Alltag übertragen lassen. In der Fachdidaktik werden Inhalte als sinnvoll erachtet bei denen ein konkreter Bezug zur Grundschule deutlich wird oder sie Spaß machen.

Zum Erfolgserleben

Gute Noten werden als Ausdruck eines erfolgreichen Studiums verstanden! Gute Noten werden auch im sozialen Umfeld als Erfolg betrachtet, wenn die eigene Note besser ist als die Noten der anderen Studierenden. Die Leistungs- und Arbeitsbereitschaft hängt an der persönlichen Einschätzung der Wichtigkeit und dem Anspruchsniveau der Prüfung. Im Gegensatz zu den Klausuren wird in schriftlichen Ausarbeitungen mit einem Thema, das im Zusammenhang mit den individuellen Interessen steht, speziell auch das persönliche Engagement, als erfolgreich erlebt. Besonders Hervorgehoben wurde das positive Erleben von Erfolgen in der praktischen Ausbildung in der Gelerntes umgesetzt oder die eigene Eignung für den Unterricht erfahren wird. „Ein Unterschied in der Wahrnehmung von Erfolg [im Vergleich mit anderen Fächern] entsteht dadurch, dass durch die in Mathematik geforderten Prüfungsleistungen in Form von Klausuren ein geringeres Engagement abverlangt wird, als in anderen Fächern, in denen man sich oft eigenständiger und intensiver mit bestimmten Themen auseinandersetzt" (Bäume 2009).

Emotionen im Zusammenhang mit dem Studium

„Das emotionale Erleben in dieser Interviewgruppe ist im Allgemeinen durch Freude und Interesse am Fach und insbesondere an der Didaktik gekennzeichnet". Allerdings wird das Mathematikstudium als aufwändiger als die anderen Teilstudiengänge empfunden und aufgrund des hohen Lern- und Zeitaufwandes als sehr anstrengend und stressig erlebt, was zu Ärger und Widerwillen führt. Unzufriedenheit wird geäußert in Bezug auf das Verständnis von Lernen welches in den Fachveranstaltungen vorherrschend ist (Reinprügeln von Wissen, Stress, „Bulemielernen").

Zu Überzeugungen und Einstellungen von Studierenden zu Inhalten der Fachvorlesungen Mathematik

Als Begründung für die Notwendigkeit und dem Sinn von Inhalte der Fachvorlesungen wird der Status als Lehrer mit Staatsexamen genannt. Des Weiteren wird die Fachwissenschaft als Basis für eine gute Didaktik gesehen und dem Wissen über der Ebene des zu vermittelnden Stoffes wird Bedeutung beigemessen.

Im Allgemeinen erschließt sich der Sinn der Inhalte der Fachvorlesungen für die Studierenden in den Didaktikvorlesungen. Pauschal wünschen die Studierenden: „Mehr Praxis!“ Dahinter verstecken sich mehrere Anliegen, nämlich mehr Bezug in den Vorlesungen zur Grundschule, mehr Methoden zur Vermittlung von Wissen und mehr praktische Umsetzungsmöglichkeiten des Gelernten.

Lern- und Vorbereitungsstrategien zu Klausuren

Grundsätzlich kombinieren die Befragten die Lernstrategien Wiederholung, Elaboration, Organisation und Ressourcenmanagement. Alle wesentlichen Lernstrategien sind aus der Schule bekannt. Aber: „Insgesamt gesehen haben alle Befragten ihr Lernverhalten bei der Vorbereitung auf Mathematikklausuren geändert und es auf die geänderten Anforderungen des Studiums angepasst.“ Das bedeutet eine Phase der Unsicherheit zum Studienbeginn bis das Lernverhalten der Schule umgestellt ist.

Aufgaben eines Mathematiklehrers an Grundschulen aus Sicht der Studierenden

„Zuallererst sind die Befragten in ihrem Grundverständnis Grundschullehrer.“ Mehr noch: […] „Die Bezeichnung Mathematiklehrer beinhaltet für die Studierenden etwas Negatives oder Unerreichbares“ (Kroll 2009). Sie sehren ihre Hauptaufgabe zunächst darin Werte zu vermitteln, zu erziehen und auf individuelle Bedürfnisse der Kinder einzugehen. Erst danach kommen Nennungen wie das Vermitteln von Spaß und Interesse an Mathematik, das Vermitteln von Grundwissen und Wecken von Verständnis für die Mathematik, besonders in Bezug auf die Alltagstauglichkeit des Wissens und dem Sinn der Mathematik. Schließlich sehen die Studierenden ein weiteres Aufgabenfeld im Diagnostizieren und Fördern auch im Sinne von dem Verstehen wie Kinder lernen.

Lamnek, S. (2005). *Qualitative Sozialforschung.* Weinheim, Basel: Beltz.

Mayer, H. (2004). *Interview und schriftliche Befragung. Entwicklung, Durchführung und Auswertung*. München: Oldenbourg.

Mayring, P. (2008). Qualitative Inhaltsanalyse. In U. Flick & al. (Hrsg.), *Qualitative Forschung. Ein Handbuch.* (S. 468-475). Reinbek bei Hamburg: Rowohlt.

Scholl, A. (2003). *Die Befragung. Sozialwissenschaftliche Methode und kommunikationswissenschaftliche Anwendung.* Konstanz: UVK Verlagsgesellschaft.

ANKE LINDMEIER, AISO HEINZE, KRISTINA REISS, München, Kiel

Fachspezifische Wissens- und Kompetenzkomponenten bei Lehrkräften und Studierenden des Lehramts

Die Kognition von Lehrkräften ist als Einflussgröße von Unterricht unter diversen Blickwinkeln Gegenstand fachdidaktischer Forschung. Neben dem fachspezifischen Wissen von Lehrkräften werden z.B. auch Aufgaben der Lehrprofession auf ihre kognitiven Anforderungen hin untersucht.

1. Theoretischer Hintergrund

Das *fachspezifische Wissen* von Lehrkräften wird dabei meist nach Shulman (1986) in den zwei Teilbereichen des content knowledge und des pedagogical content knowledge verstanden. So wird beispielsweise in Forschungsprojekten der Michigan Group (Hill, Ball, & Schilling, 2004), in COACTIV (Krauss, Neubrand, Blum, & Baumert, 2008) oder der TEDS-M Studie (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, & Rowley, 2008) das Wissen von Mathematiklehrkräften in den beiden Aspekten Fachwissen und fachdidaktisches Wissen konzeptualisiert. Die Analyse der für die Lehrprofession zentralen Anforderungen führt zu einer Beschreibung der *Kernaufgaben des Lehrens*. Teilaspekte von lehrbezogenen und lernprozessbezogenen Anforderungen sind z.B. in den Aufgaben, die zur Messung professionellen Wissen in der deutschen Pilotierungsstudie zu TEDS-M eingesetzt wurden abgebildet (Blömeke, Kaiser, & Lehmann, 2008).

Wir schlagen aus einer kompetenzorientierten Sichtweise heraus ein Strukturmodel zur Modellierung der kognitiven Ressourcen von Lehrkräften vor das die oben genannten Zugänge integriert. Da Fach- und fachdidaktisches Wissen empirisch schwer zu trennen sind (vgl. Hill et al., 2004; Krauss et al., 2008), werden dabei diese beiden Aspekte zu einer Komponente *Basiswissen (BK)* zusammengefasst. Obwohl damit die klassische Unterscheidung nach Shulman (1986) nicht modelliert wird, wäre sie mit dem Modell verträglich. Mögliche Operationalisierungen können in Anlehnung an bestehende Maße von fachspezifischem Wissen realisiert werden. Eine zweite Komponente umfasst *reflektive Kompetenzen (RC)*. Darunter werden domänenspezifische professionelle Fähigkeiten zusammengefasst, die bei der Vor- und Nachbereitung von Unterricht benötigt werden. Als Anforderungen sind hier z.B. Aufgaben, die bei der Planung oder Evaluation von Unterricht anfallen zu sehen. Beispielsweise muss der Lernstand eines Schülers eingeschätzt oder aber eine schriftliche Arbeit in Bezug auf Fehlerquellen analysiert werden. Auch in anderen Projekten wurden Aufgaben eingesetzt die geeignet scheinen, um Teilfacetten dieser reflektiven Kompetenzen zu erfassen (z.B. Krauss et al., 2008; Blömeke et al., 2008). Weitere professionelle Anforderungen ergeben sich aus dem Kerngeschäft Unterrichten, die die dritte Komponente des Strukturmodells als *aktionsbezogene Kompetenzen (AC)* beschreibt. Durch Ideen oder Fehler der Lernenden können herausfordernde Situationen entstehen, die in eine Lerngelegenheit münden können oder aber eine besondere Reaktion der Lehrkraft erfordern, um der Entwicklung von Fehlvorstellungen vorzubeugen. Solche Situationen zeichnen sich vor allem dadurch aus, dass eine spontane fachlich adäquate Reaktion der Lehrkraft erforderlich ist. Der Zeitdruck erlaubt es der Lehrkraft eben nicht, tiefere reflektive Prozesse zu aktivieren. Vor allem durch den spontanen Anforderungscharakter werden aktionsbezogene Kompetenzen bestimmt.

Vor dem Hintergrund dieses Modells wurden zwei Fragen untersucht: Kann man einen Test konstruieren, der die drei Komponenten des vorgeschlagenen Modells abbildet (*Machbarkeitsstudie*)? Gibt es Hinweise darauf, wie die Komponenten zusammenhängen (*Struktur der Komponenten*)?

2. Methoden

Für die Erhebung der beiden Kompetenzkomponenten RC und AC stellt sich insbesondere die Frage, wie die spezifischen Anforderungen in Testaufgaben umgesetzt werden können (Heinze & Lindmeier, 2007). Dazu wurde ein computerbasiertes strukturiertes Interview entwickelt, bei dem die Aufgaben in Text-, Bild-, oder Videoform präsentiert werden. Neben klassischen Antwortformaten ist es bei einem Teil der Aufgaben möglich frei zu reagieren, wobei der Ton und handschriftliche Notizen per Videokamera aufgezeichnet wurden.

Zur Erfassung des Basiswissens wurden zehn Aufgaben zu schulnaher Mathematik, typischen Schülerfehlern und mathematischen Fehlvorstellungen entwickelt. Die reflektiven Kompetenzen wurden durch sieben Aufgaben abgebildet. Hier muss der Proband z.B. Schülerarbeiten analysieren, Lehrmaterial evaluieren oder Ideen für die Fortsetzung einer suboptimal endenden Unterrichtsstunde generieren. Diese Aufgaben werden teils durch eigens gedrehte Videos unterstützt. Die Skala aktionsbezogener Kompetenzen wird durch vier videobasierte Aufgaben gebildet. Die Probanden müssen in direkter Reaktion spontan auf eine Schülerfrage oder –handlung reagieren. Die Videos zeigen Lernende, die mathematische Fehlvorstellungen entwickelt haben oder bei der Bearbeitung einer Aufgabe Probleme haben.

Die Stichprobe besteht aus 50 Personen: 28 aktive Lehrkräfte (Alter: 29-61, 7 weiblich) und 22 zukünftige Lehrkräfte (Alter: 21-29, 18 weiblich) für die Sekundarstufe. Es handelt sich um eine Gelegenheitsstichprobe.

3. Ergebnisse

Die Skalen erweisen sich mit einer Ausnahme als ausreichend reliabel (s. Tab. 1). Die Skala der aktionsbezogenen Kompetenzen für zukünftige Lehrkräfte konnte nicht aufrechterhalten werden. Für diese Teilstichprobe wurden die AC-Items von weiteren Analysen ausgenommen.

Skala	*Cronbachs Alpha (Präzision)*		*Lösungsrate (SD)*	
	Lehrkräfte	*Studierende*	*Lehrkräfte*	*Studierende*
AC (4 Items)	**.50** (0.09)	.12 (0.14)	.56 (0.22)	—
RC (7 Items)	**.61** (0.05)	**.57** (0.04)	.60 (0.23)	.54 (0.19)
BK (10 Items)	**.72** (0.03)	**.68** (0.03)	.51 (0.25)	.34 (0.21)

Tabelle 1: Skalenreliabilitäten und Lösungsraten

Ein Performanzunterschied zwischen den Stichproben findet sich nur für die Komponente Basiswissen, wobei die Lehrkräfte höhere Leistungen zeigen (Mann-Whitney U Test: $p < .01$; moderater relativer Effekt $\hat{p} = 0.79$).

Die Zusammenhänge zwischen den Komponenten wurden mit Hilfe von korrelativen Maßen untersucht. Es zeigen sich moderate Zusammenhänge zwischen dem Basiswissen und den Kompetenzkomponenten. Die beiden Kompetenzbereiche für Lehrkräfte erweisen sich unkorreliert (s. Tab. 2).

Rangkorrelation (Spearmans ρ)	*Lehrkräfte*		*Studierende*
	RC	*AC*	*RC*
BK	$.48^{**}$	$.43^{*}$	$.67^{**}$
RC	—	$.07^{(n.s.)}$	—

Tabelle 2: Zusammenhang der Komponenten

4. Diskussion

In unserer Machbarkeitsstudie ist das dreiteilige Modell von Wissens- und Kompetenzkomponenten von Lehrkräften exemplarisch in ein Messinstrument umgesetzt. Die Skalenanalysen zeigen, dass dies zufriedenstellend gelungen ist. Einzig die Aufgaben zu aktionsbezogenen Kompetenzen für zukünftige Lehrkräfte können nicht zu einer Skala zusammengefasst werden. Allerdings erweist sich die Skala für aktive Lehrkräfte – deren kognitive Ressourcen ja im Modell gefasst sind – als reliabel. Das höhere Basiswissen der Lehrkräfte im Vergleich zu den zukünftigen Lehrkräften kann auf den ersten Blick irritieren. Es kann damit erklärt werden, dass die verwendeten Operationalisierungen schulnah sind und insbesondere Inhalte universitärer Mathematik ausgeklammert sind.

Die Zusammenhangsanalysen geben einen Hinweis darauf, dass reflektive und aktionsbezogene Kompetenzen tatsächlich für Lehrkräfte empirisch trennbar sind, obwohl beide Kompetenzbereiche mit dem Basiswissen zusammenhängen. Dieser Befund unterstützt die Annahme, dass beide Kompetenzbereiche voneinander unabhängig sein können und reflektive Kompetenzen nicht zwingend eine mediierende Rolle zwischen Basiswissen und aktionsbezogenen Kompetenzen spielen. Die Zusammenhänge zwischen Basiswissen und reflektiven Kompetenzen sind für die Teilstichprobe der zukünftigen Lehrkräfte deutlicher ausgeprägt. Damit scheint sich bei diesen ein starker Generalfaktor abzuzeichnen.

Um die Komponenten unseres Modells abzubilden wurden diverse Aufgabenformate eingesetzt. Dabei sind vor allem die videobasierten Aufgaben gepaart mit spontanen Anforderungen neuartig. Für zukünftige Untersuchungen sollte die Aufgabenbasis noch verbreitert werden. Externe Maße, z.B. Schüler- und Unterrichtscharakteristika, sollten in zukünftigen Studien ebenso mit einbezogen werden, um die Konstrukte empirisch weiter zu validieren. Zusammenfassend zeigt sich, dass das vorgeschlagene Modell operationalisierbar ist und Zusammenhänge zwischen den Maßen theoretisch plausibel sind. Natürlich wird in dieser Machbarkeitsstudie nur ein Ausschnitt von Lehrerkognition betrachtet, insbesondere werden z.B. affektive Komponenten und Beliefs ausgeklammert. Trotzdem scheint es machbar, durch die Unterscheidung von reflektiven und aktionsbezogenen Kompetenzkomponenten bestehende Konzepte von Lehrerkognition theoretisch und empirisch innovativ zu erweitern.

Literatur

Blömeke, S., Kaiser, G., & Lehmann, R. (Eds.) (2008). *Professionelle Kompetenz angehender Lehrerinnen und Lehrer. Wissen, Überzeugungen und Lerngelegenheiten deutscher Mathematikstudierender und -referendare - Erste Ergebnisse zur Wirksamkeit der Lehrerausbildung.* Münster: Waxmann.

Heinze, A. & Lindmeier, A. M. (2007). Paper and pencil test or video based instruments: How to measure teacher competence? *Oberwolfach Reports, 52*, 27-29.

Hill, H. C., Ball, D., & Schilling, S. G. (2004). Developing Measures of Teachers' Mathematics Knowledge for Teaching. *The Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

Krauss, S., Neubrand, M., Blum, W., & Baumert, J. (2008). *The Professional Knowledge of German Secondary Mathematics Teachers: Investigations in the Context of the COACTIV Project.* Online-paper for the 11th International Congress on Mathematics Education (ICME 11) in Monterrey, Mexico (TSG 27).

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework.* East Lansing, MI: Michigan State University.

Michael LINK, Dortmund

Kinder beschreiben operative Zahlenmuster – ein Forschungs- und Entwicklungsprojekt

In den Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich der KMK wird u. a. gefordert, dass Kinder zum Ende der Grundschulzeit „Gesetzmäßigkeiten in geometrischen und arithmetischen Mustern [...] erkennen, beschreiben und fortsetzen" können sollten (KMK, 2004). In den vergangenen zwei Jahrzehnten wurde eine Vielzahl von strukturierten Übungen für den Mathematikunterricht der Grundschule entwickelt, die – neben der Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen – explizit auch das Erkennen, Beschreiben und Begründen von Zahlenmustern ermöglichen (Wittmann & Müller, 1990, 1992; Steinweg, 2003).

Wenn Kinder erstmalig dazu aufgefordert werden, Muster in strukturierten Übungen zu beschreiben, muss mit Antworten wie den folgenden gerechnet werden:

21+70=91	*Was fällt dir auf?*
32+60=92	– Dass da immer 91, 92, 93, 94 steht
43+50=93	– Es war immer 10. und 1. Wechsel
54+40=94	– Immer +10

Diese Aufgabe und die drei Schülerantworten stammen aus einer Voruntersuchung des hier vorgestellten Dissertationsprojekts. Sie zeigen exemplarisch, dass Kinder auch ohne vorherige unterrichtliche Behandlung einen intuitiven Zugang zu Zahlenmustern finden und zumindest Teilaspekte des Musters in ihre schriftliche Beschreibung integrieren. Die Beispiele zeigen aber auch, dass die Beschreibungen der Kinder in vielen Fällen noch verbesserbar sind, sei es hinsichtlich der vollständigen Erfassung des mathematischen Musters der Aufgabe oder sei es hinsichtlich der sprachlichen Präzision der Formulierungen. Gerade wenn angestrebt wird, dass die Kinder nachfolgend auch eine Begründung für das Muster formulieren, indem die einzelnen Aspekte des Musters miteinander verknüpft werden, ist es notwendig, dass das Muster in allen für die Begründung wesentlichen Aspekten und mit hinreichender Genauigkeit erfasst wird.

Ein Ziel des Projekts war es nun, ausgehend von ersten informellen Vorgehensweisen von Kindern beim Beschreiben von Zahlenmustern Unterrichtsaktivitäten zu entwickeln, die die Kinder dazu anregen sollen, Zahlenmuster verständlich(er) und präzise(r) und unter zunehmender Verwendung der mathematischen Fachsprache zu beschreiben. Inhaltlich konnte dabei an Vorarbeiten v. a. von Steinweg (z. B. 2001, 2003) und Verboom (2007) angeknüpft werden, die in ihren Publikationen sowohl Beispiele für Beschreibungen von Kindern zu Zahlenmustern erläutern als auch Vorschläge zur Arbeit mit Beschreibungen von Zahlenmustern im Unterricht machen.

Konzeptioneller Rahmen: Design Research

Der Ablauf und die Zielsetzungen des Projekts orientierten sich an einem Forschungskonzept, das in den letzten Jahren unter dem Oberbegriff *Design Research* diskutiert wurde (z. B. van den Akker et al., 2006; sowie die Sonderausgabe der Zeitschrift Educational Researcher, 2003). Grob umrissen sieht dieses Konzept eine enge Verschränkung von Forschung und Entwicklung bei gleichzeitiger Verfolgung sowohl praktischer Ziele (z. B. Entwicklung von praxistauglichen Lernmaterialien) als auch theoretischer Ziele (z. B. Erforschung der Wirksamkeit von Lernmaterialien und deren Bedingungen, u. a. mit dem Ziel einer fortlaufenden Verbesserung der Materialien) vor. Van den Akker et al. (2006, S. 5) beschreiben den spezifischen Ansatz von Design Research mit folgenden Merkmalen:

„[D]esign research may be characterized as

- Interventionist: the research aims at designing an intervention in the real world;
- Iterative: the research incorporates a cyclic approach of design, evaluation, and revision;
- Process oriented: a black box model of input-output measurement is avoided, the focus is on understanding and improving interventions;
- Utility oriented: the merit of a design is measured, in part, by ist practicability for users in real contexts; and
- Theory oriented: the design is (at least partly) based upon theoretical propositions, and field testing of the design contributes to theory building."

Mit der angestrebten parallelen Verfolgung praktischer und theoretischer Ziele, die in den genannten Merkmalen zum Ausdruck kommt, verspricht Design Research ein Modell zu sein für die von Stokes beschriebene sowohl von praktischen Nutzenerwartungen wie auch von theoretischem Erkenntnisinteresse bestimmte Forschungsarbeit, die er in seinem Quadrantenmodell wissenschaftlicher Forschung in dem nach Louis Pasteur benannten Quadranten verortet (Stokes, 1997). Diese Verschränkung von Forschung und Entwicklung steht auch im Einklang mit Wittmanns Verständnis einer „Mathematikdidaktik als ‚design science'" (1992), das der

Entwicklung von Lernumgebungen und der Verbesserung des Unterrichts eine zentrale Rolle für die Mathematikdidaktik zukommen lässt.

Besonders hervorhebenswert ist m. E. das zweite von van den Akker et al. genannte Merkmal für Design Research: Die zyklische Vorgehensweise im Forschungs- und Entwicklungsprozess. Interventionen werden in einem mehrfach zu durchlaufenden Prozess (weiter-)entwickelt, evaluiert und überarbeitet, mit dem Ziel einer zunehmenden Verbesserung des Entwicklungsprodukts. Beispiel für ein Projekt, das diese zyklische Vorgehensweise umsetzt, ist die Arbeit von Swan (2006).

Überblick über die Phasen des Dissertationsprojekts

Auch das Dissertationsprojekt, das hier vorgestellt wird, folgt der für Design Research charakteristischen zyklischen Vorgehensweise. Im Folgenden werden die verschiedenen Phasen des Projekts kurz skizziert.

In zwei Voruntersuchungen wurden 170 Kindern aus dritten Klassen schriftliche Standortbestimmungen vorgelegt, in denen diese Muster in operativ strukturierten Übungen (Schöne Päckchen bzw. Entdeckerpäckchen, Zahlenmauern, Zahlenketten, Aufgabenpärchen) fortsetzen und beschreiben sollten. Zusätzlich wurden mit 11 Kindern klinische Interviews zu den Aufgaben und ihren Bearbeitungen durchgeführt. Ziel dieser Voruntersuchungen war es, herauszufinden, wie Kinder vor einer intensiveren unterrichtlichen Behandlung des Themas operative Zahlenmuster beschreiben. Vor dem Hintergrund der Ergebnisse der Voruntersuchungen wurden erste Ideen für Aufgaben zur vertieften Auseinandersetzung mit Beschreibungen von Zahlenmustern im Mathematikunterricht entworfen.

Zwei dieser Aufgabenentwürfe konnten im Rahmen von klinischen Interviews mit 6 Kindern erprobt werden. Die Erfahrungen aus den Interviews flossen ein in die Erstellung einer kurzen, fünf Unterrichtsstunden umfassenden Sequenz zum Beschreiben von Zahlenmustern, die in Zusammenarbeit mit zwei Lehrerinnen in zwei dritten Grundschulklassen erprobt werden konnte. Zusätzlich wurde zu Beginn und am Ende der Unterrichtssequenz eine schriftliche Standortbestimmung durchgeführt. Die einzelnen Unterrichtsstunden bzw. Aufgabenentwürfe wurden hinsichtlich der mit ihnen verbundenen Zielsetzungen evaluiert. Zu diesem Zweck wurden alle Unterrichtsstunden videographiert, außerdem wurden sämtliche Schülerdokumente archiviert und ausgewertet.

Die Auswertung dieser ersten unterrichtlichen Erprobung resultierte in einer Überarbeitung der Unterrichtssequenz und der darin eingesetzten Aufgaben. Die überarbeitete Sequenz konnte dann im Rahmen einer zweiten, umfangreicheren Erprobung in 7 dritten Klassen und einer vierten Klasse eingesetzt werden. Die in der Unterrichtssequenz eingesetzten Aufgaben wurden den beteiligten Lehrkräften in einer zweistündigen Lehrerfortbildung vor der Erprobung vorgestellt. Danach führten die Lehrkräfte die Unterrichtssequenz in Eigenregie durch. Nach Abschluss der Sequenz wurde mit allen Lehrkräften ein Abschlussgespräch zu ihren Erfahrungen mit den eingesetzten Aufgabenvorschlägen geführt und wieder alle Schülerdokumente aller beteiligten Kinder zu Auswertungszwecken archiviert. Die dabei gewonnenen Daten stellten die Grundlage für eine abschließende Evaluation der im Projekt entwickelten Unterrichtsvorschläge zur Arbeit mit und an Beschreibungen von operativen Zahlenmustern im Mathematikunterricht dar.

Aus Platzgründen kann an dieser Stelle nicht detaillierter auf einzelne im Projekt entstandene Aufgabenvorschläge eingegangen werden. In den Unterlagen zu einer Lehrerfortbildung, die frei im Internet zugänglich sind (Link, 2008), können einige Aufgaben aber eingesehen werden.

Literatur

Educational Researcher. (2003). Vol. 32, Nr. 1: *Theme Issue: The Role of Design in Educational Research.*

KMK (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* München, Neuwied: Wolters-Kluwer.

Link, M. (2008). *„Zahlenmuster beschreiben – zwischen individuellen Ausdrucksweisen und normierter Fachsprache“.* Abgerufen am 26.03.201010 unter: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/didaktik/mathe2000/pdf/Symp18/link.pdf

Steinweg, A. S. (2001). *Zur Entwicklung des Zahlenmusterverständnisses bei Kindern. Epistemologisch-pädagogische Grundlegung.* Münster: Lit Verlag.

Steinweg, A. S. (2003). Gut, wenn es etwas zu entdecken gibt – Zur Attraktivität von Zahlen und Mustern. In S. Ruwisch, S. & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule.* (S. 56-74). Offenburg: Mildenberger.

Stokes, Donald. E. (1997*). Pasteur's Quadrant. Basic Science and Technological Innovation.* Washington, D. C.: Brookings Institution Press.

Swan, M. (2006). *Collaborative learning in mathematics: A challenge to our beliefs and practices.* London: NIACE and NRDC.

Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKinney, S. & Nieveen, N. (2006). Introducing educational design research. In Van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKinney, S. & Nieveen, N. (eds.), *Educational Design Research.* (S. 3-7). New York: Routledge.

Verboom, L. (2007). „Mir fällt auf: Du hast die 1 krumm geschrieben!“ In Rathgeb-Schnierer, E. & Roos, U. (Hrsg.), *Wie rechnen Matheprofis? Ideen und Erfahrungen zum offenen Mathematikunterricht.* (S. 167-178). München: Oldenbourg.

Wittmann, E. Ch. (1992). Mathematikdidaktik als ‚design science'. *Journal für Mathematikdidaktik, 13*, S. 55-70.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1990, 1992). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 1 / Band 2.* Leipzig: Klett.

Helmut LINNEWEBER-LAMMERSKITTEN, Aarau

Mathematikdidaktik zwischen Best Practice und Wissenschaft. Überlegungen zum Aufbau eines Mathematikdidaktik-Zentrums für die Schweiz

Mit der Einrichtung fachdidaktischer Zentren wird in der Schweiz momentan ein weiterer Schritt zur Tertiarisierung der Lehrerinnen- und Lehrerbildung vollzogen. An einem solchen Zentrum sind jeweils mindestens eine Pädagogische Hochschule und eine Universität sowie mögliche weitere Partner beteiligt. Ziel ist es, für die Lehrerinnen- und Lehrerbildung genügend Fachdidaktik-Dozierende qualifizieren zu können und die Forschung auf diesem Gebiet zu etablieren. Bis zum Herbstsemester 2010 sollen u.a. das Fachdidaktik-Zentrum für Naturwissenschaft (ETH, Universität Zürich, PH Zürich und weitere Partner) und das Fachdidaktik-Zentrum für Mathematik (PH der Fachhochschule Nordwestschweiz, Universität Basel und weitere Partner) ihre Arbeit aufnehmen. Die Errichtung fachdidaktischer Zentren und namentlich von Masterstudiengängen zur Ausbildung des wissenschaftlichen Nachwuchses ist eine von mehreren Veränderungen in der Schweiz, die für die Mathematikdidaktik relevant sind und auf die ich kurz eingehen werde. Im zweiten Abschnitt werde ich Kerngedanken des Schwerpunktes Mathematikdidaktik im Studiengang Master of Arts in Educational Sciences vorstellen. Während von aussen eine Reihe unterschiedlicher Erwartungen an Mathematikdidaktik herangetragen werden, ergibt sich von innen die Notwendigkeit, aber auch die Chance, neu zu überlegen, was "Mathematikdidaktik" als Wissenschaft und als zentrale Bezugsdisziplin der Lehrerinnen- und Lehrerbildung bedeuten soll, dazu einige Ansätze im dritten Abschnitt.

1. Momentane Veränderungen in der Schweiz, die für die Mathematikdidaktik relevant sind

Die Einrichtung fachdidaktischer Zentren ist vor dem Hintergrund von drei weiteren Entwicklungen in der Schweiz zu sehen, die für die Mathematikdidaktik relevant sind, da sie explizit oder implizit mit gesellschaftlichen Erwartungen an die Mathematikdidaktik verbunden sind. Es sind dies: a) die Eröffnung der Vernehmlassung zu den HarmoS-Bildungsstandards in Mathematik, b) die Erarbeitung eines gemeinsamen Lehrplans für die Deutschschweiz, c) die Tertiarisierung der Lehrerinnen- und Lehrerbildung.

Die Entwicklung von Kompetenzmodellen und die Ausarbeitung eines Vorschlags zu nationalen Bildungsstandards für das Fach Mathematik ist im Jahr 2005 einem Konsortium aus Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktikern aus den drei grossen Kulturregionen der Schweiz übertragen worden. Mittlerweile liegen die Ergebnisse vor (Linneweber-Lammerskitten, H., Wälti, B. & Moser Opitz, E., 2009) und sind Gegenstand einer Vernehmlassung, die am 25.1.2010 begonnen hat (www.edk.ch). Es ist abzusehen, dass die Einführung der Bildungsstandards nur dann erfolgreich sein wird, wenn sich der Mathematikunterricht – global betrachtet - vor allem in drei Hinsichten verändert: Um (fast) alle Schülerinnen und Schüler mit einer mathematischen Grundbildung auszustatten (Bildungsstandards als Mindest- resp. Basisstandards) sind tiefgreifende Differenzierungsmassnahmen vorzusehen; die Förderung der nicht-kognitiven Dimensionen mathematischer Kompetenz (DeSeCo, 2003, S. 2, Weinert, 2001, S.27) - insbesondere Motivation, Interesse, Teamfähigkeit - ist als konstitutiver Bestandteil eines kompetenzorientierten Unterrichts zu verstehen und schliesslich sollen auch bisher weniger beachtete Kompetenzaspekte, wie z.B. das Erforschen und Explorieren, einen grösseren Stellenwert bekommen. Aus dieser Situation entstehen Erwartungen an die Mathematikdidaktik als Institution und *Bezugsdisziplin der Lehrerinnen- und Lehrerbildung*: bereits fertige, möglichst leicht zu verstehende und einfach anzuwendende Instrumentarien zur Verfügung zu stellen, die in erster Linie "praxistauglich" und erst in zweiter Linie wissenschaftlich fundiert sein sollen. Im Extrem findet eine dreifache Verengung des Blicks auf die Mathematikdidaktik statt: die Aus- und Weiterbildung wird nicht nur als ihr Kerngeschäft, sondern als ihr einziger Zweck angesehen, der fachdidaktische Anspruch wird stark methodisch interpretiert und die Wechselbeziehung zwischen Theorie und Praxis zugunsten der Praxis einseitig aufgelöst.

Mit der Erarbeitung eines gemeinsamen Lehrplans für die 21 Kantone der Deutschschweiz sind ebenfalls Erwartungen an die Mathematikdidaktik verbunden: Anders als bei der Implementierung der Bildungsstandards wird sie hier nicht als Bezugsdisziplin der Lehrerinnen- und Lehrerbildung, sondern - wie schon bei der Erarbeitung der HarmoS-Kompetenzmodelle und Bildungsstandardvorschläge - als Partnerin der Bildungspolitik gesehen. Hier wird das wissenschaftliche Selbstverständnis der Mathematikdidaktik als Hochschulinstitution zwar anerkennt und erwünscht, gleichzeitig aber den bildungspolitischen Vorgaben untergeordnet.

Mit der Gründung von Pädagogischen Hochschulen hat die Schweiz - global betrachtet – einen äusseren Tertiarisierungsschritt vollzogen. Dass dieser durch eine innere Tertiarisierung zu ergänzen ist (Forneck u.a., 2009, S.211f.), bildet eine grosse, nicht selten unterschätzte Herausforderung. Sie besteht bezogen auf die Mathematikdidaktik m.E. in nichts Geringerem als in dem ernsthaften Versuch, sich selbst als eigenständige wissenschaftliche Disziplin zu konstituieren und sich damit gleichzeitig (in einem wohlverstandenen Sinne) von den oben genannten Erwartungen zu emanzipieren.

2. Masterstudiengang Mathematikdidaktik als erster Schritt zu einem Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik

Die Pädagogische Hochschule Nordwestschweiz hat zusammen mit der Universität Basel das Mandat erhalten, einen Studiengang "Master of educational Sciences" mit Schwerpunkt Mathematikdidaktik als ersten Schritt zu einem institutionellen, vor allem aber geistigen Kompetenzzentrum zu konzipieren. Der Studiengang (120ECTS) ist sowohl für Lehramtstudierende mit Bachelorabschluss als auch für Fachstudierende mit abgeschlossenem Mathematikstudium offen und gliedert sich in einen allgemeinen Kernbereich (40ECTS), einen Schwerpunktbereich Mathematik und Mathematikdidaktik (40ECTS) und in einen Bereich (40ECTS), der für die Masterarbeit und die Masterprüfung vorgesehen ist. Der Schwerpunktbereich enthält einen grossen Anteil begleiteten Selbststudiums, so dass er auch bei kleinen Studierendenzahlen durchgeführt werden kann (Infos: http://www.fhnw.ch/ph/isek/professuren/Mathematikdidaktik).

3. Mathematikdidaktik zwischen Best Practice und Wissenschaft

Mit der Tertiarisierung der Lehrerbildung in der Schweiz ist der Schritt von einer an Best Practice orientierten Meisterlehre zu einer auf einem wissenschaftlichen Paradigma beruhenden Lehrerbildung zumindest äusserlich vollzogen. Geblieben ist indessen vielerorts die Vorstellung, dass die Mathematikdidaktik, die ihre Legitimation in der Kultur seminaristischer Ausbildung durch ihre enge Bindung an die Lehrerbildung erhielt, auch in Zukunft nur so weit legitimiert ist, als sie (vor allem methodische) Bedürfnisse des Mathematikunterrichts bedient. Tatsächlich ist das Aufgabenfeld der Mathematikdidaktik aber weiter geworden. So kann die Mathematikdidaktik ihrer Aufgabe als Partnerin der Bildungspolitik (z.B. bei der Erstellung von Kompetenzmodellen, Bildungsstandards, Lehrplänen) nur gerecht werden, wenn ihre Expertise über die Aus- und Weiterbildung von Lehrpersonen hinausgeht. Auch ist es gefährlich, wenn auch verständlich, den Wortbestandteil "Fach" im Wort "Fachdidaktik" auf das Schulfach Mathematik und nicht auf das universitäre Studienfach resp. die universitäre Disziplin zu beziehen. Verständlich deshalb, weil es falsch wäre, Mathematikdidaktik einfach als Vermittlerin universitären mathematischen Wissens und Könnens zu verstehen – gefährlich deshalb, weil sich die Fachdidaktik mit der Bindung an ein real existierendes Schulfach von der Bildungspolitik zu sehr abhängig macht: m.E. ist z.B. die Physikdidaktik in ihrer Existenz nicht davon abhängig, ob es Physik als eigenständiges Schulfach (oder bloss als Teil im Bereich Naturwissenschaften) gibt.

Welches Verständnis von Mathematikdidaktik soll einem Kompetenzzentrum zugrunde liegen? Die zur Zeit im deutschsprachigen Raum verwendeten Explikationen, Definitionen und Definitionsstücke unterscheiden sich nur in Nuancen und doch sind diese Nuancen für eine differenzierte Sichtweise auf Mathematikdidaktik nützlich. Das Verständnis von Mathematikdidaktik, welches dem Masterstudiengang (als revidierbare und erweiterbare Konzeption) zugrunde liegt, bezieht sich weder ausschliesslich auf den Mathematikunterricht als Schulfach, noch auf das Studienfach, noch auf eine Vermittlung/Aufbereitung universitären Wissens für die Schule, sondern akzentuiert einen Aspekt der Mathematik selbst:

"Mathematikdidaktik betrachtet die Mathematik, ihre Teil- und Nachbardisziplinen und mögliche Anwendungsbereiche unter dem Aspekt der Lehr- und Lernbarkeit. Als Bezugsdisziplin für den Mathematikunterricht erforscht, entwickelt und erschliesst sie geeignete Sachthemen, Lernziele, Unterrichtsmethoden, Lernumgebungen und Lehrmittel. Sie bildet die wissenschaftsfundierte Grundlage für die Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrpersonen."

Literatur

DeSeCo (2003). *Summary of the final report "Key Competencies for a Successful Life and a Well-Functioning Society"* Zugriff am 15.02.2006 unter http://www.portal-stat.admin.ch/deseco/deseco_finalreport_summary.pdf

Forneck, H. J.; Düggeli, A.; Künzli David, C.; Linneweber-Lammerskitten, H.; Messner, H.; Metz, P. (Hrsg.) (2009). *Professionalisierung von Lehrerinnen und Lehrern. Orientierungsrahmen für die Pädagogische Hochschule FHNW*, Bern: hep

Klieme, E., u.a. (2003): *Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise* Zugriff am 15.02.2009 unter http://www.dipf.de/publikationen/volltexte/zur_entwicklung_nationaler_bildungsstandards.pdf

Linneweber-Lammerskitten, H., Wälti, B. & Moser Opitz, E. (2009). *HarmoS Mathematik. Wissenschaftlicher Kurzbericht und Kompetenzmodell.* Provisorische Fassung (vor Verabschiedung der Basisstandards) Stand: 13. Dezember 2009, Bern: Schweizerische Konferenz der kantonalen Erziehungsdirektoren (EDK/CDIP) Zugriff am 15.02.2010 unter http://www.edudoc.ch/static/web/arbeiten/harmos/math_kurzbericht_2009_d.pdf

Weinert, F. E. (2001): Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen*, Weinheim und Basel: Beltz Verlag

Miriam LÜKEN, Hannover

Ohne „Struktursinn“ kein erfolgreiches Mathematiklernen – Ergebnisse einer empirischen Studie zur Bedeutung von Mustern und Strukturen am Schulanfang

In der mathematikdidaktischen Literatur wird das Erkennen von Mustern und Strukturen häufig in einen Zusammenhang mit mathematischer Leistung gebracht. So wird leistungsstarken Kindern ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen zu-, Kindern mit Schwierigkeiten beim Rechnen hingegen eine Fähigkeit zur Strukturerkennung und Strukturnutzung abgesprochen (vgl. z.B. Wittmann & Müller 2007; Schipper 2002). Analysen nationaler und internationaler Literatur zeigen jedoch, dass dieser vielfach postulierte Zusammenhang empirisch nicht nachgewiesen wurde.

In der in diesem Beitrag beschriebenen und am Schulanfang verorteten Studie wurde daher folgenden Fragen nachgegangen: Gibt es einen empirisch nachweisbaren Zusammenhang zwischen mathematischen Kompetenzen und Fähigkeiten bzgl. Mustern und Strukturen am Schulanfang? Worin unterscheiden sich Erstklässler beim Umgehen mit Mustern und Strukturen? Welche Fähigkeiten bringen Schulanfänger überhaupt mit? Neben dem in diesem Beitrag dargestellten quantitativen Teil wurden insbesondere auch die Lösungswege, Erklärungen und Strategien näher betrachtet, um Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den kindlichen Muster- und Strukturfähigkeiten transparent zu machen.

Unter einem **Muster** soll das geordnete Ganze, jegliche räumliche oder numerische Regelmäßigkeit verstanden werden. Die Art und Weise, in der das Ganze gegliedert ist, die Beziehung zwischen den verschiedenen Bestandteilen, sei die **Struktur** des Musters.

Instrumente und Methoden

Für die Studie wurden mehrere Aufgaben entwickelt, in denen die Kinder auf verschiedene Weisen Muster und Strukturen erfassen, nutzen, reproduzieren und selbst produzieren, sowie Muster fortsetzen sollten. Die Aufgabenformate waren dabei stark an Anforderungen aus dem mathematischen Anfangsunterricht angebunden. In Form eines halbstandardisierten Einzelinterviews wurden mit diesen Muster- & Strukturaufgaben die Fähigkeiten von 74 Schulanfängern bzgl. Mustern und Strukturen in den ersten sieben Wochen nach der Einschulung erhoben. Bereits vor den Sommerferien war mit den Kindern im Kindergarten der „Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung“ (OTZ; van Luit, van de Rijt & Hasemann 2001) durchgeführt worden. Nach zwei Jahren, am Ende des 2. Schuljahres, wurde die mathematische Leistung derselben Kinder mit dem „Deutschen Mathematiktest für 2. Klassen“ erhoben (DEMAT 2+; Krajewski, Liehm & Schneider 2004). Die Antworten und Lösungen der Muster- & Strukturaufgaben wurden zunächst quantitativ ausgewertet. In einem zweiten Schritt wurden die kindlichen Sichtweisen und Strategien quartilweise mit qualitativen Analysemethoden näher ausgewertet und miteinander verglichen. Letztere Auswertungen können im Rahmen dieses Beitrags nicht ausführlich beschrieben werden, die Ergebnisse fließen jedoch in die Überlegungen zum Struktursinn mit ein.

Ergebnisse

Korrelationsanalysen ergeben einen mittelhohen, hochsignifikanten Zusammenhang zwischen der Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) und den Fähigkeiten bzgl. Mustern und Strukturen (gemessen mit den Muster- & Strukturaufgaben) am Schulanfang von r = 0,61. Teilt man den OTZ inhaltlich in zwei Teile, so korreliert der Teil zum Mengenwissen (r = 0,53) niedriger mit den Muster- und Strukturfähigkeiten als der Teil zum Zahlenwissen (r = 0,60). Die Rechenleistung am Ende der 2. Klasse (DEMAT 2+) korreliert mit r = 0,57 ebenfalls hochsignifikant in einem ähnlichen Größenbereich mit den Muster- & Strukturaufgaben. Die Tabelle gibt diese Zusammenhänge sowie jeweils die niedrigste und höchste Korrelation der Muster- & Strukturaufgaben mit den Subtests von OTZ und DEMAT 2+ wieder.

	Muster- & Strukturaufgaben
OTZ (gesamt)	**0,61****
Σ Mengenwissen	0,53**
Σ Zahlenwissen	0,60**
Subtest „Vergleichen“	*0,29**
Subtest „Zahlwörter benutzen“	*0,52***
DEMAT 2+ (gesamt)	**0,57****
Subtest „Längenvergleich”	*0,31**
Subtest „Halbieren”	*0,47***

Tabelle 1: Korrelationen zwischen den Muster- & Strukturaufgaben und der mathematischen Leistung, gemessen mit dem Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung (OTZ) sowie dem Deutschen Mathematiktest für 2. Klassen (DEMAT 2+); *signifikant **hochsignifikant

Unter der Annahme, dass Fähigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen am Schulanfang das weitere Mathematiklernen beeinflussen, kann mit Hilfe von linearen Regressionsanalysen die Qualität der Muster- & Strukturaufgaben als Prädiktor für die Rechenleistung Ende Klasse 2 (DEMAT 2+) überprüft werden. Es zeigt sich, dass 31 % der Varianz in den Mathematikleistungen des zweiten Schuljahres durch Muster- und Strukturfähigkeiten bereits am Schulanfang vorhergesagt werden können (*korr.* $R^2 = 0{,}31$; $p<.01$). Zum Vergleich: Der OTZ (an derselben Stichprobe erhoben) erklärt mit 34 % nur wenig mehr der Unterschiede im DEMAT 2+ (*korr.* $R^2 = 0{,}34$; $p<.01$). Auch Krajewski (2003) oder Dornheim (2008), die die besondere Bedeutung des Zahlenvorwissens für das weitere Mathematiklernen betonen, liegen mit der Varianzaufklärung ihrer Aufgaben in einem ähnlichen Größenbereich (zwischen 35 % und 38 %). Eine multiple Regressionsanalyse bestätigt den Einfluss von Muster- und Strukturkompetenzen auf das Rechnenlernen. Gemeinsam erklären die Muster- & Strukturaufgaben *und* die Leistung im OTZ 43 % der Varianz im DEMAT 2+ (*korr.* $R^2 = 0,\ 43$; $p<.01$), wobei die standardisierten Beta-Koeffizienten, deren Wert als relative Wichtigkeit der Variablen für die Vorhersage interpretiert werden können, zeigen, dass der OTZ (Beta = .41) zwar mehr, aber eben nur wenig mehr als die Muster- & Strukturaufgaben (Beta = .36) zur Vorhersage der Leistung im DEMAT 2+ beiträgt.

Vorliegende Studie kann damit den in der mathematikdidaktischen Literatur postulierten Zusammenhang zwischen mathematischer Leistung und Fähigkeiten im Umgang mit Mustern und Strukturen auf einem mittelhohen Niveau bestätigen. Darüber hinaus weist sie auf die Bedeutung nicht-numerischer, eher bereichsunspezifischer Kompetenzen für mathematisches Lernen hin. Das Wissen über Zahlen mag zwar die wichtigste Vorläuferfertigkeit für die mathematische Entwicklung sein, es gibt aber weitere Basiskompetenzen – wie eben ein kompetenter Umgang mit Mustern und Strukturen – die von essentieller Bedeutung sind. Aus diesen Ergebnissen, den Befunden der qualitativen Auswertung, sowie Ergebnissen anderer Studien zu kindlichen Strukturierungsfähigkeiten muss die Schlussfolgerung gezogen werden:

Wir besitzen einen „Struktursinn“!

Struktursinn bezeichnet, in Anlehnung an den Begriff des Zahlensinns, die Leichtigkeit und Beweglichkeit im Umgang mit Mustern und Strukturen. Der englische Begriff des „structure sense“ wurde von Linchevski & Livneh (1999) in einem Artikel geprägt, in dem sie Schwierigkeiten von Schülern mit der Nutzung von Wissen über arithmetische Strukturen beim Algebralernen beschreiben. Hoch & Dreyfus (2004) entwickelten die Idee des Struktursinns weiter und übertrugen ihn auf die High School Algebra. Der Begriff wird nun für die frühe mathematische Entwicklung adaptiert – es handelt sich also sozusagen um einen „early structure sense“ – und ein erster Versuch gestartet, das Konstrukt Struktursinn mit Inhalt zu füllen. Das Umgehen mit Mustern und Strukturen erfordert eine Vielzahl von Fähigkeiten, bezogen auf die frühe mathematische Entwicklung umfassen diese:

- das Wiedererkennen einer Anordnung als bereits bekanntes Muster oder Struktur (z.B. Würfelbilder, Fingermuster, ...), insbesondere das Wiedererkennen eines bekannten Musters in seiner einfachsten Form und als Teil einer komplexeren Anordnung;
- das Aufteilen eines Musters in Teile (Struktureinheiten);
- das Erkennen wechselseitiger Verbindungen, Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den Struktureinheiten (z.B. Finden von Regelmäßigkeiten, Entdecken von Ähnlichkeiten / Unterschieden, ...);
- das Integrieren der Struktureinheiten und Betrachten des Musters als Ganzes (z.B. um seine Mächtigkeit zu bestimmen, es fortzusetzen, ...).

Die Ergebnisse vorliegender Studie zeigen die besondere Bedeutung von Muster- und Strukturkompetenzen für das frühe Mathematiklernen. Das Konstrukt des Struktursinns mit seiner ersten inhaltlichen Ausdifferenzierung erforderlicher Fähigkeiten kann dabei als nützlicher Rahmen für weitere Forschung und didaktische Konsequenzen dienen.

Literatur

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: Der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten*. Berlin: Logos.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in High School Algebra: The effect of brackets. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Hrsg.), *Proc. 28th Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, S. 49 - 56). Bergen, Norway: PME.

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Hamburg: Kovač.

Krajewski, K., Liehm, S. & Schneider, W. (2004). *DEMAT 2+. Deutscher Mathematiktest für zweite Klassen. Manual.* Göttingen: Beltz.

Linchevski, L. & Livneh, D. (1999). Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173 - 196.

Schipper, W. (2002). Thesen und Empfehlungen zum schulischen und außerschulischen Umgang mit Rechenstörungen. *JMD 23*(3/4), 243 - 261.

van Luit, J., van de Rijt, B. & Hasemann, K. (2001). *OTZ. Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Manual.* Göttingen: Hogrefe.

Wittmann, E.Ch. & Müller, G.N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther et al. (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42 - 65). Berlin: Cornelsen Verlag.

JUERGEN MAASZ, Linz

Bologna - für oder gegen die LehrerInnenbildung in Österreich?

1. Abstract

Die österreichische Bundesregierung hat beschlossen, dass nun auch die Lehramtsstudiengänge nach dem in Bologna vereinbarten Schema Bakkalaureat/Master angeboten werden sollen. Bis zum Jahreswechsel 2009/2010 sollte eine Kommission dazu einen Rahmenvorschlag erstellen. Mit dieser Reform werden voraussichtlich nicht nur die derzeitigen Lehramtstudien neu gestaltet werden, sondern auch das Verhältnis von Universitäten und Pädagogischen Hochschulen. Letztere sind in Österreich zur Zeit bekanntlich in ihrer rechtlichen Struktur, ihrer inhaltlichen Ausrichtung, ihrem Niveau und nicht zuletzt der Berechtigung zur Vergabe von Abschlusszeugnissen sehr unterschiedlich. In meinem Beitrag thematisiere ich die Ausgangslage und den Kommissionsentwurf.

2. Vorbemerkung

Dieser Beitrag versteht sich als Kurzinformation zu einem bestimmten, aktuellen Stand der bildungspolitischen Debatte in Österreich. In der Kürze lassen sich selbstverständlich viele Überlegungen nur als Thesen formulieren, die an anderer Stelle ausführlicher begründet oder empirisch belegt sind. Wer die ausführliche Version oder empirische Belege haben möchte, wende sich bitte an mich: juergen.maasz@jku.at

3. Ausgangslage

Das zentrale Moment der österreichischen Bildungspolitik nach Abschluss der Expansionsphase in den siebziger Jahren ist „Geld sparen". Die Hauptfrage in diesem Zeitraum war nicht: „Wie kann die Bildung verbessert werden?", sondern einfach: „Wo kann im Bildungsbereich wie viel gespart werden?" Im Angesicht von mehr fertig ausgebildeten LehrerInnen wurden nicht neue Stellen an Schulen geschaffen, sondern Gehälter gekürzt. Die Position der Lehrergewerkschaft bei Gehaltsverhandlungen war wegen der vielen arbeitslosen LehrerInnen schlechter als in der Ausbauphase, in der LehrerInnenmangel herrschte. Zur öffentlichen Unterstützung und Begründung der Sparpolitik hat das Ministerium seit vielen Jahren pauschal alle LehrerInnen als faul und dumm diffamiert – mit natürlich fatalen Folgen für deren Motivation und Arbeitsbereitschaft. Schulgebäude sind baulich verfallen – es regnet hinein und im Winter wird wegen Baumängeln und schlechter Isolation viel Energie vergeudet. Auch an den Universitäten wurde und wird kräftig gespart – die zentrale Bologna-Idee "Studienzeitverkürzung" passt in diese Absicht gut hinein.

Drei andere wesentliche Momente der Entwicklung in Österreich sollen hier ebenfalls kurz angedeutet werden, das Verhältnis von formaler Berechtigung und Qualität der Bildungsabschlüsse, die grundsätzliche Orientierung und Aufgabenstellung von Schulen sowie die Schulformdebatte (Gesamtschule?).

3.1. Formale und inhaltliche Qualifikation

Bemerkenswert ist zunächst das geänderte Verhältnis von steigender formaler Durchlässigkeit und damit formalem Wert der Bildungsabschlüsse einerseits und sinkender inhaltlicher Qualität andererseits. Spätestens mit der Einführung der Berufsreifeprüfung oder gar der seit langem geforderten direkten Studienberechtigung durch einen Lehrabschluss können fast alle Menschen in Österreich fast jedes Studium beginnen (bis auf Ausnahmen wie Medizin). Den Universitäten wird dann vorgeworfen, dass es StudienabbrecherInnen gibt. Im Zuge des Sparens wird sogar laut überlegt, dass für eine Lehrveranstaltung, in der nur x% den Schein erhalten, auch nur x% bezahlt wird. In konsequenter Verfolgung dieser bildungspolitischen Linie werden alle Menschen studieren dürfen und es werden alle einen Studienabschluss erhalten – der dann aber nix mehr wert sein wird. Zu dem Zeitpunkt stehen jene BildungspolitikerInnen, die für diesen Nonsens verantwortlich sind, schon nicht mehr zur Wahl. Es stört sie deshalb jetzt nicht, wenn und während sie allen viel versprechen.

3.2. Quo Vadis "Schule"?

Der zweite hier noch anzuführende Punkt ist die offene Grundsatzfrage nach den vorrangigen Aufgaben des Schulsystems im Ganzen. Seit vielen Jahren verschlechtert sich die Situation der Jugend, wie die einschlägigen Studien zu Familienpolitik, Jugend und Medien etc. zeigen. Die Gesellschaft reagiert darauf zum Teil mit der Forderung an die Schulen, mehr Erziehungsarbeit zu leisten. Sie folgt damit einem Trend, gesellschaftliche Probleme zu pädagogisieren: Wenn auf dem Weg zur Schule Kinder überfahren werden, braucht es mehr Verkehrserziehung, wenn eine Klimaveränderung droht, mehr Umwelterziehung, wenn soziale Konflikte zu Gewalttätigkeit führen, mehr soziale Kompetenz etc. Richtig daran ist, dass auch Erziehung einen Beitrag zur Problemlösung leisten kann. Falsch ist, dass Schulen ohne zusätzliche Mittel dazu in der Lage sind. Und ganz ärgerlich und falsch ist die politisch-sparsame Motivation für solche Pädagogisierung von gesellschaftlichen Problemen, die darin besteht, dass sie so tut, als sei der Appell an die Schulen ein vollwertiger Ersatz für Politik. Klimapolitik ist um viele Größenordnungen schwerer und teurer als eine entsprechende Anforderung an die Schulen.

Sehr stark im Widerspruch zur (Re-)Pädagogisierung von Schulen stehen Forderungen, die eher aus wirtschaftlicher Richtung kommen und auf verbesserte fachliche Qualifikation bzw. Kompetenz zielen, die zur wirtschaftlichen Konkurrenzfähigkeit im Zeichen der Globalisierung, der internationalen Märkte, der Standortpolitik etc. beitragen sollen. Das mittelmäßige Abschneiden bei TIMMSS- und PISA-Tests, an deren Aussagekraft seitens der Wirtschaft nicht gezweifelt wird, hat hier zu verstärktem Druck geführt. Mehr Erziehung, Sozialarbeit, psychologische Betreuung, soziale Kompetenz und Medienkompetenz und bessere Fachausbildung im naturwissenschaftlich-technischen Bereich gleichzeitig geht offenbar nicht. Angesichts der anhaltenden Demotivierung der LehrerInnen durch die Bildungspolitik und der zur Erreichung all dieser Ziele notwendigen, aber sich in weiter Ferne befindlichen Qualifikationen, die durch keine LehrerInnenausbildung vermittelt werden können (professionelle Sozialarbeit oder psychologische Beratung beispielsweise setzen jeweils eine mehrjährige Ausbildungen voraus) ist es völlig klar, dass die Schulen nicht gleichzeitig alle von verschiedenen Seiten gewünschten Ziele (viele habe ich hier nicht einmal erwähnt, etwa klassische Bildungsziele oder für die gesellschaftliche Zukunft wichtige wie die/der kritische BürgerIn) erreichen und dabei noch mit weniger Geld auskommen können. Pointiert formuliert: bevor über eine Reform der LehrerInnenausbildung entschieden werden kann, muss erst einmal diskutiert und entschieden werden, was LehrerInnen eigentlich können und in den Schulen tun sollen.

3.3. Gesamtschuldebatte

Damit ist auch schon der Übergang zum dritten Punkt nahe gelegt: In welcher Schulform soll gearbeitet werden? Im bisherigen Schulsystem? In einer Gesamtschule? StufenlehrerInnen oder LehrerInnen für alle Schulstufen? Die Debatte über Gesamtschulen in Österreich ist wiederum hauptsächlich durch finanzielle Erwägungen geprägt: Die HauptschullehrerInnen samt ihrer starken und gut organisierten Lobby wünschen als GesamtschullehrerInnen so gut bezahlt zu werden wie die GymnasiallehrerInnen und der Finanzminister möchte alle, die künftig in einer Schule für die 10- bis 14jährigen unterrichten, mit dem jetzigen Gehalt der HauptschullehrerInnen bezahlen. Die Wirtschaft sieht nach den PISA-Ergebnissen den Wirtschaftsstandort Österreich in negativem Licht und möchte Verbesserungen. Dabei wird wie sonst nach der "best practice" geschaut, wo in anderen

Ländern es besser geht: Die OECD meint, Gesamtschulen seien ein Weg zu besseren PISA-Ergebnissen. Also macht die Wirtschaft Druck in Richtung Gesamtschule. Pädagogische oder inhaltliche Überlegungen zur inneren Struktur, zur Verbesserung von Lernchancen oder Qualifikationen durch Gesamtschulen werden in Österreich nicht debattiert. Das Label und das Budget stehen im Mittelpunkt.

4. Bologna kommt...

Eine Reform der Ausbildung von LehrerInnen nach dem Bologna-Muster führt nun dazu, dass – je nach Perspektive – eine Chance oder der Zwang gegeben ist, all die offenen Probleme anzugehen und mit einer neuen Struktur zu lösen. Letztes Jahr hat im Auftrag der Regierung eine Gruppe von BeraterInnen ein Reformkonzept erarbeitet, dass Weihnachten 2009 vorgelegt werden sollte. Das Konzept selbst ist derzeit (März 2010) noch immer nicht präsentiert worden, wohl aber eine etwas vage Vorabkurzfassung, die nach meiner Einschätzung wohl eher den Charakter eines Versuchsballons hat (siehe http://www.stvg.at/ho-me.nsf/Alles/F1AE218417 DAF6 DC1257693002E3 9F7/$file/Empfehlungen%20ExpGr221209.pdf). Danach soll z. B. eine Ausbildung neu wesentlich pädagogisch orientiert sein, Pädagogische Hochschulen und Universitäten sollen in Form von Clustern zusammenarbeiten. Das Ganze ist (noch) zu vage, um wissenschaftlich zu analysiert zu werden.

Allerdings müssen wir es ernst zu nehmen, zumal in Verbindung mit einer großen – nicht wissenschaftlichen – Umfrage unter LehrerInnen, nach der in Österreich Pädagogische Hochschulen deutlich besser LehrerInnen ausbilden als Universitäten, der bildungspolitische Weg erkennbar wird, den die Regierung beschreiten möchte: Ein pädagogisch orientiertes Kurzstudium für alle LehrerInnen und eine einheitliche Schulform für alle 10 bis 14jährigen - kurz: eine Sparpolitik mit sehr viel Einsparungspotenzial, weil künftig die Art der Tätigkeit und nicht die formale Qualifikation für die Bezahlung der LehrerInnen relevant sein wird.

Und die Mathematik? Die Fachausbildung wird drastisch reduziert, Mathematik wird Teil einer Domäne "Mathematik-NAVI-Technik". Für die fachliche Ausbildung dieser Domäne stehen statt wie bisher jeweils ca. 60 bis 70 Semesterwochenstunden (=SWS) Biologie, Chemie, Mathematik. Physik und Technik (für den Titel "Dipl.Ing." sind es weit mehr SWS) insgesamt maximal 100 SWS zur Verfügung. Im ExpertInnenpapier habe ich keinen Hinweis darauf gefunden, wie auf diese Weise die durchschnittlichen Kenntnisse und Fähigkeiten der SchülerInnen in dieser Domäne verbessert werden sollen.

Markus MANN, Karl-Theodor-v.-Dalberg-Gymnasium, Aschaffenburg

Das Umfrageprojekt – Ein Projekt im Mathematikunterricht

Im Rahmen eines Unterrichtsprojekts in der siebten Jahrgangsstufe, des „Umfrageprojekts“, wurden in einer schulinternen Umfrage am Friedrich-Dessauer-Gymnasium in Aschaffenburg Daten zu Fragen aus Alltag und Umwelt von Schülerinnen und Schülern erhoben und ausgewertet. Die Auswertung erfolgte auf Basis des Lehrplaninhalts *Mathematik im Alltag: Daten, Diagramme und Prozentrechnung* (Leitidee: Daten und Zufall).

1. Die Projektmethode

Die Durchführung des Umfrageprojekts orientierte sich an dem Projektverständnis von Frey (2007), Ludwig (1998) und Kilpatrick (1918). Letzterer definiert das Projekt als „planvolles Handeln aus dem ganzen Herzen, das in einer sozialen Umgebung stattfindet.“ Die Planungsgrundlage für das Projekt bildete das Konzept der Projektmethode von Karl Frey (2007). Ein Projekt besteht nach Frey aus sieben Komponenten: (1) Projektinitiative, (2) Auseinandersetzung mit der Projektinitiative, (3) Entwicklung des Betätigungsgebietes, (4) Verstärkte Aktivitäten im Betätigungsgebiet (Projektdurchführung), (5) Abschluss des Projektes, (6) Fixpunkte und (7) Metainteraktion. Ludwig (1998) zeigt, dass sich dieses Konzept auch für den mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht eignet. Dazu ergänzt er das Frey’sche Konzept um Komponenten wie *Themenwahl & -strukturierung*, *Bewertungen* und *Projektabschluss & -berichte*.

2. Projektdurchführung

Zu Beginn des Projekts brachten die Schüler in der Phase der *Auseinandersetzung mit der Projektinitiative* mögliche Fragestellungen ein und diskutierten und entwickelten diese. Im Anschluss (*Entwicklung des Betätigungsgebietes*) bildeten sich die Rahmengruppen und Umfragethemen sowie Fragestellungen wurden ausformuliert. Die Formulierungen mündeten in einem Fragebogen, der gemeinsam entworfen und erprobt wurde (vgl. Ludwig & Müller, 2008). In der hierauf folgenden Phase (*Verstärkte Aktivitäten im Betätigungsgebiet*) wurde die Umfrage durchgeführt, d.h. die Daten wurden von den Schülern der Projektgruppen erhoben.

Die insgesamt sieben Rahmengruppen (s.a. Ludwig, 1998) befassten sich mit den Themen *Körpergröße*, *Taschengeld*, *Handykosten*, *Handymarken*, *Bundestagswahlen*, *Mediennutzung* und *Lieblingsfach*. Aus ökonomischen Gründen wurden die Daten zu allen Fragen mit einem einzigen Fragebogen erhoben.

Im Rahmen der Durchführung wurden Daten von ca. 400 Schülern per Fragebogen erhoben werden. Dazu wurden zuerst in den Pausen einzelne Schüler, sowie später auch ganze Schulklassen von den Projektmitgliedern befragt. Von den Fragebögen konnten schließlich 325 Fragebögen elektronisch erfasst und ausgewertet werden. Für die elektronische Datenerfassung arbeiteten alle Gruppen zusammen. Die Auswertung in den Projektgruppen erfolgte mit den Tabellenkalkulationsprogrammen (TKP) *Excel* und *OpenOffice Calc*. Da die Schüler über keine Vorkenntnisse im Umgang mit einem TKP verfügten, erfolgte in der unterrichtlichen Begleitung des Projekts eine Einführung in die wichtigsten Funktionen der Programme. Außerdem wurde im Unterricht der Vorteil des Kodierens von Daten für eine ökonomische Datenerfassung diskutiert.

Für die statistische Auswertung wurden die Daten von jeweils etwa 50 bis 60 Schülern der Jahrgangsstufen 5 bis 10 berücksichtigt. Das Geschlechterverhältnis war zwar ungleich zugunsten der männlichen Schüler verteilt, entsprach aber etwa dem Verhältnis der Schule. Die Auswertungsarbeit wurde unterstützt durch Arbeitsaufträge für die Rahmengruppen, die u.a. die Recherche von Vergleichsdaten vorsah, wie z.B. die durchschnittliche Körpergröße deutscher Jugendlicher, Empfehlungen für die Höhe des Taschengeldes und die Ergebnisse der Bundestagswahlen 2009, die in unmittelbarem zeitlichen Zusammenhang mit der Erhebung stattfanden.

Zum Abschluss des Projekts erstellten die Rahmengruppen Projektberichte. Die erste Fassung der Berichte wurde korrigiert und mit Verbesserungsvorschlägen zurückgegeben. Die zweite, endgültige Fassung stellte die Grundlage für die Abschlusspräsentation dar (*Abschluss des Projektes*, nach Frey, 2007). Im Rahmen dieser Präsentation sollte jede Gruppe ihre Ergebnisse mit Hilfe eines Posters darstellen. Alle Poster wurden zum Abschluss des Projekts im Foyer des Schulgebäudes ausgestellt (Ludwig, 1998).

Die Leistungen der Schüler im Rahmen der Projektdurchführung wurden auch bewertet. Dazu wurden fünf Teilleistungen ermittelt, aus denen eine Gesamtnote gebildet wurde: das erste Handout, das überarbeitete Handout (*Projektbericht*), die Präsentation, die Gesamtleistung der Gruppe, sowie eine individuelle Mitarbeitsnote, in die Faktoren wie Engagement, Sozialverhalten, Einhalten von Terminen, Übernahme besonderer Aufgaben und sonstige Beiträge zum Gelingen des Projekts einflossen (vgl. Ludwig, 1998). Das Notenspektrum wurde damit gut abgedeckt und die Notengebung erfolgte differenziert. Die gute Durchschnittsnote von 2,46 würdigt das hohe Engagement und den großen Arbeitseinsatz der beteiligten Schülerinnen und Schüler.

3. Ergebnisse der Projektgruppen

Die erhobenen Daten ermöglichten allen Rahmengruppen eine detaillierte Auswertung der Daten, beispielsweise unter Berücksichtigung des Alters und des Geschlechts der Schüler. So konnten Fragestellungen hinsichtlich verschiedener Faktoren beantwortet werden (bis hin zu einer klassierten Verteilung der Körpergrößen). Die Ergebnisse der Rahmengruppe „Bundestagswahl“ erbrachten einen klaren „Wahlsieg“ der CSU, die insbesondere bei jüngeren Schülern deutlich in Führung lag. In höheren Jahrgängen erreichte die Partei „Die Grünen“ annähernd gleiche Werte. Diese Projektgruppe stellte fest, dass in einigen Jahrgängen nur Drei-Parteien-Koalitionen möglich gewesen wären. Ein Vergleich mit den Ergebnissen von „Jugendwahlen“ wurde vorgenommen und die „Kanzlerfrage“ eindeutig zugunsten der Kanzlerin beantwortet.

Die Rahmengruppe, die sich mit der Körpergröße von Schülerinnen und Schülern befasste, konnte die Daten des statistischen Bundesamtes hinsichtlich der Altersverteilung der Körpergröße von Jugendlichen gut reproduzieren. Die Abweichungen der erfragten Ergebnisse wichen nur minimal von denen des Bundesamtes ab. Sehr interessant waren auch die Ergebnisse der Rahmengrupe „Mediennutzung“, die zeigten, dass die Schüler in den Jahrgangsstufen acht und neun etwa 135 Minuten täglich am PC verbringen, wozu zusätzlich noch fast zwei Stunden vor dem TV kommen.

4. Projektevaluation

In einer Befragung per Evaluationsbogen und Unterrichtsgespräch wurde das Projekt nach seinem Abschluss insgesamt sehr positiv beurteilt. Vor allem die Sozialform „Gruppenarbeit“ erwies sich als wichtiger, positiver Faktor. Vielfach wurde auch der Wunsch nach weiteren Gruppenarbeiten geäußert. Dagegen wurde der hohe Arbeitsaufwand von manchen Schülern als Negativaspekt angesehen, der durch die intensive Auseinandersetzung mit dem Gruppenthema und das Erstellen von zwei Handouts sowie einer Präsentation zustande kam. Es zeigte sich, dass sich viele Schüler an Nachmittagen und Wochenenden trafen, um an ihrem Projektthema zu arbeiten. Auch berichteten die Schüler von häufigen Telefongesprächen in diesem Zusammenhang. Die Rückmeldungen von Eltern zum Projekt waren durchweg positiv.

5. Ziele der Projektdurchführung

Im Rahmen der Durchführung eines Projekts im Mathematikunterricht wurde untersucht, ob sich die Methode des Projektunterrichts (die Projektmethode) als geeignet für den Mathematikunterricht der Unterstufe (Sekundarstufe I) erweist. Dies wurde überprüft anhand der Steigerung elementarer Kompetenzen: der Vermittlung fachlichen Wissens (Fachkompetenz), der Steigerung von Sozial- und Methodenkompetenz sowie der Selbstkompetenz, die sich nach Weinert (2001) auch durch Übertragung von Verantwortung auf die Lernenden im Rahmen eigenverantwortlichen und selbstbestimmten Lernens fördern lässt. Des Weiteren intendierte das Projekt auch eine Steigerung kommunikativer Kompetenzen sowie durch eine zielgerichtete Integration von Medien auch eine Steigerung der Medienkompetenz.

Nach Abschluss des Projekts konnten Verbesserungen in jedem Kompetenzbereich beobachtet werden. So wurde fachliche Inhalte in Bezug auf den kritischen Umgang mit Daten, die Datenauswertung mit einem TKP und den Umgang mit großen Datensätzen und fehlerhaften Daten erfolgreich vermittelt. Eine Steigerung hinsichtlich der Team- und Kooperationsfähigkeit (Sozialkompetenz, kommunikative Kompetenz) wurde durch die intensive inhaltliche Auseinandersetzung in den Rahmengruppen erreicht.

Weiter führte die Arbeit in Gruppen zu einer verbesserten Methodenkompetenz und durch die Übernahme von Verantwortung und das eigenverantwortliche Arbeiten konnte eine Selbstkompetenzsteigerung erzielt werden. Die Steigerung der Medienkompetenz wurde erreicht durch die notwendige intensive Auseinandersetzung mit einem TKP und die Recherche von verwertbaren Vergleichsdaten im Internet. Schließlich wurde auch das interdisziplinäre Arbeiten gefördert, z.B. durch den Umwelt- und Gesellschaftsbezug der Themen und durch das Verfassen von Sachtexten. Vielfach erfolgten die Kompetenzzuwächse auf einer den Schülern unbewussten Ebene und durch die Arbeit auf verschiedenen Wissensgebieten (vgl. Emer et al., 1991).

Literatur

Emer, W., Horst, U. & Ohly, K. (Hrsg.), Wie im richtigen Leben, Bielefeld, Ambos Unterrichtsprojekte, 1991.

Frey, K. (2007). *Die Projektmethode*, Beltz Verlag, Weinheim und Basel.

Kilpatrick, W. H. (1918) The Project Method, in: *Teachers College Bulletin*, Ser. 10, no. 3, Oct. 12.1918.

Ludwig, M. (1998). *Projekte im Mathematikunterricht des Gymnasiums*, Franzbecker, Hildesheim.

Ludwig, M. & Müller, J.-H. (2008). Was ist dein Lieblingsfach? Eigene Fragebögen entwerfen und auswerten, *mathematik lehren*, Heft 149, 14-16, 2008.

Weinert, F. E. (2001). Vergleichende Leistungsmessung in Schulen – eine umstrittene Selbstverständlichkeit. In Weinert, F. E. (Hrsg.), *Leistungsmessung in Schulen*. Weinheim und Basel: Beltz-Verlag.

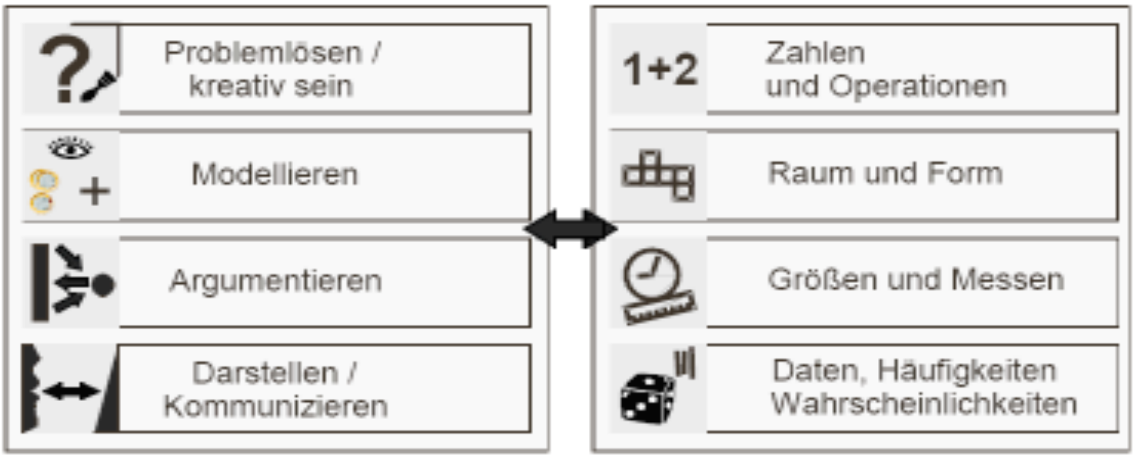
Andreas MARX, Dortmund, Christoph SELTER, Dortmund

PIK AS – Ein Projekt zur Unterstützung der Unterrichtsentwicklung

Das im Februar 2009 begonnene Projekt PIK AS (**P**rozess- und **I**nhaltsbezogene **K**ompetenzen **A**nregung von fachbezogener **S**chulentwicklung) basiert auf einer Kooperation zwischen der Deutschen Telekom Stiftung, dem Ministerium für Schule und Weiterbildung, dem IEEM und dem IfS der TU Dortmund. Es bewegt sich in einem Spannungsfeld zwischen normativen Rahmungen durch die Schuladministration und den zu beobachtenden situativen Kontexten im Schulalltag. Im Projekt geht es konkret um die Unterstützung der Umsetzung des (neuen) Lehrplans für die Grundschule (GS) im Land Nordrhein-Westfalen (NRW).

Ein Lehrplan und seine Umsetzungsbedingungen

Die internationale und nationale Diskussion (NCTM 2000, KMK 2005, Walther u.a. 2008, Wittmann 2008) über Standards für den Mathematikunterricht geht mit einer Aufwertung der prozessorientierten Kompetenzen einher. So finden sich auch im nordrhein-westfälischen Lehrplan für die GS (2008) neben inhaltsbezogenen Kompetenzen eine Sammlung von prozessbezogenen Kompetenzen (vgl. Abb. 1). Diese sind nicht parallel angeordnet zu deuten, vielmehr ist eine Matrixstruktur sinnvoll. Aus dieser geht hervor, dass Prozesse auszumachen sind, welche unabhängig vom jeweiligen Inhaltsbereich für „Mathematiktreiben" typisch sind.



Eine zentrale Fragestellung des Projekts ist, wie der Einzug der prozessbezogenen Kompetenzen in alltägliches Unterrichtsgeschehen gefördert werden kann.

Der konkrete Alltag in NRW-Grundschulen kann durch die folgenden Punkte beschrieben werden:

Die Grundhaltung vieler Lehrerinnen und Lehrer ist grundsätzlich geprägt von Engagement und Interesse. Doch es sind ebenso schulische Rahmenbedingungen zu beobachten, welche dieser Grundhaltung zumindest nicht förderlich zur Seite stehen. Und gelegentlich bleibt selbst den engagierten Lehrkräften eine notwendige Unterstützung aus dem Kollegenkreis verwährt – „Teaching is a lonely profession“. Neben persönlichen Motiven ist nicht zuletzt eine hohe Alltagsbelastung einem zusätzlichen Engagement eher nicht dienlich.

Das in Grundschulen verfolgte Klassenlehrerinnenprinzip bringt die Notwendigkeit mit sich, in 6 Fächern „up-to-date“ bleiben zu müssen, was insbesondere der fachspezifischen Kompetenzentwicklung der Lehrpersonen abträglich sein kann.

Eine zweite Folge des Klassenlehrerinnenprinzips ist der fachfremd erteilte Mathematikunterricht. Breit angelegte Untersuchungen und alltägliche Erfahrungen im universitären und schulischen Kontext deuten darauf hin, dass nicht wenige GS-Lehrerinnen eine ungünstige Mathematik-Biographie besitzen (vgl. Loewenberg-Ball 1988; Adler et al. 2005; Gellert 1998). Diese Beobachtung scheint zwar nicht gänzlich unabhängig von einer Ausbildung in Mathematik zu sein, eine mathematische Ausbildung scheint aber auch nicht notwendig mit einem positiven Bild von Mathematik einher zu gehen.

Es gibt zu wenig systematisch unterstütztes „Lernen im Beruf“. Die berufsbiographische Forschung hat aufgezeigt, dass die aktive Weiterentwicklung nach Abschluss der Berufsausbildung mit erster und zweiter Ausbildungsphase häufig ein zentrales, ungelöstes Problem darstellt (vgl. Cloer et al. 2000, S. 13ff.). Zwar wird die Fortbildung als lebenslange Aufgabe erkannt, die konkrete Ausgestaltung obliegt jedoch weitgehend der Lehrperson selbst. Während Erkenntnisse der Schulentwicklungsforschung den hohen Wert Professioneller Lerngemeinschaften für die fachbezogene Unterrichtsentwicklung hervorheben ist eine derartige Kultur bisher weder aus Sicht der Institution Schule noch aus fachdidaktischer Sicht etabliert und sinnvoll gerahmt.

Ziele und Konzeption von PIK AS

Die Bestandsaufnahme des Status Quo an GSen legt Optimierungspotential in verschiedenen Bereichen nahe, welches das Projekt PIK AS durch die Kooperation der Teilprojekte PIK und AS Rechnung trägt.

Ziele des Teilprojekts AS

Das Teilprojekt AS verfolgt zwei Ziele und richtet sich primär an Personen in Schulleitungen und Schuladministration: Es werden Unterstützungsmaterialien für Schulleitungen zu den Themen *Leadership*, *professionelle Lerngemeinschaften* und *Feedback* im Hinblick auf fachbezogene Schulentwicklung konzipiert und erprobt. Darüber hinaus finden halbjährliche (PIK) AS-Tagungen für Mitglieder der Kompetenzteams, der Bezirksregierungen, der Schulämter sowie Fachleiterinnen statt. Der zweite Schwerpunkt des Teilprojekts AS liegt in der Prozess-Evaluation, welche in einer repräsentativen Lehrerbefragung an ca. 10% der GSen in NRW (ca. 340 Schulen) realisiert wird. Die Ergebnisse werden formativ zur Verbesserung der zielgerichteten Unterstützungsangebote genutzt.

Ziele des Teilprojekts PIK

Die in der Mathematikdidaktik der Primarstufe sowie in den Studienseminaren und den Kompetenzteams bereits vorhandene Kompetenz, Anregungen zur Weiterentwicklung des Unterrichts zu geben und so verständlich zu kommunizieren, dass sie als Grundlage für die Weiterentwicklung des eigenen Unterrichts genutzt werden, gilt es in Kooperation mit Lehrerinnen und Lehrern und dem MSW auszubauen.

Das Teilprojekt PIK ist durch eine enge Zusammenarbeit mit Projekt- und Kooperations-Schulen geprägt. Diese werden durch an die Hochschule abgeordnete PIK-Lehrerinnen begleitet und unterstützen die Materialproduktion und Materialevaluation. Neben der Entwicklung von Unterstützungsmaterialien werden halbjährliche PIK (AS)-Tagungen für Mitglieder der Kompetenzteams, der Bezirksregierungen, der Schulämter sowie für Fachleiterinnen und Fachleiter durchgeführt.

Das zentrale Medium zur Präsentation und Distribution der Unterstützungsmaterialien ist die PIK AS-Internetseite.

Konzeption der Unterstützungsmaterialien – die PIK AS-Internetseite

Die im Rahmen des Projekts entwickelten Unterstützungsmaterialien stehen auf der PIK AS-Internetseite online und zum download zur Verfügung. Dabei sind die Materialtypen in Fortbildungsmaterial, Unterrichtsmaterial und Informationsmaterial gegliedert. Das Fortbildungsmaterial richtet sich an Lehrerfortbildner, welche hier umfassende Anregungen für konkrete Fortbildungsmöglichkeiten finden. Das Unterrichtsmaterial liefert praktische Unterrichtsvorschläge mit dem Ziel der Verbesserung des realen Unterrichts (Mathematikdidaktik als design science, vgl. Gravemeijer 1994 oder Wittmann 1995). Das Informationsmaterial liefert breit gefächerte Informationen über den neuen Lehrplan in Mathematik und einen daran anknüpfenden Mathematikunterricht. Die Bandbreite des Materials reicht von der fachwissenschaftlichen Betrachtung des neuen Lehrplans für die interessierte Lehrperson bis hin zu Kurzfilmen zur Information für Elternabende.

Die inhaltliche Themenauswahl berücksichtigt zum einen die im Lehrplan angelegten Schwerpunkte, etwa die prozessbezogenen Kompetenzen, und zum anderen den in schulischen Kontexten vorherrschenden Weiterbildungsbedarf. So entstehen Inhalte zu fünf Themenpaaren:

- Mathematische Bildung: *Entdecken, Beschreiben, Begründen* und *Kontinuität von Klasse 1 bis 6*
- Ausgleichende Förderung: *Umgang mit Rechenschwierigkeiten* und *Sprachförderung im Mathematikunterricht*
- Themenbezogene Individualisierung: *Individuelles und gemeinsames Lernen* und *Heterogene Lerngruppen*
- Herausfordernde Lernangebote: *Gute Aufgaben* und *Guter Unterricht*
- Ergiebige Leistungsfeststellung: *Lernstände wahrnehmen* und *Beurteilen und Rückmelden*.

Die Internetseite (www.PIKAS.Uni-Dortmund.de) wächst parallel zur Materialentwicklung und gibt so Zwischenstände wieder.

Literatur

Cloer, Ernst, Dorle Klika und Hubertus Kunert (2000, Hg.): Welche Lehrer braucht das Land? Notwendige und mögliche Reformen der Lehrerbildung. Weinheim & München: Juventa.

Gravemeijer, Koeno (1994): Developing Realistic Mathematics Education, Freudenthal Institute: Utrecht.

Kultusministerkonferenz (Hrsg.) (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Neuwied: Wolters-Kluwer & Luchterhand.

Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2008): Richtlinien und Lehrpläne für die Grundschule in Nordrhein-Westfalen. Frechen: Ritterbach.

National Council of Teachers of Mathematics (Hrsg.) (2000): *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Walther, Gerd, Christoph Selter & Johanna Neubrand (2008): Die Bildungsstandards Mathematik. In: Gerd Walther u. a. (Hg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 15-39.

Wittmann, Erich Ch. (1995): Mathematics Education as A Design Science. In: Educational Studies in Mathematics. 29, S. 355-374.

Wittmann, Erich Ch. & Gerhard N. Müller (2008): Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In: Gerd Walther u. a. (Hg.): Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 40-63.

MICHAEL MARXER, GERALD WITTMANN, Schwäbisch Gmünd

Förderung des Zahlenblicks bei gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen

Dass Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht der Sekundarstufe tragfähige Grundvorstellungen zu gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen erwerben sollen, ist mittlerweile Konsens. Doch welche Bedeutung besitzt das *Rechnen* mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen? Die zentrale Antwort lautet: Es bildet den Anlass, dass Schülerinnen und Schüler Eigenschaften der für sie neuen Zahlen entdecken und verstehen können.

1. Zahlenblick – Beispiel, Begriffsklärung, Erläuterung

Schülerinnen und Schüler sollen Aufgaben mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen nicht stets entsprechend den bekannten kalkülhaften Verfahren rechnen. Vielmehr sollen sie

- Zahlen und Aufgaben *vor* dem Rechnen einschätzen, d. h. in einer Aufgabe Zahleigenschaften und Zahlbeziehungen, die für das Rechnen hilfreich sind, erkennen, bewerten und nutzen,
- Vorgehensweisen wählen, die den aufgabenspezifischen Voraussetzungen gerecht werden, statt isolierter Automatismen, d. h. insbesondere heuristisch-strategisch denken, um das Rechnen zu erleichtern.

Diese Aktivitäten sind Indikatoren für einen *Zahlenblick*, in Anlehnung an Rathgeb-Schnierer (2006) und Schütte (2002; 2008), die sich jeweils auf das Rechnen mit natürlichen Zahlen beziehen.

$\frac{3}{4}-\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}+\frac{3}{8}$	$3\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$	$11\frac{3}{7}-5\frac{4}{7}$	$\frac{34}{51}-\frac{1}{3}$
$11\frac{3}{7}-5\frac{8}{9}$	$11-5\frac{4}{7}$	$\frac{4}{11}+\frac{35}{77}$	$2-\frac{1}{3}$	$3\frac{2}{7}+4\frac{5}{7}$
$7\frac{3}{8}+\frac{9}{8}$	$\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$	$5+\frac{4}{7}$	$1-\frac{1}{2}$	$8-\frac{1}{3}$
$\frac{6}{7}+8$				

Abbildung 1

Es ist beispielsweise nicht effektiv, die Aufgaben in Abbildung 1 grundsätzlich durch Gleichnamigmachen und Addieren bzw. Subtrahieren der Zähler lösen. Vielmehr lassen sich drei Kategorien unterscheiden:

- Aufgaben, deren Lösung man auswendig weiß oder sofort „sieht“;
- Aufgaben, bei denen „strategische Werkzeuge“ (Rathgeb-Schnierer 2006, S. 55) einen schnellen Weg zur Lösung freimachen;

- Aufgaben, die ein kalkülhaftes Verfahren (hier: Gleichnamigmachen) erfordern, weil kein anderer Weg erkennbar ist.

Am Beginn steht also in diesem Falls das Sortieren der Aufgaben unter dem Blickwinkel günstiger Lösungsmöglichkeiten. Um hier Entscheidungen treffen zu können bedarf es der Einschätzung der beteiligten Brüche nach bestimmten Merkmalen. Genau dieser Vorgang schärft den Blick für spezifische „Qualitäten" des Bruchs und fördert dadurch ein entdeckendes Verständnis, das bei ausschließlich kalkülhaftem Arbeiten verlorengeht bzw. gar nicht entstehen kann. Dabei besteht eine durchaus wechselseitige Beziehung: Jede Bearbeitung von Aufgaben auf diese Weise trägt zur Förderung des Zahlenblicks bei, und je besser entwickelt der Zahlenblick ist, desto schneller lassen sich aufgabenadäquate Lösungswege finden. Erst die Aufgaben, die sich nicht anders lösen lassen, werden mittels Kalkül gerechnet. Das Sortieren kann insbesondere zahlreiche Gesprächsanlässe liefern, bei denen die Eigenschaften der Aufgabe sowie der in der Aufgabe auftretenden Zahlen deutlich werden. Welche Aufgabe in welche Kategorie gehört, ist hierbei individuell unterschiedlich und ändert sich mit zunehmendem Lernzuwachs.

Der Zahlenblick kann durch vielfältige *Aufgabenformate* gefördert werden:

- Das Sortieren von Aufgaben nach günstigen Lösungswegen, das Erfinden eigener Aufgaben, die zu den Lösungswegen passen, sowie das Beschreiben und Bewerten von Lösungswegen Anderer fokussieren auf *Lösungswege*.
- Das Zuordnen von Brüchen mit gleichem Wert, das Abschätzen der Größenordnung von Ergebnissen, das Zuordnen von Aufgaben mit gleichen Ergebnissen sowie das Zuordnen von Aufgaben mit gleichem Ergebnis nehmen primär die *Ergebnisse* ins Blickfeld.
- Das Nutzen und Fortsetzen strukturierter Päckchen zielt auf Beziehungen zwischen Aufgaben, insbesondere das Erkennen gleicher Strukturen in mehreren Aufgaben.

Typische Übungen zur Förderung des Zahlenblicks können *nach* der Einführung kalkülhafter Lösungsverfahren gestellt werden, zur Etablierung von Kontrollstrategien und im Sinne kognitiv aktivierender Aufgaben. Fruchtbarer ist jedoch eine Verortung *vor* der Einführung kalkülhafter Lösungsverfahren: Dass manche Aufgaben nicht mit den vorhandenen Mitteln gelöst werden können, motiviert die Entwicklung eines Lösungsverfahrens; ferner führen manche dieser Verfahren bislang nicht lösbare Aufgaben auf schon lösbare zurück (so bei der Addition und Subtraktion gemeiner Brüche). Zudem zeigen Erfahrungen aus der Grundschule, dass Schülerinnen und Schüler sich stark an Lösungsverfahren orientieren, sobald sie über solche verfügen (vgl. Selter 2000).

2. Einordnung des Zahlenblicks

Für das Arbeiten mit gemeinen Brüchen und Dezimalbrüchen werden häufig zwei Aspekte mathematischen Denkens unterschieden (vgl. Wartha & Wittmann 2009): Das *semantisch-begriffliche Denken* erfasst die Beziehung zwischen Bruchzahlen einerseits und durch sie beschriebene außermathematische Sachsituationen andererseits; das *syntaktisch-algorithmische Denken* beinhaltet das verfahrensorientierte Rechnen mit Brüchen oder Dezimalzahlen, das nach festen Regeln erfolgt. Ein inhaltliches Verständnis dessen, wofür die Zahlen stehen, ist hierfür nicht unbedingt nötig.

Aktivitäten zum Zahlenblick lassen sich diesbezüglich wie folgt einordnen: Ohne semantisch-begriffliches Denken kann es keinen Zahlenblick geben; es ist beispielsweise nötig, um einen Bruch als „geringfügig kleiner als 1" einschätzen zu können. Es findet keinesfalls ein bloßes syntaktisch-algorithmisches Arbeiten statt; der Zahlenblick bedeutet ja gerade die Abwendung vom kalkülhaften Rechnen und kann in der Unterrichtschronologie der Einführung kalkülhafter Verfahren sogar voraus gehen. Umgekehrt lassen sich viele Aufgaben aber rein innermathematisch lösen, ohne einen Bezug zu außermathematischen Sachkontexten herzustellen.

Die Aktivitäten zum Zahlenblick bringen also einen neuen Aspekt mit sich: das *Denken in Zahl- und Aufgabenbeziehungen*. Es steht zwischen semantisch-begrifflichem Denken einerseits und syntaktisch-algorithmischem Denken andererseits (wobei die Abgrenzung zu letzterem deutlich klarer ausfällt) und kann als ein Bindeglied beider Aspekte fungieren (Abb. 2).

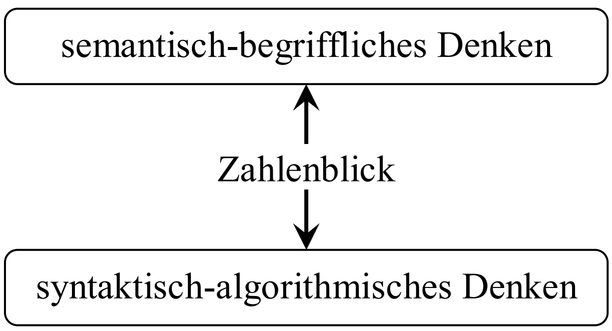


Abbildung 2

Die Zahl- und Aufgabenbeziehungen lassen sich speziell für das Rechnen mit gemeinen Brüchen noch konkretisieren als Beziehungen zwischen Zähler und Nenner eines Bruchs (vgl. Schwank 2009), zwischen zwei oder mehreren Brüchen sowie zwischen zwei oder mehreren Aufgaben.

Übungen zum Zahlenblick haben auch Auswirkungen auf die im Unterricht verwendeten *Darstellungen*. Üblicherweise werden Brüche anhand von Feldermodellen (Kreis, Rechteck, lineare Felder) eingeführt, die aus der Schematisierung von Sachkontexten erwachsen. Dieser Zugang ist nahe liegend. Aber: Er bezieht sich im Wesentlichen auf Brüche, nicht auf Bruchzahlen; er veranschaulicht die Beziehungen zwischen Zähler und Nenner eines Bruchs, nicht jedoch (oder nur ganz selten) die Beziehungen zwischen zwei Brüchen (vgl. Wittmann 2007). Am Zahlenstrahl hingegen treten Beziehungen zwischen zwei Brüchen zutage, die in Feldermodellen nicht zum Ausdruck kommen. Deshalb muss dem Zahlenstrahl eine größere Bedeutung zukommen, auch als leerer oder teilweise beschrifteter Zahlenstrahl, der nur die Ordnung der Bruchzahlen korrekt wiedergibt.

Abschließend eine Analogie zum Rechnen mit natürlichen Zahlen, wohl wissend, dass sie auch Grenzen hat: Dort wird dem kalkülhaften *Rechnen mit Ziffern* (insbesondere dem schriftlichen Rechnen) das flexible *Rechnen mit Zahlen* (hierunter fällt das halbschriftliche Rechnen) gegenüber gestellt. Im Bereich der gemeinen Brüche entspricht dem ein kalkülhaftes *Rechnen mit Zähler und Nenner* (hierzu gehören die üblichenVerfahren) sowie ein flexibles *Rechnen mit Brüchen* (basierend auf dem Zahlenblick), bei dem die auftretenden Brüche jeweils in ihrer Besonderheit betrachtet werden.

Literatur

Rathgeb-Schnierer, E. (2006). Kinder auf dem Weg zum flexiblen Rechnen. Eine Untersuchung zur Entwicklung von Rechenwegen bei Grundschulkindern auf der Grundlage offener Lernangebote und eigenständiger Lösungsansätze. Hildesheim: Franzbecker.

Schütte, S. (2008). Qualität im Mathematikunterricht der Grundschule. München: Oldenburg.

Schütte, S. (2002). Rechenwegnotation und Zahlenblick als Vehikel des Aufbaus flexibler Rechenkompetenzen. In: Journal für Mathematik-Didaktik 25(2), S. 130–148

Schwank, I. (2009): Um wie viel geht es? Orientierung im Zahlenraum mit Bruchzahlen. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. 1: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 109–122

Selter, C. (2000): Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. In: Journal für Mathematikdidaktik 23(3/4), S. 225–256

Wartha, S. & Wittmann, G. (2009): Lernschwierigkeiten im Bereich der Bruchrechnung und des Bruchzahlbegriffs. In: Fritz, A. & Schmidt, S. (Hrsg.): Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. 1: Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden. Weinheim: Beltz, S. 73–108

Wittmann, G. (2007). Mit Bruchzahlen experimentieren. Darstellungen wechseln – Grundvorstellungen entwickeln. In: mathematik lehren 142, S. 17–23

Peter FLURY, Chur, Telgia JUON, Chur, Bernhard MATTER, Chur

Mathematischer Lernweg Chur - Outdoordidaktik im Mathematikunterricht

Der mathematische Lernweg Chur verdankt seine Entstehung der Grundidee des Jahres der Mathematik *Menschen den mathematischen Blick für das Alltägliche öffnen* und dem 2008 an der Pädagogischen Hochschule Graubünden (PHGR) aktuellen Projekt *Outdoor-Unterricht* (Interventionsstudie zum Thema *Klimawandel und Permafrost*).

Die Lernziele des Lernwegs lassen sich gut durch ein Zitat aus dem Lehrplan des Kantons Graubünden charakterisieren: „Der Mathematikunterricht […] ermöglicht dem Kind, Strukturen seiner Umwelt zu entdecken und zu klassifizieren, zu ordnen, zu schätzen, zu messen, zu vergleichen, zu protokollieren, …".

Die Broschüre „Mathematischer Lernweg Chur" enthält einen Rundgang in der Altstadt mit 10 Posten, sowie die Anhänge A, B und C mit Stufenpräferenzen. Inzwischen haben mehrere Klassen Aufgaben aus dem Lernweg bearbeitet. Die Arbeit einzelner Klassen unterschiedlicher Schulstufen wurde in einem Film dokumentiert. Lösungshinweise und weitere Aufgaben sind online verfügbar (http://mathe.phgr.ch).

Im Folgenden werden exemplarisch einige Aufgabenstellungen für verschiedene Klassenstufen vorgestellt.

Beispiel „Kornplatz"

Der Kornplatz liegt mitten in der Churer Altstadt. Neben historisch bedeutsamen Gebäuden finden sich am Platz Wohn- und Geschäftshäuser aus dem 20. Jahrhundert. Der Kornplatz ist überschaubar, verkehrsfrei und wenig frequentiert und damit ein ideales Lernumfeld für Kinder von 5-8 Jahren. Auf diesem Platz können die Kinder frei auf mathematische Entdeckungsreisen gehen.

Zählen und Anzahlerfassung als erste fundamentale Auseinandersetzung mit Mathematik, stehen dann auch im Zentrum der Aufträge, die sich an 5-8-jährige Kinder richten. Gezählt werden Häuser, Fenster, Kamine, Sitzbänke, Fahrräder, Gegenstände in Schaufenstern und vieles andere mehr. Die Kinder lernen, Dinge genauer zu betrachten, sie kriterienorientiert auszuwählen, zu zählen und die

Zählprozesse mit Zeichnungen und/oder mit Wort und Schrift darzustellen. In manchen Aufgaben wird das Augenmerk der Kinder gezielt auf Zählobjekte gerichtet, die regelmässig angeordnet sind. Die Wahrnehmung räumlich-simultaner Muster wird gefördert, Zählstrategien und damit Übergänge zu additiven und multiplikativen Denkmodellen werden angeregt.

Plätze eignen sich auch dazu, Erfahrungen im Umgang mit Schätzen zu sammeln. Die Kinder schätzen die Anzahl Schritte, die sie für das Abschreiten einer bestimmten Strecke benötigen oder sie überlegen sich, ob 100 Kinder auf den Sitzbänken Platz finden würden. Die Schätzung wird überprüft. Schätz- und Zählergebnisse werden gesammelt, dokumentiert, verglichen und diskutiert. Warum wohl brauchen nicht alle Kinder gleich viele Schritte, um eine bestimmte Strecke abzulaufen? Kompetenzen wie Begründen und Argumentieren werden dadurch anhand authentischer Erfahrungen aufgebaut.

Beispiel „Schachtdeckel“

Unsere Strassen und Gehwege sind teilweise übersät von Schachtdeckeln – auf Schweizerdeutsch heissen sie Dolendeckel – und Einlaufrosten aus Gusseisen. Diese ‚Verschlüsse‘ zeigen uns auf, welche Versorgungs- und Entsorgungssysteme (Elektrizitäts- und Gasversorgung, Wasser und Abwassersysteme, Vermessung, Kabelfernsehen u.v.m.) im Untergrund vorhanden sind. Neben künstlerischen Aspekten steckt in Schachtdeckeln auch einiges an interessanter Mathematik drin.

Mit den Aufgabenstellungen zu den Schachtdeckeln sollen die Schülerinnen und Schüler motiviert werden, unterschiedliche Aspekte eines Schachtdeckels zu betrachten, Grössen zu schätzen und verschiedene Dinge zu messen. Im Zentrum steht dabei die Auseinandersetzung mit allgemeinen, übergreifenden Lernzielen des Mathematikunterrichts.

Die folgenden allgemeinen Lernziele spielen bei der Schachtdeckelaufgabe eine wesentliche Rolle (ohne Anspruch auf Vollständigkeit): Problemlösen (Heuristische Strategien suchen und einsetzen, Kreativität im Lösungsprozess, …), Argumentieren (Diskutieren von erfolgsversprechenden Vorgehensweisen), Schätzen (Aufbau von Grössenvorstellungen, Nutzung von Repräsentanten), Messen (mit standardisierten und nicht-standardisierten Messinstrumenten), Operieren (Berechnung der Differenz zwischen geschätzten und gemessenen Werten), Darstellen (Einsatz von heuristischen Hilfsmitteln wie Tabellen, usw.), Soziales Lernen (in Kleingruppen arbeiten, Absprachen treffen, Diskussionen führen, Aufgaben verteilen, …).

Selbstverständlich bieten sich im Zusammenhang mit Schachtdeckeln noch viele weitere interessante Aufgabenstellungen an, beispielsweise welche geometrischen Formen auf dem entsprechenden Deckel zu finden sind, in wie viele Felder er unterteilt ist und in diesem Zusammenhang Fragenstellungen zum Vierfarbenproblem. Ausserdem sind neben mathematischen auch praktische Fragen möglich, wie z.B.: Welche praktischen Vorzüge hat ein runder Deckel gegenüber einem rechteckigen bzw. quadratischen? Oder warum haben einige Deckel Löcher bzw. Schlitze und andere nicht?

Schachtdeckel sind überall zu finden – in der Stadt und auf dem Land. Somit können die Aufgabenstellungen des mathematischen Lernwegs Chur problemlos auf das eigene Umfeld transferiert und dort mit der eigenen Schulklasse bearbeitet werden.

Beispiel „Postautodeck“

Nach einer mehrjährigen Planungs- und Bauzeit konnte 1992 das Postautodeck mit dem beeindruckenden Glasdach über dem Bahnhof Chur eröffnet werden. Eine Vielzahl von anregenden Aufgabenstellungen fördern Grössenvorstellungen und „Alltagswissen“ (Höhe von Stockwerken oder Treppenstufen, Ausmasse und Gewicht eines Postautos u. a.) der Lernenden. Ebenso werden Fähigkeiten zum Schätzen, Messen (mit Schritten, Metermass, Messrad u. a.) Ordnen, Beschreiben, Argumentieren usw. gefördert.

Aufgabenbeispiel 1:

Stell dir folgendes vor: Alles Regenwasser, welches im Verlaufe eines Jahres auf das Glasdach fällt, wird aufgefangen. Entspricht die Wassermenge eher der Wassermenge eines Brunnens, eines Freibades, des Walensees?

Diese „Fermi-ähnliche“ Aufgabe ermöglicht viele Vorgehensweisen. Zusätzliche Informationen (z. B. ein Klimadiagramm) müssen selbständig beschafft oder durch die Lehrperson gegeben werden.

Im Lernweg gibt es

- eher geschlossene Aufgaben,
- Aufgaben, die unterschiedliche Strategien ermöglichen, aber im Prinzip eine exakte Antwort haben,
- Aufgaben, die viele Lösungsstrategien und unterschiedliche Lösungen zulassen.

Zum letzteren Typ gehört das Aufgabenbeispiel 2:

Ab und zu finden auf dem Deck Feste oder Bankette statt. Wie viele Leute könnten für ein Bankett Platz finden?

Solche Grossveranstaltungen gibt es tatsächlich. Studierende der PHGR haben diese Aufgabe beim Thema Modellieren bearbeitet und Ergebnisse zwischen 500 und 6000 Personen erhalten. Viele Infos müssen zusätzlich gesammelt oder bestimmt werden: Wie gross sind Festtischgarnituren? Braucht es eine Bühne? Wie viel Platz braucht das Servicepersonal? Wie viel Platz braucht eine Person zum Sitzen? Usw. Es muss nicht alles vor Ort stattfinden. Haben die Schülerinnen und Schüler einen Grundriss vor Ort skizziert, kann im Schulzimmer weitergearbeitet werden.

Beispiel „Brunnen beim Bahnhof“

In den letzten Jahren wurde auch der Bahnhofplatz neu gestaltet. Der Künstler Christoph Rütimann hat drei Brunnen errichtet, welche die Vielfalt des Kantons Graubünden charakterisieren. Der Kanton Graubünden entwässert in drei Meere: Nordsee, Mar Nair und Mare Adriatico. So wurden die drei Brunnen auch benannt. Die Namen widerspiegeln die Dreisprachigkeit des Kantons. Die Grössen der Brunnen stehen im gleichen Verhältnis zueinander wie die Abflussmengen aus dem Kanton in die entsprechenden Meere. Zudem stammt das Baumaterial aus den entsprechenden Regionen. Die Lernenden können mithilfe der Aufgabenstellungen Kenntnisse über kulturelle, politische und geografische Aspekte ihrer Umgebung erarbeiten.

Die Praxiserprobung der beschriebenen Aufträge hat gezeigt, dass sich diese sehr gut als mathematischer Erfahrungsraum für Schülerinnen und Schüler eignen. Hochmotiviert und erfolgreich haben sie die Aufträge aus der Broschüre bearbeitet und selber neue Aufgaben erfunden.

Carmen MAXARA, Gießen

Verständnis und Begründungen von Studierenden zum Maternity-Ward-Problem und analogen Situationen

Der Inhalt dieses Artikels fokussiert auf das Verständnis, die Intuitionen und Begründungen von Studierenden im Hinblick auf die Rolle der Stichprobengröße in vier Aufgaben. Eine Aufgabe ist das bekannte Maternity-Ward-Problem, die anderen drei Aufgaben weisen eine analoge mathematische Struktur, aber einen anderen Kontext auf.

Die 13 Studierenden, die an dieser Studie teilgenommen haben, nahmen alle an der Veranstaltung „Elementare Stochastik" für Lehramtsstudierende (HRG) teil, in der die Software Fathom durchgängig als Werkzeug zur Datenanalyse, zur Simulation, zur beurteilenden Statistik sowie zum Experimentieren mit statistischen Methoden eingesetzt wurde. Die Studierenden arbeiteten mit Simulationen von Zufallsexperimenten und sammelten Erfahrungen mit Stichproben- und Häufigkeitsverteilungen über das gesamte Semester. Etwa vier Wochen nach Ende der Vorlesung nahmen die 13 Studierende an Einzelinterviews teil, die u.a. zwei analoge Aufgaben zum Maternity-Ward-Problem enthielten.

1. Forschungsstand

Das Maternity-Ward-Problem ist auch in psychologischen Studien schon oft untersucht worden. Diese Studien haben gezeigt, dass es für Lernende nicht einfach ist, dieses Problem intuitiv zu lösen (Kahneman & Tversky 1972; Sedlmeier & Gigerenzer 1997). Sedlmeier (1999) hat gezeigt, dass die Arbeit mit einem Trainingsprogramm mit virtuellen Urnen einen positiven Langzeiteffekt auf die Lösungshäufigkeit von Aufgaben hat, die strukturell der Maternity-Ward-Aufgabe entsprechen. Eine Studie von Garfield & delMas (1990) lieferten wiederum geringe Lösungshäufigkeiten. Alle hier betrachteten Aufgaben wurden in dem einfacheren „Häufigkeitsformat" (Sedlmeier 1999) gestellt.

2. Maternity-Ward- und Multiple-Choice-Test-Aufgabe

Im Eingangstest der Vorlesung stellten wird das Maternity-Ward-Problem und folgende Multiple-Choice-Aufgabe im analogen Format:

„*Betrachten Sie die beiden folgenden Tests, bei denen der Prüfling entweder ja oder nein ankreuzen kann: Test 1 besteht aus 10 Fragen. Test 2 besteht aus 20 Fragen. Beide Tests sind bestanden, wenn mindestens 60% der Fragen richtig beantwortet sind. Bei welchem der beiden Tests hat ein Prüfling größere Chancen zu bestehen, wenn er nur rät? a) Test 1, b) Test 2, c) in beiden gleich wahrscheinlich oder d) weiß ich nicht.*"

Jede der zwei Aufgaben wurde von etwa 19% der Studierenden richtig beantwortet, aber nur 5% der Studierenden beantworteten beide Fragen richtig. Im Eingangstest gaben die meisten Studierenden (63% beim Maternity-Ward-Problem und 45% bei der Multiple-Choice-Aufgabe) die Antwort, dass beide Möglichkeiten gleichwahrscheinlich seien.

Eine Übungsaufgabe, die die Studierenden während dem Semester bearbeiten sollten, war ebenfalls eine Multiple-Choice-Aufgabe, bei der die Studierenden drei verschiedene Situationen simulieren und verschiedene Fragen zu Häufigkeitsverteilungen und der Wahrscheinlichkeit zum Bestehen des Tests beantworten sollten. Die Simulationsaufgabe erforderte die Simulation der Stichprobenverteilung der Anteile der Erfolge. Die Studierenden hatten die Bestehenswahrscheinlichkeit auf Grundlage der gesamten Verteilung zu schätzen. Die Idee war hier das Verständnis von Verteilungen zu festigen.

Im Nachtest wurden dieselben Aufgaben aus dem Vortest verwendet. Hier konnten Verbesserungen der Lösungshäufigkeiten bei diesen beiden Aufgaben verzeichnet werden. Nun beantworteten etwa 57% der Studierenden die Maternity-Ward-Aufgabe sowie 57% die Multiple-Choice-Test-Aufgabe richtig. Etwa 30% der Studierenden beantworteten beide Fragen richtig. Meyfarth (2008), der dieselben Aufgaben in einem Vor- und Nachtest mit Oberstufenschülern getestet hat, kam zu ähnlichen Lösungshäufigkeiten: etwa 25% im Vortest und etwa 66% im Nachtest. (Siehe auch Vanhoof et al. (2007) mit ähnlichen Resultaten.) Hinsichtlich der besuchten Vorlesung sind die Lösungsraten des Nachtests aber nicht zufriedenstellend.

Überraschend an dem Ergebnis ist vor allem, dass die Übereinstimmung zwischen den beiden Antworten – die Aufgaben folgten in den Tests direkt hintereinander – so gering war (vgl. Abb. 1).

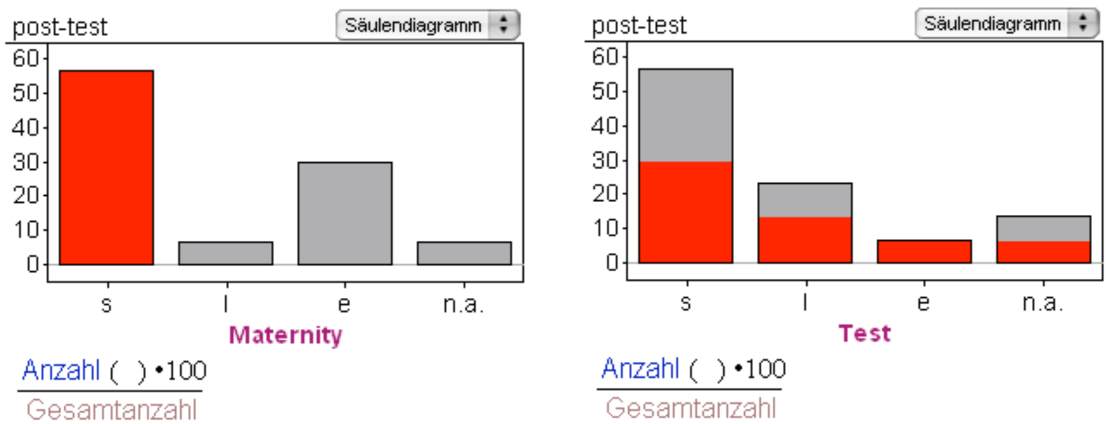


Abb. 1: Antworten zum Maternity-Ward-Problem und dem Multiple-Choice-Test im Nachtest; Häufigkeiten in Prozent (s: smaller, l: larger, e: equal, n.a.: no answer)

Für eine Analyse der Begründungen – auch der folgenden Aufgaben – siehe Maxara & Biehler (2010).

3. Casino- und Wahlumfrage-Aufgabe

Um die Ursachen der Schwierigkeiten weiter zu untersuchen, wurden in den anschließenden Interviews zwei strukturell ähnliche Aufgaben in einem anderen Kontext eingesetzt. Beide Aufgaben wurden ebenfalls direkt hintereinander gestellt. Aufgabe Casino:

„*Bei einer bestimmten Sorte von Spielautomaten beträgt die Gewinnwahrscheinlichkeit 30%. In einem kleineren Casino werden an einem solchen Automat täglich etwa 50 Spiele und in einem etwas größeren Casino täglich etwa 200 Spiele durchgeführt. Bei welchem Casino ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass an diesem Automat an einem Tag mehr als 40% der Spiele gewonnen werden? a) im kleineren Casino, b) im größeren Casino oder c) in beiden gleich wahrscheinlich*."

Aufgabe Wahlumfrage:

„*In einer bestimmten Stadt wählen 45% der Einwohner CDU. In einem größeren Institut für Wahlprognosen werden zufällig 300 Personen gefragt, ob sie CDU wählen würden, wenn diesen Sonntag Bundestagswahl wäre. In einem kleineren Institut derselben Stadt wird diese Frage nur 100 Personen gestellt. Bei welchem Institut ist die Wahrscheinlichkeit größer, dass bei der Umfrage mehr als 50% der befragten Personen CDU wählen würden? a) beim kleineren Institut, b) beim größeren Institut oder c) bei beiden gleichwahrscheinlich*."

Ein erstes interessantes Ergebnis ist, dass die Antworten der Studierenden stark vom Kontext der Aufgabenstellung abhängen. Sechs der 13 Studierenden beantworteten die Casino-Aufgabe richtig, 11 beantworteten die Wahlumfrage-Aufgabe richtig. Nach der Beantwortung der beiden Aufgaben wurden die Studierenden, die eine unterschiedliche Antwort auf die beiden Fragen gaben, gefragt, ob sie denn einen Zusammenhang zwischen den beiden Aufgaben gesehen hätten. Nun änderten noch 5 Studierende ihre Antwort auf die Casino-Aufgabe (keiner bei der Wahlumfrage), und drei gaben noch eine richtige Antwort. Ein Überblick über die Beantwortung der beiden Fragen ist in Tab. 1 abgebildet.

Aufgabe/Student	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**
Casino	s	l	l	s	s	l	e	s	e	s	e	e	s
Wahlumfrage	s	s	l	s	s	e	s	s	s	s	s	s	s
Casino nach Nachfrage	-	e	-	-	-	e	s	-	s	-	e	s	-

Tab. 1: Ergebnisse der Casino- und Wahlumfrage-Aufgabe (s: smaller, l: larger, e: equal, n.a.: no answer)

4. Diskussion

Die intuitiven Schwierigkeiten der Studierenden beim Lösen solcher Aufgaben, wurden in dieser Studie bestätigt. Auch nach einer computer- und simulationsintensiven Stochastikvorlesung haben Studierende Schwierigkeiten diese Aufgaben zu lösen und gut zu begründen. Folgende zwei Aspekte lassen sich festhalten: 1) Die Lösungsrate (sowie eine gute Begründung) hängen sehr stark vom Kontext der Aufgabe ab und 2) Studierende, die eine Aufgabe richtig lösen, lösen nicht notwendigerweise auch eine weitere Aufgabe mit derselben mathematischen Struktur.

Ein Grund, warum die Wahlumfrage-Aufgabe besser als die übrigen Aufgaben beantwortet wurde, könnte darin liegen, dass die Studierenden mit der Alltagserfahrung „eine größere Stichprobe gibt verlässlichere Werte als eine kleine" vertrauter sind und der Kontext genau diese abruft. Es scheint, dass die Studierenden weniger Schwierigkeiten haben einen statistischen als einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Kontext mit derselben mathematischen Struktur zu modellieren. Studierende scheinen Schwierigkeiten zu haben, Argumente bezüglich der Stichprobengröße in einen stärker wahrscheinlichkeitstheoretischen Kontext wie bei der Casino-Aufgabe zu übertragen.

Literatur

Garfield, J. & R. delMas (1990). Students' Conceptions of Probability. *Proceedings of ICoTS 3*, Dunedin. Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/18/BOOK1/A9-8.pdf

Kahneman, D. & A. Tversky (1972). Subjective probability: A judgement of representativeness. *Cognitive Psychology*, 3, 430-454.

Maxara, C. & R. Biehler (2010). Students' Understanding and Reasoning about Sample Size and the Law of Large Numbers after a Computer-intensive Introductory Course on Stochastic, in: C. Reading (Ed.) *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the ICoTS 8*, Ljubljana, Slovenia. Voorburg, The Netherlands: ISI. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Meyfarth, T. (2008). *Die Konzeption, Durchführung und Analyse eines simulationsintensiven Einstiegs in das Kurshalbjahr Stochastik der gymnasialen Oberstufe. Eine explorative Entwicklungsstudie*. Hildesheim, Franzbecker. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/handle/urn:nbn:de:hebis:34-2006100414792.

Sedlmeier, P., & G. Gigerenzer (1997). Intuitions About Sample Size: The Empirical Law of Large Numbers. *Journal of Behavioral Decision Making, 10*, 33-51.

Sedlmeier, P. (1999). *Improving Statistical Reasoning. Theoretical Models and Practical Implications*. Mahwah, New Jersey, Lawrence Erlbaum Associates.

Vanhoof, S., Sotos, A., Onghena, P. & L. Verschaffel (2007). *Students' reasoning about sampling distributions before and after the Sampling Distribution Activity.* Online: http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isi56/CPM80_Vanhoof.pdf

Hartwig MEISSNER, Münster

Kreativität und Mathematiklernen

Abstract*. Creative problem solving happens in two modes of thinking. At the beginning a strong analytical, reflective thinking is dominant. But then intuitive thinking must interfere to get spontaneous and creative ideas.*

1. Kreativität als mentaler Prozess

Ein Vortrag von Henri Poincaré in 1908 über Mathematical Creation ist bis heute ein Grundstein zur Analyse von mathematischer Kreativität und Erfindungsgabe. Wesentlich durch diesen Vortrag angeregt entwickelte Jacques Hadamard in 1945 aufgrund intensiver Selbstbeobachtungen und der Befragung zahlreicher kompetenter Mathematiker und Physiker ein Vier-Phasen-Modell über den Ablauf kreativer mathematischer Problemlösungsprozesse oder Beweisfindungen (Hadamard 1954). Wesentlich, die Entstehung einer kreativen Lösung oder eines kreativen Beweises ist stets gekennzeichnet durch eine spontane Idee, ein „Aha-Erlebnis“ (***Illumination***), das plötzliche als Schlüssel für die Lösung erkannt wird.

Der Illumination gehen zwei Phasen voraus. In der Einarbeitungsphase (***Initiation***) setzt man sich auf der Basis bekannter Routinen und Algorithmen und bisher gemachter Erfahrungen zunächst ganz bewusst und intensiv mit der gestellten Frage auseinander. Bleiben diese Bemühungen trotz aller Anstrengungen erfolglos, so entsteht ein immer stärker werdendes mentales Spannungsfeld, das schließlich dazu führt, dass alle bewussten Lösungsversuche eingestellt werden.

War das Spannungsfeld jedoch groß und waren die Anstrengungen vielseitig und intensiv genug, so verlagert sich die Problemstellung auch ins Unbewusste (***Incubation***) und das Unterbewusstsein arbeitet weiter. Mental nicht bewusst wahrgenommen oder gar gesteuert werden verschiedenste Ideen weiter unbewusst produziert, kombiniert, getestet, verworfen, ausgebaut, und dies auch in den unmöglichsten Situationen, beim Wandern, beim Auto fahren, beim Duschen, oder gar im Schlaf. Und dann plötzlich ist da die Erleuchtung, die Illumination. Diese wird anschließend bewusst logisch überprüft (vierte Phase ***Verification***) und dann als die Problemlösung präsentiert und vom außen stehenden Beobachter als „kreativ“ empfunden.

In einer neueren Untersuchung analysiert Liljedahl (2008) ebenfalls die mentalen Prozesse prominenter Mathematiker und identifiziert bei ihrem kreativen Arbeiten zwei zusätzliche Merkmale. In der Inkubationsphase sind Details unwichtig. Im Gegenteil, zu viele Details stören und man verliert den Überblick (*De-Emphasis of Details*). In der Einarbeitungsphase dagegen steht *the Role of Talking* im Mittelpunkt. Der Erwerb des mathematischen Wissens durch Sprechen und Diskutieren erscheint viel wichtiger zu sein als durch Lesen: „I assimilate the work of others best through personal contact and being able to question them directly. [..] In this question and answer mode, I often get good ideas too” (Liljedahl, S. 157).

Liljedahl fasst zusammen: “Considering … *de-emphasizing of details* and the *role of talking* … it becomes clear that the painstakingly rigorous fashion in which mathematical knowledge is written, both in journals and in text-books, as well as the detailed fashion of over-engineered curriculums stand in stark contrast to the methods by which mathematicians claim they best come to learn new mathematics (Liljedahl, S. 157).

2. Mathematiklernen als mentaler Prozess

Durch den Mathematikunterricht (Mathematik-„Darstellungen“) sollen die Lernenden adäquate „Vorstellungen“ mathematischer Konzepte entwickeln (Meissner 2002):

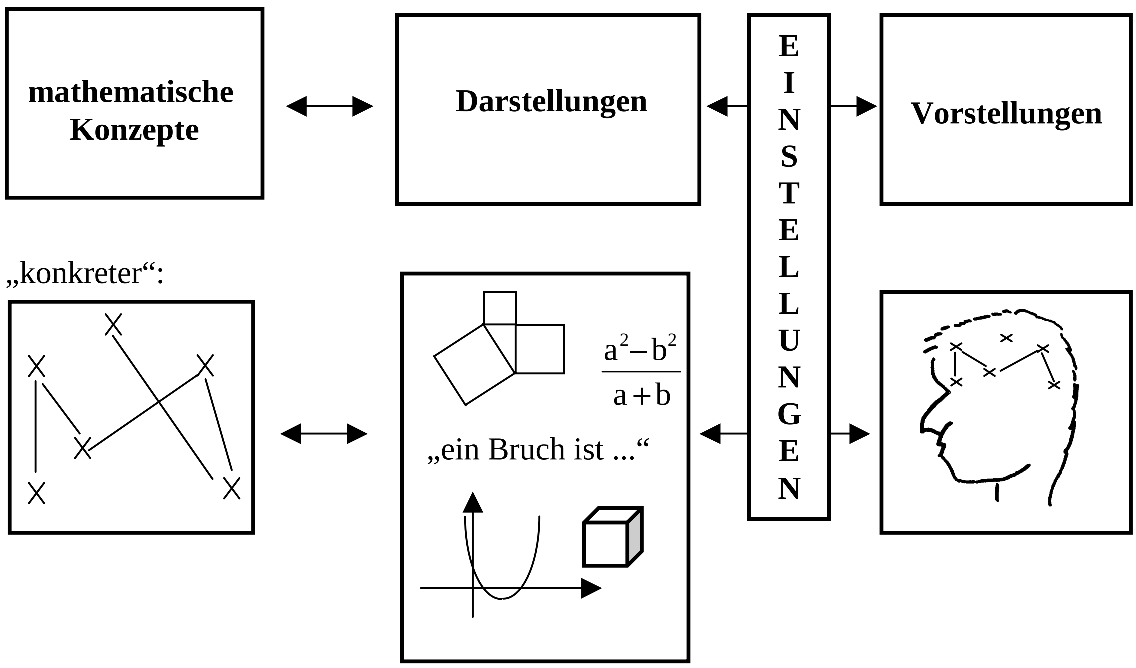


Abb. 1. Mathematische Vorstellungen entwickeln als Wechselwirkungsprozess

Wenn wir analysieren, wie sich möglichst tragfähige Vorstellungen entwickeln, so müssen wir unterscheiden zwischen intuitiv unbewussten Vorstellungen einerseits und analytisch-logisch bewussten Vorstellungen andererseits. Dieses Unterscheiden ist nicht neu. Vygotski beschreibt spontaneous und scientifical concepts, Bruner spricht von intuitive und analytic thinking, Ginsburg von informal knowledge versus written work, Skemp von relational understanding versus instrumental understanding oder Strauss gibt Beispiele für common sense knowledge versus cultural knowledge.

Das Unterscheiden von intuitiven, unbewussten Vorstellungen gegenüber analytisch-logischen Vorstellungen wird durch die Untersuchungen von Hadamard und Liljedahl noch einmal betont. Beim echten Problemlösen (nicht unbedingt beim einfachen „Vormachen – Nachmachen“) arbeiten wir nämlich zweigleisig, sowohl spontan, unbewusst, intuitiv als auch parallel dazu analytisch, logisch, reflektierend, wobei die zugehörigen Vorstellungen manchmal sich ergänzen, oder aber auch kollidieren können.

Intuitive Vorstellungen sind schnell und automatisch und brauchen keine großen Anstrengungen oder viel Speicherplatz. Aber sie sind sehr resistent gegenüber Veränderungen. Analytische Vorstellungen dagegen sind bewusst, überlegend, langsam und anstrengend, aber relativ flexibel und anpassungsfähig. Um unbewusste Erfahrungen bewusst zu machen und damit in entsprechend flexiblere Erfahrungen zu überführen sind Diskussionen ein geeignetes Mittel. Andererseits können sich logisch erarbeitete und dann hart trainierte Algorithmen und Techniken auch automatisch verdichten zu einem ganzheitlichen intuitiven Gefühl über die ablaufenden funktionalen Zusammenhänge. Ausführlicher beschäftigen sich Entscheidungstheorien mit diesen mentalen Prozessen (Dual Process Theories). Wir verweisen dazu z.B. auf Leron & Hazzan 2006 oder Evans 2008.

Das Entwickeln von Vorstellungen aufgrund vorgegebener Darstellungen ist zusätzlich stark abhängig von „Vor-Einstellungen“, die bei der Verarbeitung von „Darstellungen“ zu „Vorstellungen“ wie ein Filter einerseits oder ein Katalysator andererseits wirken können (vgl. Abb. 1). Hierzu gehören „Beliefs“ ebenso wie unterschiedlich ausgeprägte Fähigkeiten (erfinden und entdecken können, Flexibilität, räumliches Vorstellungsvermögen, ...), ein ausgeprägtes Sozialverhalten (arbeiten im Teamwork, insbesondere kommunizieren, kooperieren, argumentieren und überzeugen, …) und individuelle Persönlichkeitsmerkmale (sich identifizieren, engagieren und reinbeißen können, interessiert und fasziniert sein können, erfolgreich, glücklich, zufrieden sein wollen. …).

3. Kreativität und Mathematiklernen

Wollen wir kreatives Denken und Arbeiten im Mathematikunterricht fördern, so müssen dem Lernenden beide Typen von Denkweisen ermöglicht und auch angeboten werden. Hierzu ist es wichtig, dass sich der Unterricht nicht nur auf das Testen von Kompetenzen konzentriert, sondern dass das Mathematiklernen bewusst in Umgebungen stattfindet, in denen Kreativität und Mathematiklernen als mentale Prozesse gefördert werden können. Dies erfordert neben dem kognitionspsychologischen Hintergrundwissen auch das Angebot entsprechend geeigneter Problem- und Arbeitssituationen. Die „Darstellung“ einer Problemsituation darf deshalb nicht schon beim ersten Anblick aus einer Reihe übersichtlich angeordneter Mathematik-Schubladen genau eine aufreißen (Filterfunktion), um die dort eingelagerten Werkzeuge im Sinne von Skemp „instrumentell“ anwenden zu können. Vielmehr muss die Darstellung zumindest im ersten Moment so motivierend und attraktiv erscheinen, dass die vielfältig vorhandenen emotionalen Aspekte eingebunden und die individuellen subjektiven Erfahrungsbereiche aufgerufen werden können (Katalysatorfunktion).

Für einen Unterricht, in dem kreatives Denken und Arbeiten gefördert werden soll, benötigen wir Themen, bei denen alle vier Phasen von kreativem Arbeiten durchlaufen werden können. Dazu notwendig sind intensive Einarbeitungsphasen für das Erkunden funktionaler Zusammenhänge und für die Auswahl geeigneter Werkzeuge, Routinen, Algorithmen, Techniken, usw. Versuchen und Probieren und das Sprechen und das Diskutieren darüber müssen hier so im Mittelpunkt stehen (*Role of Talking*), dass sich das für eine unbewusste Verinnerlichung notwendige Spannungsfeld aufbauen kann und sich gleichzeitig eine mehr zusammenfassende ganzheitliche Sicht für das Problem entwickelt (*De-Emphasis of Details).*

Themen für derartige kreative Projekte könnten z.B. sein:

- Wie viele Kinder wiegen zusammen so viel wie ein Eisbär?
- Geometrische Körper in unserer Umgebung
- Stadt-Rallye
- Fußball und Fußball-Stadien
- Wie könnte eine Zeichenschablone für Funktionsgraphen aussehen?

Literatur

Evans, J. St. B. T. (2008): Dual-Processing Accounts of Reasoning, Judgment, and Social Cognition. *Annual Review of Psychology* **59**, 6.1 - 6.24.

Hadamard, J. (1954). The Psychology of Invention in the Mathematical Field. New York, NY: Dover Publications.

Leron, U.; Hazzan, O. (2006): The Rationality Debate: Application of Cognitive Psychology to Mathematics Education. *Educational Studies* 62/2, 105 – 126.

Liljedahl, P. (2008). Mathematical Creativity: in the Words of the Creators. *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students*. Haifa Israel, 153 – 159.

Meissner, H. (2002). Einstellung, Vorstellung, and Darstellung. *Proceedings of PME 26, Vol. 1*. Norwich UK, 156 – 161.

Alexander MEYER, Oldenburg

Algebra als Werkzeug - der Umgang von Neuntklässlern mit einem arithmetisch-algebraischen Problem

Die Stärke des Werkzeugs Algebra ist Formalität: Inhaltliche Überlegungen können durch kräfteschonende formale Operationen ersetzt werden (vgl. Kirsch 1991, S. 296). Viele empirische Untersuchungen stellen fest, dass Schülerinnen und Schüler Schwierigkeiten im Umgang mit formaler algebraischer Symbolsprache haben. Der bedeutungsvolle Umgang mit Variablen muss von Schülerinnen und Schülern gelernt werden – erst so kann mit formaler algebraischer Symbolsprache unabhängig von inhaltlichen Überlegungen umgegangen werden. Ein mathematischer Inhalt muss von Schülerinnen und Schülern mental repräsentiert und dann in einen formalen Ausdruck übersetzt werden, um ein mathematisches Problem mit den Mitteln der Algebra zu lösen. Diese Übersetzung kann gestisch, sprachlich oder symbolisch vermittelt sein (Radford 2009) - diese Vermittlung verleiht dem formalen Ausdruck seine Bedeutung.

Die Beschaffenheit von Übersetzungswerkzeugen, die bei solchen Übersetzungen zwischen inhaltlichem und formalem Denken an mental repräsentierten Objekten wirksam sein könnten, beschreibt präskriptiv ein Modell von Susanne Prediger (2009). An der Schnittstelle zwischen einem Denkzyklus aus inhaltlichem und formalem Denken platziert dieses Modell *Mustersituationen*, *grafische Darstellungen* und *abstrakte Grundvorstellungen*. *Mustersituationen* dienen Schülerinnen und Schülern der mentalen Repräsentation von Grundvorstellungen und sind der *Kristallisationskeim* einer Mathematisierung. *Grafische Darstellungen* dienen der Analogiebildung zwischen Mustersituationen und vorliegender mathematischer Situation. Schließlich, in einem fortgeschrittenen Stadium, kann eine *abstrakte Grundvorstellung* dann als formale Repräsentation einem formalen Denken zugänglich werden.

Ich möchte mithilfe des Modells argumentieren, dass Schülerinnen und Schüler aus den hier vorgestellten Fallstudien formaler Symbolsprache keine Bedeutung geben, die von der gegebenen grafischen Darstellung losgelöst ist. Ich werde Indizien aufzeigen, dass dies ein möglicher Grund für das Nicht-Funktionieren des Problemlösewerkzeugs „formale algebraische Symbolsprache“ ist.

Methode

Anhand zweier Fallstudien mit je zwei Probanden (neunte Klasse, Gymnasium) soll sich der Hypothese interpretativ vergleichend genähert werden. Den Zweiergruppen wurde ein arithmetisch-algebraisches Problem in Form einer Sequenz von ähnlich beschaffenen Rechendreiecken (Wittmann 2005) vorgelegt. Aufgabe war es, leere Felder so mit Zahlen zu besetzen, dass eine jeweils vorgegebene Außensumme erreicht wird. Nach einer Sequenz von drei lösbaren Dreiecken wurde ein nichtlösbares vorgelegt. Danach wurde dieses Dreieck erneut vorgelegt, diesmal mit einem vorgegebenen „x" im linken gelben Feld: Kognitive Dissonanz und die Vorgabe des Variableneintrages sollten vertiefte (algebraische) Denkhandlungen herausfordern.

Problemkontext: Rechendreiecke

Die Rechendreiecke bestehen immer aus 3 äußeren blauen Feldern und 3 inneren gelben Feldern. Die Zahlen in zwei gelben Feldern ergeben als Summe die Zahl im benachbarten blauen Feld. Die Summe der Zahlen in den äußeren Feldern wird als Außensumme bezeichnet (vgl. Abbildung 1: Kästchen unten rechts).[1] Die Rechendreiecke bilden eine grafische Darstellung einer geometrisch-arithmetischen Struktur. Ein Feld kann hier eine Platzhalterfunktion annehmen und so eine Objektsicht auf gesuchte Zahleinträge als unbestimmte Zahlen ermöglichen. So können auch Variablenvorstellungen evoziert werden. Ein Rechendreieck kann recht einfach mit Variablentermen beschrieben werden. Das im Modell beschriebene inhaltliche Denken ist hier anders gelagert: Die grafische Darstellung unterstützt eine visuelle mentale Repräsentation des Rechendreiecks. Nicht inhaltliches, sondern strukturgebundenes Denken anhand grafischer Darstellungen ist erforderlich. *Mustersituationen* sind hier durch geometrische Vorerfahrungen mit Darstellungen vorgefärbt. Wird also vom strukturgebundenen Denken mittels *grafischer Darstellungen* zu formalem strukturgebundenen Denken fortgeschritten?

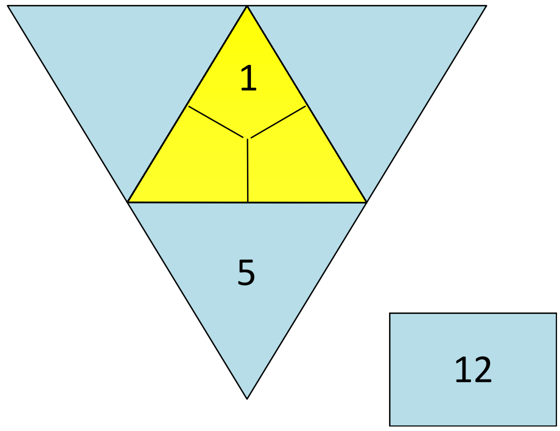


Abb. 1: Rechendreieck (Impuls 1)

Ergebnisse

Sprachliche, schriftliche und gestische Äußerungen wie etwa Zeigeimpulse wurden auch unter semiotischen Perspektiven einer Analyse unterzogen. Anhand der Interpretation der Zahl- und Variablenauffassungen in beiden

[1] Diese Modifizierung der Rechendreiecke wurde von Yvonne Wessels für eine Masterarbeit an der Universität Oldenburg konzipiert.

Gruppen wird herausgearbeitet, worauf sich die jeweiligen algebraischen Denkhandlungen beziehen. So wird ersichtlich, auf welche Weisen Variablenbedeutungen jeweils an den situativen grafisch-strukturellen Kontext des Rechendreiecks gebunden sind. Die Interpretation des Umgangs mit Variablentermen wurde anhand der Unterscheidung operational/objekthaft vorgenommen.

Algebraische Mustersituation und Darstellung: Timo und Stefan

Timo und Stefan repräsentieren die Struktur des Rechendreiecks geometrisch-symbolisch. Mithilfe der Struktur der Außensumme werden die Zahlen bei der Konstruktion der algebraischen Darstellung mit zusätzlicher Bedeutung aufgeladen: Die Zahlen werden Konstruktionsbausteine für den oben genannten algebraischen Ausdruck. Die Variable x wird zur Beschreibung des Problems benutzt, um die unbestimmten Objekte, d.h. die unbestimmten Summanden der Außensumme, darzustellen. Dabei wird die Bedeutung des x im Prozess der Konstruktion einer formalen Darstellung unter strukturierenden Denkhandlungen angepasst. Bezüge auf Rechendreiecksfelder und deren Beziehungen untereinander scheinen für die mentale Repräsentation von Variablen zentral zu bleiben.

Algebraische Mustersituation und Darstellung: Emma und Sophie

Bei Emma und Sophie wird deutlich, wie sie mithilfe sprachlich-gestischer Formeln die algebraische Struktur des Rechendreiecks mental repräsentieren. Die Felder des Rechendreiecks werden zu Platzhaltern für unbestimmte Zahlen, die einer objekthaften Deutung mithilfe sprachlich formulierter algebraischer Ausdrücke zugänglich sind. Diese inhaltliche Stütze wird nicht aufgegeben. Das Bedürfnis nach „unformalen“ Stützen zeigt sich auch an späterer Stelle im Interview, wenn Emma und Sophie zwar Variablen zur formalen Beschreibung des Rechendreiecks benutzen können, sich aber auch argumentativ auf Felder beziehen und offene Variablenausdrücke mit sprachlichen Formeln („irgendwas“) zu Objekten machen. Zahlen sind bei Emma und Sophie Strukturmerkmale des Rechendreiecks und auf diese Weise z.B. Summen unbestimmter Zahlen. Die vorgegebenen Zahlen entsprechen so Stellvertretern (Fischer 2009), es wird vom konkreten Zahlwert abstrahiert. Emmas algebraische Denkhandlungen vermischen sich mit einer Tendenz zur Formalisierung. Zugleich zeigt sich aber in den sprachlich-gestischen Verweisen auf Rechendreiecksfelder und Variablenausdrücke auch eine stark an die Darstellung in der Aufgabe rückgebundene Argumentation.

Zusammenfassung und Ausblick

Beide Gruppen strukturieren, konstruieren eine mathematische Darstellung und deuten Problemkontexte um - und zwar auf sehr unterschiedliche Weisen hinsichtlich einer darstellenden Vermittlung. Die Interpretation der Interviews zeigt, dass beide Gruppen den Weg zu einem argumentativen Umgang mit formaler algebraischer Symbolsprache nicht beschreiten. Wahrscheinlich findet ein Übergang von den geschilderten algebraischen *Mustersituationen* zu *abstrakten Grundvorstellungen* zu Variablen nicht statt.

Bei beiden Probandengruppen sind die algebraischen Terme (formale wie sprachlich-gestische) keine Formalisierungen, die als abstrakte Grundvorstellungen vom geometrisch-arithmetischen Kontext des Rechendreiecks abgelöst werden könnten. Es gibt keinen Hinweis auf einen Übergang zu abstrakten Grundvorstellungen; formale algebraische Argumentationen und Operationen werden nicht vorgenommen. Auch wenn das algebraische Denken elaboriert ist: Die starken Hinweise für strukturelles, grafisch vermitteltes Denken und die Einschränkungen formalen Denkens lassen vermuten, dass sich die Vorstellungen und Denkhandlungen dieser Probanden gemäß des Modells auf der Grenze zwischen formalem Denken und inhaltlichem Denken bewegen.

Literatur

Fischer, A. (2009): Zwischen bestimmten und unbestimmten Zahlen – Zahl- und Variablenauffassungen von Fünftklässlern, *JMD 30 (1)*, S. 3-29.

Kirsch, A. (1991): Formalismen oder Inhalte? Schwierigkeiten mit linearen Gleichungssystemen im 9. Schuljahr. *Didaktik der Mathematik 19*, S. 294-308.

Prediger, S. (2009): Inhaltliches Denken vor Kalkül. Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In: A. Fritz, S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek I. Rechenschwierigkeiten erkennen und überwinden*, Weinheim: Beltz, S. 213-234.

Radford, L. (2009): Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In: *Proceedings of the Sixth Conference of European Research in Mathematics Education* (CERME 6), Université Claude Bernard, Lyon (F).

Wittmann, E.C., Müller, G. (2005): Das Zahlenbuch 1, Leipzig u.a.: Ernst Klett Grundschulverlag.

Michael MEYER, Dortmund

„Ich hab grad n Zweieck erfunden“ – Typen von Regeln und ihre Bedeutungen bei Begriffsbildungsprozessen im Mathematikunterricht

Regeln können im Mathematikunterricht verschiedene Bedeutungen haben. Sie können zum Beispiel als mathematische Sätze selbst Gegenstand des Unterrichts sein oder als soziale Regeln die Interaktion(sverläufe) zwischen den am Unterricht Beteiligten bestimmen (s. hierzu Voigt 1984). Inwiefern Regeln aber auch die Begriffsbildung beeinflussen können, wird in diesem Beitrag auf der Basis der Sprachspielphilosophie von Ludwig Wittgenstein dargelegt.

1. Begriffsbildungsprozesse als Sprachspiele

Fundamental für die hier verwendete Sicht auf Begriffsbildungsprozesse ist Wittgensteins Metapher des „Sprachspiels“. Will man die Bedeutung dieses Wortes erfassen, so ist man zunächst mit einem Problem konfrontiert: Wittgenstein definiert nicht, was genau er als „Sprachspiel“ versteht. Vielmehr gibt er Beispiele und Beschreibungen von Sprachhandlungen an. Neben weiteren präsentiert Wittgenstein die folgenden Beispiele (Wittgenstein, Philosophische Untersuchungen, §23; im Folgenden kurz: PU §23):

- „Herstellen eines Gegenstandes nach einer Beschreibung“,
- „Eine Hypothese aufstellen und prüfen“,
- „Ein angewandtes Rechenexempel lösen“.

Diese Beispiele mögen andeuten, dass Sprachspiele kleine Episoden oder Einheiten innerhalb unserer alltäglichen Sprachhandlungen sind. Jedoch nennt Wittgenstein auch ein größeres Anwendungsgebiet von Sprachspielen:

„Ich werde auch das Ganze: der Sprache und der Tätigkeiten, mit denen sie verwoben ist, das ‚Sprachspiel’ nennen.“ (Wittgenstein, PU §7)

Sprachspiele vollziehen sich also auf verschiedenen Ebenen. Sie können einen eher umfassenden Charakter haben, ebenso wie sie nur kleine Bereiche unserer Handlungen beschreiben. Sie können sich durch sprachliche Handlungen auszeichnen, müssen dies jedoch nicht notwendig, weil auch nonverbale Tätigkeiten ausreichen, wie die obigen und das noch folgende Beispiel zeigen.

Neben solchen Beispielen gibt Wittgenstein keine detaillierte beschriebene Bedeutung oder gar eine „Definition“ dessen, was ein „Sprachspiel“ sein könnte. Ein zu vermutender Grund hierfür könnte seine Auffassung der Verleihung von Bedeutung sein:

„Man kann für eine *große* Klasse von Fällen der Benützung des Wortes ‚Bedeutung' – wenn auch nicht für *alle* Fälle seiner Benützung – dieses Wort so erklären: Die Bedeutung eines Wortes ist sein Gebrauch in der Sprache." (PU §43; Hervorhebungen im Original)

Die Bedeutung eines Wortes (z. B. „Sprachspiel") wird auf seinen Gebrauch in der Sprache zurückgeführt. Begriffe zu bilden kann somit verstanden werden, als Formen des Gebrauches des entsprechenden Wortes anzugeben. Die Beispiele von Wittgenstein für das Wort „Sprachspiel" stellen solche Gebrauchsformen dar. Entsprechend muss die fehlende Definition des Wortes „Sprachspiel" kein Versäumnis Wittgensteins sein, sondern vielmehr eine Konsequenz seiner Theorie.

2. Regeln im Begriffsbildungsprozess

Wittgensteins Theorie der Begriffsbildung enthält verschiedene Fokussetzungen. Eine hiervon bildet die Betonung von Regeln: Der Gebrauch von Worten bzw. der Gebrauch von Sätzen innerhalb eines Sprachspiel ist nicht willkürlich. Vielmehr wird dieser Gebrauch von Regeln bestimmt, die uns zum Beispiel angeben, wie wir die Worte verwenden können:

„Eine Sprache, so können wir sagen, ist eine Menge von Tätigkeiten (oder Gepflogenheiten), die durch bestimmte Regeln definiert sind, nämlich die Regeln, die alle die verschiedenen Gebrauchsweisen von Wörtern in der Sprache regieren." (Fann 1971, S. 74)

An einem Beispiel aus dem Mathematikunterricht soll im Folgenden die Existenz solcher Regeln im realen Mathematikunterricht verdeutlicht werden. Es werden zudem Unterschiede zwischen solchen Regeln herausgearbeitet und gezeigt, wie diese zumeist implizit genutzten Regeln und die Kenntnis derselben den Begriffsbildungsprozess beeinflussen können.

3. Eine Unterrichtsszene

Die folgende Unterrichtsszene stammt aus dem Mathematikunterricht einer zweiten Klasse einer städtischen Grundschule. In der vorherigen Stunde wurden die Begriffe „Dreieck", „Viereck", „Quader" und „Rechteck" mittels des Vorlesens einer Geschichte eingeführt. In der vorliegenden, zweiten Stunde der Unterrichtsreihe wiederholt die Lehrerin die Charakteristika (Anzahl der Ecken und Anzahl bzw. Lage der Seiten) dieser Figuren. Nun sollen die Schüler in Gruppenarbeit vorgegebene Figuren auf Geobrettern spannen. In einer Schülergruppe kommt es zu folgendem Gespräch:

Thomas	guck mal, das is n Zweieck. .. das is n Zweieck. (*zeigt auf das vor ihm liegende Geobrett, auf dem das Gummiband um zwei Nägel gespannt ist*)
S1	ja
S2	das gibts gar nicht. ..
Thomas	n Zweieck-
S1	doch, du hast es grade neu erfunden
S2	genau, du hast es erfunden. .. Thomas hat grad n Zweieck erfunden ..
S	(*melodisch*) ich kenn nen Zweieck
S2	und jetzt wirds jeder auf der Welt erfahren.

In dieser Unterrichtsszene führt der Schüler Thomas den Begriff „Zweieck“ ein. In Relation zu den bisher eingeführten Begriffen „Dreieck“ und „Viereck“ könnten folgende Regeln ursächlich für die Begriffsbildung (vgl. Winter 1989) gewesen sein:

- Wenn ein Gegenstand n Ecken und n Seiten hat, dann ist es ein N-Eck.
- Wenn bei einem Gegenstand n Ecken und n Seiten vorhanden sind und ein innerer Bereich von einem äußeren Bereich abgrenzt wird, dann ist es ein N-Eck.

Nachdem in der folgenden (dritten) Stunde das Trapez eingeführt wurde, spannen die Schüler vorgegebene Vierecke auf Geobrettern. Während dieser Einzelarbeit sagt Thomas wiederholt: „Ich hab gestern noch n Zweieck erfunden.“ Nach der Einzelarbeit treffen sich die Schüler im Sitzkreis und Thomas konstruiert nach Aufforderung der Lehrerin das Zweieck.

L	wenn man das jetzt zeichnen würde- (*hält ein Blatt Papier hoch*) stellt euch das mal kurz vor. wie sähe das aus wenn man das zeichnen’ das was da jetzt drauf ist .. Stefan
Stefan	einfach nur n Strich.
L	das ist einfach nur n Strich. und ist das dann eine Form’ .. kann man das Zweieck nennen’
Ss	nein
L	nein, genau. also ein Zweieck- .. gibt es nicht.
S	(leise) doch
L	doch’
S	ich kenn eins- so in oval und dann die andern Seiten so spitz
L	ja gut äh das könnte man sagen, wenn man das möchte- aber auf unserm Geobrett gibt es kein Zweieck. weil dieses hier (*deutet auf die Figur, die Thomas auf dem Geobrett gespannte hatte*) wär lediglich eine Linie wenn man das zeichnen würde.

In dieser zweiten Szene versucht die Lehrerin die Existenz des Zweiecks zu widerlegen. Die oben rekonstruierten Regeln behalten dabei ihre Gültigkeit, jedoch gelten sie nun nur für die Analoga der konstruierten Figuren auf dem Geobrett. Entsprechend wechselt die Lehrerin den Kontext: Die

Schüler sollen sich nun nicht mehr mit den Geobrett beschäftigen, sondern mit der hierzu äquivalenten Zeichnung auf einem Blatt Papier.

Der Widerspruch durch den zuletzt sprechenden Schüler kann auf verschiedene Weisen gedeutet werden. Zum Beispiel könnte er der Lehrerin hiermit verdeutlichen wollen, dass auch auf dem Blatt Papier ein Bereich zwischen den „nur übereinander liegenden Linien" geschaffen werden kann. Auch könnte der Schüler einem möglichen Widerspruch gegen die impliziten Regeln der Zweieckskonstruktion entgegen wirken wollen.

4. Zusammenfassung

Wittgensteins Philosophie des Sprachspiels ermöglicht neue Perspektiven auf die Begriffsbildungsprozesse im Mathematikunterricht. Der in diesem Beitrag thematisierte Regelbegriff verdeutlicht, welchen Einfluss Regeln auf solche Prozesse haben können:

- Regeln können die Bildung von neuen Worten unterstützen,
- Regeln können den Gebrauch von Worten leiten und
- Regeln können helfen, verschiedene Begriffe miteinander zu vernetzen (hinsichtlich des Vernetzens s. Fischer und Malle 1985, S. 189f).

Die Analyse der Unterrichtsszene in diesem Beitrag zeigt weiterhin, dass Begriffsbildung nicht vor dem Hintergrund eines bestimmten Kontextes stattfindet, sondern dass die Kontextbildung stets mit der Begriffsbildung einhergeht. Sprachspiele zu entwickeln bedeutet eben auch, Kontexte zu schaffen, in denen Worte auf bestimmte Weise gebraucht werden können.

In dem weiteren Forschungsprozess wird zunächst versucht, weitere Begriffe aus dem Kontext der Philosophie Wittgensteins (z. B. die Begriffe „Lebensform" und „Familienähnlichkeit") für die mathematikdidaktische Diskussion fruchtbar zu machen, um auf dieser Grundlage ein kohärentes Begriffsnetz zur Beschreibung und Rekonstruktion von Begriffsbildungsprozessen zu erhalten.

5. Literatur

Fann, K. T. (1971): *Die Philosophie Ludwig Wittgensteins*. München: List.

Fischer, R & Malle, G. (1985): *Mensch und Mathematik.* Mannheim: Bibliogr. Inst.

Voigt, J. (1984): *Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht*. Weinheim: Beltz.

Winter, H. (1983): Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 3, 175-204.

Wittgenstein, L. (PU): *Philosophische Untersuchungen*. Werksausgabe Band 1. Frankfurt: Suhrkamp, 1984.

WOLFRAM MEYERHÖFER, Paderborn

Zu einem theoriesprachlichen Alternativkonzept zur „Rechenschwäche“

Bereits in Meyerhöfer (2008) habe ich das Konzept der besonderen Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) und der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH) als theoriesprachliches Alternativkonzept zur „Rechenschwäche“ vorgestellt. Die bSR bezeichnen dabei die Ebene der Phänomene des Nichtrechnenkönnens; das Nichtverstehen aufgrund nbsH bezeichnet die Ebene der Ursachen der bSR.

Didaktisches/institutionelles Versagen vs. Krankheit/Minderbegabung

Wir treffen auf Phänomene bSR und suchen nach einer theoriesprachlichen Beschreibung der Ursachen dieser Phänomene. Eine Möglichkeit dazu ist, als Ursache eine Krankheit anzusehen, man nennt diese Krankheit Rechenschwäche. Rechenschwäche ist eine Art zugespitzt verminderte mathematische Begabung. Eine zweite Möglichkeit ist, diese Annahme zu verwerfen. Es verbleibt dann die Gegenannahme, dass die Phänomene durch institutionelles bzw. didaktisches Versagen verursacht sind.

Empirisch wissen wir nicht, welche dieser Annahmen richtig ist. Der Umstand, dass einerseits diese angenommene Krankheit trotz jahrzehntelanger Forschung nicht nachgewiesen wurde, und die Erfolge von Rechenschwächetherapien bei diesen angeblich kranken bzw. unbegabten Individuen scheinen mir ein wenig mehr gegen die Krankheitsannahme zu sprechen. Vorrangig geht es mir aber mit der Formulierung einer theoriesprachlichen Gegenposition darum, unser Erkennen der Ursachen voranzubringen. Ich sehe auch einen humanistischen Effekt dabei, denn die Abstempelung der Betroffenen scheint mir inhuman zu sein und sie entlässt die in meinem Konzept angenommenen Verursacher des Problems aus der Verantwortung.

Stoffliche Hürden (sH)

Ich folge der These, dass es eine begrenzte Anzahl von mathematischen Inhalten gibt, deren Nichtverstehen das mathematische Versagen verursacht. Diese Inhalte stellen zentrale Hürden im mathematischen Lernprozess dar. Ihr Nichtverstehen hat weitreichende Folgen für die Beherrschung breiter Felder des mathematischen Schulstoffs und für die Orientierung im Quantitativen. Sie stellen die zentralen Ankerpunkte dar, um die herum sich das mathematische Wissen und Können erst systematisieren kann. Diese zentralen mathematischen Inhalten nenne ich „stoffliche Hürden“ (sH). Sie sind Hürden im Verstehen und im Fortkommen.

Ich bezeichne diese Verstehenselemente als sH, um begrifflich zu kennzeichnen, dass hier eine Hürde zu nehmen ist, dass es also nicht lediglich Reifung oder Übung bedarf, all dies zu verstehen. Es ist demzufolge auch nicht deviant, solche Elemente nicht zu verstehen – insbesondere wenn sie nicht ordentlich unterrichtet werden.

Die stofflichen Hürden sind objektiv vorhanden und dem mathematischen Gegenstand immanent. Sie entstehen nicht erst im Aufeinandertreffen des mathematischen Gegenstandes mit dem Kind. Jeder Lernende muss sie nehmen – sonst scheitert das Lernen. Aus der vorhandenen Literatur und aus Aussagen von Rechenschwächetherapeuten leite ich die These ab, dass die stofflichen Hürden (sH), also die für den gesamten Mathematikunterricht zentralen basalen mathematischen Inhalte, die wirklich verstanden werden müssen, folgende sind: i) kardinaler, ordinaler und relationaler Zahlbegriff mit Ablösung vom zählenden Rechnen ii) Logik des Stellenwertsystems iii) Operationslogiken: Welche Fragen stellen die Rechenoperationen und auf welche Weise beantworten sie diese Fragen? Jener Teil davon, der das Verständnis des Stellenwertsystems vertieft, ergibt sich aus der Frage: Warum funktionieren die halbschriftlichen und die schriftlichen Rechenverfahren? iv) Herausgehoben scheint die Operationslogik der Division, auch das relationale Verständnis der Division, als Voraussetzung der Bruchzahlentwicklung zu sein.

Veränderte Forschungs- und Praxisfragen

Von der stofflichen Seite her ist zentral, ob noch mehr sH eine solche zentrale Funktion einnehmen, ob man von einer strengen Hierarchie der Hürden ausgehen muss und ob das tiefe Verständnis der Operationslogiken, insbesondere der Operationslogik der Division, wirklich so zentral ist wie hier angenommen. Ich berufe mich hier auf Erkenntnisse, die mir relativ urwüchsig gewonnen zu sein scheinen: Rechenschwächetherapeuten und Didaktiker haben ihre Beobachtungen eigenen Tuns systematisiert aufgeschrieben. Hier ist ein reichhaltiger empirischer Erfahrungsschatz sedimentiert, aber mir scheint es notwendig zu sein, dass es mehr handlungsentlastete Forschung dazu gibt, die unseren Wissensstand systematisch aufarbeitet und hinsichtlich der sH vervollständigt.

Im Konstrukt der nbsH gibt es keine Prävention, und es gibt auch keine Diskussion darüber, ab welchem Alter oder ab welcher Klassenstufe man irgendeine Krankheit erkennen kann, wie dies im Konstrukt der Rechenschwäche zentral ist. So wird die praktisch folgenreiche Behauptung verworfen, eine Rechenschwäche ließe sich erst ab dem Ende der ersten (vgl. z.B. Heidelberger Rechentest) oder ab der zweiten Klasse (vgl. Schipper)

erkennen. Im Konstrukt der nbsH wird im Gegensatz dazu vom Beginn der ersten Klasse an gefragt: *Wo steht das Kind bei der Erarbeitung eines kardinalen, eines ordinalen und eines relationalen Zahlbegriffs? Ist es dabei, sich vom Zählen zu lösen? Wo befindet es sich bei den Ablöseschritten?* Das bringt unmittelbar die Frage mit sich: *Was muss und was kann ich tun, um das Kind bei der Erarbeitung eines umfassenden Zahlbegriffs und bei der Ablösung vom Zählen zu unterstützen?* Damit ist auch der Begriff der Früherkennung verschoben: Es geht nicht mehr darum, früh zu erkennen, wer krank ist oder wer anfällig ist für eine Krankheit. Statt dessen geht es darum zu verstehen, wo das Kind im Lern- und Verstehensprozess steht und wie es von dieser Stelle ausgehend begleitet werden kann.
Es geht dann auch nicht um die Frage, wie viele der Mitglieder einer Population einer pathologischen Kategorie zugeordnet werden können. Es geht um die viel schlichtere und gleichzeitig viel schwierigere Frage, auf welche Weise ein verstehender Zahlbegriff, ein Operationsverständnis usw. überhaupt erarbeitet wird bzw. sich herausbildet und welche Voraussetzungen dafür notwendig sind. Quantitativ und qualitativ sind dabei Verstehenselemente und ihr Zusammenwirken interessant. Mir scheint, dass gerade die psychologische Forschung in den letzten Jahrzehnten einen Gutteil ihrer Kraft von dieser relevanten Frage weggerichtet hat auf die Frage hin, wie man die Kranken oder die Anfälligen identifiziert.

Das Verstehen der Zahlbegriffsentwicklung birgt die Forderung nach Verstehen des Nichtverstehens in sich: Wir wissen immer noch relativ wenig darüber, warum manche Kinder (trotz anregender Umgebung?) einen Zahlbegriff nicht urwüchsig erwerben und ob bzw. wie und warum manche Kinder auch in anregungsarmen Umgebungen ihn urwüchsig erwerben. Ebenso wie im Konstrukt der Rechenschwäche wird im Konstrukt der nbsH versucht, die Wechselwirkung von Anlagen und von Umwelten zu durchschauen, um den Erwerb und seine Brüche zu verstehen. Im Konstrukt der nbsH ist das Ziel des Forschens aber, dass Früherkennung immer Frühförderung heißt, es geht nicht um frühe Kategorisierung.

Zur Rolle von Schule

Die Institution Schule ist genuin für die Bearbeitung sH zuständig. Wie kann die Institution Schule aber die BsH leisten – und dies möglichst bereits im regulären Unterricht? Darin steckt die Kernfrage der Mathematikdidaktik: Wie sorgt man für das Verstehen von Mathematik? Die Stoffdidaktik hat diese Frage umschifft, indem sie einfach behauptet hat, dass eine gute Stoffstrukturierung Verstehen sichert. Die empirische Mathematikdidaktik hat vielfältige Aspekte von Mathematikunterricht untersucht, aber selten die Frage gestellt: Wird hier Verstehen ermöglicht? Die Mathematikdidaktik steht an einer Stelle, an der sie mit ihrem Wissen um die Prozesse im Klassenzimmer wieder stärker auf das Stoffliche – und auf das Verstehen des Stofflichen – schauen muss. Für die sH wird nach der Analyse der sH dann bei der Analyse von Unterricht z.B. gefragt: Werden in diesem Unterricht sH bearbeitet? Wie? Oder: Warum werden die stofflichen Hürden nicht bearbeitet? Oder: Was wird stattdessen gemacht?

Didaktisch zentral ist der Mechanismus des didaktischen Versagens. Ich habe die These, dass jene Lehrer stoffliche Hürden nicht bearbeiten, die schlicht nicht wissen, wo diese Hürden liegen und wie sie zu bearbeiten sind. Wir können das nur erforschen, indem wir das Können und Tun jener Lehrer untersuchen, die Schüler mit sogenannter Rechenschwäche „erzeugen". Wir müssen also untersuchen, was im Unterricht jener Klassen Unterschiedliches passiert, in denen besondere Schwierigkeiten im Rechnen (bSR) gehäuft auftreten und in denen sie nie auftreten.

Das Problem der didaktischen Qualität muss aber ebenso andersherum untersucht werden: Es gibt Konzepte, die sich explizit das Ziel setzen, Lehrer zu befähigen, einen Unterricht zu halten, der bSR vermeidet. Solche Konzepte muss die Mathematikdidaktik systematisch evaluieren. Das Konzept der nbsH zeigt uns hierbei, dass wir mit unseren Untersuchungen nicht mehr warten müssen, bis „das Kind in den Brunnen gefallen ist", bis also bSR auftreten: Wir können stattdessen mit Lehrerinnen bereits im Forschungsprozess daran arbeiten, dass bSR gar nicht erst entstehen. Die mittlerweile massenhaft vorhandenen Daten aus Vergleichsarbeiten liefern uns Kontrollgruppendaten – nicht nur für Lehrer, die nicht mit neuen Konzepten arbeiten, sondern auch für frühere Klassen der beteiligten Lehrer.

Wenn wir den Blick auf das Können und Nichtkönnen von Lehrern richten, dann steht für uns als Lehrerbildnerinnen die Frage, wie wir Studierenden besser beibringen, wo die Hürden im Erwerb von Zahl und Rechnen liegen und wie man Verständnis hervorbringt. Man kann sagen: Entweder bringen wir das bislang den Studierenden nicht im notwendigen Maße bei oder aber es ist gar nicht möglich, dass wir ihnen das im Studium beibringen. Das hieße, dass die Lehrerausbildung falsch strukturiert ist. Aus konstruktivistischer Sichtweise ist das durchaus der Fall, denn nach dem Ende des Referendariats ist keine ernsthafte Reflexion des eigenen Tuns mehr institutionalisiert, und die Bearbeitung stofflicher Hürden scheint mir viel zu komplex zu sein, um sie auf Vorrat zu erlernen. Man muss aber klar sagen: Auch das Problem der Ausbildungsstruktur hätten wir Didaktiker zu bearbeiten.

Meyerhöfer, Wolfram (2008): Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht.*

Regina Dorothea MÖLLER, Erfurt

Geld im Mathematikunterricht der Grundschule – Ziele, Standards, Kompetenzen

Der Qualität des Mathematikunterrichts wird seit längerem eine erhöhte Aufmerksamkeit zuteil, insbesondere hervorgerufen durch die Vorgabe der Bildungsstandards und die anhaltenden Diskussionen zur Kompetenzrientierung sowohl im Unterricht als auch zur Lehrerbildung. Hinsichtlich der Bildungsstandards erstaunt es, dass dem Thema „Geld", subsumiert unter Größen und Messen, nur ungenügend charakterisierende Merkmale gegenüber den anderen - physikalischen - Größen zugeordnet werden. Dies hat zwar historische Gründe, doch wird es einem kompetenzorientierten Unterricht in einer Gesellschaft nicht gerecht, die unter dem Einfluss der Globalisierung in eine immer engere Verflechtung internationaler Ökonomisierung gerät.

Charakterisierung des Themas im Unterricht

Die Thematisierung der Größe „Geldwert" ist inhaltlich an die Erweiterung des Zahlenraumes gebunden und erfolgt methodisch unter Verwendung von Papiergeld in den ersten beiden Klassenstufen und weiterhin mit dem Lösen von mehr oder weniger tradierten Sachaufgaben unter dem Aspekt der Anwendungsorientierung, vornehmlich in dritten und vierten Klassenstufen.

Die didaktische Stufung der physikalischen Größenbereiche, vom direkten über das indirekte Vergleichen hin zum Messen, wird beim Geldbegriff sehr selten umgesetzt, obwohl es seinem Verständnis förderlich wäre. Dies gilt umso mehr, weil es sich im Gegensatz zu den physikalischen Größen um eine ökonomische handelt, bei der die Idee der Messung nicht an die Realität eines Gegenstandes, wie z.B. die Länge oder das Gewicht, gebunden ist. Es werden nämlich intersubjektive Wertmaßstäbe, die variabel sind und sich ändern können, verglichen. Außerdem wird bei den üblichen Sachaufgaben eine funktionale Zuordnung vorausgesetzt, die auch wieder einer Modellierung physikalischer Kontexte entnommen ist, nicht jedoch die ökonomische Realität abbildet. Methodisch erleben die Schüler die tabellarisch aufgelisteten Zuordnungen von Waren zu Preisen zunächst als Vervielfachen, sie lösen die Aufgaben also innerhalb der arithmetischen Sinngebung.

Zwar werden zum Thema Geld viele Lehrplanziele umgesetzt und wesentliche didaktisch-methodische Perspektiven berücksichtigt, es entbehrt aber einer kontinuierlichen sinngebenden Thematisierung in einem auf Kompetenzen hin orientierten Unterricht. Bei den physikalischen Größen ist diese Kontinuität durch die der Realität immanenten Merkmale der Dinge nicht in dem Maße notwendig. Es wird z.B. immer noch das Urmeter angegeben, um die Vereinheitlichung bei der Größe Länge zu verdeutlichen, obwohl längst eine viel feinere Messung möglich ist und in anderen, technischen Kontexten auch durchgeführt wird.

Zum Begriff der Kompetenz

Der Begriff der Kompetenz wird in verschiedenen Kontexten divergierend verwendet; besonders in Verbindung mit Spezialkompetenzen (z. B. pädagogische, kommunikative). Einig ist man sich in dem Verständnis, dass der Begriff eine allgemeine Befähigung für eine Sache oder einen Lebensbereich ausdrückt. Nach Klieme u.a. sind Systeme aus erlernbaren Fertigkeiten, Kenntnissen und metakognitivem Wissen in Alltags- und Schulumgebungen zu bewältigen (Klieme u.a. 2001).
Für den Mathematikunterricht unterscheidet man insbesondere Sach- Methoden- und Sozialkompetenz, die nicht voneinander unabhängig sind. Mathematische Gegenstandsbereiche erfordern je spezifische inhaltsbezogene Kompetenzen, und die allgemeinen Kompetenzen wie das Problemlösen, das Kommunizieren und Modellieren werden je nach Erfordernis betont.
Für das Thema Geld im Mathematikunterricht der Grundschule bezieht sich die Sachkompetenz auf das Wissen um Münzen, Scheine und Geldeinträge auf (Spar-)Konten, die auf der Sachkompetenz des Zahlgebrauches aufbaut. Der tätige Umgang mit Geld beim Kaufen und Verkaufen rekurriert auf die Methodenkompetenz bei den Grundrechenarten, insbesondere der der Subtraktion. Weiter spielt die Sozialkompetenz eine besondere Rolle, weil Preise von Waren und deren Kauf in Zusammenhang mit Werteinschätzungen stehen, die zwar in der Familie oft implizit vermittelt, im Unterricht jedoch selten explizit berücksichtigt werden. Schon die Thematisierung des Taschengeldes birgt durch die weitergehenden Konnotationen des Geldes Schwierigkeiten, die wenig mit den reinen Geldbeträgen zu tun haben.

Beobachtungen zur Kompetenzorientierung beim Thema Geld

Auf den Begriff der Kompetenz wird auf unterschiedlichen Ebenen verschieden reagiert. Auf der Ebene des Unterrichtes hängt es von der jeweiligen Lehrkraft ab, inwieweit sie diese im täglichen Unterrichtsgeschehen in den unterschiedlichen Fächern in welcher Differenzierung umsetzt oder umsetzen kann. Der Ablauf des Unterrichtes wird oft am Schulbuch orientiert, die Ziele des Lehrplanes erfüllend, ohne eigens beim Planen des Unterrichtes die jeweilig in den Vordergrund rückenden Kompetenzen zu

berücksichtigen. Es lassen sich in dieser Hinsicht Vermeidungsstrategien beobachten, so dass der Kompetenzbegriff nur punktuell wirksam wird. Nur bei den einschlägigen Testaufgaben, die länderübergreifend gestellt werden, hat er insofern Auswirkungen, als diese im Unterricht geübt werden. Insgesamt ergibt sich ein heterogenes Bild, sowohl hinsichtlich der Anwendung des Kompetenzbegriffes, als auch in Bezug auf die Standards insgesamt. Die Gründe dafür liegen in der verhältnismäßig knappen Zeit für eine reflektierte Umsetzung auf den verschiedenen Bildungsebenen.
Dem Thema Geld mangelt es im Unterricht an innerer Stringenz, teilweise auch an unterrichtlicher Authentizität; die Sinngebung geht teilweise verloren. Denn einerseits wird z.B. das Spielgeld im Hinblick auf den Umgang mit echtem Geld eingesetzt, andererseits wird die sachbezogene Verwendung in Kauf- und Verkaufsituationen thematisiert, wobei es sich dabei eigentlich um veranschaulichende Attrappen handelt, was den Schülern eher mehr als weniger bewusst ist.

Geld als Themenstrang des Mathematikunterrichtes

Bei einer langfristigen Unterrichtsplanung (Vollrath 2001) kommt es darauf an, die zu behandelnden Problemstellungen, Inhalte und Verfahren in einen inneren Sinnzusammenhang zu stellen (*Kohärenz*) und Zusammenhänge zu anderen Inhalten des Mathematikunterrichts aufzuzeigen (*Korrespondenz*). Grundlegende Planungsentscheidungen wie *Auswahl* und *Verteilung* der zu behandelnden Inhalte und Probleme der einzelnen Jahrgangsstufen werden in Deutschland traditionell durch die Lehrpläne getroffen.
Über die *Anordnung* der Inhalte und über die *Art* und die *Intensität* ihrer Behandlung innerhalb einer Jahrgangsstufe entscheidet jedoch prinzipiell die Lehrkraft. Das eingeführte Schulbuch bietet eine Orientierungshilfe für den Unterricht mit einer unterstützenden Funktion in der Auswahl der Aufgaben, ihrer Abfolge und den möglichen Aufgabenstellungen zur notwendigen Sachorientierung.
Um den Sinnzusammenhang zu erhöhen, lässt sich das Thema Geld in drei Themenkreisen behandeln, die in Zusammenhang mit den Kompetenzen der Bildungsstandards (2004) stehen.
<u>Geld bewegen</u>
Im Mittelpunkt dieses ersten Themenkreises steht die Erfahrung, dass Geld die Form von Münzen und Banknoten als handhabbare, transportierbare Objekte besitzt, somit wird es sortierbar und dem Betrag nach abschätzbar. Im persönlichen Bereich bewegt der Besitzer sein Geld von einem Ort zum anderen, um vor Ort bei Bedarf liquide zu sein, wenn er sein Geld für etwas Anderes eintauschen möchte. Größere Geldmengen werden in Tresoren

aufbewahrt, Geldautomaten auf Vorrat bestückt. Der Kassierer in der Bank tritt dagegen heute seltener in Erscheinung.
Unabhängig von der Perspektive, die man einnimmt, ist Geld immer in Bewegung, ob konkret in Gestalt von Münzen und Scheinen oder symbolisch als Betrag auf einem Konto oder als elektronischer Zustand in einem Speichermedium.

Kaufen und Verkaufen

Dem zweiten Themenkreis „Kaufen und Verkaufen" liegt die Vorstellung zugrunde, dass die merkantilen Tätigkeiten von Einzelnen und Gruppen, von unterschiedlichen Unternehmen und Staaten heutzutage wie auch früher täglich mithilfe des Geldes vorgenommen werden. Im Kleinen wie im Großen prägt der Handel auch des Geldes selbst den heutigen Alltag.
Im Themenkreis „Kaufen und Verkaufen" stehen beim Transfer des Geldes von einem Eigentümer zum anderen zunächst die Preise als Geldwerte der Waren mit verschiedenen Einheiten im Vordergrund. Der Geldwert, der hier als Preisangabe fungiert, gibt den Waren ihren Handelswert, für den der Käufer entweder bereit ist zu kaufen oder nicht. Die Preisangabe schließt die Möglichkeit des Verhandelns nicht aus. Doch ohne Angabe von Preisen müsste immer wieder neu verhandelt werden, was heutzutage bei den unzähligen Transaktionen einen unvertretbaren Aufwand darstellen würde.

Wirtschaften

Im Themenkreis „Wirtschaften" geht es um die Erfahrung, mit Geld haushalten zu können, was die Kinder in den Familien im Idealfall erfahren. Das gilt für den Einzelnen, für die Familie, für kleinere und größere Interessengruppen, Unternehmungen und auch für den Staat. Haushalten - Können ist eine Grundbedingung des Wirtschaftens, denn die Summe der Bedürfnisse, die Menschen, Gruppen oder Staaten täglich haben, ist im Allgemeinen größer als die Mittel zu ihrer Befriedigung. Die Knappheit der Mittel ist der Ausgangspunkt sämtlicher ökonomischer Überlegungen, denn der Verbrauch kann den Bestand nicht übersteigen.

Literatur

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004. München: Wolters-Kluwer, Luchterhand Verlag

Klieme, E., Avenarius, H., Blum, W., Döbrich, P.u.a. Hrsg. (2003) Zur Entwicklung nationaler Bildungsstandards. Eine Expertise. Bonn: BMBF

Vollrath, H.-J.(2001). Grundlagen des Mathematikunterrichtes in der Sekundarstufe. Spektrum. Heidelberg. Berlin

Renate MOTZER, Augsburg

Übungen zu den „klassischen“ Mathematik-Vorlesungen – organisiert als Expertenpuzzle

Mathematikstudierende werden außer in Seminaren und bei mündlichen Prüfungen (die es seit der Umstellung auf Bachelor und Master immer weniger gibt) offiziell kaum dazu aufgefordert, mündlich mathematische Sachverhalte zu erklären. Gerade für künftige Lehrerinnen und Lehrer ist das eher eine ungünstige Vorbereitung auf den Beruf.

Viele Lehramtsstudierende sind weiterhin unzufrieden mit ihrem Studium. Unter anderem fühlen sie sich allgemein nicht gut auf ihren späteren Beruf vorbereitet. Ein weiterer Grund ihrer Unzufriedenheit ist die Art der Mathematik, wie sie sie an der Universität kennenlernen. Der Stoff wird ihnen meist deduktiv und abstrakt vermittelt. Die eigenständige Beschäftigung mit mathematischen Themen besteht meist in den Versuchen, die Übungsaufgaben zu den Vorlesungen zu bearbeiten. Sofern sie sich dazu in Gruppen zusammentun, reden sie zumindest untereinander über mathematische Themen. Offiziell müssen sie es nicht tun.

Etliche fühlen sich überfordert mit den Aufgaben und selbst engagierte Studierende erzählen mir immer mal wieder, sie würden ja gerne mehr Übungsaufgaben abgeben, aber sie finden häufig keinen Lösungsansatz. So gehen sie „brav“ in die Übungen, lassen sich dort die Lösungen erklären, lernen diese so gut es geht „auswendig“ und schaffen es so durchaus, die Klausuren zu bestehen. Befriedigt sind sie dadurch freilich noch lange nicht.

Ich rede hier vor allem von Studierenden, die sich auf ein Lehramt im Grund-, Haupt- oder Realschulbereich vorbereiten. Mit solchen Studierenden habe ich es hauptsächlich zu tun und an sie wendet sich auch die Vorlesung „Elementare Zahlentheorie“, die ich seit einigen Jahren jährlich an der Uni Augsburg halten darf.

Auch meine Vorlesung ist eine deduktive Veranstaltung, in der ich Frontalunterricht an der Tafel halte. Wenn möglich versuche ich Studierende einzubeziehen, aber in Vorlesungen mit über 100 Studierenden fühlen sich gewöhnlich nur wenige angesprochen, aktiv mitzuarbeiten und sich zu melden, wenn Fragen an das Auditorium gestellt werden.

Um mehr Studierende zu aktivieren, eignen sich die Übungen mit Teilnehmerzahlen von 20 – 30 wesentlich besser.

Nachdem ich mit der Unterrichtsmethode Expertenpuzzle in der Schule recht gute Erfahrungen gemacht habe (vgl. Motzer 2002), habe ich mich im letzten Jahr entschlossen, diese Methode auch auf die Übungen zur Zahlentheorie-Vorlesung anzuwenden.

Die Erläuterung der Methode für die Studierenden lautete:

> In den Übungen wird mit der Unterrichtsmethode „**Expertenpuzzle**" gearbeitet. Dadurch sollen Sie den selbstständigen Umgang mit den mathematischen Inhalten üben. D.h. Sie arbeiten immer in 4er Gruppen.
>
> Jeder hat eine Aufgabe so gut vorbereitet, dass er sie den anderen 3 erklären kann. Er ist Experte für diese Aufgabe. Zu Beginn der Übung setzen sich all diejenigen zusammen, die für die gleiche Aufgabe Experte sind, und besprechen Besonderheiten ihrer Aufgabe (etwa 15-20 Minuten). Dies setzt voraus, dass Sie sich schon gut vorbereitet haben, dass Sie aber kleine Unklarheiten noch abklären können. Dann werden die 4er-Gruppen gebildet, in denen immer einer den anderen 3 seine Aufgabe erklärt (etwa 1 Std, d.h. jeder erklärt ca. eine Viertelstunde).
>
> Im Anschluss gibt es noch die Möglichkeit, weitere Fragen mit den Übungsleitern zu besprechen.
>
> Sollten Sie in der Vorbereitung Schwierigkeiten mit Ihrer Aufgabe haben, stehen Ihnen die Übungsleiter (und ich) gerne mit Rat und Tat zur Seite. Selbstverständlich sind sie auch während der Übungen zugegen und helfen, wo es nötig ist.
>
> Die **Mitarbeit in den Übungen** ist ebenso eine Voraussetzung zur Teilnahme an der Klausur wie die Abgabe der Übungsaufgaben bzw. der Kommentare.

Die Studierenden erhielten also jede Woche ein Übungsblatt, auf dem die Aufgaben den vier Experten A-D zugeordnet waren. Manchmal gab es einzelne schwierigere Aufgaben, deren Lösung später vom Übungsleiter selbst vorgestellt wurde, aber das war eher die Ausnahme.

Die Übungsaufgaben mussten in der kommenden Woche abgegeben werden, wobei ersichtlich sein musste, dass sich jede(r) Studierende mit jeder Aufgabe beschäftigt hatte, nicht nur mit der, für die sie (er) Experte war. Nach dem Abgabetermin wurden Musterlösungen ins Netz gestellt, so dass nun jede(r) sich mit der Aufgabe, für die sie(er) Experte war, noch intensiver auseinandersetzen konnte, falls es ihr(ihm) nicht gelungen war, die Aufgabe selbst zu lösen.

In der Woche darauf bekamen die Studierenden ihre abgegebenen Lösungen vom Übungsleiter zurück. Der Übungsleiter besprach die Lösungen aber nicht, sondern jetzt setzte die oben beschriebene Arbeit der Expertengruppen und anschließend der gemischten Gruppen ein. Der Übungsleiter stand als Moderator zur Verfügung.

De facto waren die Expertenrunden häufig relativ kurz, denn die Studierenden hatten sich anhand der Musterlösung meist schon gut vorbereitet. Bei einigen wenigen beklagten die Kommilitonen, dass sie öfters nur schlecht vorbereitet waren und die Übungsleiter beim Erklären helfen mussten. Manche Gruppen sind im Lauf der Zeit jedoch eher dazu übergegangen, einfach zu viert (oder wenn mal jemand gefehlt hat nur zu zweit oder dritt) die Musterlösung miteinander durch zu besprechen und bei Unklarheiten die Übungsleiter zu befragen. Auch mit dieser Art Gruppenarbeit war ich einverstanden.

Nach anfänglichen kleineren Widerständen wegen der zusätzlichen Arbeit, die Besprechung selbst vorbereiten und durchführen zu müssen, lernten die meisten Studierenden die Methode durchaus zu schätzen. Nur in wenigen Gruppen verlief die Kommunikation nicht so gut, so dass diese Studierenden auch im Rückblick noch eine „normale" Übung gewünscht hätten.

Was den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben anging, waren die meisten Aufgaben für die meisten Teilnehmer machbar. Manche kannten die Aufgaben schon vom Vorjahr. Es fiel aber bei der Korrektur der Aufgaben auf, dass nicht blind abgeschrieben wurde, sondern dass die Studierenden, sofern sie schon Lösungen kannten, sich von diesen nur soweit inspirieren ließen, als sie sie auch verstanden haben. Wörtlich wurde nicht abgeschrieben und Unverstandenes schon gar nicht. Stattdessen wurde das Unverständnis mit eigenen Worten beschrieben. Die Bedingung war ja nicht, dass man so und so viele richtige Lösungen abgeben musste. Die Bedingung war, dass man sich mit allen Aufgaben beschäftigen musste.

Zusätzlich zu den Übungsaufgaben musste auch ein Kommentar zur Vorlesung abgeben werden:

> Neben der Bearbeitung dieser Übungsaufgaben sollte das Übungsblatt, das Sie abgeben, immer auch einen kleinen **persönlichen Rückblick** auf das gerade behandelte Thema enthalten.
>
> Mögliche Fragen, auf die Sie eine Antwort geben können, sind:
>
> Was wusste ich schon? (hier reicht ein kurzes Erwähnen)
>
> Was habe ich bisher in anderer Form kennen gelernt?
>
> Was war leicht nachzuvollziehen?

Was erschien mir schwer?

Was ist mir unklar geblieben?

Was von dem, was ich in der Vorlesung noch nicht verstanden habe, ist mir beim Durcharbeiten im Buch klargeworden?

Manche Studierende kommentierten neben der Vorlesung auch die Übungsaufgaben. Dadurch erhielt ich einen relativ guten Einblick darin, wie es meinem Studierenden mit dem Vorlesungsstoff und den Übungsaufgaben so erging.

Eine dieser Reflexionen lautete z.B.: „Der Vorlesung konnten wir diesmal gut folgen. Die Idee der Gruppenarbeit (Puzzle) finden wir sehr gut, da man die Aufgaben immer 2x durcharbeitet und miteinander bespricht.“

Auch wenn die allermeisten Inhalte der Zahlentheorievorlesung im späteren Berufsleben keine Rolle mehr spielen werden, haben die Studierenden für die berufliche Zukunft manches gelernt:

Über Mathematik kann man auch ganze deutsche Sätze schreiben und seine Emotionen über mathematische Inhalte und Verstehensprozesse ausdrücken.

Was man selbst verstanden hat, kann man auch anderen erklären. Auch wenn man etwas vielleicht noch nicht ganz verstanden hat, kann man schon mal anfangen, das zu erklären, was man verstanden hat und den Rest sich miteinander erarbeiten.

Nicht nur der, der vorne steht, hat die Kompetenz zu erklären. Die Lehrerrolle, die in diesem Fall der Übungsleiter einnimmt, kann auch eine andere sein, die eines Moderators und Lernbegleiters.

Nicht zu unterschätzen sind die Auswirkungen auf die Selbstwirksamkeitserwartung. Die Erfahrung, etwas selbst verstanden zu haben und anderen erklären zu können, tut jedem gut, gerade auch unseren Studierenden, die ja meist aus Freude an der Mathematik diese Fach gewählt haben und an der Universität so oft an ihre Grenzen stoßen müssen.

Literatur

Motzer, Renate (2002): Expertenpuzzle im Mathematikunterricht, in*: Beiträge zum Mathematikunterricht 2002*,(S.359-362) div-verlag franzbecker, Hildesheim/Berlin

Winfried Müller, Potsdam

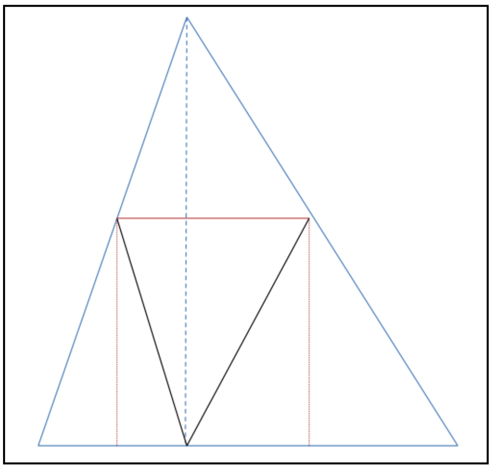
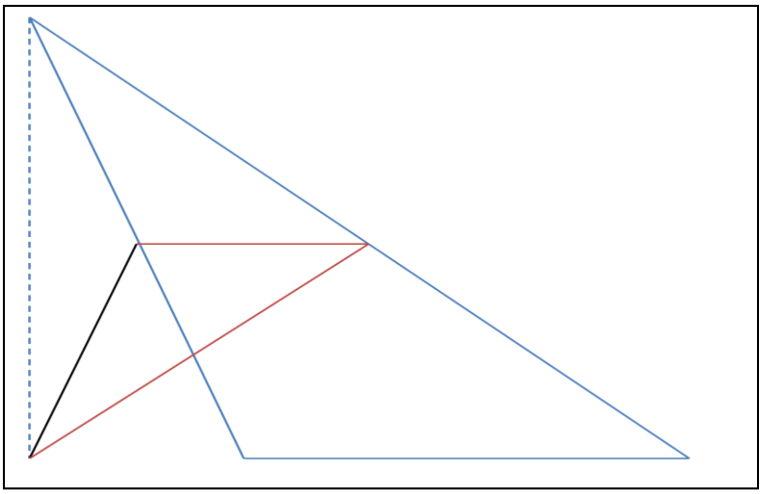
Konvex – noch immer (k)ein Thema

Konvex ist ein Stiefkind der Didaktik, mehr noch ein Sorgenkind! Vielleicht gelingt es nunmehr [6] diesen wie wir hoffentlich sehen werden wichtigen Begriff der momentan meist stiefmütterlichen Behandlung zu entreißen.

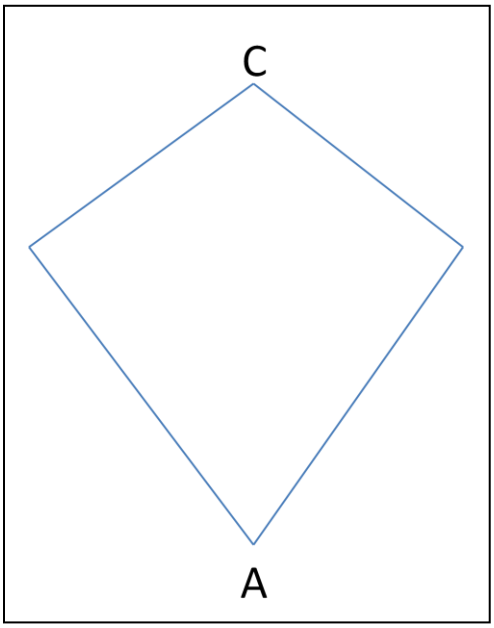
Für konvex finden wir Erklärungen „keine einspringenden Ecken“ oder „nicht eingebeult“, auch „eiförmig“, Letzteres wohl mit dem richtigen Gedanken im Hinterkopf, dass SchülerInnen die Vokabel aus der Physik (Linsen) bzw. ihrem Alltag (Brille!) kennen könnten. Im Fach taucht der Begriff auf als Eigenschaft von Punktmengen z. B. eines affinen Raumes, evtl. auch eines Vektorraumes: Eine nichtleere Menge M heißt konvex, wenn mit je zwei ihrer Punkte auch deren Verbindungsstrecke zu M gehört. Diese einfache Definition braucht eigentlich nicht durch Anderes ersetzt zu werden. Die Brücke zum Gegenstück „konkav“ (=hohl; Höhlen, Kavernen, engl. cave) ist leicht zu schlagen, und die Übersetzung von konvex in gewölbt liegt nahe. Zugleich erhalten wir den ersten Hinweis zur unterrichtlichen Behandlung, nämlich dass es nicht genügt wenn der Begriff nur i. Z. mit Polygonen (und Polyedern) auftaucht; hier aber wird er meist glatt verschwiegen oder vergessen!

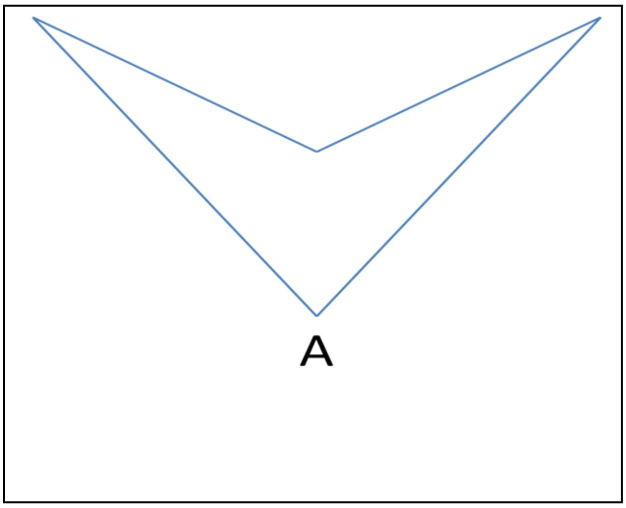
Absurd wird es, wenn wie oft zu finden Verbote aus gesprochen werden: z. B. überstumpfe Winkelfelder, weil nicht konvex, oder der reguläre zwölfzackige Stern, weil in ihm verschieden große Innenwinkel auf treten, was „nicht sein dürfe“, oft ist das gekoppelt damit, dass nicht definiert wurde, was konvex denn nun ist.

In der Unterrichtspraxis treten konvexe (oder eben nicht konvexe!) Figuren früh auf: In der Geometrie machen Grundschüler Erfahrungen mit konvexen Figuren bei Geraden, Strecken, Dreiecken, Rechtecken und Kreisen. Der erste „Schock“ taucht wahrscheinlich auf, wenn sich die schöne enaktive Begründung des Dreiecksinhaltes durch Faltenauf stumpfwinklige Dreiecke nicht recht erweitern lassen will; überhaupt scheinen wir Furcht vor nichtkonvexen Figuren zu haben, *horror vacui* mathematischer Art; eine Drehung der Figur, so dass die Grundseite dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, ist nicht überzeugend (die Formel muss doch immer gelten!).

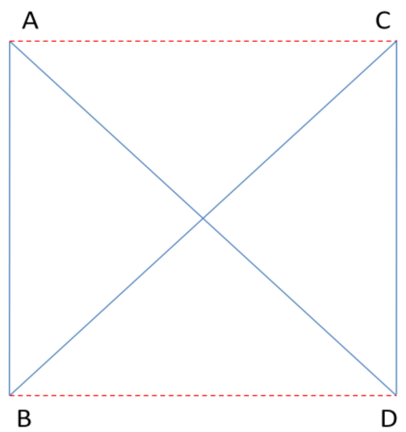



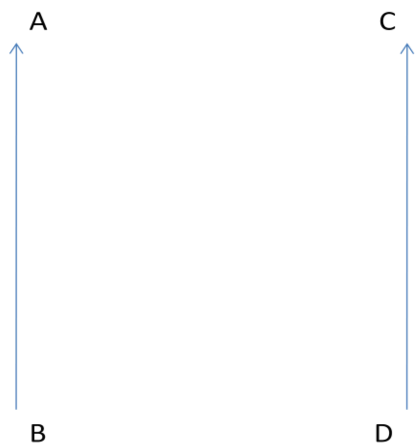
Der Natur eines curricularen Aufbaues folgend passiert dann länger nichts Erschreckendes, bis etwa in Kl. 7/8 erste Vierecke merkwürdig aus sehen; „was haben wir denn falsch gemacht?“ bei der Konstruktion des Drachens, der unerwartet zu Deltoid geworden ist („Geg. Symmetrieachse AC und α, a und b“).





Am „Schönsten“ ist natürlich das überschlagene Viereck mit parallelen Diagonalen und zwei Paaren gleich langer Seiten, dass eigentlich ein Quadrat werden sollte. So etwas kann auch in der SEK II, also der Analytischen Geometrie passieren, wenn man die Orientierung nicht beachtet; immerhin lässt





z. B. A(4|2|5), B(6|-1|11), C(-2|4|8), D(0|1|14)

sich hier klar definieren, was die o.a. Verbindungsstrecke ist, nämlich die Menge der Konvexkombinationen der Ortsvektoren der erwähnten Punkte. Hier ist dann Anlass, neben der globalen Geometrie – Geraden, Ebenen, also Linearkombinationen – die besagten Konvexkombinationen zu Ehren kommen zu lassen, also mehr lokale Geometrie zu betreiben, etwa mit den Schwerpunktsformeln; die konvexe Hülle als Vorstufe der linearen Hülle ist ein hilfreiches Mittel im Unterricht, erst die Strecke, dann die Gerade, erst das Dreieck, dann die Ebene usw.! Und hier geht es sogar wieder enaktiv: man schlage Nägel in ein Brett, umspanne dies mit einer Gummischnur und lasse diese dann los [1]!

Kehren wir zurück in die Vierecksbehandlung:

Kürzlich erschien ein Artikel [5] zum „Entdecken mit latenter Beweisidee“, darin die Analyse einer Schulbuchaufgabe für Kl. 7 der Realschule: Mittels der Frage, ob man mit Vierecken parkettieren könne, sollen die Sch auf den Vierecksinnenwinkelsummensatz gebracht werden. Ob das auch mit Deltoiden, s.o., geschweige denn überschlagenen Vierecken ginge, wird nicht untersucht, wohl weil nicht gesehen; was bei einem solchen Monstrum die Innenwinkel sind, ist ohnehin höhere

Mathematik. ABER: etliche Sätze für Vier- und Vielecke (etwa der Satz von VARIGNON, der auch für nicht ebene Vierecke gilt, die naturgemäß nicht konvex sind), setzen nicht deren Konvexität voraus, z. B. auch der EULERsche Polyedersatz (s. a. [4]). Ich teile übrigens nicht Führers Kritik [3] am „Haus der Vierecke"; wenn wir hier vom Haus der konvexen Vierecke sprechen, ist doch das lokale Ordnungsprinzip ein großer Vorteil.

Konvexität – eben ein zu vernetzender Begriff – taucht auch außerhalb der Geometrie auf, einmal in der Lineare Optimierung, bei der die Konvexität des Planungsgebietes – in der Schulmathematik sicher ein Polyeder oder Polygon - für die Existenz des Optimums der Zielfunktion Voraussetzung ist und sich aus der Anwendungssituation ergibt; der Satz von der Konvexität des Durchschnittes konvexer Mengen kann je nach Alter der Unterrichteten – sei es Kl. 8, sei es SEK II – plausibel gemacht („was passiert, wenn eine weitere Bedingung dazu kommt?") oder bewiesen werden.

Zum Zweiten in der Analysis: Zur Abschreckung ein älteres und ein aktuelles Beispiel:

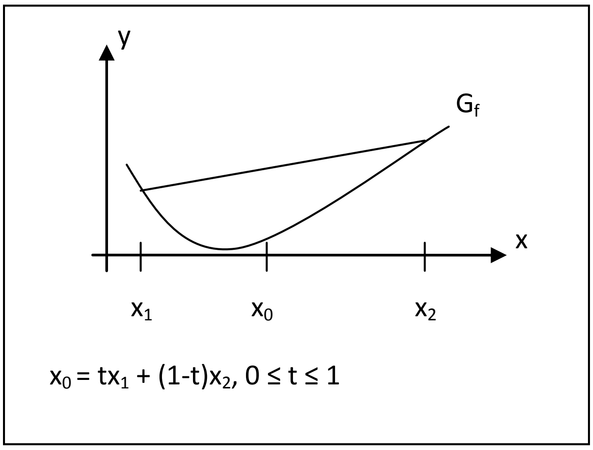
- „Eine Kurve nennen wir von oben konvex oder rechtsgekrümmt an eine Stelle x_0, wenn der Richtungsfaktor der Tangente in einer gewissen Umgebung von x_0 echt monoton abnimmt."
- „Der Graph von f ist linksgekrümmt bzw. (von unten gesehen) konvex", gegenüber der älteren Version des Werkes geradezu eine Verschlimmbesserung, da waren die Kurvenstücke Konvex- oder Konkavbögen, nur wurde nicht erklärt was das eigentlich heißt.

Immerhin wird hier der schülernähere Krümmungsbegriff (bzw. der Begriff Linkskurve) in den Kontext des Konvexitätsbegriffes gesetzt; aber in der zitierten Formelsammlung (wie in vielen anderen!) wird „konvex" selbst überhaupt nicht definiert!

Bekanntlich führt Jakob BERNOULLI den Wendepunkt [2] ein wie folgt:

„Es gibt gewisse Kurven, die eine zwiefache Krümmung haben, zuerst nämlich gegen die Achse konkav und nachher konvex." Offensichtlich versteht BERNOULLI dies im Sinne der heutigen Definition:

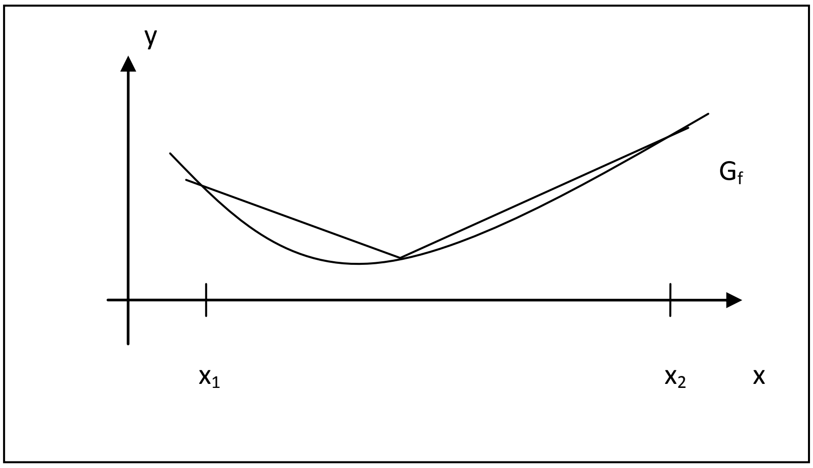
„Eine auf einem reellen Intervall I definierte reellwertige Funktion heißt konvex, wenn für alle x_1, x_2 aus I und $0 \le t \le 1$ gilt: (*) $f[tx_1 + (1-t)x_2] \le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$" (JENSENsche Ungleichung).



Offensichtlich bedeutet dies, dass jede Sehne oberhalb des Funktionsgraphen liegt; also ist der sogenannte Supergraph der Funktion – die Punktmenge oberhalb des Graphen – konvex. Ebenso offensichtlich ist dies zu zeigen nicht ganz trivial. Aber deswegen muss der Begriff weder verschwiegen werden noch stilblütenartig umgangen werden, s. o.

Der gewünschte Zusammenhang mit der Krümmung ist übrigens (s. o.) leicht herstellbar:

Für differenzierbares konvexes f gilt $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, wie sich durch Vergleich der Sekantenanstiege ergibt, weswegen (Monotoniekriterium) $0 \leq f''$ für zweifach differenzierbares f.



Dass konvexe Funktionen ein interessanter Gegenstand der Fachwissenschaft sind (sie sind z. B. absolutstetig; der Differenzenquotient ist beschränkt, weil einer Lipschitz-Bedingung genügend), gehört kaum in die Schule. Dorthin aber gehört gewiss der Begriff als solcher wie ich hoffe deutlich gemacht zu haben.-

Fassen wir zusammen:

- Der Konvexitätsbegriff muss auch im Mathematikunterricht behandelt werden.
- Dazu gehört eine fachlich korrekte und altersgerechte Definition.
- Wo Konvexität eine Voraussetzung für eine Tatsache ist (und auch wo nicht!), ist das zu formulieren.
- Die unterrichtliche Behandlung des Themas in den verschiedenen Teilgebieten hat so zu erfolgen, dass eine Vernetzung befördert und nicht behindert oder gar verhindert wird.

<u>Literatur</u>:

[1] Bielig-Schulz, G. und Schulz, Chr. : Algorithmische Geometrie: neue Motivation für die Oberstufengeometrie aus der Informatik?, MNU 44/6 (1991) S. 361-366

[2] Danckwerts, R und Vogel, D.: Analysis für den Leistungskurs, Stuttgart 1986

[3] Führer, L. : Mittelpunkte von Vierecken, ML 1985 (8), S. 38-43

[4] Kirsch, A. : Überraschungen beim Ausklappen nichtkonvexer Vierecke, MNU 43/8 (1990), S. 485-498

[5] Meyer, M. und Vogt, J.: Entdecken mit latenter Beweisidee, JMD 29/2 (2008), S. 124 ff.

[6] Müller, W.: Der Konvexitätsbegriff im Sekundarstufenunterricht, ML 30/9, S. 484-490.

Fritz NESTLE, Ulm (Ludwigsburg)

Endlich: Teaching to the Test (TTTT) als Chance

1. Grundlagen

Bis vor kurzem schien es Konsens innerhalb von Fachdidaktiken und Erziehungswissenschaften zu sein, dass Teaching to the Test (TTTT) grundsätzlich verwerflich sei. Google fand noch vor einem Jahr auf den ersten Seiten nur Ablehnung für TTTT. Die Argumentation gegen TTTT war weitgehend irrational, zum Teil wurden berufsständische Interessen mit solchen Argumenten kaschiert.

Jahnke fasst in 'Teaching to the Test – Erfahrungen aus den USA' (googlefindbar) Teile der Argumentation zusammen. Maag-Merki definiert „Als Teaching-to-the-test-Effekte werden jene Mechanismen bezeichnet, die mit dem Ziel des möglichst guten Abschneidens in den Tests bewirken, dass vor und nach Testuntersuchungen insbesondere diejenigen Aufgaben und Fächer geübt bzw. diejenigen Kompetenzen gefördert werden, in denen die Tests stattfinden.“ - Der gesunde Menschenverstand erwartet doch zu recht, dass gerade die Themen schwerpunktmäßig geübt werden, die anschließend als Ziel für nachhaltiges Lernen erwartet werden.

Aber auch die Kultusbürokratie übernahm die Aversion gegen TTTT: „Die Länder sind sich darin einig, dass mit der Setzung der Bildungsstandards als übergreifenden Referenzrahmen eine Entwicklung hin zum 'teaching to the test' oder eine Verengung des Unterrichts auf die Anforderungen der Standards verhindert werden muss.“ (Zitiert nach Jahnke)

Nur auf dieser unbefriedigenden Ausgangsbasis ist die Verkennung der Vorteile von TTTT verständlich. Industrielle Produktion von Gütern wie Schuhe, Schrauben, … wäre wirtschaftlich erfolglos, wenn beim Produktionsprozess keine „Einengung“ auf etablierte Standards verfolgt würde.

Die ersten DIN-Normen werden demnächst 100 Jahre alt. Sie haben sich in den meisten Bereichen bewährt. Die Grundbegriffe sind über Jahrzehnte weg konstant. Dagegen ändern sich innerhalb eines Lehrerlebens die Grundbegriffe in Nuancen alle paar Jahre, zum Beispiel von Lehrplan über Bildungsplan, Lernzielkataloge und Bildungsstandards momentan zu den Kompetenzen.

Die Verhinderung von „Learning to the Test“ gehört wohl zu den „erfolgreichsten“ Vorschriften der KMK. Beispiele:

- Ein Lernbegleiter (Aktion in Ulm) berichtet über elementare Mathematikkenntnisse einer Schülerin der 9. Klasse, Notenstand 3,5, vier Wochen vor der Hauptschulabschlussprüfung: 4 mal 5 gelang nach zuerst „12“ im zweiten Anlauf richtig; 37:100 erforderte eine rund 5 Minuten dauernde Ableitung an der Tafel, bis außer 37:100 auch 63:100, nicht dagegen 3,7:10 nach kurzem Nachdenken richtig gesagt werden konnte. Wie kam die Schülerin nach Klasse 9?
- Es ist bekannt, dass viele Hochschulen (z.B. Uni Kassel) im MINT-Bereich mit Hilfe „mathematischer Vorsemester“ versuchen, eine rudimentäre Studierfähigkeit der Studierenden zu sichern.

Eine zu enge Bindung an Standards ist also bei den beiden genannten Beispielen erfolgreich vermieden worden. Ein TTTT ist in der Schule insofern gar nicht möglich, weil die KMK bisher – ebenfalls erfolgreich – eine überprüfbare Testmöglichkeit derzeit nicht anbietet.

Da die heutige IBM Jahrzehnte gebraucht hat, bis die Möglichkeit des Einsatzes ihrer Maschinen zu Rechnen und allgemeiner Datenverarbeitung die Vorstandsebene erreicht hat, ist es wohl zu früh, auf KMK-Ebene eine Vorstellung vom Nutzen des Internets für überprüfbare Unterrichtsziele mit ständigem freiem Zugang für alle Lernenden jetzt schon zu erwarten. Eine Zusammenstellung von Grundforderungen an solche Übungsmöglichkeiten ist unter dem Namen 'Dortmunder Manifest' im Jahr 2002 anlässlich der Dortmunder GDM-Tagung vorgestellt worden.

Der Grund für diesen Rückstand dürfte zum Teil darin zu suchen sein, dass in der Diskussion zwischen

- psychologischen Tests (Lerneffekte sind unerwünscht und stören die Messung; Suche nach unveränderlichen Persönlichkeitseigenschaften) und
- L e r n erfolgstests (der momentane Lernstand soll bestimmt werden; Lernergebnisse sind nicht konstant; sie sollen optimiert werden)

nicht unterschieden wird.

Weiterhin dürfte eine Rolle spielen, dass früher die Computerauswertung von Tests nur mit vielen Einschränkungen möglich war. Items in Form von Auswahlantworten (MC) dominierten. Die Itemselektion wurde vielfach nicht auf fachdidaktische Gesichtspunkte gegründet, sondern auf die Evaluationskriterien für psychologische Tests. Das führte bei freieren Antwortformen zu Ergebnissen wie der Elimination von Items wie 8*0 = ? (x*0 wird sehr oft falsch gerechnet, weil vielfach statt der 121

Einmaleinssätzchen diejenigen mit einer Null als Faktor nicht hinreichend geübt, das heißt, nur 100 Einmaleinssätzchen gelehrt werden.)

Schließlich wird im Bereich der Lernorganisation bisher kaum von der Evaluation durch Verwendung von „comunity-legitimated items“ Gebrauch gemacht, so dass für die Itementwicklung ein nicht vertretbarer Aufwand entstehen würde.

2. Änderung der Lernorganisation durch TTTT

Die Grundlagen der derzeitigen Lernorganisation werden deutlich, indem man zum Beispiel die Rahmenvereinbarungen der KMK für die Verleihung der Allgemeinen Hochschulreife (314. Sitzung) betrachtet: "Die Dauer der Schulzeit bis zur Erlangung der Allgemeinen Hochschulreife beträgt zwölf oder 13 Schuljahre. Dabei ist ein Gesamtstundenvolumen von mindestens 265 Jahreswochenstunden ab der Jahrgangsstufe 5 bis zum Erwerb der Allgemeinen Hochschulreife nachzuweisen.“ Es geht also darum, wie lange gelernt wird, nicht was gelernt worden ist!

Der Autor hat nur 11 Unterrichsjahre absolviert; Max Planck hat seine Abitursprüfung sogar schon im Alter von 16 Jahren abgelegt. Die Vorstellung, dass das Lernergebnis mit zunehmender Bildungsdauer automatisch besser wird, ist naiv oder ausschließlich ideologisch begründet und empirisch nicht belegt. Im Gegenteil, es sind Untersuchungen (zum Teil aus Feinauswertungen von PISA) bekannt, denen zufolge der Lernzuwachs mit zunehmender Bildungsdauer abnimmt. Sogar der Volksmnd weiß „Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr“.

Für die Schulverwaltung ist die Lernzeit ein leicht überprüfbares Kriterium, während zu inhaltlichen Kriterien auch bei zentralen Prüfungen unter Insidern mehr über die Möglichkeiten der Manipulation bekannt ist als über die Inhalte selbst oder über Chancengerechtigkeit.

TTTT erleichtert die Arbeit der Lehrkräfte. Letztere schätzen den Zeitaufwand für die Lernerfolgskontrolle im Fach Mathematik auf mehr als 20 % der Arbeitszeit. Lernerfolgskontrollen nach den Forderungen des Dortmunder Manifests würden die Arbeitszeit der Lehrkräfte mindern und neben der Verbesserung der Nachhaltigkeit der Lernergebnisse der öffentlichen Hand pro Jahr Einsparungen in der Größenordnung von einigen hundert Millionen Euro allein im Fach Mathematik bringen.

Natürlich darf nicht verschwiegen werden, dass mit TTTT der Ermessenspielraum der Lehrkräfte eingeschränkt und deren Manipulationsmöglichkeiten vermindert würden. Ein Teil ihrer handwerklichen Einzelarbeit würde durch zeitangemessenere Verfahren ersetzt. Zugleich würden aber Möglichkeiten der Erpressung oder Nötigung durch Eltern (und Schulverwaltungen) weitgehend entfallen. Aus dem Instruktor müsste der Lernhelfer werden, wobei sich selbstverständlich auch die zugehörige Lehrerbildung grundlegend ändern müsste. Außerdem würde ein zusätzlicher Parameter in einer Reihe anderer für eine Beurteilung der Leistung der Lehrkräfte (und der Schulverwaltungen) verfügbar. Die Lehrerrolle würde schwerwiegend geändert. Die Fähigkeit zur Vermittlung und Organisation effektiven Lernens würde an Gewicht gewinnen, inhaltliches Lehrerwissen würde an Bedeutung abnehmen.

TTTT bietet neue Lernchancen für Schüler. „Learning to the Test“ würde wesentlich vereinfacht. Die 'SuS' könnten ihre optimale individuelle Übungszeit selbst bestimmen, wenn sie zu beliebiger Zeit Rückmeldungen über den jeweiligen Lernstand aus dem Internet abrufen könnten. Wie beim Fußballspiel nicht der Trainer entscheidet, ob seine Mannschaft ein Tor geschossen hat, sondern dies mit hoher Sicherheit aus dem Spielverlauf zu entnehmen ist, wäre die Beurteilung des Lernergebnisses ein objektiverer Vorgang als heute.

Zur Zeit stehen die Aussagen des vorstehenden Abschnitts überwiegend im Konjunktiv. In zwei Bereichen freilich sind die Lernenden und aufgeschlossene, aktive Lehrkräfte schon weiter:

1. Viele Lernende ziehen es vor, statt Zeit in das schulische Lernen zu investieren sich lieber eine gute Position in einem der zahlreichen MMORGs zu erarbeiten. Sie sehen dort mehr Chancengerechtigkeit und engagieren sich dort mit 20 bis 50 Stunden intensiver Arbeit pro Woche. Es ist schade um nicht zu sagen unverständlich, dass sich die Gesellschaft nicht in größerem Maß darum bemüht, das in Computerspiele investierte Lerninteresse auf gesellschaftlich nützlichere Felder zu lenken.

2. Im Internet werden immer mehr Übungsmöglichkeiten mit sofortiger Rückmeldung angeboten, zum Beispiel realmath.de, eprolog.ch oder lernareal.ch. In diesen Sites erhalten die SuS unverzüglich die Rückmeldung über ihren Lernstand.

3. Zusammenfassung

Nicht „Schule neu denken“ sondern „Lernen neu denken“.

Suchbegriffe für Google

'Teaching to the Test', '“Teaching to the Test“ Effekte', 'Learning to the Test', 'mastery learning', 'zielerreichendes Lernen', 'Dortmunder Manifest', 'mmorg', 'mathematisches Vorsemester', 'nachhaltiges Lernen', 'nachhaltiges Mathelernen'

Die Erörterung weiterer Aspekte des Themas finden Sie im Site bildungsstandards.de

Swetlana NORDHEIMER, Berlin

„Einkleidungen“ als Modell-Vernetzungen im MU

Einkleidungen von Mathematik im Unterricht werden unter Didaktikern häufig eher kritisch betrachtet. Einer der Hauptkritikpunkte der *„Einkleidungen“* ist die vermeintliche Realitätsferne. Im Gegensatz dazu sind *Modellierung* und *Vernetzung* eher positiv belegt und erfreuen sich in den Formulierungen von Lernzielen sich zunehmender Beliebtheit (vgl. Baumert, Stanat, Demmrich 2001). Das Ziel dieses Beitrages ist zu zeigen, dass „Einkleidungen“, aber auch so genannte „Teileinkleidungen“ dennoch Potenzial zur Förderung von Vernetzen und Modellieren haben.

Nicht nur Kritik, sondern auch weniger bekannte konstruktive Vorschläge zum Einsatz von „eingekleideten Aufgaben“ haben in Deutschland eine lange Tradition. So wird in einem Artikel aus den „Deutschen Blättern für den erziehenden Unterricht“ (1889, 287) kritisiert, dass die Einkleidungen in den Schulrechenbüchern erst am Ende von Paragraphen mit den Rechenübungen schon bekannte Zahlen und Rechenoperationen künstlich verpacken. Um das zu vermeiden wird von dem gleichen Autor vorgeschlagen, Sachsituationen oder „Einkleidungen“ an den Anfang der Rechenübungen zu stellen. So sollte das pädagogische Prinzip „vom Konkreten zum Abstrakten“ berücksichtigt werden. Neuere Versuche, die „eingekleidete“ mathematische Aufgaben in der Schule legitimieren, gehen auf Jahnke und Lambert zurück. Den Sinn der „Einkleidungen“ im Mathematikunterricht sieht Jahnke (2001) vor allem in der Veranschaulichung mathematischer Inhalte. Ausgehend davon wird bei Lambert (2006) „Einkleidung“ als Übersetzung in die Sprache der Mathematik vorgestellt, es wird aber auch eine Umkehrung solcher Übersetzungsprozesse angedeutet. Eine solche Übersetzungsfähigkeit wird bei Blum (2009) mit Modellierungskompetenz verbunden. Deshalb ist es nachvollziehbar, dass Lambert zur Legitimation der „Einkleidungsaufgaben“ im Mathematikunterricht verschiedene Modellierungskreisläufe (darunter den von Schupp) heranzieht. Das Modell von Schupp (1988, zitiert in Lambert 2006) dient in dem vorliegenden Beitrag als Ausgangspunkt von Modifikationen zu einem so genannten „Einkleidungskreislauf“. Die entscheidende Modifikation besteht vor allem in der Richtungsänderung des Kreislaufs. So wird beispielsweise bei Hilbert das Konzept der Unendlichkeit auf Situationen mit Hotelzimmern und Bussen übertragen, wie sie in der Realität existieren können. Ausgehend davon wird eine „realitätsfremde“ Situation eines Hotels mit unendlich vielen Zimmern konstruiert. Diese nicht realistische, aber zunächst auch nicht mathematische Situation veranschaulicht Ergebnisse bzw. Erkenntnisse, die anschließend in die Mathematik zurück übersetzt werden.

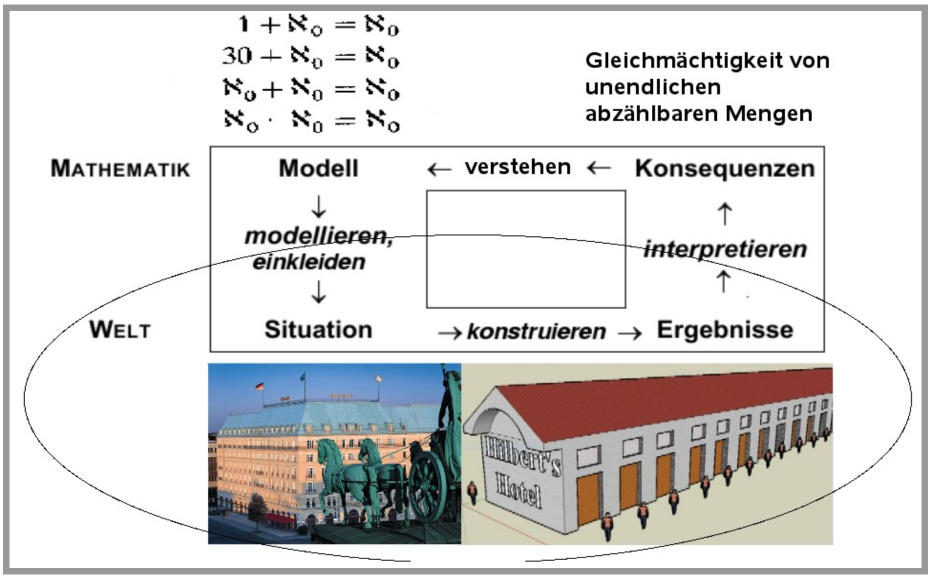


Abbildung 1: „Einkleidungskreislauf"

„Einkleidungen" können darüber hinaus verschiedene mathematische Inhalte miteinander vernetzen, indem sie als Anschauungsräume zwischen den verschiedenen Bereichen (Geometrie, Arithmetik bzw. Algebra) auftreten. Die Funktion der Einkleidungen als Anschauungsräume beim Übergang von einem Bereich der Mathematik zu einem anderen wird beispielsweise bei der Betrachtung von durch Vollrath (2001) für die Sekundarstufe I vorgeschlagenen Themenkreisen deutlich. So sind Einkleidungen in einem Beispiel zum Themenkreis „Kreis Teilen" für die 6. Jahrgangsstufe von Bedeutung. Dort werden Brüche zunächst als „Tortenstückchen" und erst dann als Kreissegmente interpretiert. Eine andere Beispielaufgabe ist der Übergang zur Stochastik, der durch Einkleidung des Kreises als „Glücksrad" erfolgt. Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ausfälle werden dann über Flächenanteile der einzelnen Felder bestimmt.

Wie verschiedene mathematische Bereiche mit Hilfe von Einkleidungen konkret im Unterricht vernetzt werden können, wird im Folgenden anhand von Schülerprodukten beispielhaft beschrieben. Die Sechstklässler eines Gymnasiums in Berlin waren aufgefordert, in Gruppen kapitelübergreifende, vernetzende Aufgaben zu entwickeln. Ohne dass die Schüler explizit zur Einkleidung der Inhalte aufgefordert waren, haben die meisten von ihnen die Aufgaben in außermathematische Situationen eingekleidet. Das aus dem erlebten Mathematikunterricht bekannte Einkleiden wurde von den Schülern als Strategie zur Vernetzung herangezogen. Aus Platzgründen können hier nur zwei Aufgaben vorgestellt werden. Auch die Größe der Bilder ist begrenzt, deshalb wird die nächste handschriftliche Aufgabe im Folgenden verkürzt sinngemäß wiedergegeben.

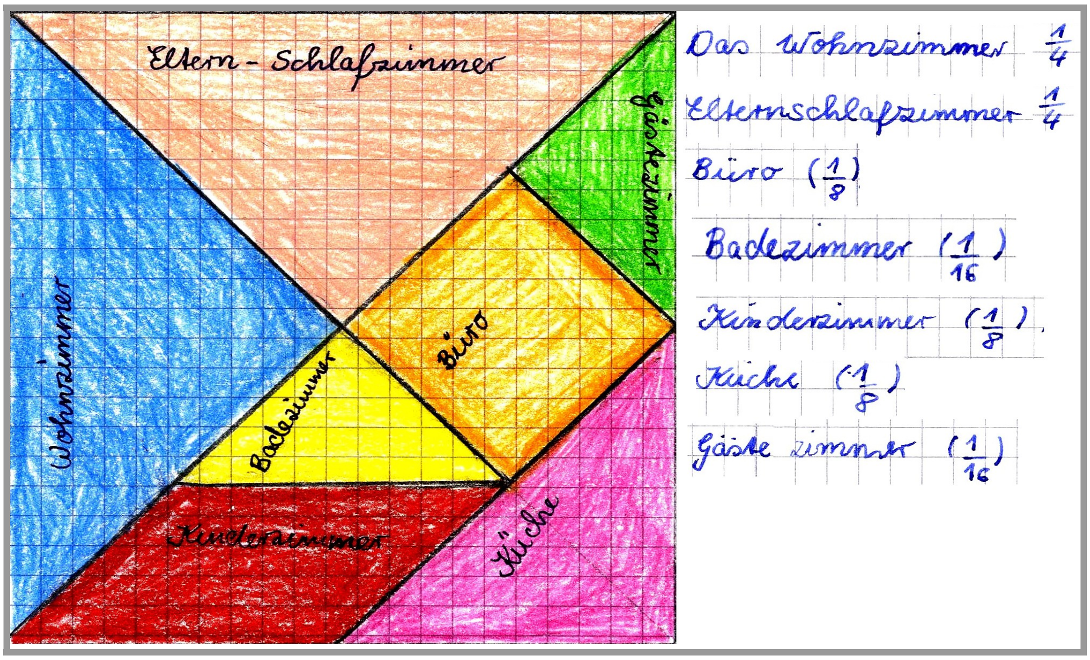


Abbildung 2: „Tangram-Haus"

Die erste Aufgabe (Abb. 2) berichtet von einem Haus, dessen Zimmer verschiedene Anteile an dem gesamten Flächeninhalt haben. Die Seitenlänge der quadratischen Grundfläche beträgt 16 m. Der von den Schülern formulierte Arbeitsauftrag besteht darin, die Flächeninhalte der einzelnen Zimmer zu berechnen. So kommt es zu einer Repräsentation von Brüchen durch inhaltsgleiche geometrische Figuren. Diese werden jedoch nicht rein innermathematisch thematisiert, sondern im Zusammenhang mit den Grundrissen der Zimmer eines Hauses. Somit wird ein Bruch durch verschiedene Zimmer, aber auch durch flächengleiche geometrische Figuren repräsentiert. Beispielsweise repräsentieren Büro, Küche, Kinderzimmer bzw. Parallelogramm, Quadrat und Dreieck ein Achtel. Ein solches Haus kommt in der Realität kaum vor, erleichtert dennoch den Übergang von Geometrie zu Algebra, indem es die Inhalte in den Anschauungsraum der Einkleidung verlagert.

In einer anderen Aufgabe (Abb. 3) verknüpfen Schüler Konzepte aus Geometrie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie fragen sich nach der Wahrscheinlichkeit, dass Franz mit einem Schuss Jens' Raumschiff trifft. Zum Beantworten dieser Frage gehört das Ausrechnen des Anteils des Flächeninhalts des Raumschiffes an dem gesamten Inhalt des Bildschirms. Die Flächeninhalte werden in „Raumschiff" und in „Bildschirm" eingekleidet. Solche so genannte „Teileinkleidungen" unterscheiden sich von denen durch Jahnke (2001) geprägten „Einkleidungen von mathematischen Strukturen". Andererseits kann die Teileinkleidung „Raumschiff" nicht nur die Motivation, sondern auch intuitives Verständnisdes Konzeptes des Wahrscheinlichkeitsmaßes als Anteil an einem Flächeninhalt fördern.

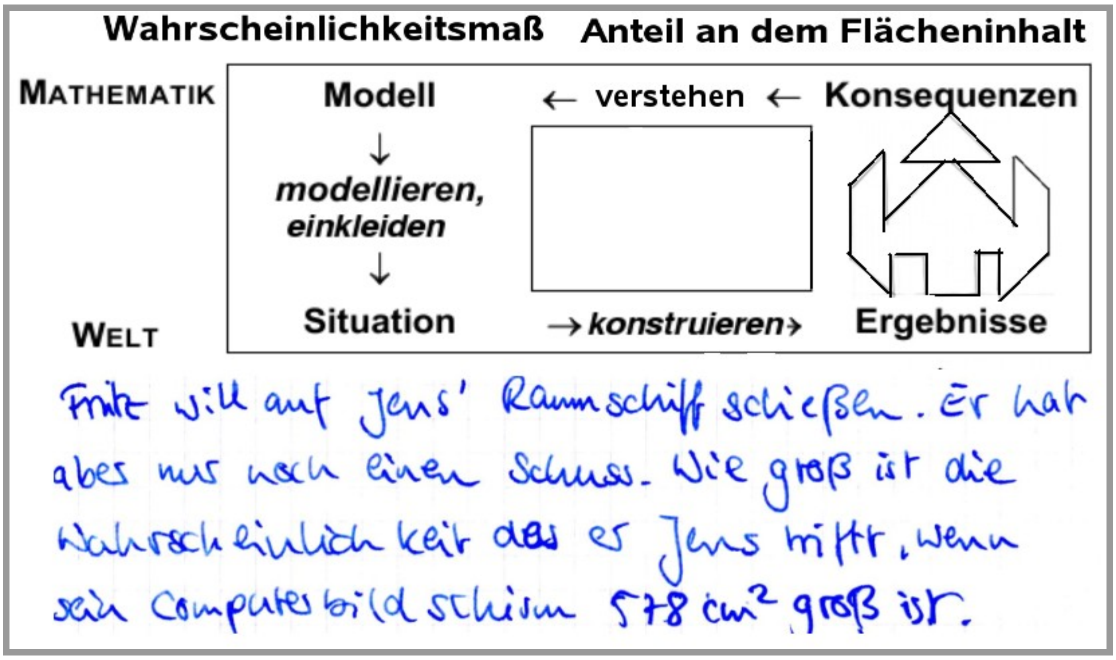


Abbildung 3: „Raumschiff“

Ähnlich wie in den Beispielen von Vollrath ist hier die geometrische Veranschaulichung arithmetischer sowie stochastischer Konzepte von Bedeutung. Der Einsatz von Geometrie zur Veranschaulichung wird durch die Einkleidungen bzw. Teileinkleidungen in außermathematische Situationen unterstützt. Weitere Fragen nach der Funktion von Einkleidungen als Anschauungsräume zwischen mathematischen Bereichen sowie der Teileinkleidungen bei dem Prozess der Ausbildung von Modellierungs- und Vernetzungsfähigkeiten könnten Gegenstand weiterer Forschung sein.

Literatur

Baumert, J., Stanat, P., Demmrich, A. (2001). Theoretische Grundlagen. In: Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.), *PISA 2000: Basiskompetenzen von Schülern und Schülerinnen im internationalen Vergleich* (S. 19 - 33). Opladen: Leske + Budrich

Jahnke, T. (2001): Kleines Aufgabenrevier, Zur Klassifizierung von Aufgaben im at, P., Mathematikunterricht, SINUS Materialien, Potsdam: PLIB

Lambert, A. (2006): Ein Einstieg in die reflektierende Modellbildung mit Produktiven Aufgaben. Fachrichtung 6.1 – Mathematik. Preprint Nr. 174

Vollrath, H.-J. (2001): Themenstränge, Themenkreise und Themenkomplexe im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I, Beitrag zu Modul 5, Würzburg: BLK

Wendt, H. (1889): Die Sachgebiete des Rechnens. In: *Deutsche Blätter für erziehenden Unterricht. Heft 32-36*

Edyta NOWINSKA, Osnabrück

Unterrichtsentwicklung: ein steiniger Weg

1. Einleitung

Die Unterrichtsentwicklung gilt als ein steiniger Weg. Es zeigt sich als äußerst schwierig, Unterricht auf der Basis wissenschaftlicher Erkenntnisse zu verändern und dadurch Schülerleistungen und -kompetenzen in dem erwarteten Ausmaß zu verbessern (Gräsel & Parchmann, 2004). Um herausarbeiten zu können, was das Steinige an dem Weg der Unterrichtsentwicklung ist, muss verstärkt die Implementation neuer Konzepte in die Unterrichtspraxis in den Fokus genommen werden. Nur so kann man analysieren, inwieweit das Intendierte und das Realisierte übereinstimmen und welche Hindernisse bei der Implementation auftreten.

Bei einer Implementation geht es nicht darum, mit neuen Aufgaben und Materialien lediglich die „Sichtstruktur“ (Oser & Baeriswyl, 2001) des Unterrichts zu verändern, d. h. die formalen Organisationsmerkmale, Muster der Unterrichtsinszenierung sowie methodischen Elemente. Eine Implementation muss die „Tiefenstruktur“ (ebd.) des Unterrichts beeinflussen. Diese Struktur beschreibt die Ebene der kognitiven Verarbeitung durch Lernende. Da die Tiefenstruktur einer direkten Beobachtung nicht zugänglich ist, werden Rückschlüsse auf sie u. a. mittels Merkmale der eingesetzten Aufgaben sowie der Lehrer-Schüler- und der Schüler-Schüler-Interaktionsprozesse gezogen. Bei einer Implementationsanalyse ist die Schnittstelle der Sicht- und der Tiefenstruktur des Unterrichts dahingehend zu untersuchen, in welchem Maße die Neugestaltung des Unterrichts wirksam mit dem Bemühen der Lehrkraft um die mit dieser Gestaltung zu fördernden Lernprozesse korrespondiert.

2. Implementationsanalyse

Im Rahmen eines Projekts zur Verbesserung der Nachhaltigkeit des Mathematikunterrichts in Klasse 6 einer Realschule (Nowinska, 2008, 2009) wurden hypothetische Mechanismen herausgearbeitet, die die Schwierigkeit der Unterrichtsverbesserung erklären. In diesem Projekt sollte bei den Lernenden das Denken in Funktionen gefördert werden. Ein besonderes Augenmerk lag auf der Förderung der Fähigkeiten zum Aufdecken, Beschreiben und Darstellen funktionaler Zusammenhänge. Die Schüler sollten auch verstärkt zum Praktizieren von Metakognition angeleitet werden.

Während der Realisierung des Projekts hat eine qualitative Analyse der Schülereigenproduktionen und des Unterrichtsgeschehens Indizien für intendierte Veränderungen im kognitiven Verhalten der Lernenden aufgezeigt. Dennoch zeigte eine quantitative Analyse mit einem Vortest-Nachtest-Design am Ende des Schuljahres keinen Projekteffekt[1]: Die Schüler der Projektgruppe (N=29) und die einer Kontrollgruppe (N=111) haben sich über ein Schuljahr hinweg – bezogen auf ihre mathematischen Leistungen – fast identisch entwickelt. Wegen der Divergenz der Ergebnisse beider Analysen wurde verstärkt die Implementation untersucht. Einige der dabei aufgedeckten Hindernisse werden im Folgenden erklärt.

Eine Hindernis wird ausgehend von folgendem Aufgabenteil erläutert:
Das Ehepaar Schulte mit ihren zwei erwachsenen Kindern und ihrem Labrador planen einen 14-tägigen Urlaub auf Borkum. In Frage kommt u. a. das Angebot „Appartements am Nordstrand“: Mietpreis pro Woche 504 €, Kosten für die Endreinigung 100 €, Haustier einmalig 55 €. Notiere eine Funktionsgleichung, mit der sich der Gesamtpreis für den Urlaub in den Appartements am Nordstrand ausrechnen lässt: x_1: Anzahl der Urlaubstage, x_2: Anzahl der Haustiere, die man mitnehmen möchte.

Ein Realschüler einer Klasse 6 hat dazu eine korrekte Funktionsgleichung diktiert: $p(x_1, x_2) = 504 \cdot \frac{x_1}{7} + 55 \cdot x_2 + 100$. Damit zeigte er eine im Sinne des Projektes beachtenswerte Leistung. Die Gleichung stellt nur das schriftliche Endergebnis seiner funktionalen Betrachtungsweise dar. Bei einer Ausrichtung des Unterrichts auf die Förderung des Denkens in Funktionen muss diese Gleichung aus einer Metaebene heraus betrachtet und erklärt werden. Dabei ist das Zusammenspiel zwischen der formalen Darstellung und dem zu formalisierenden Sachverhalt zu thematisieren, sodass der Schritt vom Aufgabentext zur formalen Darstellung auch für andere Schüler verständlich wird. Nachdem der Schüler diese Gleichung ohne Erklärung genannt hat, leitet die Lehrkraft folgendes Gespräch ein:

L. Jetzt brauch ich einen, der eben die Preisfunktion in eigenen Worten erklärt.
S. Also die ganze?
L Ja, ich zeig drauf und du (...) Also der erste Teil steht wofür?
[L. zeigt mit dem Finger auf 504 in dem Funktionsterm.]
S. Also der erste Teil steht, also die 504 steht für das, was die für äh für eine Woche bezahlen müssen.
[L. zeigt mit dem Finger auf x1/7 im Funktionsterm.]
S. Das x eins geteilt durch sieben heißt, dass die das für sieben Tage bezahlen müssen.
L. Ja. [L. zeigt mit dem Finger auf den Funktionsterm 55• x2.]
S. Und die 55 mal x zwei heißt ähm, dass die die 55 Euro für das Haustier bezahlen müssen, für ein Haustier bezahlen müssen.
[L. nickt und zeigt auf den Funktionsterm 100.]
S. Die 100 Euro das ist die Endreinigung, das kommt nur einmal vor.
L. Ok. Also ihr habt das soweit die Funktion.

---

[1] Die in Nowinska (2009) notierten Ergebnisse einer quantitativen Auswertung des Projekts sind hier unter statistischer Kontrolle der Geschlechterverteilung und der Persönlichkeitsmerkmale der Lernenden in der Projekt- und in der Kontrollgruppe dargestellt.

Die Lehrperson fordert zu einer Erklärung der Preisfunktion auf und passt ihr Verhalten so an die Ziele der Innovation an. Schon mit ihrer ersten Handlung schränkt sie jedoch den Spielraum der Schüler für die geforderte Erklärung ein und fokussiert die Aufmerksamkeit des Schülers auf lokale Schreibfiguren im Funktionsterm. So gelingt es dem Schüler nicht, die formal beschriebene funktionale Abhängigkeit zu thematisieren. In seiner Interpretation treten gravierende Fehler auf. Auch abgesehen davon, dass die Lehrkraft diese Fehler nicht beanstandet, ist ihr Verhalten kritisch zu betrachten: Es fehlt ihr Bemühen darum, funktionale Betrachtungsweisen bei den Lernenden wirksam zu evozieren und zu fördern. Sie scheint die Diskrepanz zwischen dem, was sie eigentlich an den Denk- und Argumentationsprozessen der Lernenden gefordert hat, und dem tatsächlichen Verhalten des Schülers nicht wahrgenommen zu haben. Dieses Beispiel zeigt, dass das Innovationsziel von der Lehrkraft uminterpretiert und in der Unterrichtspraxis nicht realisiert wurde. Hier ist eine Schwierigkeit bei der Implementation zu sehen: Im Unterricht wurden zwar die für dieses Ziel konzipierten Aufgaben bearbeitet, aber die Bearbeitung erfolgte nicht im Sinne des Projektes. Trotz einer Veränderung der sichtbaren Merkmale des Unterrichts fehlen Indizien für eine wirkliche Veränderung seiner Tiefenstruktur.

Weitere Schwierigkeiten können mit einem Muster in den Interaktionen zwischen der Lehrkraft und den Lernenden transparent gemacht werden. Dieses Muster wird mit folgendem Transkript verdeutlicht:

L. Was hat denn derjenige, der sich das jetzt, der das Netz gebaut hat, falsch vorgestellt dabei, wo ist der Fehler bei ihm?
S. Dass er den Eingang an die falsche Stelle baute.
L. Genau.

Die Lehrkraft fordert zur Erklärung einer Fehlvorstellung und zur Nennung eines Fehlers auf. So versucht sie bei den Lernenden metakognitive Aktivitäten zu evozieren. Diese Aktivitäten sollten in dem Projekt besonders gefördert werden, sodass man das Verhalten der Lehrperson als ein Indiz für die intendierte Veränderung des Unterrichts bewerten könnte. Auch wenn man als Außenstehender nicht weiß, wie das erwähnte Netz aussieht, ist festzuhalten, dass der Schüler nur einen Fehler nennt und keine Fehlvorstellung erklärt. Die Lehrkraft kritisiert sein Verhalten nicht. Vermutlich hat sie auch hier die Diskrepanz zwischen dem, was ihre Aufforderung eigentlich erfordert, und dem tatsächlichen Verhalten des Schülers nicht wahrgenommen. Die vermeintliche Veränderung des Unterrichts korrespondiert nicht mit einer wirklichen Veränderung seiner Tiefenstruktur: Das Ergebnis des Nachdenkens der Lehrkraft über die Veränderung des

Unterrichts ist nicht wirksam mit ihrem Bemühen um die mit diesem Ergebnis auszulösenden Denkprozesse der Lernenden verbunden.

Das Interaktionsmuster, das die Schwierigkeiten der Unterrichtsentwicklung verdeutlicht, kann so dargestellt werden: Die Lehrkraft fordert zu anspruchsvollen kognitiven und metakognitiven Aktivitäten auf und passt damit die Form des Unterrichts an die Anforderungen der Innovation an; die Lernenden setzen jedoch diese Aufforderungen nicht um. Es ist davon auszugehen, dass sie etwa den Unterschied zwischen einem Fehler und einer Fehlvorstellung gar nicht kennen. Vermutlich interpretieren sie die neuen Aufforderungen um. So wird z. B. eine Aufforderung zur Erklärung einer Fehlvorstellung als Aufforderung zur Nennung eines Fehlers wahrgenommen. Die Lernenden passen ihre Handlungen an die inadäquate Deutung dieser Aufforderungen an. Ihr kognitives Verhalten entspricht somit nicht den erwarteten kognitiven Aktivitäten. Das Fehlen jeglicher Kritik seitens der Lehrkraft bezüglich des Nichtbeachtens ihrer Aufforderungen ist ein Indiz für ihr Verständnisproblem bezogen auf die Innovationsziele. Dieser Mechanismus deutet auf eine im Kern inadäquate Implementation wissenschaftlicher Erkenntnisse in die Unterrichtspraxis hin.

3. Fazit

Das Steinige an dem Weg der Unterrichtsentwicklung besteht darin, von einer vermeintlichen zu einer wirklichen Veränderung der Unterrichtskultur zu gelangen. Dieses hängt mit der Schwierigkeit zusammen, die Wissensbestände der Lehrkräfte durch Coaching so zu verändern, dass sie bei der Planung, Steuerung und Kontrolle der Lehr-Lern-Prozesse flexibel anwendbar werden. Die Implementationsanalyse zeigt, dass es notwendig ist, zwischen dem kognitiven Potential der geplanten Maßnahmen selbst und dem anschließenden Nutzen des Potentials im Unterricht zu unterscheiden.

Literatur

Gräsel, C. & Parchmann, I. (2004). Implementationsforschung – oder der steinige Weg, Unterricht zu verändern. *Unterrichtswissenschaft 32 (3),* 196–214.

Nowinska, E. (2008). KogMaL-R: Kognitionsorientiertes Mathematik-Lehren in der Realschule. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2008, 623-623. Münster: WTM.

Nowinska, E. (2009): Monitoring-Aktivitäten als Hilfe zur Erhöhung der Nachhaltigkeit bei mathematischen Lernprozessen. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2009, 187-190. Münster: WTM.

Oser, F. & Baeriswyl, F. J. (2001): Choreographies of Teaching: Bridging Instruction to Learning. In V. Richardson (Hrsg.), *Handbook of research on teaching* (1031–1065). Washington D.C.: American Educational Research Association.

Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund

Einsichtsvolles Mathematiklernen im Kontext von Heterogenität

1. Heterogenität im Mathematikunterricht

Der mathematikdidaktische Diskurs nimmt bereits seit mehreren Jahren die geschlechts-, leistungs- und gerade auch zuletzt vermehrt jahrgangs- und kulturspezifische „Heterogenität im Denken" von Grundschulkindern in den Blick. Während seitdem die *Besonderheiten* von schwächeren oder stärkeren Schülern Beachtung finden, richtet sich die gegenwärtige Aufmerksamkeit auch der Besonderheit eines jeden Kindes zu: Aus einer vornehmlich individual-konstruktivistischen Sicht auf Lernprozesse wird beispielsweise die *Vielfalt* kindlicher Zugänge, Vorgehensweisen und Denkwege im Lernprozess oder die Vielfalt schulmathematischer Erfahrungen betont, die im Zuge der natürlichen Differenzierung und individuellen Förderung aufgegriffen werden können (vgl. z.B. Schmidt 2004, Selter 2009).

Individuelles und kollektives Lernen

Individuelle Lernprozesse sind zugleich im schulischen Kontext in soziokulturelle eingebettet: Die interaktiven Prozesse schulischen Lernens sind keine Konsequenz methodischer Entscheidungen der Lehrperson, sondern stellen die soziale Konstituente des Mathematiklernens in der Schule dar (vgl. Krummheuer 1992). Während die Erweiterung mathematischen Wissens um neue Fakten – im Sinne relativen Lernens – sicherlich vom einzelnen Kind autonom realisiert werden kann, sind hingegen fundamentale Lernprozesse wesentlich schwerer zu realisieren: Ein solches Beziehungs-Lernen erfordert eine überschreitende Reorganisation/Umdeutung des alten Wissens, um bereits bekannte Lerngegenstände unter einer neuen Perspektive. Dabei stehen die Lernprozesse stets in der Spannung „(...) zwischen einer anfänglich empirischen Deutung elementarer mathematischer Begriffe und einem Verständnis, dass mathematische Begriffe Beziehungen und Strukturen in symbolisierter und operativer Weise verkörpern" (Steinbring 2000, 45). Wie können aber Kinder fundamental lernen?

Der Anthropologe Tomasello (2009) weist auf die entscheidende Bedeutung der Kommunikation für menschliches Denken hin: Dies ist die dem Menschen ureigene und die das menschliche Lernen entscheidend prägende Fähigkeit, einen gemeinsamen begrifflichen Hintergrund zu schaffen, eine gemeinsame Aufmerksamkeit und eine geteilte Erfahrung zu kommunizieren. Mit anderen Worten: Der Versuch, mit geteilter Intentionalität kooperativ zu kommunizieren, schafft die Grundlage für die Weiterentwicklung des Denkens. Insofern liegt der Anlass für die individuelle Konstruktion neuer mathematischer Beziehungen letztlich in der externen, in der Interaktion ko-konstruierten Anforderung an das Individuum, die eigene Sichtweise auszudifferenzieren.

Insbesondere im frühen Mathematikunterricht sind solche Lernprozesse offensichtlich im Kontext der sozialen Gruppe zu verorten (vgl. auch Miller 2006). Der Diskurs birgt gerade dann ein Potential zur Initiierung fundamentaler Lernfortschritte in sich, wenn ein zwischen den Beteiligten strittiger, die bisherige Deutung irritierender Aspekt des verhandelten Inhalts einen diskursiven Kontext der Entdeckung schafft. Somit rücken die Differenzen zwischen Kindern in ein lernförderliches Licht – sie sind gerade die Voraussetzung dafür, dass Kinder fundamentale Lernprozesse vollziehen: „Einen diskursiven Kontext der Entdeckung zu explorieren bedeutet im Wesentlichen, Differenzen mit dem Ziel zu erkunden, ein gemeinsames Verständnis von Differenzen herzustellen; d.h. einen koordinierten und in diesem Sinne rationalen Dissens zu erzielen“ (Miller 2006, 217).

Einsichtsvolles Mathematiklernen

Aus einer epistemologisch-interaktionistischen Perspektive stellt die Verschiedenheit sinngebender Referenzkontexte zur Interpretation mathematischer Zeichen im Rahmen eines gemeinsamen-ganzheitlichen Aufgabensystems und das Austragen von sich in „Kontrasten konturierender Mehrdeutigkeit“ (Voigt 1990, 308) eine Voraussetzung für einsichtsvolle mathematische Lernprozesse dar. Die individuelle Förderung mathematischen Lernens erscheint somit paradox: Die Vielfalt des Denkens erfordert weniger die Trennung an Aufgaben und Themen hin zu einer scheinbaren vorzuorganisierenden Passung zwischen Kind und Mathematik, sondern vielmehr die *Verknüpfung* der unterschiedlichen Ideen. Kurz gesagt: An einem gemeinsamen Aufgabensystem, das inhaltlich von der mathematischen Grundidee für alle Kinder gleich und ganzheitlich strukturiert ist, können mathematische Beziehungen individuell erkundet und zugleich kollektiv in Beziehung gesetzt werden. Diese Verknüpfung im Kontext der Heterogenität kann einen Rahmen für die Aushandlung von ähnlichen Sichtweisen und Unterschieden sowie für die interaktive Entwicklung unterschiedlicher, zunehmend differenzierter und allgemeiner werdender Deutungsweisen auf mathematische Strukturen schaffen (vgl. Steinbring 2000).

Somit schafft Heterogenität eine Garantie für unterschiedliche Sichtweisen, eine Grundlage für die Konstruktion von Differenzen und ein Potential für kooperative Kommunikation und fundamentales Lernen. Gleichwohl können diskursiv-heterogene Lernprozesse blockiert werden, wenn etwa voreilig zwischen den Kindern ein Konsens erzielt, einer Strittigkeit aus dem Weg gegangen oder einer bestimmten Meinung vorschnell gefolgt wird.

2. Forschungskontext

Im Rahmen des gemeinsam mit Ralph Schwarzkopf geplanten Forschungsprojektes „Deutungs- und Argumentationsprozesse bei der Behandlung substantieller Aufgabenformate im Mathematikunterricht der Grundschule“ (DARUM) werden auf der einen Seite die zwei Dimensionen mathematischen Lernens – individuell-konstruktiv und kooperativ-kommunikativ – konsequent bei der Gestaltung anregender Unterrichtssequenzen reflektiert. Auf der anderen Seite werden sie im Hinblick typischer Charakteristika gemeinsamer Wissenskonstruktionsprozesse über differente Deutungen und Begründungen analysiert. Es wird u.a. folgender Frage nachgegangen: Inwiefern stellen verschiedene Deutungen, die im Zuge kooperativer Interaktionen generiert werden, eine Chance für ein Mathematiklernen dar, das auch Einsichten in Beziehungen und Strukturen umfasst?

Dazu werden Schülerpaare über vier Schuljahre im Kontext der diskursiven Auseinandersetzung mit anregenden produktiven Übungen zu vier Aufgabenformaten begleitet. Diese vier Aufgabenformate werden jedes Schuljahr von den am Projekt mitwirkenden Lehrpersonen auf neue Weise durchgeführt und fokussieren auf Beziehungsgleichheiten zwischen arithmetischen Termen bzw. zwischen Größen in Sachzusammenhängen. Die Lernumgebungen werden im Rahmen von Bachelor- und Masterarbeiten mit Studierenden entwickelt und durchgeführt.

3. Charakteristika mathematischer Wissenskonstruktionen

Erste Analysen der diskursiven Wissenskonstruktionen der Kinder weisen darauf hin, dass sich diese nicht unbedingt kommunikativ-kooperativ auf einer gemeinsamen Verstehensbasis entwickeln. Vielmehr entwickeln manche Kinder durch den Diskurs, dessen Aufmerksamkeit im Sinne Tomasellos (2009) auf die Differenz zwischen den gemeinsamen mathematischen Erfahrungen und den Deutungen gemeinsam genutzter mathematischer Zeichen abzielt, eine Klärung und Ausdifferenzierung der eigenen Sichtweise, ohne dass diese unbedingt mit der Sichtweise des Partners verknüpft sein muss.

Die ersten Analysen, die im Zuge der Pilotierung der Lernumgebungen im Rahmen von Bachelor- und Masterarbeiten gewonnen werden können, weisen auf einige Charakteristika mathematischer Wissenskonstruktionen im diskursiven Kontext der Entdeckung hin, die fundamentale Lernprozesse beim einzelnen Schüler auslösen können:

- *parallele Deutungen*: Die Schüler deuten gemeinsam genutzte mathematische Zeichen mit Bezug auf unterschiedliche Referenzkontexte. Sie verständigen sich zwar auf der interaktiven Ebene, entwickeln aber auf mathematischer Ebene parallele Wissenskonstruktionen.
- *mehrere Deutungen*: Die Schüler entwickeln zu mathematischen Darstellungen und Zeichen verschiedene Sichtweisen. Die Entwicklung des individuellen Verstehens ruht auf dem bewussten Mehr-Sehen mathematischer Relationen in anderen Kontexten, so dass eigene Referenzkontexte ausdifferenziert werden.
- *Widersprüche*: Die Schüler deuten Aufgabenvorschriften so um, dass sie Widersprüche konstruieren. Wissen entsteht im Kontrast zweier Referenzkontexte: der eine zerstört die mathematische Beziehung, der andere erfährt gerade dadurch seine Passung.
- *Irritationen*: Die Schüler gehen fehlerhaft oder unterschiedlich vor. Die reflektive Auseinandersetzung führt zu einer Umdeutung der Ideen. Diese Irritation eines Referenzkontextes führt dazu, dass ein anderer hinzugezogen, ein Standpunktwechsel vollzogen wird. Dies muss nicht allein eine Erweiterung, sondern kann auch eine Veränderung des alten Referenzkontextes bewirken, der zu einer strukturell erweiterten Umdeutung der mathematischen Zeichen führt.

Das Projekt wird solche Charakteristika mathematischer Wissenskonstruktionen fallbezogen präzisieren und die Spannung zwischen empirischen, an konkreten Eigenschaften von Objekten gebundenen Zugängen und stärker strukturell auf die mathematischen Beziehungen zwischen den Objekten abzielenden Verstehens- und Verständigungsprozesse reflektieren.

Literatur

Krummheuer, G. (1992). *Lernen mit Format*. Weinheim: dsv.

Miller, M. (2006). *Dissens*. Hamburg: transcript.

Schmidt, S. (2004). Was können Kinder am Schulanfang mathematisch wissen? In P. Scherer & D. Bönig (Eds.), *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern* (pp. 14-25). Frankfurt am Main: Arbeitskreis Grundschule.

Selter, C. (2009). Jedes Kind kann mathematisch forschen. In T. Leuders et al. (Eds.), *Mathemagische Momente* (pp. 176-189). Berlin: Cornelsen.

Steinbring, H. (2000). Mathematische Bedeutung als eine soziale Konstruktion. *Journal für Mathematikdidaktik, 21*(1), 28-49.

Tomasello, M. (2009). *Die Ursprünge der menschlichen Kommunikation*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Voigt, Jörg (1990). Mehrdeutigkeit als wesentliches Element der Unterrichtskultur. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 305-308.

Annegret Nydegger, Bern

Förder- und Diagnosekompetenz entwickeln – ein Erfahrungsbericht aus der Lehrerinnen- und Lehrerausbildung der Sekundarstufe 1

Einleitung

Dieser Beitrag stellt eine praktische Arbeit vor, die aufzeigt wie an der Pädagogischen Hochschule Bern, Sekundarstufe 1 in der Fachdidaktik Mathematik der Herausforderung, Diagnose- und Förderkompetenz zu entwickeln, begegnet wird. In dieser Zusammenfassung werden hauptsächlich die Grundüberlegungen zum Aufbau der Lehre vorgestellt.

Diagnosekompetenz im Lehrberuf

„Diagnosen sind Instrumente zum Erkennen, zum Urteilen und Beurteilen, zum Entscheiden und Selektionieren." (Helmke 83)

Der Begriff „Diagnose" wird mehrdeutig verwendet. In dieser Arbeit soll „Diagnose und Förderung" auf Lernbegleitung im Mathematikunterricht beschränkt sein und sich an der Beschreibung von Lehrerdiagnosen nach Helmke orientieren: „Natürlich handelt es sich bei diesen subjektiven Diagnosen in der Regel nicht um die absichtliche, methodisch kontrollierte Gewinnung und Verarbeitung aller relevanten Informationen, sondern häufig um das routinierte Registrieren und Vergleichen subjektiv bedeutsamer Indikatoren des pädagogischen Geschehens. Nur bei Wahrnehmung didaktischer Entscheidungsfindungen, kritischer Unterrichtsereignisse oder praktischer Problemlagen dürften vom Lehrer bewusst reflektierte Formen des Diagnostizierens, wie z.B. systematische Schülerbeobachtungen und Leistungsbeobachtungen eingesetzt werden. Der pädagogische Nutzungswert der automatisch oder reflektiert gewonnen diagnostischen Informationen ist für die zieladaptive Steuerung, Kontrolle und Korrektur des unterrichtlichen Handelns von grosser Wichtigkeit." (Helmke, Seite 85f)

Mittlerweile ist der Paradigmawechsel in der Volksschule vom Belehren hin zum Lernen Begleiten kaum bestritten. Je lauter der Ruf nach Individualisierung wird, desto mehr sind Lehrpersonen gefordert, differenziert auf die Schülerinnen und Schüler einzugehen. Sie müssen Stärken und Schwächen der Lernenden erfassen, müssen Brücken zum individuellen Vorwissen der Lernenden schlagen und angemessene Strukturierungshilfen anbieten. In wissenschaftlichen Studien (vgl. Helmke 2003), wird nachgewiesen, dass die Diagnose- und Förderkompetenz ein Merkmal guten Unterrichts ist. Der Diagnosekompetenz steht eine Art Schlüsselstelle zu. Nur wenn Stärken und Schwächen der Schülerinnen und Schüler erkannt werden, kann gezielt eine differenzierte Förderung einsetzen.

Diagnosekompetenz fördern – eine Herausforderung für die Lehrerbildung

Will man Erfahrungen aus der Praxis und Ergebnisse von wissenschaftlichen Studien ernst nehmen, muss die Lehrerbildung entsprechend reagieren. Nach Helmke enthält die diagnostische Expertise „sowohl methodisches und prozedurales als auch konzeptuelles Wissen und darüber hinaus noch ein hohes Niveau an zutreffender Orientiertheit.“ (Helmke 85) Sie ist eine Art Handlungskompetenz, die spontan in unterschiedlichen meist nicht voraussehbaren Situationen eingesetzt wird und höchst komplex und anspruchsvoll ist. Um dieser Herausforderung zu begegnen, müssen in der Lehrerbildung „bewegliche Handlungsstrategien“ erarbeitet werden, die spontan und für unterschiedliche Situationen adaptierbar sind. Es müssen Lernfelder entwickelt und angeboten werden, in welchen die Diagnosekompetenz gezielt erweitert werden kann. Das geforderte bewegliche Wissen und Können kann nicht nur in theoretischen Abhandlungen aufgebaut werden. Dazu braucht es individuelle Erfahrungen, die gemeinsam theoriegestützt reflektiert werden.

Dies setzt fundierte Kenntnisse, insbesondere auch im Bereich der Fachdidaktik voraus. Neben allgemeindidaktischen und erziehungswissenschaftlichen Aspekten ist fachdidaktisches Wissen und Können eine wichtige Grundlage, um den Unterricht adaptiv zu gestalten und das Lernen angemessen und differenziert zu unterstützen. Einige Beispiele:

Die Lehrperson muss Unterricht so organisieren, dass eine **differenzierte Beobachtung** der Lernenden möglich ist. Grundlage dieser Gelingensbedingungen ist ein fachdidaktisch fundiertes Wissen und Können.

- Das Unterrichtsgeschehen muss so organisiert sein, dass die Lehrperson Zeit hat, die Schülerinnen und Schüler zu beobachten.
- Die Lernenden müssen an kognitiv anspruchsvollen Aufgaben arbeiten, so dass Denkwege und Konzepte beobachtbar werden (Aufgabenkultur).
- Die Schülerinnen und Schüler müssen sich austauschen und bereit sein, ihr Denken offen zu legen.
- ...

Die Lehrperson braucht fachdidaktisches Wissen, um die **Schülerbeobachtungen umfassend zu interpretieren.**

- Sie muss die mathematischen Inhalte gründlich durchdacht haben, um unterschiedliche Lösungsansätze zu erkennen.
- Sie muss sich wichtiger Schritte im Verständnisaufbau eines mathematischen Inhalts bewusst sein.
- Sie muss Kenntnis über mögliche Fehlvorstellungen und häufige Lernschwierigkeiten haben.
- Erfahrungen zu Fehlerinterpretation sind hilfreich. Die meisten Fehler sind keine Flüchtigkeitsfehler, sondern Indikatoren für bestimmte Fehlkonzepte.
- ...

Anhand der Diagnose werden **Förderhilfen entwickelt und umgesetzt**.

Gelingensbedingungen sind:

- Die Lehrperson muss Strukturen kennen, die den mathematischen Inhalten zugrunde gelegt sind.
- Sie kennt Erklärungsmodelle von mathematischen Zusammenhänge inklusive deren Stärken und Schwächen.
- Sie muss verschiedene Visualisierungen und Formen der Visualisierung kennen.
- Sie muss handlungsorientierte Ansätze kennen, wie zum Beispiel ein handelnder Zugang zum Aufbau des Verständnisses zum Dezimalsystem.
- ...

Der Darlegung zufolge ist somit fachdidaktisches Wissen und Können ein wesentlicher Teil einer Diagnose- und Förderkompetenz.

Projekt Diagnose - und Förderkompetenz entwickeln auf der Sekundarstufe 1

Exemplarisch wird hier ein Lernumfeld beschrieben, in welchem die Studierenden der PH Bern Sekundarstufe 1 ein Mosaiksteinchen zur Entwicklung ihrer Diagnose- und Förderkompetenz im Rahmen der Fachdidaktik Mathematik aufbauen.

Ziel des Projektes: Die Studierenden werden im Bereich der Förderung von lernschwachen Schülerinnen und Schülern sensibilisiert. Die direkte Arbeit mit Schülerinnen und Schülern mit Lernschwierigkeiten im Bereich der Mathematik soll bei den Studierenden Betroffenheit auslösen. Dabei soll die Schnittstelle zwischen den Arbeitsbereichen der Lehrpersonen und der

Sonderpädagogen beleuchtet werden. Inspiriert wurde diese Zielausrichtung durch die Studie von Elisabeth Moser Opitz (2005), die eindrücklich aufzeigt wie Schülerinnen und Schüler des achten Schuljahres im Mathematikunterricht Leistungsschwächen haben, weil der Basisstoff der vorangehenden Schuljahre nicht verstanden wurde.

Beteiligte: Lehrpersonen und ihre Klassen, Studierende, Fachdidaktikerin und Sonderpädagogin

Zum Vorgehen:

1) Lehrpersonen stellen sich für die Zusammenarbeit zur Verfügung. Sie besuchen dazu zwei Weiterbildungsnachmittage.

2) Die Schulklassen lösen einen Test, der den Basisstoff der unteren Schuljahre überprüft. Die Studierenden korrigieren diese Arbeiten und werden ein erstes Mal mit den unterschiedlichen Leistungen der Schülerinnen und Schüler konfrontiert. Sie erstellen eine qualitative und eine quantitative Analyse der Klassenleistungen.

3) Anhand dieser Klassenarbeit wählt jeder Student, jede Studentin eine Schülerin, ein Schüler aus. In einem geleiteten Interview werden nochmals die Stärken und Schwächen zum Basiswissen Mathematik erhoben.

4) Anschliessend entwickeln die Studierenden, unterstützt von der Sonderpädagogin, Förderideen, die sie dann mit den Lernenden umsetzen.

5) In einem weiteren Besuch in der Klasse werden die Förderideen bei der entsprechenden Schülerin, resp. dem Schüler umgesetzt. Die Studierenden beobachten dabei die Lernenden und diskutieren anschliessend mit ihnen die Förderarbeit.

Die Rückmeldungen der Studierenden waren durchwegs positiv. Dazu drei Aussagen:

„Ich habe Heterogenität viel bewusster wahrgenommen und bin gezwungen, sie zu berücksichtigen."

„Ich wusste nicht, dass so viele Schüler so grundlegende Probleme haben.
„Denkmuster der Lernenden erkennen ist schwierig. Zuerst war ich hilflos, dann wollte ich wissen wie ich helfen kann."
„Dieses Projekt öffnet definitiv neue Horizonte."

Literatur

Helmke A. (2003). Unterrichtsqualität erfassen, bewerten, verbessern. Kallmeyer

Moser - Opitz E. (2007). Rechenschwäche / Dyskalkulie. Haupt, Bern

Moser - Opitz E, Schmassmann M. (2005). Heilpädagogischer Kommentar zum Zahlenbuch 5 und 6, Klett und Balmer, Zug

Andreas OBERSTEINER, München, Stefan UFER, München, Kristina REISS, München

Förderung des Aufbaus mentaler Zahlrepräsentationen im Grundschulalter

1. Theoretischer Rahmen

Arithmetische Kompetenz umfasst nicht nur das exakte Lösen von Rechenaufgaben, sondern auch das überschlägige Rechnen oder Abschätzen von Größen (KMK, 2004). Im mathematischen Anfangsunterricht werden dazu unterschiedliche Materialien verwendet, welche Anzahlen entweder exakt und strukturiert (z. B. Zwanzigerfeld), oder aber approximativ und analog (z. B. Rechenstrich) darstellen. Auch auf kognitiver Ebene werden getrennte Systeme zur Verarbeitung exakter und approximativer Zahlinformation angenommen (Feigenson et al., 2004): Aufbauend auf einem *Object-file System*, welches für das schnelle Erfassen kleiner Anzahlen zuständig ist, können größere Zahldarstellungen durch Bildung so genannter *Chunks* schnell erfasst werden, wenn sie strukturiert sind und die Struktur erkannt wird. Andererseits wird ein kognitives System für die Verarbeitung approximativer Zahlinformation postuliert: Im Triple-Code-Modell von Dehaene (1992) kommt dem *analogen, semantischen Modul* die größte Bedeutung zu; es ist für die Darstellung von Zahlgrößen in einem analogen Kontinuum und deshalb für das Abschätzen von Größen oder Rechenergebnissen zuständig.

Die Annahme der unterschiedlichen kognitiven Systeme gründet sich unter anderem auf experimentelle Effekte, die sich bei computergestützten Reaktionszeitexperimenten zeigten: Als Beleg für die Existenz eines Object-file Systems kann der Effekt des *Subitizing* beim *Erfassen von Punktmengen* angesehen werden: Die Reaktionszeiten bleiben bis zu einer Anzahl von etwa 4 Punkten auf niedrigem Niveau und steigen dann enorm an, wenn offenbar Zählvorgänge notwendig sind. Bei strukturierten Punktmengen können auch größere Anzahlen simultan wahrgenommen werden. Andererseits kann beim *Vergleich von Punktmengen* wie auch beim *(symbolischen) Zahlvergleich* der *Distanzeffekt* nachgewiesen werden: Je größer die numerische Distanz der Vergleichszahlen, desto geringer die Reaktionszeit. Zusammen mit dem *SNARC-Effekt*, dem Phänomen, dass auf größere Zahlen schneller mit der rechten Hand und auf kleinere Zahlen schneller mit der linken Hand reagiert wird, gilt der Distanzeffekt als Nachweis einer analogen mentalen Zahlrepräsentation, die strukturelle Ähnlichkeiten einem von links nach rechts orientierten Zahlenstrahl hat. Zur Relevanz der genannten kognitiven Systeme für arithmetische Kompetenzentwicklung gibt es empirische Hinweise. De Smedt et al. (2009) zeigten etwa, dass die Fähigkeit des schnellen Zahlvergleichs zum Schulanfang nicht nur mit der Leistung im schriftlichen Mathematiktest korreliert war, sondern neben anderen kognitiven Fähigkeiten sogar prädiktiv für mathematische Leistung ein Jahr später war. Insbesondere galt dies nicht nur für die Reaktionszeiten, sondern auch für den Ausprägungsgrad des Distanzeffekts, gemessen an der Steigung der entsprechenden Regressionsgeraden (s.u.).

Während es zur spezifischen Wirkung der im Anfangsunterricht verwendeten Materialien bisher kaum empirische Befunde gibt, existieren deutliche Hinweise auf einen generellen Einfluss externaler Repräsentationen auf die von Lernenden entwickelten mentalen Repräsentationen (Stigler, 1984).

2. MenZa – Ein Projekt zur Förderung mentaler Zahlrepräsentationen

Das Projekt MenZa hat zum Ziel, die Wirksamkeit unterschiedlicher Zahldarstellungen empirisch zu untersuchen. Konkret geht es unter anderem um die Frage, (a) ob exakte und approximative Fähigkeiten der Zahlverarbeitung durch die Verwendung exakter oder aber approximativer Zahldarstellungen gezielt gefördert werden können, (b) ob sich diese Förderungen auf arithmetische Kompetenz auswirken und (c) inwiefern Fördereffekte von anderen kognitiven Fähigkeiten wie dem räumlichen Vorstellungsvermögen abhängen. Im Rahmen einer Interventionsstudie soll die Wirkung unterschiedlicher Zahldarstellungen auf die von Schülerinnen und Schülern entwickelten Zahlrepräsentationen und arithmetischen Fähigkeiten getestet werden.

Im experimentellen Design werden 120 Kinder zufällig einer der vier Bedingungen *exakte Zahldarstellung (vorhanden/nicht vorhanden)* bzw. *approximative Zahldarstellung (vorhanden/nicht vorhanden)* zugeteilt. Die Gruppe, in denen keine der beiden Darstellungen vorhanden ist, dient als Kontrollgruppe, die an Stelle einer mathematischen Förderung ein Sprachtraining erhält. Die Förderung soll mit Hilfe der Lernsoftware *The Number Race* implementiert werden, einem Programm, das auf Grundlage des Triple-Code-Modells zur Förderung rechenschwacher Kinder entwickelt worden ist (Wilson et al., 2006). Das Programm soll allerdings nicht in der vorliegenden Form verwendet werden, sondern es werden zwei neuartige Programmversionen erstellt, wobei in einer Version ausschließlich approximative und in der anderen ausschließlich exakte Zahldarstellungen bzw. Aufgabenstellungen verwendet werden. Zur Messung basaler numerischer Fähigkeiten, denen gemäß den theoretischen Annahmen (s.o.) unterschiedliche kognitive Syteme zu Grunde liegen, werden Computertests eingesetzt.

3. Erste Pilotierungsergebnisse der Messinstrumente

In einer Stichprobe von N=20 Erstklässlern wurden mit Hilfe computergestützter Tests die Fähigkeiten (d.h. Lösungsraten und Reaktionszeiten) der schnellen Zahlerfassung unstrukturierter (*Subitizing*) sowie strukturierter Punktmengen (*Quasi-simultanerfassen*), des (symbolischen) *Zahlvergleichs*, des *Punktmengenvergleichs*, sowie der *mentalen Rotation* erhoben. Auf einem Bildschirm erfolgte die Darstellung der jeweiligen Aufgaben (Punktmengen bzw. Zahlsymbole zwischen 1 und 9). Durch Tastendruck musste jeweils die Anzahl bestimmt oder die größere von zwei dargestellten Zahlen ausgewählt werden. Bei der mentalen Rotation musste entschieden werden, ob zwei gegeneinander verdrehte Fußabdrücke vom selben Fuß (rechts bzw. links) stammen oder nicht. Die Tests wurden in Kleingruppen mit je 5 Personen durchgeführt. Vor jedem Experiment erfolgte eine kurze gemeinsame Instruktion, danach bearbeitete jedes Kind an einem eigenen Laptop zwei bis vier Beispielitems, bevor das Experiment startete. Die notwendigen Tasten waren markiert. Reaktionszeiten und Lösungsraten wurden mit dem Programm E-Prime 2.0 erhoben. Zur Messung allgemeiner arithmetischer Fähigkeiten wurden Subskalen aus dem Hamburger Rechentest (Lorenz, 2007) für die Klasse 2 verwendet.

Die Reaktionszeiten beim Erfassen von Punktmengen zeigen einen deutlichen Effekt des Subitizing: Wie aus Abb. 1 ersichtlich, steigen die Reaktionszeiten erst ab 5 Punkten deutlich an. Allerdings sind für keine Punktzahl die Unterschiede zwischen strukturierten und unstrukturierten Darstellun-

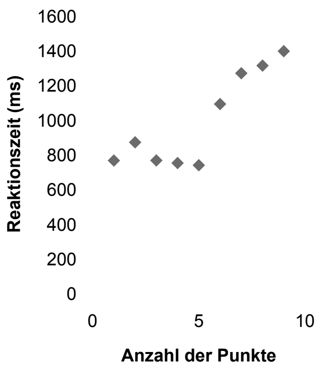


Abb. 1 Reaktionszeiten beim Erfassen von Punktmengen

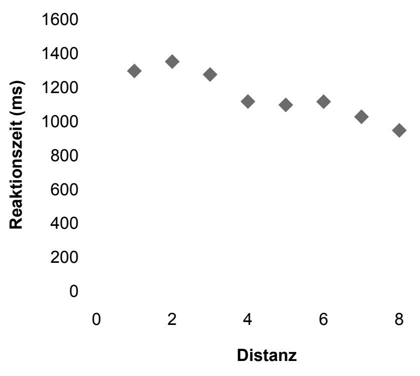


Abb. 2 Reaktionszeiten beim (symbolischen) Zahlvergleich

gen signifikant, was darauf hindeutet, dass die untersuchten Kinder (noch) nicht in der Lage sind, strukturierte Punktmengendarstellungen effektiv zu nutzen. Der Punktmengenvergleich wie auch der symbolische Zahlvergleich zeigen einen deutlichen Distanzeffekt. Aus Abb. 2 ist ersichtlich, dass die Reaktionszeiten mit zunehmender numerischer Distanz zwischen den Vergleichszahlen sinken. Auf individueller Ebene kann die Steigung dieser Regressionsgeraden als Maß für die Stärke des Distanzeffekts angesehen werden (De Smedt et al., 2009). In der Hauptstudie soll entsprechend die Wirkung von Training auf diesen Ausprägungsgrad des Distanzeffekts untersucht werden.

Für den schriftlichen Test (Cronbach-α=0,79) ergab sich eine mittlere Lösungsrate von 58,2%. Korrelationsanalysen zwischen schriftlichem Testergebnis und den Reaktionszeiten der einzelnen Skalen der Computerexperimente zeigten Korrelationswerte in der erwarteten Richtung (negative Werte), die aber mit Ausnahme der mentalen Rotationsfähigkeit nicht signifikant waren. Dies war auf Grund der kleinen Stichprobe allerdings auch nicht zu erwarten.

4. Zusammenfassung und Ausblick

Das zentrale Ergebnis dieser ersten Pilotierungsstudie ist, dass computergestützte Tests bereits im ersten Schuljahr effektiv eingesetzt werden können um basale numerische Fähigkeiten zu erheben. Im weiteren Verlauf des vorgestellten Projekts sollen die Testinstrumente und insbesondere die Interventionssoftware weiterentwickelt werden. Nach dem Training mit der Software werden Korrelationen zwischen Computertestergebnissen und arithmetischer Leistung erwartet und differentielle Fördereffekte untersucht.

Literatur

De Smedt, B., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2009). The predictive value of numerical magnitude comparison for individual differences in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 469–479.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition, 44,* 1-42.

Feigenson, L., Dehaene, S., & Spelke, E. (2004). Core systems of number. *Trends in Cognitive Sciences, 87*, 307-314.

KMK: Kultusministerkonferenz (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.* Neuwied: Luchterhand.

Lorenz, J. H. (2007). *Hamburger Rechentest für Klasse 2*. Hamburg: Behörde für Bildung und Sport.

Stigler, J. W. (1984). „Mental abacus“: The effect of abacus training on chinese children’s mental calculation. *Cognitive Psychology, 16,* 145-176.

Wilson, A. J., Dehaene, S., Pinel, P., Revkin, S. K., Cohen, L. & Cohen, D. (2006). Principles underlying the design of "The Number Race", an adaptive computer game for remediation of dyscalculia. *Behavioral and Brain Functions, 2*, 19.

Werner PESCHEK, Klagenfurt

Zentralabitur Mathematik: Sicherung von Grundkompetenzen

Der österreichische Nationalrat (Parlament) hat im Sommer 2009 eine Neugestaltung der Reifeprüfung (Abitur) beschlossen; die wesentlichste Änderung besteht darin, dass die Aufgabenstellungen der für alle verbindlichen schriftlichen Reifeprüfung (sRP) in den Fächern Deutsch, Mathematik und einer lebenden Fremdsprache zentral und nicht wie bisher durch die jeweilige Klassenlehrerin bzw. den Klassenlehrer erfolgen. Für die Allgemeinbildenden Höheren Schulen („Gymnasien") soll diese neue Regelung ab dem Schuljahr 2013/14 gelten, für die Berufsbildenden Höheren Schulen ab dem Schuljahr 2014/15.

Das Österreichische Kompetenzzentrum für Mathematikdidaktik am Institut für Didaktik der Mathematik der Alpen-Adria-Universität Klagenfurt wurde vom zuständigen Unterrichtsministerium mit der Entwicklung eines Konzepts für eine zentrale sRP in Mathematik sowie mit der Vorbereitung und Durchführung eines Schulversuchs betraut, in dessen Rahmen 20 ausgewählte Gymnasien bereits im Schuljahr 2011/12 eine zentrale sRP in Mathematik nach diesem Konzept durchführen sollen. Die Erfahrungen aus diesem Schulversuch sollen bei der Gestaltung der zentralen sRP ab 2014 Berücksichtigung finden.

Im Folgenden werden einige grundsätzliche Überlegungen und Eckdaten dieses Schulversuchs (siehe IDM/AECC-M 2009) dargelegt.

1. Verbindlichkeiten und Freiräume

Bei der aktuellen, von der jeweiligen Klassenlehrerin bzw. vom Klassenlehrer zusammengestellten sRP ist zu beobachten, dass die österreichischen Schülerinnen und Schüler relativ komplexe Aufgaben (vorwiegend operativer Art) mit Bravour bewältigen, zu deren Lösung grundlegende Kompetenzen erforderlich sind, über die sie in der Regel nicht (ausreichend) verfügen.

Möglich wird dies durch längere, klassenspezifische und „zielgerichtete" Übungsphasen vor dem schriftlichen Abitur („teaching to the test"), die Folge ist, dass man eine von Klasse A erfolgreich bewältigte Aufgabe kaum in irgendeiner anderen österreichischen Klasse ungestraft zum Abitur geben könnte. Dem Mathematikunterricht in verschiedenen Schulformen des Gymnasiums, in autonomen Schulen, in differenzierten und individualisierten Klassenzimmern sind also die Gemeinsamkeiten und die Verbindlichkeiten weitgehend abhanden gekommen (sofern es solche je gab).

Das Zentralabitur in Mathematik ist als Versuch zu verstehen, in einem hochgradig ausdifferenzierten Bildungssystem wie dem österreichischen, Gemeinsamkeiten zu stärken, sichtbar zu machen bzw. herzustellen. Die Herausforderung besteht darin, Verbindlichkeiten zu schaffen ohne die Freiräume maßgeblich einzuschränken (sie eher deutlicher, bewusster und sinnvoll nutzbar zu machen).

2. Gegenstand einer zentralen schriftlichen Reifeprüfung

Sehr entscheidend ist die Frage, welche mathematischen Fähigkeiten für alle Schüler(innen) verbindlich sein sollen. Wir meinen, dass es sich dabei um Fähigkeiten handeln sollte,

- die für das Fach grundlegend sowie
- gesellschaftlich relevant sind,
- die längerfristig verfügbar sein sollten und
- leicht („massig“) überprüfbar sein müssen.

Wir nennen solche Fähigkeiten Grundkompetenzen.

Mathematische Grundkompetenzen sind in diesem Kontext somit grundlegende, gesellschaftlich relevante mathematische Fähigkeiten, die *allen* österreichischen Abiturient(inn)en längerfristig verfügbar sein sollten und einer produkt- bzw. zustandsorientierten Überprüfung zugänglich sind.

3. Identifizierung von Grundkompetenzen

Bei der Identifizierung von mathematischen Grundkompetenzen sind verschiedene Aspekte zu berücksichtigen:

traditionell-pragmatische Aspekte: „das Wesentliche“ aus dem Lehrplan

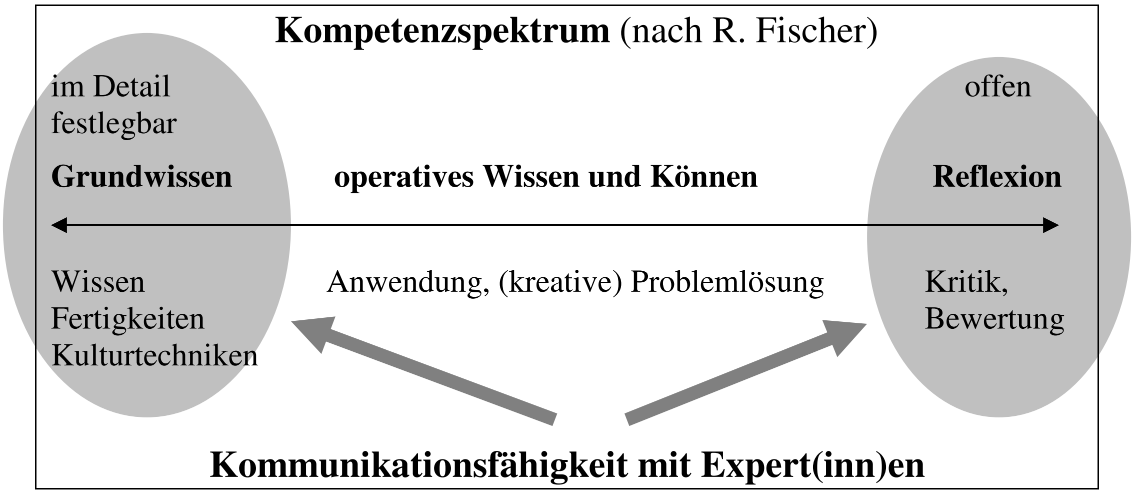
fachliche Aspekte: fachliche und fachdidaktische Zusammenhänge

bildungstheoretische Aspekte: Rolle des Individuums in der Gesellschaft

soziale Aspekte: Aushandelung

Unsere bildungstheoretische Position ist wesentlich durch R. Fischer´s Konzept der Höheren Allgemeinbildung (Fischer 2001) geprägt: Eines der Schlüsselprobleme unserer arbeitsteiligen Gesellschaft ist das der Verständigung zwischen Expert(inn)en und Lai(inn)en. Daher muss die *Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en und der Allgemeinheit* ein zentrales Anliegen einer allgemeinbildenden höheren Schule sein, für R. Fischer wird sie zum wesentlichsten *Orientierungsprinzip für die Auswahl von Inhalten.*

Kommunikationsfähigkeit mit Expert(inn)en meint zum einen, die richtigen Fragen an die Expert(inn)en stellen und deren Antworten verständig aufnehmen zu können (wofür *Grundwissen* erforderlich ist), es meint zum anderen aber auch, die Wichtigkeit und Bedeutung der Expertisen für die eigenen Entscheidungen und Handlungen bewerten zu können (was Reflexion bzw. Reflexionswissen erfordert).



Einem Zentralabitur sind in diesem Kompetenzspektrum durch die (einfache, „massige“) Messbarkeit Grenzen gesetzt: Durch „primitive“ Verfahren wie einem schriftlichen Test sind eher (weniger komplexe) Inhalte messbar, die dem Bereich des Grundwissens zugeordnet werden können, komplexere Anwendungen, kreative Problemlösungen oder gar Reflexionsprozesse hingegen verlangen entsprechend elaborierte, allenfalls prozessorientierte Evaluationsmethoden; zentrale Vorgaben verlangen darüber hinaus, dass die überprüften Inhalte im Detail festlegbar sind und klar benannt werden können. Ein Zentralabitur wird sich daher auf die Überprüfung verständigen (allenfalls reflektierten) Grundwissens beschränken müssen, Gemeinsamkeiten und Verbindlichkeiten sind in diesem Bereich anzusiedeln.

Unterrichtlich relevante Bildungsziele sind nicht durch Verordnung vorschreibbar, sie werden sozial ausgehandelt. Dazu sind zentrale Vorgaben (als Vorschläge und Diskussionsgrundlage) notwendig, (rationaler, begründeter, konstruktiver) Widerstand ist erwünscht. Bei der Vorbereitung, Durchführung und Evaluation des Schulversuchs, versuchen wir solche *Aushandlungsprozesse* zwischen der Entwicklergruppe, den beteiligten Pilotschullehrer(inn)en und -schüler(inne)n und deren Betreuer(inne)n sowie externen Expert(inn)en zu organisieren.

4. Zwei Beispiele für Grundkompetenzen

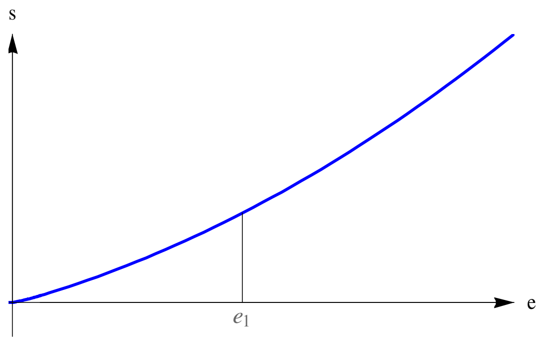
Unser Konzept (IDM/AECC-M 2009) schlägt eine Liste von Grundkompetenzen (GK) vor, die im Rahmen der Vorbereitung und Durchführung des

Schulversuchs einer Aushandlung unterzogen werden, und gibt dazu einige prototypische Aufgaben an, etwa:

GK: *Terme im Kontext interpretieren können.*

Aufgabenstellung

Es sei $s : e \mapsto s(e)$ die Funktion, die jedem Einkommen e die zugehörige Einkommenssteuer $s(e)$ zuordnet; e_1 sei dabei ein bestimmtes Einkommen (siehe Grafik).



Was bedeuten die Terme

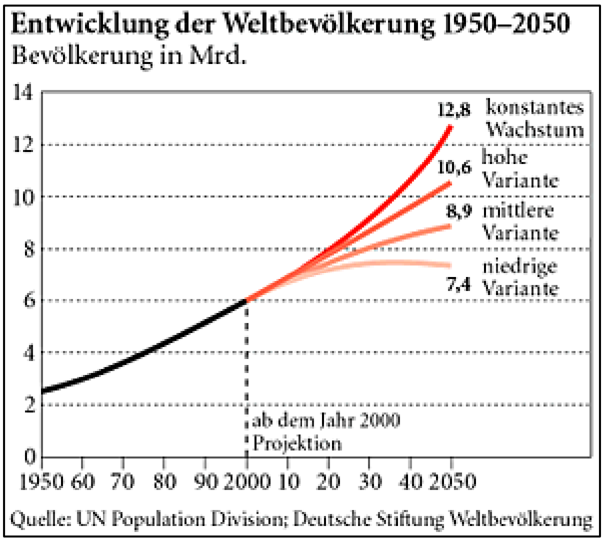
T$_1$: $e_1 - s(e_1)$ und T$_2$: $\dfrac{s(e_1)}{e_1}$

in diesem Kontext?

GK: *Den typischen Verlauf des Graphen einer linearen Funktion kennen. Die Wirkung der Parameter k und d kennen und die Parameter in unterschiedlichen Kontexten deuten können.*

Aufgabenstellungen

Die UNO veröffentlichte mehrere Prognosemodelle für die Entwicklung der Weltbevölkerung ab dem Jahr 2000. Bei einer der vier Varianten wurde linear modelliert.
Welche Variante ist dies?
Geben Sie die für diese Modellierung zu Grunde liegende jährliche Bevölkerungszunahme an!



Literatur

Fischer, R. (2001). Höhere Allgemeinbildung. In A. Fischer-Buck u. a. (Hrsg.), *Situation – Ursprung der Bildung* (S. 151 - 161). Leipzig: Universitätsverlag.

IDM/AECC-M (2009). *Das Projekt „Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik“*. http://www.uni-klu.ac.at/idm/ downloads/Konzept_sRP_M_9-09.pdf

Kathleen PHILIPP, Freiburg, Timo LEUDERS, Freiburg

Innermathematisches Experimentieren – Eine empirische Analyse von Denkprozessen beim Experimentieren mit Beispielen

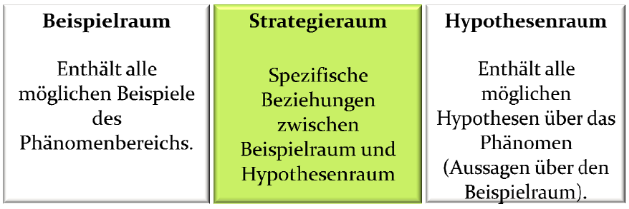
Innermathematisches Experimentieren ist ein bislang in der Didaktik wenig verwendetes Konzept. Das Modell zum Erkenntnisgewinn von Peirce (1965) bietet eine Möglichkeit dieses Konzept erkenntnistheoretisch zu verorten. Peirce unterscheidet drei Formen wissenschaftlichen Schließens: Abduktion, Induktion und Deduktion. Die Abduktion wird als kreativer Akt des Hypothesenbildens zur tentativen Erklärung eines Phänomens beschrieben und ist folglich ein erkenntniserzeugender Vorgang. Der Induktion schreibt Peirce die Bedeutung des Hypothesenprüfens in Form einer empirischen Prüfung an Einzelfällen, also an Beispielen, zu. Deduktives Schließen spielt beim Begründen und Beweisen einer Vermutung eine bedeutende Rolle, nicht aber beim Generieren neuer Erkenntnisse. Im Folgenden sprechen wir von innermathematischem Experimentieren, wenn wir uns auf das Wechselspiel abduktiver und induktiver Erkenntnisprozesse beziehen. Diese kann man auch als „Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen an Beispielen" charakterisieren. Sie bilden für das „Mathematiklernen" bedeutende Teilprozesse und bilden sich auch in Ergebnissen der mathematiksoziologischen Forschung (etwa Heintz 2000) ab, die das Entstehen von Hypothesen aus der Anschauung von Beispielen als „quasi-experimentelles" Vorgehen beschreibt.

Ziel des hier vorgestellten Projektes ist die Untersuchung von innermathematischen Erkenntnisprozessen von Lernenden in der Schule als Grundlage für ein differenziertes Verständnis von Lernprozessen.

Experimentieren als Suche in Räumen

Das Modell zum wissenschaftlichen Erkenntnisgewinn von Klahr/Dunbar (1988) beschreibt Experimentieren als Suche in zwei Räumen– einem Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden und einem Experimentesuchraum, in dem Experimente generiert werden, um einerseits Vermutungen zu überprüfen (bzw. zu falsifizieren) und andererseits den Phänomenbereich zu erkunden. Der Forschungsprozess besteht somit in einem fortwährenden Hin- und Herwechseln zwischen diesen beiden Räumen.

Dieses Modell lässt sich auf die Mathematik übertragen und erweitern, wenn man das Untersuchen von Beispielen als Experiment im Prozess des mathematischen Erkenntnisgewinns deutet und so einen *Beispielraum* und einen *Hypothesenraum* gewinnt. Die für Erkenntnisgewinn interessanten Prozesse zeigen sich vor allem im Wechsel der beiden Räume, die sich in einem dritten Raum, dem *Strategieraum*, verorten lassen (Philipp/Matt/Leuders 2009).



Studie 1: Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern

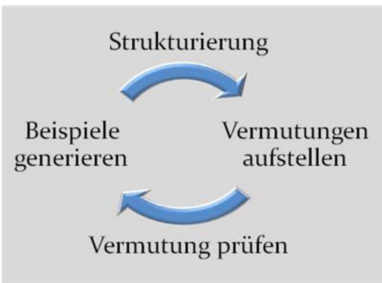
Zentrale Fragestellung der qualitativen Videostudie war eine Typenbildung experimenteller Prozesse. Es wurde untersucht, welche typischen Vorgehensweisen sich beim innermathematischen Experimentieren beschreiben und gegeneinander abgrenzen lassen.

Eingesetzt wurden dazu Videografien von Probanden bei der Bearbeitung verschiedener offener Fragestellungen (z.B. „was kannst du alles über … herausfinden?“). Solche Aufgabenstellungen für Strukturexplorationen sind in hohem Maße geeignet, experimentelles Arbeiten mit Beispielen zu initiieren. Analysiert wurden die Bearbeitungsprozesse der Probanden mittels Grounded Theory. So konnte in der Phase des freien Kodierens ein umfassendes Kategoriensystem gewonnen werden, das einzelne Strategien beim innermathematischen Experimentieren beschreibt, die hier exemplarisch dargestellt werden (vgl. Philipp/Matt/Leuders 2009).

Kode	Kodenotiz	Beispiel
Beispielorientierte Hypothese	Hypothese wird direkt in Anknüpfung an ein Beispiel gebildet.	„16 geht nicht. Die Quadratzahlen gehen nicht (als Treppenzahl).“
Gegen-beispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
Reihenfolge-beispiel	Beispiele werden in systematischer Reihenfolge ausprobiert.	Die Zahlen von 1 bis 20 als Treppenzahlen darstellen.

Beim axialen Kodieren entstand ein theoretisches Begriffsnetz zum innermathematischen Experimentieren, indem die einzelnen Kategorien gruppiert und miteinander verknüpft wurden. So konnten vier Hauptkategorien extrahiert werden, die wiederum zueinander in Beziehung gesetzt werden können.

Diese Hauptkategorien kann man als Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens deuten: Zunächst werden Beispiele generiert. Um zu einer Vermutung zu gelangen, müssen diese (tatsächlich oder mental) strukturiert werden. Vermutungen werden dann an weiteren Beispielen überprüft. Die Ergebnisse



dieser ersten qualitativen Studie und das daraus gewonnene Kompetenzmodell zum innermathematischen Experimentieren bilden die Basis für die zweite empirische Studie.

Studie 2: Einsatz einer Kompetenzskala im Rahmen einer Intervention

Zentrale Fragestellungen dieser Studie sind: Inwiefern können Teilkompetenzen des innermathematischen Experimentierens durch ein gezieltes Training gefördert werden? Und als Voraussetzung zur Bearbeitung dieser Frage: Wie kann die Entwicklung der Kompetenzen geeignet erfasst werden?

In einer Pilotphase wurde ein Training in eine Unterrichtseinheit mit innermathematischen Inhalten eingebettet und in zwei Klassen (6. Jahrgangsstufe, Hauptschule und Realschule) durchgeführt. Eine weitere Klasse diente hierbei als Kontrollgruppe. Zur Überprüfung der Wirksamkeit des Trainings wurden einerseits Testitems entwickelt, die ebenfalls im Rahmen dieser Studie pilotiert wurden und andererseits qualitative Elemente (Schülerinterviews, Unterrichtsbeobachtung, Analyse von Arbeitsprodukten, Lehrerbefragung) eingesetzt.

Die Intervention wurde in Anlehnung an das Modell heuristischer Bildung von Bruder (2003) in vier Phasen gegliedert: Zunächst wurden die Schülerinnen und Schüler mit der Art der Aufgaben vertraut gemacht. An einigen zentralen Aufgaben wurden Vorgehensweisen (Strategien) expliziert, die Verwendung dieser reflektiert und an weiteren Aufgaben bewusst eingesetzt. Zentrales Element der Intervention ist hier das Verbalisieren von Bearbeitungsschritten sowie das Kommunizieren darüber. Unterstützt werden die Bearbeitungsprozesse durch Hilfsfragen, die den Schülerinnen und Schülern zur Verfügung stehen und deren Verwendung ebenso Gegenstand der Reflexion und Kommunikation darstellt.

Im Folgenden sollen erste Ergebnisse der Auswertung des Tests, der in der Pilotstudie eingesetzt wurde, vorgestellt werden.

Erste Ergebnisse und Ausblick

Der Test, der im Prä-Post-Design zur Überprüfung der Wirksamkeit der Intervention eingesetzt wurde, umfasst verschiedene Komponenten, hierzu gehören ein Fragebogen zur momentanen Motivation vor und nach der Aufgabenbearbeitung, Verständnisaufgaben, die auf inhaltliche Schwierigkeiten hinweisen können und Aufgaben, die die vier oben genannten Teilkompetenzen prüfen sollen.

Bei der gesamten Experimentalgruppe lässt sich beim überwiegenden Teil der Aufgaben im Post-Test eine Verbesserung feststellen. Ein Vergleich der beiden untersuchten Schultypen (Hauptschule und Realschule) ergab signifikante Unterschiede hinsichtlich des Interaktionseffekts. Bezüglich der hier gewählten Stichprobe ist auffällig, dass die Intervention bei der untersuchten Gruppe der Realschüler deutliche bessere Effekte zeigt. Dies könnte ein Hinweis darauf sein, dass gewisse Voraussetzungen für das Erlernen übergreifender Strategien gegeben sein müssen, die im Einzelnen noch bestimmt und erfasst werden müssten.

Betrachtet man konkrete Aufgabenlösungen, ist anzumerken, dass die Schülerinnen und Schüler der Experimentalgruppe besonders in den Bereich „Strukturen erkennen“ und „Vermutung formulieren“ sowohl hinsichtlich der Anzahl der Vermutungen als auch der inhaltlichen Qualität der Aussagen Fortschritte gemacht haben. Deutlich ist der Kompetenzzuwachs auch im Bereich „Vermutung prüfen“, in dem vor allem die Strategie, ein Gegenbeispiel zu suchen, im Post-Test zu beobachten war.

Für die Hauptuntersuchung steht nun die Weiterentwicklung der Testaufgaben zur Verbesserung der Skalenqualität, die Optimierung der Unterrichtsintervention und möglicherweise die Erfassung weiterer Merkmale, die Lernen beeinflussen, an. Ziel ist dann, differentielle Effekte hinsichtlich verschiedener Schülergruppen und verschiedener Leistungsbereiche aufzudecken und zu erklären. Auf theoretischer Seite soll die vorliegende Konzeptualisierung von Prozessen des „innermathematischen Experimentierens“ in engeren Bezug zu alternativen Modellen (Problemlösen, induktives Denken) gebracht und abgegrenzt werden.

Hinweis: Die hier beschriebene Unterrichtseinheit ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

Bruder, R. (2003): *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens*. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“. Kiel: IPN.

Heintz, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer-Verlag, Wien.

Klahr, D./ Dunbar, K. (1988): *Dual Space Search During Scientific Reasoning*. In: Cognitive Science 12, 1-48.

Peirce, C. S./ Walther, E. (Hrsg.) (1965): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Agis Verlag GmbH, Baden-Baden.

Philipp, K., Matt, D., Leuders, T. (2009): *Experimentelles Denken – Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen*. In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Münster: WTM Verlag

Franz PICHER, Klagenfurt

Nachdenken über die Schulanalysis

Der folgende Beitrag beginnt mit zentralen Aspekten des „Verstehens“ von Mathematik, gibt Hinweise darauf, warum dieses in der „üblichen“ Schulanalysis zu wenig gegeben ist und gibt dann Vorschläge zur Verbesserung desselbigen.

1. „Verstehen“ am Beispiel der lokalen Änderungsrate: Desiderata

„Verstehen“ ist ein vielschichtiger Begriff (siehe beispielsweise Scholz 1999), dessen Weite im Folgenden auf drei zentrale Aspekte reduziert wird. Nachstehend werden diese Aspekte anhand von Fragestellungen illustriert, die beispielhaft für die lokale Änderungsrate beantwortet werden:

- Einordnung: *In welchem Verhältnis steht der (neu gelernte) Inhalt zum Bisherigen?*
  Die lokale Änderungsrate soll als <u>eine</u> Beschreibungsmöglichkeit von Änderungen aufgefasst und mit anderen in Beziehung gesetzt werden.
- Deutung im Kontext: *Wie kann der Inhalt im Kontext gedeutet werden?*
  Die lokale Änderungsrate kann (direkt) weder als Zustand noch als Änderung (zwischen zwei Zuständen) interpretiert werden.
- Sinn: *Was kann durch den Inhalt jetzt besser bzw. zusätzlich beschrieben werden? Wozu das Ganze? Wozu soll ich das lernen?*
  Welche Rolle spielt die lokale Änderungsrate im Rahmen der Beschreibung von Änderungen? Wozu soll ich etwas über die lokale Änderungsrate lernen?

Der Beantwortung der die Aspekte illustrierenden Fragestellungen sollte genügend Raum in jedem Unterrichtsprogramm zur Verfügung gestellt werden. Die Fragestellungen müssen dabei explizit angesprochen werden und dürfen nicht etwa nur Hintergrundwissen der Lehrperson darstellen. Die Fragen zeigen die Bedeutung von Reflexion, Voraussetzung dafür ist aber Grundwissen. Dieses wird in den folgenden Überlegungen als gegeben angenommen, es wird also eine (technische) Einführung in den Lerninhalt vorausgesetzt. Ebenso werden „übliche“ Deutungen der lokalen Änderungsrate im Kontext vorausgesetzt; die obige Antwort soll illustrieren, was darüber hinaus wichtig scheint und worüber aber zu wenig nachgedacht wird. Die Nicht-Beantwortung der Fragestellungen beim Sinn-Aspekt weist darauf hin, dass es sich beim Verstehen um einen Prozess individueller Aneignung handelt. Gerade im Rahmen der Sinnfrage steht eine Bewertung der Relevanz des Lerninhalts im Zentrum der Betrachtungen, weshalb Raum für Reflexionen mit offenem Ende geschaffen werden muss.

2. „Verstehen“ am Beispiel der lokalen Änderungsrate: Status quo

Anhand obiger Aspekte werden nun Hinweise darauf gegeben, wieso eine Ermöglichung des „Verstehens“ im „üblichen“ Mathematikunterricht zu wenig gegeben zu sein scheint:

- Einordnung: Andere Änderungsmaße dienen (nur) als Wegbereiter für die lokale Änderungsrate, die alsdann alleinig im Fokus steht.
- Deutung im Kontext: Die Deutung der lokalen Änderungsrate als Änderung bzw. als Zustand wird kaum problematisiert.
- Sinn: Sinnfragen werden in den Hintergrund gedrängt, was die individuelle Aneignung und somit das „Verstehen“ erschwert.

3. Ein Vorschlag

Zwei Perspektiven werden als Beitrag zur Verbesserung des „Verstehens“ in obigem Sinne vorgeschlagen:

- Aufweitung des Blicks
- Auftrennung der Inhalte

„Aufweitung des Blicks“ bedeutet ein Zurücktreten, eine Betrachtung des eigentlichen Lerninhalts aus „sicherer Entfernung“, um die Umgebung wahrzunehmen. Diese Umgebung meint einerseits den Alltag (bzw. die Alltagssprache). Andererseits ist eine natürliche Umgebung, die durch Aufweitung des Blicks sichtbar werden soll, das bisher (in der Schule) Gelernte. Ein Rückblick und ein Stellen von Fragen wie „Was macht die Besonderheit der Mathematik, und im Speziellen der Differentialrechnung, im Zusammenhang mit der Beschreibung von Änderungen aus?“ sollten daher zentrale Elemente eines Unterrichts in der Sekundarstufe II sein.

Mit der „Auftrennung der Inhalte“ greife ich einen Vorschlag von Roland Fischer auf, die wesentlichen Ideen der (Schul-)Analysis besser sichtbar, erlernbar, diskutierbar und kritisierbar zu machen, indem im Unterricht zwischen „Änderungsrechnung“, „Infinitesimalrechnung“ und „Kalkül“ getrennt wird. Nun ist (zunächst diskret gedachte) Änderungsrechnung an sich nichts Neues – man denke an Systemdynamik oder an Kurse in „Precalculus“. Der Vorschlag „Auftrennung der Inhalte“ beinhaltet aber ganz wesentlich ein In-Beziehung-Setzen von Alltag und Mathematik, diskreten und kontinuierlichen Beschreibungen sowie Gelerntem und noch zu Lernendem. Darüber hinaus wird damit für ein Sichtbar-Machen dieser Auftrennung plädiert, und zwar auch für die Lernenden. Im Folgenden wird beispielhaft präzisiert, was unter dem Bereich „Änderungsrechnung“ verstanden werden soll und wie ein Nachdenken über Änderungen in der Sekundarstufe II am Übergang zur Infinitesimalrechnung aussehen kann:

Bei eingehender Betrachtung von Beschreibungen von Änderungen zeigt sich, dass bereits in der Alltagssprache Größen verwendet werden, die Änderungen zum Gegenstand der Betrachtung machen (Picher 2009, S. 791). Dadurch können Änderungen wie Zustände behandelt werden: In der Aussage „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt.“ steht „Neuverschuldung“ für die Änderung der Verschuldung, und deren Beschreibung durch das Wort „sinkt“ ist analog zur Beschreibung der Änderung eines Zustands (vgl. Hahn & Prediger 2008, S. 164).

Die Mathematik arbeitet nun originär mit Objekten, gerade die lokale Änderungsrate sollte als ein solches mathematisches Objekt erfahrbar gemacht werden. Ein Erkennen des „Zum-Objekt-Machens“ als Besonderheit der Mathematik ist daher vor der Behandlung der Infinitesimalrechnung vonnöten. Dazu können beispielsweise die Addition natürlicher Zahlen und darauf aufbauend die Einführung negativer Zahlen (rück-)betrachtet werden. Anhand dieser Betrachtungen kann der (für die Analysis) wichtige Übergang von einer Handlung (dem Subtrahieren) zu einem Objekt (der negativen Zahl) als Leistung der Mathematik erkannt werden: Die Addition zweier Zahlen kann als Beschreibung der Änderung einer Größe um eine andere Größe aufgefasst werden (vgl. Kirsch 2004, S. 64). Dabei steht die erste Zahl für einen Zustand und die zweite Zahl für die Änderung dieses Zustands, die Summe gibt den neuen Zustand nach erfolgter Änderung an. Nun können dieselben Zahlen, die für die Beschreibung von Zuständen verwendet werden, auch für die Beschreibung der Änderung von Zuständen verwendet werden. So kann die Addition $3 + 5 = 8$ als Änderung von 3 um 5 oder als Änderung von 5 um 3 interpretiert werden. Die Zahlen bekommen in der mathematischen Beschreibung daher dieselben „Namen“: Man spricht von Summanden. Die Unterscheidung zwischen Größen, die einen Zustand beschreiben und Größen, die für eine Änderung stehen, ist in der mathematischen Beschreibung (zunächst) irrelevant. Änderungen werden – in derselben Art und Weise wie Zustände – zu Objekten mathematischen Tuns, man entfernt sich von der (Alltags-)Vorstellung, die Änderungen mit Prozessen oder Handlungen verbindet. Im Falle der Verwendung von Mathematik führt erst die Interpretation im Kontext zu einer Unterscheidung von Zuständen und Änderungen. Die konsequente Verfolgung dieses Grundsatzes führt dann auch zur Einführung der negativen Zahlen: Aus der Beschreibung einer Änderung mithilfe natürlicher Zahlen, $8 - 5 = 3$, wird in der Darstellung 8 + (-5) = 3 das Zeichen -5 als Objekt definiert, das zu 8 addiert wird. Aus der (gedanklichen) Handlung „Subtrahieren von 5" entsteht ein Objekt, auf das Regeln angewandt werden können. Die Zahl „-5" kann dadurch auf der einen Seite für die Beschreibung eines Abnahme-Prozesses und auf der anderen Seite für die Beschreibung eines Zustands dienen. (Man denke dazu an das Beispiel der Temperatur.)

Dieser „besondere" Umgang mit Objekten in der Mathematik ermöglicht erst die Infinitesimalrechnung. Dies sollte den Lernenden bewusst gemacht werden und daher auch im Unterricht angesprochen werden: Da mathematische Objekte als Änderungen und als Zustände interpretiert werden können, muss (zunächst) weder von Zustand noch von Änderung gesprochen werden. Die Analysis setzt diesen Gedanken fort und ermöglicht (mithilfe des Zum-Objekt-Machens) die Beschreibung kontinuierlicher Änderungen. Die lokale Änderungsrate kann im Rahmen der Interpretation im Kontext (direkt) weder als Zustand noch als Änderung (zwischen zwei Zuständen) gedacht werden: Einerseits sind zwei Zustände für ihre Berechnung vonnöten, dies spricht zunächst gegen die Interpretation als Zustand. Andererseits setzt unser Alltagsverständnis von Änderungen voraus, dass jede Änderung zwischen zwei wohldefinierten und unterscheidbaren Zuständen stattfinden muss. Dies widerspricht zunächst der Interpretation der lokalen Änderungsrate als Änderung. Dies erscheint uns als problematisch, weil wir (außerhalb der Mathematik) gewohnt sind, dass Begriffe nicht erst durch die Begriffsbildung geschaffen werden. Es ist daher im Rahmen eines Nachdenkens über Änderungen wichtig, darauf hinzuweisen, dass die lokale Änderungsrate als „ungebundene" Beschreibungsform gesehen werden muss, die zunächst weder einen Zustand noch eine Änderung beschreibt. Dies stellt eine Fortführung des obigen Gedankens dar, dass in der mathematischen Beschreibung die Unterscheidung von Größen, die einen Zustand beschreiben, von Größen, die für eine Änderung stehen, irrelevant sei. Durch die Einführung der lokalen Änderungsrate gibt man die Möglichkeit zur Unterscheidung auf; durch die lokale Änderungsrate werden Änderungen zu Zuständen „gemacht".

Literatur

Hahn, S. & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik, 29(3/4),* 163 - 198.

Kirsch, A. (2004). *Mathematik wirklich verstehen.* Köln: Aulis Verlag Deubner.

Picher, F. (2009). Beschreibung von Änderungen. In: M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 791 - 795). Münster: WTM-Verlag.

Scholz, O. (1999). Verstehen. In: H. J. Sandkühler (Hrsg.), *Enzyklopädie Philosophie* (Sp. 1698 - 1702). Hamburg: Felix Meiner.

Guido PINKERNELL, Darmstadt

Rechnerfreie Mathematik in einem technologieorientierten Unterricht

Im Sommer 2010 wird ein Projekt starten, dessen Ziel die Entwicklung und Erprobung von unterrichtspraktischen Methoden ist, die unterstützend wirken für die langfristige Verfügbarkeit mathematischer Grundfertigkeiten und -wissen in einem Unterricht, der durch einen intensiven Einsatz digitaler Medien geprägt ist. Es handelt sich um ein Nachfolgeprojekt des niedersächischen Schulprojektes CAliMERO, das die Entwicklung und Erprobung eines ganzheitlichen Unterrichtskonzepts für den Einsatz von CAS in der Sekundarstufe I verfolgte und derzeit ausgewertet wird (Bruder und Ingelmann 2009). Ein Schwerpunkt dieses auslaufenden Projektes war die explizite Unterstützung „rechnerfreier Fertigkeiten“. Erste Auswertungen scheinen vielversprechend, so dass eine Weiterentwicklung der diesbezüglichen Unterstützungsmethoden in der Oberstufe – jetzt mit Blick auf die Schnittstellenproblematik (vgl. Bruder et al. 2010) - im Rahmen des Nachfolgeprojektes CAliMERO SekII sinnvoll erscheint.

Ein Teil der Weiterentwicklung wird in der Formulierung eines Fähigkeitenkataloges bestehen, der sich hinsichtlich Inhalte und Wissensaspekte an den Eingangsanforderungen von Universitäten und Hochschulen orientiert, dabei aber die schulspezifischen Bildungsanforderungen nicht aus dem Blick verliert.

„Rechnerfreie Mathematik“: Mehr als nur Kalkül

Eine Langzeitstudie mit Studieneingangstests zeigt mit einer durchschnittlichen Leistungserfüllung von knapp unter 50% seit 2002 „stabile und alarmierend schwache Ergebnisse“ (Knospe 2009). Mit der Beschränkung auf Fachhochschulstudenten ist die Probandenauswahl nicht repräsentativ, trotzdem reiht sie sich ein in eine Serie von Klagen über mathematische Grundkenntnisse bei Studienanfängern. Schon Nägerl et al. (1973) wiesen in einer Untersuchung auf erschreckend schwache mathematische Leistungen bei Anfängern in medizinischen Studienfächern hin. Der Zeitpunkt dieser letztgenannten Erhebung dürfte Hypothesen hinsichtlich eines ursächlichen Zusammenhanges von Rechnereinsatz und mathematischen Grundkenntnissen relativieren. Trotzdem sind beide Studien insofern interessant, weil sie Aufschluss über geforderte Inhalte geben. Es sind dies mit z.B. Termumformungskenntnissen und Rechnen mit Exponenten und Logarithmen in der Studie Knospe (2009) in erster Linie Themen aus der Sekundarstufe I, so dass sich das Problem mangelnder Grundkenntnisse im wesentlichen als ein **Problem mangelnder langfristiger Verfügbarkeit** darstellt. Ein Blick in öffentlich verfügbare Eingangstests aus Fachhochschulen und Universitäten bestätigt diese Einschätzung: Gefordert sind überiwegend Grundrechenarten, Bruch- und Prozentrechnung, Dreisatz, Gleichungen usw., weniger häufig Kenntnisse im Differenzieren und Integrieren aus der Oberstufe.

Neben der inhaltlichen Zusammensetzung wird anderes deutlich: Zwar besteht durchaus ein Überhang an **kalkülorientierten Aufgabenstellungen** (Abb. 1). Es sind aber auch Aufgaben vertreten, die offensichtlich das Ziel verfolgen, das **Verständnis mathematischer Begriffe** und Modellierungs- bzw. Problemösefähigkeiten zu prüfen (Abb. 2 bis Abb. 4). In diesen Aufgaben werden konzeptionelle Anküpfungspunkte zwischen Schule und weiterführenden Bildungseinrichtungen auch im Bereich mathematischen Grundwissens deutlich. Das betrifft zum einen die ausdrückliche Kompetenzorientierung der schulischen Bildungspläne seit den KMK Bildungsstandards, in denen z.B. die Auseinandersetzung mit ungewohnten Aufgabenstellungen (Problemlösen), das Beschreiben von außermathematischen Sachsituationen durch mathematische Modelle (Modellieren, Darstellungen verwenden). Zum anderen betrifft das Erwartungen an den Einsatz von CAS und GTR in Schulen. Angesichts solcher Einstellungstests wäre ein Verbot von Rechnern in der Schule, wie mancherorts gar gefordert, nur kontraproduktiv – vorausgesetzt natürlich, dass CAS und GTR nicht nur als Kalkülersatz verwendet wird, sondern im Rahmen sinnvoller Unterrichtskonzepte auch ihre Stärken entfalten können.

2) Vereinfachen Sie folgenden Ausdruck $\frac{a}{a-1}+\frac{a}{a+1}$

3) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $\frac{3}{2}\cdot$

4) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck: $\lg\frac{a}{b}+\lg$

5) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $\left(\frac{3}{2}\right.$

6) Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck: $\left(\frac{a^2}{x^3}\right)^{-2}$

7) Lösen Sie die folgende Gleichung nach x auf: $\frac{a+}{x}$

8) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $\sqrt{x}$

9) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $(x\cdot$

10) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $x^2\cdot$

11) Berechnen Sie x aus der folgenden Gleichung $|2x$

Abbildung 1:
aus einem Eingangstest an der FH Kiel

5. Aufgabe

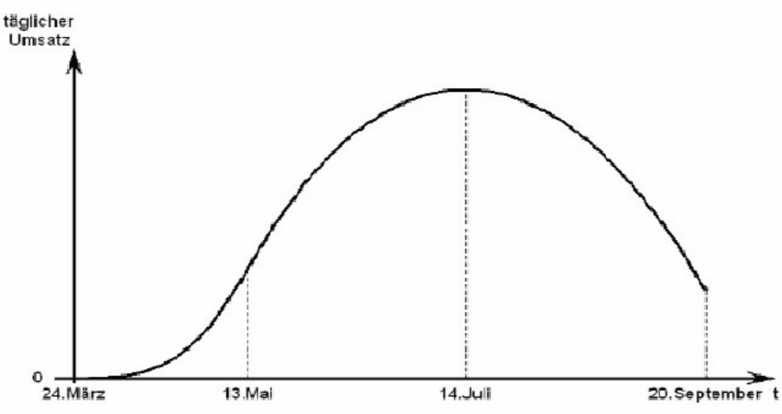
Welcher der folgenden Werte ist der größte?

a) $\sin 20^\circ$

b) $\cos 20^\circ$

c) $(\cos 20^\circ)^2$

Abbildung 2:
aus einem Eingangstest der BA Karlsruhe
(wie die anderen abgebildeten Aufgaben auch ohne Rechner zu bearbeiten)



Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie richtig oder falsch ist.

Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli.	□ Richtig	□ Falsch
Der Gesamtumsatz steigt am stärksten an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli.	□ Richtig	□ Falsch
Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.	□ Richtig	□ Falsch
Der Gesamtumsatz sinkt jeden Tag in der Woche vom 16. August bis zum 22. August.	□ Richtig	□ Falsch

Abbildung 3: aus einem Eingangstest an der TU Darmstadt

Wie viele positive ganze Zahlen zwischen 1000 und 2000 sind durch 7 teilbar?

Abbildung 4: aus einem Eingangstest der Universität Bremen

„Rechnerfreie Mathematik“: Die Rolle neuer Technologien

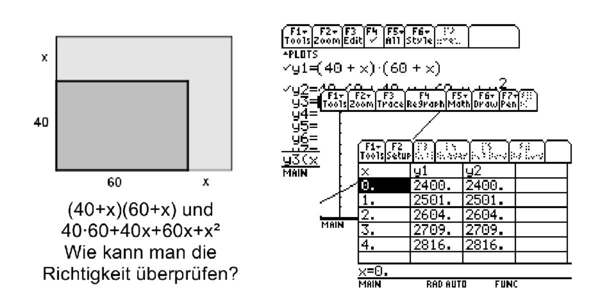


Abbildung 5: aus CAliMERO

Abb. 5 zeigt eine Aufgabe aus einer Einheit des Projekts CAliMERO Sek I. Zwei verschiedene Terme sollen den Flächeninhalt eines Rechtecks beschreiben, wobei zu prüfen ist, ob beide diesen Zweck erfüllen. Die Gleichwertigkeit wird insbesondere mithilfe von Technologie untersucht, indem anhand von Wertetabellen und Graphen verdeutlicht wird beide Terme für jede Konkretisierung von x denselben Wert annehmen. Ein Nachweis der Gleichwertigkeit ist nicht intendiert. Ziel ist es, dem zu vermittelnden Variablenbegriff mit der „Stellvertreterbedeutung“ einen weiteren Aspekt hinzuzufügen.

Ein wesentliches Ziel des Technologieeinsatzes ist also eine verständnisorientierte Vermittlung mathematischer Begriffe und Verfahren. Das kann auch dazu führen, dass gewohnte Unterrichtseinheiten großflächig umstrukturiert werden. Eine Einheit zu einem funktionalen Zusammenhang kann so damit beginnen, dass Funktionen in inner- und außermathematischen Kontexten mithilfe von Graphen und Tabellen erkundet werden. Die algebraische Behandlung der entsprechenden Gleichungen muss nicht wie üblich vorangestellt werden, sondern erfolgt erst bei solchen Problemstellungen, die eine exakte Lösung verlangen. Das aspektreiche Kennenlernen eines Funktionstyps steht so auch chronologisch im Vordergrund (Pinkernell 2009).

CAliMERO Sekundarstufe II

Eine erste Auswertung der Daten aus CAliMERO Sek I zeigt, dass der Einsatz von CAS nicht notwendigerweise zu schlechteren Leistungen in rechnerfreien Tests führen muss wie bei Einsatz von GTR (Pinkernell 2010). Untersuchungen in Thüringen bestätigen diese Einschätzung (Schmidt et al. 2009).

In einem Nachfolgeprojekt ab Sommer 2010 soll der Zusammenhang eines kompetenzorientierten Unterrichts mit Technologieeinsatz und mathematischen Grundwissen genauer untersucht werden. Hierzu werden bewährte Methoden zur Unterstützung der langfristigen Verfügbarkeit aus CAliMERO I weiterentwickelt und eine konzeptuelle und inhaltliche Präzisierung jenes „Grundwissens an der Schnittstelle Schule-Hochschule“ im Sinne der obigen Ausführungen vorgenommen. Der Einsatz dieser Methoden erfolgt in Oberstufen der niedersächsischen Projektschulen aus CAliMERO I, Kontrollgruppen werden nun auch aus anderen Bundesländern rekrutiert.

Literatur

Bruder, R.; Ingelmann, M. (2009): CAliMERO aus Sicht der Forschenden. Der Mathematikunterricht, Heft 4, 13-19

Bruder, R.; Greefrath, G.; Kramer, J.; Pinkernell, G. (2010): Schnittstelle Schule-Universität. Beiträge zum Mathematikunterricht

Knospe, H. (2009): Mathematik an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule - Probleme und Perspektiven. Hauptvortrag während der Herbstagung des Arbeitskreises Mathematik und Informatik der GDM, Soest 25. bis 27. September 2009

Nägerl, H., Becker, H., Harten, H.-U., Schulte, H.-D., Zerbst, J. (1973): Über die Schwierigkeiten der Studienanfänger in Medizin im Umgang mit der Mathematik. Didaktik der Mathematik, 2, 143-157

Pinkernell, G. (2009): „Wir müssen das anders machen“ - mit CAS funktionales Denken entwickeln. Der Mathematikunterricht, Heft 4, 37-44

Pinkernell, G; Bruder, R. (2010) Teaching With CAS and Supporting Basic Skills: First Concluding Results from 'CAliMERO', erscheint in den Proc. 34rd Conf. of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education. Belo Horizonte, Brazil: PME

Eva-Maria PLACKNER, Bamberg

Leistungsmessung im Mathematikunterricht der Grundschule - eine Stichprobe

Die Planung und Durchführung von Leistungserhebungen ist eine der zentralen Aufgaben von Lehrkräften. Darüber, wie der gesetzliche Bestimmungsrahmen ausgeschöpft und in der Praxis tatsächlich umgesetzt wird, ist verhältnismäßig wenig bekannt. In einer schriftlichen Befragung standen daher folgende Zielfragen im Vordergrund: Wie werden im Mathematikunterricht der Grundschule Leistungen der Kinder konkret ermittelt? Wie kommt insbesondere die Zeugnisnote zustande?

1. Hypothesen der Untersuchung

Das Design des Fragebogens basiert auf folgenden drei zentralen Hypothesen:

(1) *Leistungserhebung im Mathematikunterricht findet fast ausschließlich in schriftlicher Form statt.*

Neben den klassischen schriftlichen Klassenarbeiten spielen andere Formen der Leistungserhebung, wie die mündliche (z.B. Beiträge zum Unterrichtsgeschehen) oder auch die praktische (z.B. Bauen von Würfelgebäuden nach Bauplan) eine eher untergeordnete Rolle.

(2) *Aufgabenstellungen in Klassenarbeiten sind im Wesentlichen nicht informativ, offen und prozessbezogen* (vgl. Sundermann, Selter (2006) 74 f.).

Während bei informativen Aufgaben die Vorgehensweise bei der Bearbeitung relevant ist, findet der Lösungsweg bei den nicht informativen Aufgaben keine Beachtung. Offene Aufgaben sind gekennzeichnet durch variable Ergebnisse, sowohl in Bezug auf unterschiedliche mögliche Resultate als auch in Bezug auf die Wahlmöglichkeit von unterschiedlichen Teilaufgaben. Im Gegensatz dazu sind geschlossene Aufgaben nicht variabel hinsichtlich der Ergebnisse. Bei prozessbezogenen Aufgaben werden auch prozessbezogene Kompetenzen wie das Entdecken oder das Darstellen angesprochen, während in nicht prozessbezogenen Aufgaben lediglich Wissen und Fertigkeiten abgeprüft werden.

(3) *Neue Wege des fördernden, individualisierenden Umgangs mit den Leistungen der Kinder haben sich in der Praxis noch nicht durchgesetzt.*

Bereits 2003 formulierten Sundermann und Selter in ihren fünf Leitideen, dass die Leistungen der Kinder kompetenzorientiert beobachtet und angemessen beurteilt werden sollen. Leistungen müssen außerdem zieltransparent herausgefordert, differenziert festgestellt und lernförderlich rückgemeldet werden (vgl. Sundermann, Selter (2003) 121 ff.).

2. Design der Untersuchung

Zur Überprüfung dieser Hypothesen und um die übergeordneten Fragestellungen zu erhellen wurde ein Fragebogen für Lehrkräfte konzipiert. Die Items lassen sich den folgenden drei Themenfeldern zuordnen:

- Einstellung zur Mathematik: Um Informationen darüber zu erhalten, welche Sichtweise bei Lehrkräften auf die Fachwissenschaft Mathematik vorherrscht, wurde eine Auswahl der Items von Grigutsch et al. (1998) zu den Beliefs über Mathematik in den Fragebogen integriert.
- Einstellung zu pädagogischen Fragestellungen: Zunächst sollte erfragt werden, ob eher ein rezeptives oder ein konstruktives Verständnis von Mathematiklernen geteilt wird. Hierzu konnte auf Items aus einem Fragebogen von Rakoczy et al. (2005) zurückgegriffen werden. Diese Items wurden ergänzt durch Eigenentwicklungen zu den oben beschriebenen neuen Wegen zu einem fördernden, individualisierenden Umgang mit den Leistungen der Kinder.
- Selbstauskünfte zu Form und Gestaltung der Leistungsfeststellung: Die Items dieser Gruppe zielten zum einen darauf ab, Auskünfte über die tatsächlich praktizierten Formen der Leistungserhebung zu erhalten, aber auch, etwas über die dabei abgeprüften Inhalte zu erfahren. Ebenso wurden die Quellen der verwendeten Aufgaben und das Adaptionsverhalten auf die jeweilige Prüfungssituation hin erfragt.

Diese durch den Fragebogen erhobene Selbstauskunft der Lehrkräfte wurde in einer zweiten, parallel dazu verlaufenden, Untersuchungsschiene durch die Analyse von Klassenarbeiten der Befragten ergänzt.

3. Durchführung der Untersuchung

Im Juli 2009 fand eine schriftliche Gesamtbefragung aller im Schulamtsbezirk Nürnberg-Stadt tätigen Grundschullehrkräfte statt. Im Schuljahr 2008/09 gab es dort 702 Grundschulklassen. Insgesamt wurden 193 ausgefüllte Fragebögen zurückgeschickt, was einer Rücklaufquote von 27,5 % entspricht. Das ist für diese Art der postalischen Befragung ein äußerst positiver Rücklauf. Ebenso positiv ist die Tatsache, dass fast die Hälfte der Lehrkräfte auch selbst eingesetzte Klassenarbeiten mit einreichten. Die Stichprobe besteht zu 86% aus Lehrerinnen. Lediglich 12% der Befragten haben weniger als fünf Jahre Schulpraxis, 25% blicken auf 5 - 10 Jahre Schulpraxis zurück und 35% haben bereits mehr als 20 Jahre an der Schule unterrichtet. Somit handelt es sich hinsichtlich der Geschlechterverteilung und des Dienstalters um eine repräsentative Stichprobe.

Bei der Verteilung des Rücklaufs auf die einzelnen Jahrgangsstufen ergibt sich eine quasi Vierteilung der Stichprobe. Lediglich im Anfangsunterricht liegt eine leichte Verschiebung zugunsten der ersten Klasse vor.

4. Ergebnisse der Untersuchung

Sowohl bei den Fragen zu den Beliefs über Mathematik als auch zum Lernen der Mathematik zeigt sich in den Selbstauskünften der Lehrkräfte ein ähnliches Muster: Eine annähernde Normalverteilung ergibt sich bei den Aussagen zu einer eher schematischen und formalen Sicht der Mathematik, die von einem Teil der Lehrkräfte eher abgelehnt, von einem anderen Teil der Lehrkräfte eher angenommen werden. Diese Verteilung verschiebt sich deutlich auf die Seite der Zustimmung bei den Aussagen zu einem Anwendungsbezug beziehungsweise zu einer prozessorientierten Sicht der Mathematik. Diese werden nur äußerst selten abgelehnt und es wird auf breiter Basis zumindest tendenzielle Zustimmung ausgedrückt. Das gleiche Bild zeigt sich auch bei der geäußerten Auffassung vom Wesen des mathematischen Lernprozesses. Während die Aussagen zu einem stark rezeptiven Verständnis sowohl fast normalverteilt auf Zustimmung als auch auf Ablehnung stoßen, werden die Aussagen zu einer konstruktiven Auffassung von keiner der Lehrkräfte vollständig abgelehnt, sondern erfahren lediglich graduell unterschiedlich große Zustimmung.

Die Auskünfte der Lehrkräfte konnten die Hypothese (1) hinsichtlich der Bedeutung der unterschiedlichen Formen der Leistungserhebung bestätigen. Im Durchschnitt werden demnach 64% der Zeugnisnote in Mathematik durch den Mittelwert der Klassenarbeitsnoten bestimmt, mündlich erhobene Leistungen gehen mit 27% in die Zeugnisnote mit ein und lediglich 9 % der Jahresnote werden durch praktisch erbrachte Leistungen bestimmt. Bei einem differenzierteren Blick auf die einzelnen Jahrgangsstufen lässt sich feststellen, dass die schriftlichen Leistungserhebungen stetig an Bedeutung gewinnen (von 52% in der 1. Klasse Anstieg bis auf 70% in der 4. Klasse). Durch diese hohe Gewichtung der Klassenarbeiten scheint ein genauerer Blick auf die Inhalte und Gestaltung dieser Arbeiten gerechtfertigt.

89 der Befragten stellten Klassenarbeiten zur genaueren Analyse zur Verfügung und es konnten somit insgesamt 254 Klassenarbeiten ausgewertet werden. Diese Arbeiten wurden analog zum im COACTIV-Projekt beschriebenen Vorgehen zunächst in Hauptaufgaben unterteilt, die dann in einem weiteren Schritt in einzelne Analyseeinheiten aufgeteilt wurden. Die so gewonnenen 7834 Analyseeinheiten wurden den jeweils abgeprüften

Inhaltsbereichen des Lehrplanes zugeordnet und hinsichtlich der Aufgabendimensionen von Sundermann/Selter (2006) beschrieben.

Es zeigt sich eine Diskrepanz zwischen den tatsächlich eingesetzten Aufgaben und den geäußerten Ansichten der Lehrkräfte über das Wesen der Mathematik sowie über das konstruktive Verständnis vom Mathematiklernen. Der in den Einstellungen zum Ausdruck gebrachte Prozessaspekt und Anwendungsbezug der Mathematik sowie die Möglichkeit, sich mathematisches Wissen selbst zu erarbeiten und eigenes ideenreiches und problemlösendes Vorgehen darstellen zu können, lässt sich in den Prüfungsaufgaben nicht einmal ansatzweise wiederfinden. Obschon die allgemeinen mathematischen Kompetenzen in der Definition der Bildungsstandards mit Hilfe der Konkretisierungen in der Analyse sehr großzügig interpretiert wurden, lassen sich prozessbezogene Kompetenzen wie das Kommunizieren, Argumentieren und Darstellen lediglich in einem verschwindend geringen Teil der Aufgaben feststellen. Die Aufgabenstellungen bestätigen des Weiteren auch Hypothese (2), da sie nur in seltenen Fällen eine rudimentäre Offenheit aufweisen und kaum informativ sind.

Diese Diskrepanz zwischen Anspruch und Wirklichkeit, die Hypothese (3) bestätigt, wird auch von einem Teil der Befragten zum Ausdruck gebracht und als problematisch empfunden. Es stellt sich die Frage, ob eine gewisse Veränderung initiiert werden kann, indem Konzeptionsmöglichkeiten offener, informativer und prozessbezogener Leistungsaufgaben aufgezeigt werden. In einem nächsten Schritt wird daher eine Intervention geplant, in deren Rahmen die Lehrkräfte in Fortbildungsveranstaltungen für einen anderen Umgang mit den Leistungen der Kinder sowie andere Aufgabenstellungen in Klassenarbeiten gewonnen werden sollen.

Literatur

Sundermann, B., Selter. C. (2003). Leistung im Mathematikunterricht. In M. Baum, H, Wielpütz (Hrsg.), Mathematik in der Grundschule (S. 121-136). Seelze: Kallmeyer.

Sundermann, B., Selter. C. (2006). Beurteilen und Fördern im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Scriptor, 74-106.

Jordan, A., Neubrand, M. (2006). Klassifikationsschema für Mathematikaufgaben. Dokumentation der Aufgabenkategorisierung im COACTIV-Projekt. Berlin: Max-Planck-Institut für Bildungsforschung.

Grigutsch, S., Raatz, U., Törner, G. (1998) Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. In: *Journal für Mathematikdidaktik 19 (98) 1,* 3-45.

Rakoczy, K., Buff, A., Lipowski, F. (2005) Dokumentation der Erhebungs- und Auswertungsinstrumente zur schweizerisch-deutschen Videostudie "Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis". Teil 1: Befragungsinstrumente. Frankfurt a. M.: Deutsches Institut für Internationale Pädagogische Forschung.

Melanie PLATZ, Landau, Engelbert NIEHAUS, Landau

Kooperatives Problemlösen von SchülerInnen mit besonderen mathematischen Begabungen und Lehramtsstudierenden

Ziel dieser Voruntersuchung ist es, Unterschiede im Bereich des Problemlösens von Schülerinnen und Schülern (SuS) mit besonderen mathematischen Begabungen im Vergleich zu Lehramtsstudierenden aufzuzeigen. Die Universität Koblenz-Landau, Campus Landau, bietet SuS mit besonderen mathematischen Begabungen die Gelegenheit eines betreuten Frühstudiums in konventionellen universitären Lehrveranstaltungen. Zielgruppen sind dabei SuS der Gymnasialen Oberstufe, sowie der Sekundarstufe I, die gemeinsam mit Lehramtsstudierenden an mathematischen Problemen arbeiten. Im Wintersemester 2009/2010 besuchten die SuS mit besonderer mathematischer Begabung die Vorlesung Kryptologie. Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung wurden Frühstudierende und Studenten verglichen, besonders in Bezug auf Problemlösestrategien. Beschreibung des Vorgehens bei der Bearbeitung von Übungen zur Vorlesung durch die SuS bzw. StudentInnen, sowie die schriftlichen Lösungswege dieser wurden dazu gegenübergestellt. In diesem Zusammenhang sollen erste Hypothesen aufgestellt werden, welche mathematischen Vorkenntnisse für den erfolgreichen Abschluss der Veranstaltung notwendig sind, zum anderen wird beabsichtigt erste Folgerungen für die weitere Konzeption der Lehrveranstaltung Kryptologie zu ziehen.

1. Vorlesung zur Kryptologie im Wintersemester 2009/2010

In diesem Semester nahmen sechs Schüler und drei Schülerinnen mit besonderer mathematischer Begabung und drei Studenten und drei Studentinnen an der Vorlesung zur Kryptologie teil. Die Kryptologie gliedert sich in Kryptographie und Kryptoanalyse. Die Kryptographie ist die Wissenschaft, die sich damit befasst, Methoden zur Verheimlichung von Nachrichten zu entwickeln. Die Kryptoanalyse hingegen versucht chiffrierte Botschaften ohne bekannten Schlüssel zu dechiffrieren. In dieser Veranstaltung wurden zunächst symmetrische Algorithmen behandelt. Sender und Empfänger haben dabei den gleichen Schlüssel. Es wurden sowohl Transpositionschiffren (z.B. Gartenzaunchiffre) als auch Substitutionsalgorithmen (z.B. Cäsar-Verschlüsselung) besprochen. Diese Verschlüsselungsalgorithmen sind allerdings problemlos durch eine Häufigkeitsanalyse mit Hilfe des jeweiligen Sprachprofils durch einen Angreifer zu entschlüsseln. Um dem entgegenzuwirken, wurden Polyalphabetische Verschlüsselungsverfahren entwickelt, die ebenfalls in der Veranstaltung besprochen wurden (z.B. Verschlüsselung mit Zufallsexperimenten, Homophone Chiffrierung). Auch die Verschlüsselung beliebiger digitaler Daten wurde thematisiert. Darüber hinaus wurden noch asymmetrische Algorithmen untersucht. Dabei haben Sender und Empfänger unterschiedliche Schlüssel. Besonderes Interesse galt dabei dem RSA-Algorithmus, ein Public-Key-Verfahren, das auf dem Problem aufbaut, dass die Faktorisierung einer großen Zahl sehr aufwändig ist.

2. Übungsaufgaben, Beiträge zur Vorlesung und Prüfung

Begleitend zur Vorlesung wurden den SuS und StudentInnen Übungsaufgaben zur Verfügung gestellt. Obwohl die Bearbeitung dieser freiwillig war, wurden sie von fast allen TeilnehmerInnen regelmäßig gelöst. Die Bearbeitungszeit betrug, außer beim ersten Übungsblatt, eine Woche. Die Aufgaben wurden meist in Einzel- oder Partnerarbeit gelöst, obwohl auch eine Bearbeitung in Gruppen erlaubt war. Studierende und SuS kooperierten nur selten bei der Erledigung der Aufgaben. Das erste Übungsblatt wurde innerhalb der Vorlesung bearbeitet, d.h. die TeilnehmerInnen hatten 90 Minuten Zeit, um eine Kryptoanalyse an einem chiffrierten Text durchzuführen. Der Verschlüsselung lag dabei kein Algorithmus zugrunde, jeder Buchstabe des deutschen Alphabets wurde zufällig einem anderen zugeordnet und beim Verschlüsseln durch diesen ersetzt. Zur Lösung dieser Aufgabe wurde den TeilnehmerInnen das Sprachprofil der deutschen Sprache an die Hand gegeben. Nur zwei Schülern gelang es, die Aufgabe innerhalb der Vorlesung zu lösen. Die restlichen SuS baten darum, diese noch nicht aufzulösen, um weiter daran arbeiten zu können. In der folgenden Veranstaltung hatten fast alle SuS die korrekte Lösung erarbeitet. Aus dem zweiten Übungsblatt werden im Folgenden drei Aufgaben herausgegriffen. Die erste Aufgabe, zur Vererbung der Bijektivität einer Abbildung, war Gegenstand der Lehrveranstaltung, da die umkehrbar eindeutige Verschlüsselung eindeutige Dechiffrierbarkeit für den Empfänger garantiert. Diese Aufgabe hat nur eine Schülerin gelöst, obwohl sie den StudentInnen bekannt war. Dabei war auffällig, dass die Formelsprache der Schülerin sogar fast korrekt war, denn auch diese ist für die SuS neu. Des Weiteren wurde eine Aufgabe zu Beweistechniken gestellt, bei der durch Wahrheitstafeln die Äquivalenz von drei Aussagen verifiziert werden sollte. Diese war ebenfalls neu für die SuS und bekannt für die StudentInnen. Dennoch wurde sie von einigen StudentInnen unvollständig oder falsch gelöst. Eine Schülerin hingegen, löste sie vorbildlich und erfand, über die Fragestellung hinaus, noch ein Beispiel dazu. Außerdem wurde eine Aufgabe bearbeitet, die von p-adischen Stellenwertsystemen handelte. Dabei sollten Zahlen sowohl aus dem Dezimalsystem in andere Stellenwertsysteme (z.B. Dual-, Oktal-, Hexadezimalsystem), als auch umgekehrt umgerechnet werden. Diese Aufgabe war für alle TeilnehmerInnen der Veranstaltung neu. Auffällig war, dass alle SuS sehr motiviert gegenüber dieser Aufgabe eingestellt waren und sie korrekt lösten. Nur ein Teil der StudentInnen hat selbige überhaupt versucht zu bearbeiten. Innerhalb der Vorlesung wurde die Verschlüsselung digitaler Daten behandelt, u.A. von Bildern, d.h. digitalen Fotografien. Um ein Foto zu chiffrieren war die Idee der SuS, ein zweites Foto über das zu verschlüsselnde zu legen. Diese Idee stellt sich als unvorteilhaft heraus, da beide Fotos erkennbar bleiben. Dennoch haben die SuS ein Verfahren selbst entdeckt, mit dem Bilder überlagert werden können bzw. in Videos Überblendungen realisiert werden können. Die Wertschätzung solcher Vorschläge bietet zahlreiche Möglichkeiten Mathematik und Informatik zu verbinden. Aus dem letzten Übungsblatt wird eine Aufgabe zur Kryptoanalyse des RSA-Algorithmus herausgegriffen. Bekannt waren die verschlüsselte Botschaft und der öffentliche Schlüssel. Diese Aufgabe war sowohl für die SuS als auch für die StudentInnen eine Transferaufgabe. Zur Lösung musste u.A. in der Modulorechnung effizient hohe Potenzrechnung beherrscht werden. Korrekt gelöst wurde diese Aufgabe wieder nur durch eine Schülerin. Am Ende der Veranstaltung fand eine 20-minütige mündliche Prüfung statt. Daran nahmen vier Schüler und eine Schülerin, sowie ein Student und eine Studentin teil. Bestanden haben alle SuS und ein Student. Den Studierenden aus den Altstudiengängen fehlte noch ein fachwissenschaftlicher Leistungsnachweis, den sie bisher in anderen konventionellen Lehrveranstaltungen noch nicht erwerben konnten. Dies relativiert das Bild für das Abschneiden der Lehramtsstudierenden. Die SuS erreichten in dieser Prüfung mittelmäßige Noten, da sie sich innerhalb der Lehrveranstaltung die Formelsprache und auch Beweistechniken erst aneignen mussten.

4. Fazit

In diesem Semester wurden zum ersten Mal SuS aus der 8. Jahrgangsstufe für ein Frühstudium zugelassen, um Grenzen der Förderung zu untersuchen und erste Erfahrungen in einer Lehrveranstaltung Kryptologie zu sammeln. Es hat sich gezeigt, dass auch diese SuS eine universitäre Lehrveranstaltung bestehen können und die Vorkenntnisse zum Ver- und Bestehen in der Kryptologie ausreichen können. Allerdings sollte der ikonischen Veranschaulichung von Beweisideen aus der Algebra und Zahlentheorie ein besonderer Stellenwert eingeräumt werden, an dem sich die formale Struktur der Beweise orientiert. Ein erfolgreicher Abschluss der SuS aus der Klassenstufe 8 erlaubt allerdings keine Rückschlüsse auf den erfolgreichen Abschluss in anderen Lehrveranstaltungen (z.B. Lineare Algebra, Analysis). Unterschiede zwischen den SuS und StudentInnen in Bezug auf Problemlösestrategien waren im Hinblick auf Motivation, Ehrgeiz und Kreativität festzustellen. Die SuS arbeiteten während der Vorlesung, im Vergleich zu den StudentInnen, sehr gut mit und trugen mit kreativen Beiträgen zur Veranstaltung bei. Ursache dafür könnte sein, dass die SuS die Mitarbeit von der Schule gewöhnt sind und in der Vorlesung keine Angst davor haben, fehlerhafte Beiträge zu liefern. Besonders Transferaufgaben standen die SuS ehrgeiziger und motivierter als die StudentInnen gegenüber. Die Übungsaufgaben wurden von den SuS vollständiger bearbeitet als von den StudentInnen, d.h. jede einzelne Frage wurde explizit beantwortet oder es wurden sogar noch selbst erfundene Aufgaben zu diesem Thema bearbeitet. Die StudentInnen setzten stellenweise bei ihren Lösungsvorschlägen einiges als „offensichtlich" oder „bekannt" voraus, beantworteten dadurch aber die Fragestellungen nicht vollständig. Die Veranschaulichung algebraischer und zahlentheoretischer Zusammenhänge, die für die SuS konstruktive Beiträge zur Lehrveranstaltung ermöglichte, waren für StudentInnen keine Hilfe, um ein Bestehen der Lehrveranstaltung zu erreichen. Für die weitere Konzeption der Lehrveranstaltung Kryptologie kann nun gefolgert werden, dass eine verstärkte Kooperation zwischen SuS und Lehramtstudierenden nur dann erreicht werden kann, wenn die Studierenden als Mindestvoraussetzung ein gutes fachliches Verständnis der Inhalte besitzen und die gleiche Motivation bei der Bearbeitung der Aufgaben vorliegt, wie bei den SuS. Spezielle betreute Übungsphasen, in denen Tandems aus SuS und StudentInnen gemeinsam die Übungsaufgaben lösen, muss Ausgangspunkt der Lehr-Lernumgebung sein, die Hilfen für SuS und didaktisch-analytische Lernumgebungen für die Lehramtsstudierenden bietet. Mit einer didaktischen Zielsetzung innerhalb einer fachlichen Lehrveranstaltung könnten die Studierenden erste Erfahrungen zu Problemlösekompetenzen von SuS mit besonderer mathematischer Begabungen sammeln und Konsequenzen für die Differenzierung des eigenen Unterrichts ableiten. Eine solche Analyse des Lernprozesses der SuS sollte schriftlich in Form eines Protokolls festgehalten werden. Außerdem wäre es möglich, die Veranstaltung, die momentan als Vorlesung gehalten wird, in Form eines Seminars stattfinden zu lassen. Die TeilnehmerInnen der Veranstaltung könnten in Gruppen eingeteilt werden, die Probleme aus dem Themengebiet der Kryptologie bearbeiten und ihre Ergebnisse am Ende der Veranstaltung präsentieren.

Literatur

Beutelspacher, A. (2005). *Kryptologie.* Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH.

Tücke, M. (2005): *Schulische Intelligenz und Hochbegabung für (zukünftige) Lehrer und Eltern.* Münster: LIT Verlag (Osnabrücker Schriften zur Psychologie; Bd. 9).

Vock, M.; Preckel, F.; Holling, H. (2007): *Förderung Hochbegabter in der Schule.* Göttingen: Hogrefe-Verlag.

HERBERT PODLOGAR, Universität Münster

Das Projekt Mathe-Meister: Entwicklung eines effizienten Tests zur Erfassung mathematischer Basisanforderungen verschiedener Berufsgruppen

1. Einführung

Qualifizierte Mitarbeiter werden für Betriebe in Zukunft die wichtigste Ressource im internationalen Wettbewerb sein. Trotzdem weisen viele Interessierte an Meisterlehrgängen vor Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der Schulmathematik auf, obwohl mathematische Grundkenntnisse unverzichtbare Voraussetzungen in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind. Das vom BMBF geförderte Projekt Mathe-Meister entwickelt für verschiedene Berufsfelder internetbasierte Tests, mit deren Hilfe sich Interessenten an Meisterlehrgängen effizient prüfen können, ob sie die benötigten Basiskenntnisse in Mathematik besitzen.

Die Entwicklung der Tests verläuft in mehreren Phasen. Diese Phasen können durch Arbeitspakete und darin erarbeitete Meilensteine wiedergegeben werden. Abbildung 1 stellt den Entwicklungsprozess schematisch dar. Im Folgenden werden die einzelnen Entwicklungsphasen näher erläutert und durch zugehörige Resultate veranschaulicht.

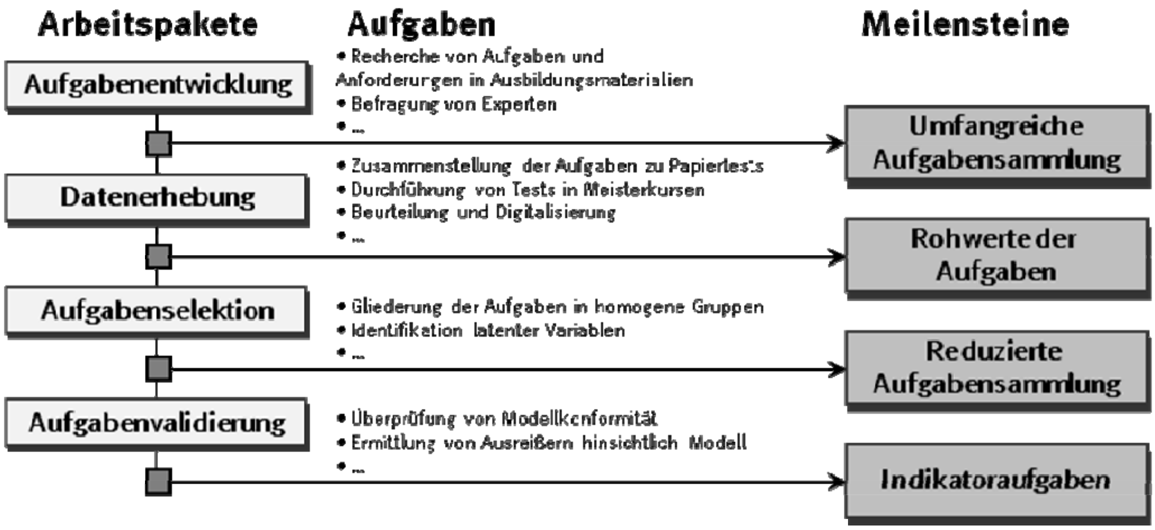


Abbildung 1: Phasen-Meilensteindiagramm zur Testentwicklung

2. Aufgabenentwicklung und Datenerhebung

Ausbildungsgänge mit dem Ziel eines Industrie- bzw. Handwerksmeisters sind in verschiedene Lernfelder gegliedert, die zum einen fachspezifische und zum anderen betriebswirtschaftliche Inhalte umfassen. In diesen Lernfeldern werden an vielen Stellen mathematische Methoden verwendet, die den Teilnehmern bereits in der Schule und der Ausbildung vermittelt wurden; sie werden daher von Ausbildern in der Regel vorausgesetzt.

Um die mathematischen Anforderungen zu Beginn eines Meisterkurses zu extrahieren, müssen die dazugehörigen Lehrinhalte untersucht werden. Hierzu haben wir zunächst die einzelnen Rahmenlehrpläne analysiert. Hier wurden diejenigen Lernfelder extrahiert, in denen mathematische Kenntnisse zur Bearbeitung benötigt werden. Anschließend wurden die Inhalte dieser Lernfelder anhand von Standardlehrwerken näher untersucht; hier konnten nun konkrete Aufgaben extrahiert werden. Die Aufgaben wurden anschließend zusammen mit Ausbildern zugehöriger Gewerke überprüft; hierzu wurden Interviews sowie eine Onlineumfrage durchgeführt.

Im Rahmen der Analysen haben wir eine Sammlung von 228 Items zu den Oberthemen Arithmetik, Algebra, Geometrie, Bruchrechnung sowie Dreisatz und Prozentrechnung entwickelt. Um die Eignung der einzelnen Items zu überprüfen, wurden Rohwerte von Probanden der Zielgruppe benötigt. Hierzu haben wir die Items zunächst in 3 Papiertests zusammengefasst, die dann von insgesamt 454 Meisterschülern bearbeitet wurden. Die Analyse der durchgeführten Tests, die Selektion besonders aussagekräftiger Aufgaben und die testtheoretische Validierung werden in den folgenden zwei Abschnitten beschrieben.

3. Aufgabenselektion

Mithilfe statistischer Analysen sollten homogene Itemgruppen identifiziert werden. Hier liegt die Annahme zu Grunde, dass zur Bearbeitung dieser homogenen Items jeweils eine spezielle latente Variable ausschlaggebend ist. Des Weiteren sollten Aufgaben identifiziert werden, die besonders gut eine solche latente Variable repräsentieren. Diese Aufgaben werden im Folgenden auch Indikatoraufgaben genannt. Zur Identifizierung homogener Items und der Indikatoraufgaben wurde das Verfahren der Faktorenanalyse eingesetzt. Mithilfe dieses Verfahrens konnten Items eines Oberthemas in homogene Gruppen untergliedert werden (vgl. Bühner 2006, S. 180); die Items dieser Gruppen lassen sich jeweils auf eine latente Variable zurückführen, die mehr inhaltliche Details enthalten als durch die Oberthemen vorgegeben. Durch die Faktorenanalyse können zudem Aufgaben identifiziert werden, die zu allen weiteren Aufgaben nur gering korrelieren und deshalb gesondert betrachtet werden müssen (vgl. Bühner 2006, S. 196).

Die beschriebene Vorgehensweise erläutern wir im Folgenden an Aufgaben des Oberthemas Bruchrechnung. Tabelle 1 enthält Items zur Bruchrechnung samt den zugehörigen Lösungsquoten; die Items stammen aus einem der drei Papiertests. Die Lösungsquoten liegen zwischen 31 und 65 Prozent. Die Faktorenanalyse liefert für die Aufgabenzusammenstellung 2 homogene Aufgabengruppen, die zudem inhaltlich sehr gut übereinstimmen. Das Verfahren identifiziert hoch korrelierende Aufgaben zur Addition und Subtraktion – diese bilden den ersten Faktor. Den zweiten Faktor bilden die Items zur Multiplikation und Division mit Brüchen. Tabelle 1 gibt in den letzten beiden Spalten die Ladungen der Items auf den beiden Faktoren wieder. Als Indikatoraufgaben bieten sich aufgrund der Faktorenanalyse diejenigen Items an, die besonders hoch auf dem jeweiligen Faktor laden. Die Extraktion der Faktoren wurde mithilfe der Hauptkomponentenanalyse durchgeführt; zur Rotation der Faktoren wurde die Varimax-Methode verwendet (vgl. Bühner 2006, s. 194 ff)

Tabelle 1: Phasen-Meilensteindiagramm zur Testentwicklung

Aufgabe	Nicht bearbeitet	Falsch gelöst	Richtig gelöst	Faktor 1	Faktor 2
$\frac{4}{7}+2=$	22,7%	16,6%	60,7%	,927	-,117
$2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$	30,7%	28,2%	41,1%	,808	,019
$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=$	33,1%	19,6%	47,2%	,802	,114
$3-\frac{1}{4}=$	28,2%	7,4%	64,4%	,727	,069
$\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=$	33,1%	20,9%	46,0%	,062	,831
$\frac{9}{10}:\frac{3}{5}=$	41,1%	16,6%	42,3%	-,090	,908
$\frac{3}{11}:2=$	50,3%	18,4%	31,3%	,073	,790

In Tabelle 2 werden die Kommunalitäten aufgeführt. Diese geben die durch alle extrahierten Faktoren aufgeklärte Varianz wieder (vgl. Bühner 2006, S. 186). Sie geben also an, wie gut die Faktoren das jeweilige Item erklären. Alle Items besitzen hohe Werte, werden also gut durch die Faktoren erklärt.

Die aufgeklärte Varianz durch die beiden Faktoren liegt bei sehr hohen 70,89 %. Die beiden Faktoren repräsentieren somit hinreichend alle Items.

Tabelle 2: Kommunalitäten der Items zur Bruchrechnung

	Anfänglich	Extraktion
$\frac{4}{7}+2=$	1,000	,742
$2\frac{1}{3}+\frac{2}{5}=$	1,000	,671
$\frac{6}{7}-\frac{2}{5}=$	1,000	,767
$3-\frac{1}{4}=$	1,000	,594
$\frac{8}{6}\cdot\frac{3}{2}=$	1,000	,756
$\frac{9}{10}:\frac{3}{5}=$	1,000	,734
$\frac{3}{11}:2=$	1,000	,698

4. Aufgabenvalidierung

Zur Validierung der identifizierten Aufgabenblöcke wurde das Rasch-Modell der Item Response Theory verwendet. Die Item Response Theory setzt das Antwortverhalten von Personen und die dahinterliegenden latenten Variablen in Beziehung (vgl. Rost 2004, S. 133). Das Rasch-Modell stellt diese Verbindung wie folgt her: Zur Lösung einer Aufgabe ist ein bestimmtes Persönlichkeitsmerkmal (Personenparameter) nötig, dessen individuelle Ausprägung die Lösungswahrscheinlichkeit für eine spezielle Aufgabe festlegt; die Schwierigkeit einer Aufgabe wird durch einen Itemparameter angegeben. Gilt das Rasch-Modell, können sowohl Items als auch Personen auf einer Skala dargestellt werden. Um eine Person auf der Skala einzuordnen, müssen vorher einige Aufgaben, die dem Raschmodell genügen, bearbeitet worden sein, so dass für die Person ein Personenparameter berechnet werden kann. Je höher die Zahl der bearbeiteten Items dieser Person ist, desto genauer ist der Personenparameter.

Ob das Rasch-Modell zutrifft, kann mit globalen sowie itemspezifischen Modelltests festgestellt werden – dabei werden gleichzeitig diverse Gütekriterien wie Skalierbarkeit, Eindimensionalität sowie die Item- und Personenhomogenität überprüft (Moosbrugger & Kelava 2007, S. 255). Für die Items zur Bruchrechnung ist der globale Pearson-χ^2-Test signifikant. Zudem sind mit dem Q-Index keine lokalen Modellverletzungen feststellbar. Die Items sind somit Rasch-skalierbar (vgl. Bühner 2006, S. 346 ff).

Das Rasch-Modell haben wir auf die einzelnen Oberthemen angewendet. Bearbeitet ein Teilnehmer eine Auswahl von Indikatoraufgaben eines Oberthemas, erlaubt das erzielte Ergebnis eine Aussage über die Fähigkeiten auf dem Oberthema, ohne das alle Items bearbeitet wurden.

5. Fazit

In den vorangegangen Abschnitten wurde das Vorgehen zur Entwicklung eines effizienten Tests zur Beurteilung von mathematischen Basiskompetenzen im Bereich der beruflichen Ausbildung vorgestellt. Mit der Faktorenanalyse und dem Rasch-Modell kamen zwei mächtige Methoden der Testtheorie zum Einsatz, die in unserem Fall gut einander ergänzen.

Literatur

Bühner, M. (2006). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion.* München: Pearson Studium.

Moosbrugger, H., Kelava, A. (2007). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Heidelberg: Springer Verlag.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. Göttingen: Verlag Huber.

Benjamin RAWE, Berlin

Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung – Ein Förderprojekt für die Hauptschule

„*Deutschlands Unternehmer suchen mit Nachdruck Lehrlinge – doch immer öfter erfolglos. Im vergangenen Jahr blieben 17.000 Stellen unbesetzt. Nun entbrennt eine Debatte über die Ausbildungsfähigkeit der Jugendlichen: Sind Schulabgänger zu dumm?*“ (www.spiegel.de vom 04.03.2010).

1. Hintergründe und Ziele

Diese und ähnliche Schlagzeilen geisterten Anfang März 2010 durch die deutsche Presselandschaft – gemeint ist die mangelnde Ausbildungsfähigkeit von jungen Schulabgängern, gerade von Hauptschülern, wie es ersten Verlautbarungen des Berufsbildungsbericht 2010 zu entnehmen ist. Die mangelnde Ausbildungsreife ordnet sich in den Gesamtkontext des Fachkräftemangels ein, der seit einigen Jahren die deutsche Wirtschaft belastet. Einer innovativen, technikorientierten Wirtschaft fehlt es an geeignetem Fachpersonal, was sich sowohl an fehlenden Ingenieuren als auch an fehlenden Facharbeitern in den technischen Berufsfeldern bemessen lässt (vgl. u.a. Koppel & Plünnecke 2009).

Auf der anderen Seite der Medaille stehen die schlechten Ausbildungschancen von Hauptschulabsolventen. Obwohl der Fachkräftemangel existent ist, können Hauptschüler nur selten ihre Ausbildungswünsche verwirklichen. Zudem herrscht ein asymmetrisches Berufswunschbild bei Hauptschülerinnen und Hauptschülern: während sich Hauptschülerinnen Ausbildungen in sozialen Berufsfeldern wünschen, wollen ihre männlichen Mitschüler Berufe erlernen, die technisch geprägt sind (BMBF 2008a, S.18). Im Gegensatz zu den Berufswünschen stellt sich jedoch ein völlig konträres Berufsbild ein, wenn man die tatsächlich realisierten Berufsausbildungen betrachtet. Hier erlernen sie die weniger technischen und sozialen Berufe aus dem Handwerk oder dem Dienstleistungssektor (BMBF 2008b, S. 134).

Nicht nur die schlechten Berufsperspektiven ihrer Schüler, sondern auch ihre bildungspolitischen und sozialen Rahmenbedingungen belasten den Ruf der Hauptschule und damit auch den ihrer Schüler. Die Hauptschule verschwindet somit nach und nach aus der deutschen Bildungslandschaft, mit ihr aber nicht die Hauptschüler. Sind finden sich nun mehr an sogenannten Realschulen plus (Rheinland-Pfalz), Sekundarschulen usw. wieder.

In Anbetracht dieser Hintergründe wird in der Arbeitsgruppe Didaktik der Mathematik – geleitet durch Prof. Dr. Brigitte Lutz-Westphal – an der Freien Universität Berlin ein Programm entwickelt, um junge Hauptschüler bei der Realisierung von Berufswünschen zu unterstützen. Dabei wird der Fokus vor allem auf diejenigen Schüler gelegt, die an technischen Berufsausbildungen interessiert sind. Diese Berufsausbildungen sind stark mathematisch geprägt, weshalb ein mathematisches Förderprogramm entwickelt werden soll. In diesem Programm sollen gezielt mathematische Basiskenntnisse, wie sie in technischen Berufsausbildungen verlangt werden, gefördert und ausgebaut werden. Dabei steht nicht nur die Förderung mathematischer Fähigkeiten und Fertigkeiten im Vordergrund, sondern auch die allgemeine Steigerung des Interesses an technischen Berufen – vor allem auch bei Hauptschülerinnen.

Zur Entwicklung des Förderprogrammes ist eine enge Zusammenarbeit mit ausbildenden Betrieben, Hauptschulen, Berufsschulen und Verbänden wie der Industrie- und Handelskammer geplant. Die Entwicklung des Projektes soll in einem Lehrerfortbildungsprogramm mit den entsprechenden Materialien münden.

2. Projektbeschreibung

Das Projekt „Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung" wird in drei Phasen gegliedert und befindet sich derzeit in der Entwicklungsphase. In der ersten Phase findet die Vorbereitung für das Förderprojekt statt, welches in der zweiten Phase durchgeführt und in der dritten Phase weiterentwickelt wird.

In der ersten Phase sollen Kontakte zu verschiedenen Partnern aufgebaut werden. Als derzeitige Projektpartner können die Hauptschule Damme, die Firma ZF-Lemförder, die Industrie- und Handelskammer Oldenburg und der Arbeitgeberverband für die Metall- und Elektroberufe Gesamtmetall genannt werden. Das Förderprogramm wird an der Hauptschule Damme ausgetragen und mit dortigen Mathematik- und Techniklehrern gemeinsam entwickelt. Die Firma ZF-Lemförder stellt das technische Know-How und Materialien für verschiedene Berufsausbildungen zur Verfügung, an denen mathematische Aktivitäten handlungsorientiert ermöglicht werden können. Dabei werden exemplarisch die Berufsausbildungen zum Mechatroniker, zum Verfahrensmechaniker für Kunststoff- und Kautschuktechnik, zum Verfahrensmechaniker sowie zum technischen Produktdesigner fokussiert. Die IHK und Gesamtmetall stehen beratend zur Seite und geben vor allem Unterstützung bei der Vergabe von Zertifikaten und Urkunden an teilnehmende Schüler. Parallel findet in der ersten Phase die Auswahl mathematischer Inhalte statt, die im Rahmen des Förderprogramms zum Tragen kommen sollen. Dazu werden bestehende Hauptschulcurricula und auch die Rahmenlehrpläne der oben genannten Berufsausbildungen ausgewertet.

Gleichermaßen werden die Erfahrungen von Ausbildern, Berufsschullehrern und Auszubildenden durch Interviews erhoben. Desweiteren werden grundsätzliche Vorschläge der Bundesagentur für Arbeit, Wirtschaftsverbände oder dem BMBF berücksichtigt (vgl. u.a. Bundesagentur für Arbeit 2009).

Die zweite Phase stellt die Entwicklung und Durchführung des Förderprogrammes dar. In dieser Phase werden die maßgeblichen Entscheidungen über die für das Förderprogramm zu verwendenden Inhalte, Methoden, technischen Tools und didaktischen Schwerpunkte getroffen. Darüber hinaus soll das Programm gleichzeitig an der Hauptschule Damme exemplarisch erprobt werden.

In der dritten Phase des Projektes wird der Erfolg des Förderprogrammes bewertet, indem der Leistungsfortschritt der teilnehmenden Schüler analysiert wird. Dazu werden die von den Schülern im Rahmen des Programmes aufgezeigten Leistungen mit den Erfahrungen ihrer Lehrer abgeglichen. Auf der Grundlage der Erfahrungen aus der exemplarischen Erprobung können inhaltliche, methodische und didaktische Vorgaben innerhalb des Programmes verbessert werden und in einem Lehrerfortbildungsprogramm münden.

3. Förderprogramm

Das Förderprogramm wird erstmals im ersten Halbjahr des Schuljahres 2010/2011 an der Hauptschule Damme erprobt. Zielgruppe sind Schüler der 9. und 10. Jahrgangsstufe mit Interesse an technischen Berufsausbildungen. Im Nachmittagsunterricht wird den interessierten Schülern im Rahmen von 90-minütigen AG´s einmal in der Woche die Möglichkeit geboten, an berufsrelevante mathematische Aktivitäten teilzunehmen. Insgesamt soll eine projektartige Lernumgebung geschaffen werden, in denen sich die Schüler anhand von originalen Situationen aus den o.g. Berufsfeldern handlungsorientiert mathematisch betätigen können. Dazu sollen auch Werkzeuge, Materialien und Messinstrumente aus den jeweiligen Berufen Verwendung finden. Die zu entwickelnden Situationen sollen zu mathematischer Aktivität anregen und Schülern die Verbindung von Technik und Mathematik verdeutlichen.

Die konkreten Sachsituationen erhalten eine modulare Struktur, so dass die von Wirtschaft, Bundesagentur für Arbeit uvm. geforderten Inhalte, Basiskenntnisse und mathematischen Kompetenzen aufgegriffen und gefördert werden können. Hierzu zählen insbesondere die Bereiche Raum und Form, in denen Schüler verschiedene Messverfahren beherrschen sollen, unterschiedliche Größen einschätzen, berechnen und mit diesen handeln sollen.

Weiter werden Aspekte aus den Bereichen der Prozent- und Bruchrechnung gefördert, was etwa an einigen Feldern der Finanzrechnung sowie der Logistik zu thematisiert wird. Weitere wichtige mathematische Aktivitäten in technischen Berufsausbildungen erfordert die Thematisierung der Leitidee Daten und Zufall. Hierbei steht in vielen Berufsausbildungen die Gewinnung, Aufbereitung, Verarbeitung und Auswertung von unterschiedlichen Daten im Vordergrund (vgl. u.a. Bundesagentur für Arbeit 2009).

4. Ausblick

Durch das Projekt „Mit Mathematik fit für die Berufsausbildung“ wird Hauptschülern die Möglichkeit gegeben, innerhalb eines Förderprogramms sich im Bereich Mathematik gezielt für technische Berufsausbildungen zu stärken. In enger Verknüpfung mit technischen Aktivitäten erfahren die Schüler den mathematischen Gehalt von technischen Berufsausbildungen.

Durch das Förderprojekt können Schüler wichtige Bereiche ihrer Ausbildungsreife stärken und somit ihre Chancen auf eine technische Berufsausbildung verbessern. Für einen weiteren Schritt in Richtung der nachhaltigen Verbesserung von Ausbildungschancen von Hauptschülern im Bereich der technischen Berufsausbildungen müssen auf Dauer neben der Förderung von mathematischen und technischen Kompetenzen auch Inhalte aus den Bereichen Informatik und Naturwissenschaften aufgegriffen werden. Das sogenannte MINT-Feld repräsentiert Berufe, die durch Mathematik, Informatik, Naturwissenschaft und Technik gekennzeichnet sind. Gerade in diesem Feld fehlt es an Fachkräften und gerade für dieses Feld müssen Hauptschüler gefördert werden.

Literatur

Bundesagentur für Arbeit (Hrsg.)(2009). Kriterienkatalog zur Ausbildungsreife. Nachdruck März 2010. www.arbeitsagentur.de.

Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.)(2008a). Von der Hauptschule in die Berufsausbildung und Erwerbsarbeit – Ergebnisse des DJI-Übergangspanel. Bonn und Berlin.

Bundesministerium für Bildung und Forschung (Hrsg.)(2008b). Berufsbildungsbericht 2008. Bonn und Berlin: Waxmann.

Koppel, O. & A. Plünnecke (2009): Fachkräftemangel in Deutschland - Bildungsökonomische Analyse, politische Handlungsempfehlungen, Wachstums- und Fiskaleffekte. In: Analysen – Forschungsberichte aus dem Institut der deutschen Wirtschaft Köln. Köln: Deutscher Institutsverlag.

Ott, F. (2010). Firmen klagen über Gammel-Azubis. www.spiegel.de. Aufruf: 04.03.2010.

Julia REIBOLD, Darmstadt, Regina BRUDER, Darmstadt

Ein binnendifferenzierendes Unterrichtskonzept für die Sekundarstufe I im Projekt MABIKOM: Unterrichtsbeispiele und erste Evaluationsergebnisse

1. Zum Projekt MABIKOM

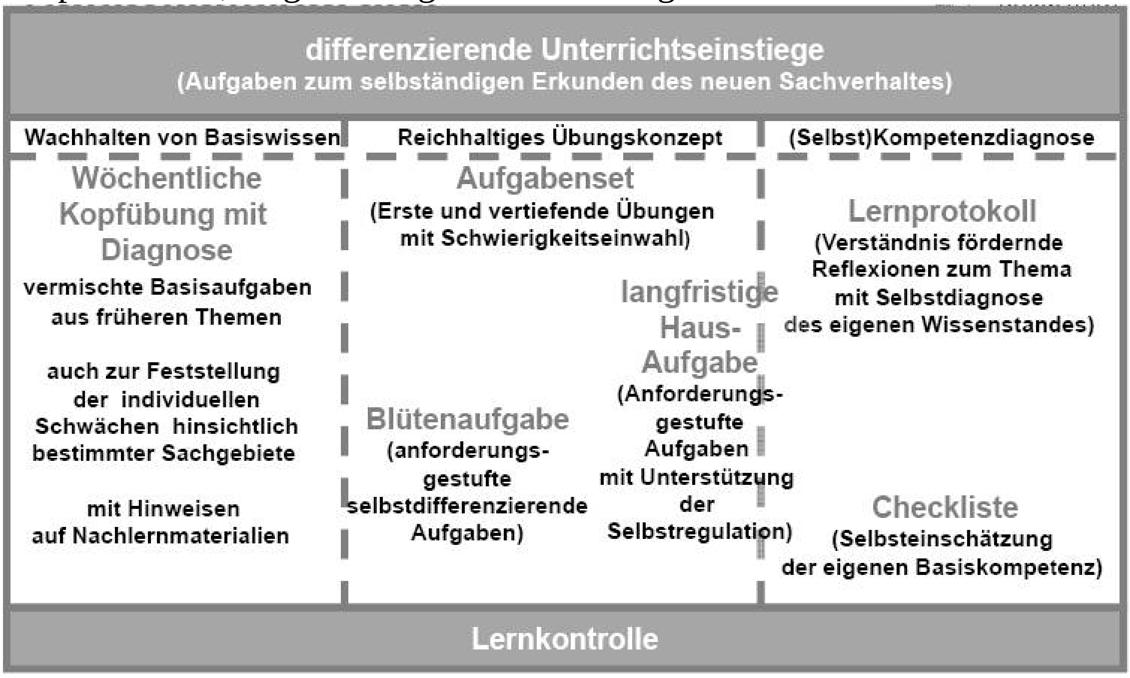
Das Projekt MABIKOM (MAthematische BInnendifferenzierende KOmpetenzentwicklung in einem mit neuen Technologien unterstützten Mathematikunterricht) entwickelt und erprobt ein alltagtaugliches Unterrichtskonzept für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht an Gymnasien von Klasse 7 bis 10 in Niedersachsen. Die effektive Arbeitsform des Projektes in Form von vierteljährlichen mehrtägigen Treffen der beteiligten Lehrkräfte bietet die Möglichkeit, das entwickelte Unterrichtskonzept mit Unterrichtsmaterialien zu konkretisieren, direkt im Schulbetrieb zeitnah zu erproben und über längere Zeiträume weiter zu entwickeln (Reibold & Bruder 2009). Helmke (2009) betont, dass „*das Prinzip der Binnendifferenzierung zunächst einmal nur ein Konzept ist, das es im Unterrichtsalltag kleinzuarbeiten und auszubuchstabieren gilt*“ und nennt als eine der Gelingensbedingungen der Binnendifferenzierung die Verfügbarkeit von geeigneten Lernmaterialien. Das Projekt MABIKOM stellt die Realisierbarkeit von Binnendifferenzierung im Unterrichtsalltag in den Mittelpunkt und kann langfristig auch zur Weiterentwicklung von Lehrbüchern in Richtung Binnendifferenzierung beitragen.

2. Das Unterrichtskonzept MABIKOM

Es gibt Vorschläge für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht (Krippner 1992, Sylvester 1997, Bruder 2008, Hußmann & Prediger 2007, Hirt&Wälti 2008), aber bisher kein ganzheitliches geschlossenes Unterrichtskonzept, das bereits existierende Lösungsvorschläge für binnendifferenzierenden Mathematikunterricht praxistauglich zusammenbringt und das in einer längsschnittlichen Felduntersuchung erprobt und evaluiert wurde.

Das Ziel des Einsatzes der innerhalb des Unterrichtskonzeptes von MABIKOM gebündelten binnendifferenzierenden Maßnahmen ist es, möglichst viele Schüler/innen kognitiv und motivational anzusprechen und effektiv Lernfortschritte für alle zu erreichen. Eine individuelle Förderung und Forderung von Lernenden erfolgt u.a. durch effektive Formen der Selbsteinschätzung, durch offene Aufgabenformate und durch Wahlmöglichkeiten aus schwierigkeitsgestuften Aufgabenpools, deren Konstruktion auf den Aufgabentypologien nach Bruder (2008) basiert. Darüber hinaus wird im Rahmen des Unterrichtskonzeptes das explizite Wachhalten von

grundlegendem Wissen und Können durch speziell organisierte regelmäßige Wiederholungen intendiert.
Wie die für das Unterrichtskonzept ausgewählten binnendifferenzierenden Elemente innerhalb einer Unterrichtseinheit verortet und miteinander verknüpft wurden, zeigt die folgende Abbildung.

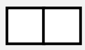
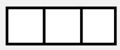
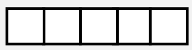


3. Das selbstdifferenzierende Aufgabenformat „*Blütenaufgabe*“

Als verbreiteter Ansatz zur Binnendifferenzierung gelten offene und somit selbstdifferenzierende Aufgaben und Arbeitsaufträge (Ulm 2004, Prediger & Hußmann 2007). Es wird inzwischen deutlich, dass eine einseitige Orientierung an offenen Aufgabenformaten und entsprechenden Organisationsformen des Unterrichts nicht allen Lernenden in ihrer kognitiven und affektiven Vielfalt gerecht wird (vgl. auch Zech 1998). Z.B. beschreiben Publikationen überwiegend aus dem englischsprachigen Raum (Gregory 2005) den Einfluss von unterschiedlichen Lernstilen auf das Lernen und Lehren und versuchen insbesondere bekannte Abneigungen bzw. Präferenzen mancher Schülerinnen und Schüler für offene Aufgaben und entsprechende Unterrichtsmethoden zu erklären. Die sogenannten „*Blütenaufgaben*“ als wichtige Komponente des Unterrichtskonzeptes MABIKOM, beachten unterschiedliche Voraussetzungen der Lernenden bzgl. ihrer mathematischen Kompetenzen, sind jedoch nicht ausschließlich an einen speziellen Aufgabentyp (offen/geschlossen) gebunden. Es handelt sich hier um ein spezielles Aufgabenformat, das aus mehreren Teilaufgaben mit spezifischen Funktionen besteht. In einer strukturierten Form werden vielseitige Lernaufforderungen (Aufgaben) zu einem gemeinsamen Kontext mit un-

terschiedlichen kognitiven Anforderungsniveaus zusammengeführt und es bestehen für die Lernenden Wahlmöglichkeiten bzgl. Anzahl und/oder Einstiegslevel der Aufgabenbearbeitung (Bruder et al. 2008).
Eine Blütenaufgabe hat einen niedrig schwelligen Einstieg, d.h. die erste Teilaufgabe soll ein solches Anforderungsniveau haben, welches für alle Lernenden bewältigbar erscheint. Die zweite Teilaufgabe soll einen Blickwinkelwechsel bei der Anwendung mathematischer Werkzeuge im gleichen Kontext erfordern und damit sowohl zu einem vertieften Verständnis dieser Werkzeuge beitragen als auch auf eine flexible Anwendung der Werkzeuge hinwirken. In weiteren zwei bis drei Teilaufgaben soll das kognitive Anforderungsniveau schrittweise steigen bzgl. Komplexität (Mehrschrittigkeit) und Ausführungsaufwand (vgl. zu einem Modell objektiver Anforderungsstrukturen von Mathematikaufgaben Bruder 1981). Mathematisierungsanforderungen können ebenfalls hinzukommen. Parallel dazu können die Fragestellungen zunehmend offener angelegt werden, um unterschiedliche Zugangswege und Bearbeitungsniveaus zu ermöglichen. Blütenaufgaben haben den Anspruch von einem mathematischen Grundverständnis ausgehend auch einen kreativen Umgang mit mathematischen Inhalten zu fördern. Ein solcher Aufbau einer Aufgabe lässt sich (nach Schupp 2003) mit dem Wachsen einer blühenden Pflanze vergleichen, die sich schrittweise in verschiedene Richtungen entwickelt. Dadurch erklärt sich der Name „*Blütenaufgabe*". Ein für alle Teilaufgaben gleicher Sachzusammenhang vermeidet unnötige Ablenkungen und fördert zugleich das Verständnis des in den Aufgaben angelegten mathematischen Inhalts.

<u>Beispiel einer Blütenaufgabe</u>
(15min – freie Wahl des Einstiegs)
Mit Streichhölzern sind Ketten mit Quadraten gelegt.
a) Beschrifte und vervollständige die Tabelle.
b) Wie viele Quadrate kann man aus 49 Streichhölzern legen?
c) Stelle einen Term für die Anzahl der Streichhölzer auf (k – Anzahl der Quadrate).
d) Lege mit Streichhölzern eine andere Figurenkette und formuliere dazu einen Term.

	1	4
	2	7
	3	10
	5	16

4. Ausgewählte Evaluationsergebnisse aus dem ersten Projektjahr

Ziel der Evaluation im MABIKOM-Projekt ist eine Überwachung der Leistungsentwicklung der Lernenden unterschiedlicher Leistungsgruppen im Laufe des Projektes und eine Beobachtung der Veränderung der subjektiven Schülerwahrnehmungen des Mathematikunterrichtes (Mathematikbild, Lernmotivation, Lernverhalten u.ä.). Als Analyseinstrumente wurden u.a.

explorative Korrelationsanalysen von ordinalen Daten aus den Schülerfragebögen und diskreten numerischen Daten aus den Tests mit geeigneten Signifikanztests gewählt. Darüber hinaus wird eine qualitative und quantitative Analyse von Zusammenhängen zwischen dem Einsatz von binnendifferenzierenden Methoden und der Schülerwahrnehmung der Stunde auch in Hinsicht auf unterschiedliche Leistungsgruppen durchgeführt. Wir konnten z.B. zeigen, dass die Lernenden aller Leistungsgruppen die im Unterrichtskonzept angelegten Möglichkeiten zum Entdeckenden Lernen im Laufe des ersten Projektjahres signifikant stärker als zuvor wahrgenommen haben.

Nach Sylvester (1997) ist eine angemessene Binnendifferenzierung dadurch ausgezeichnet, dass keine Leistungsgruppe erheblich größeren Leistungszuwachs im Vergleich zu den anderen Gruppen aufweist, was als stärkere Entwicklung auf Kosten anderer Gruppen interpretiert werden könnte. Bis jetzt verläuft die Entwicklung aller Leistungsgruppen etwa gleich stark und überdurchschnittlich, so dass wir vermuten, dass alle drei Leistungsgruppen durch das Unterrichtskonzept MABIKOM eine angemessene Förderung erhalten.

Literatur

Bruder, R. (1981). Zur quantitativen Bestimmung und zum Vergleich objektiver Anforderungsstrukturen von Bestimmungsaufgaben im Mathematikunterricht.- In: *Wiss. ZS d. PH Potsdam*, 25(1981)1, S.173-178.

Bruder, R., Leuders, T., Büchter, A. (2008). *Mathematikunterricht entwickeln. Bausteine für kompetenzorientiertes Unterrichten.* Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor

Gregory, G.H. (2005). *Differentiating Instruction with Style. Aligning Teacher and Learner Intelligences for Maximum Achievement.* Thousand Oaks

Helmke, A. (2009). *Unterrichtsqualität und Lehrerprofessionalität. Diagnose, Evaluation und Verbesserung des Unterrichts.* Klett/Kallmeyer

Hirt, U., Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*, Seelze-Velber: Kallmeyer/Klett

Krippner, W. (1992). *Mathematik differenziert unterrichten.* Schroedel Schulbuchverlag

Hußmann, S., Prediger, S. (1986). Mit Unterschieden rechnen – Differenzieren und Individualisieren. In: *Praxis der Mathematik in der Schule*, Heft 17, s.1-8. Aulis Verlag

Reibold, J., Bruder, R. (2009). MABIKOM-ein Projekt zur binnendifferenzierenden Unterrichtsgestaltung in der Sekundarstufe I. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, WTM Münster

Schupp, H. (2003). *Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht (Lernmaterialien)*, Franzbecker

Sylvester, T. (1997). *Vorschläge und Modelle zur inneren Differenzierung.* In: mathematik lehren, Heft 89, s.4-9.

Zech, F. (1998). *Grundkurs Mathematikdidaktik.* Weinheim und Basel: Beltz Verlag

Marlene REIMANN, Frankfurt am Main

Kindergartenkinder „be-greifen“ geometrische Objekte in Spiel- und Erkundungssituationen

Beobachtet man Kindergartenkinder in freien Spielsituationen, so scheint der Bereich der Geometrie für sie besonders relevant zu sein: Bei ihrem Spiel mit Bauklötzen, Eisenbahnen oder Kartenspielen setzen sie sich unbewusst und ohne direkte Instruktion mit geometrischen Aspekten wie Formen, Größe und räumlicher Orientierung auseinander. GINSBURG ET AL. (2008, S. 95) sprechen in diesem Zusammenhang von einem hoch strukturierten und organisierten geometrischen Wissen. Aber auch aus einer mathematikdidaktischen Perspektive ist dem Bereich der Geometrie eine besondere Bedeutung – gerade für die mathematische Denkentwicklung im Kindergartenalter – beizumessen: *„Geometry is grasping space [...] that space in which the child lives, breathes and moves. The space that the child must learn to know, explore, conquer, in order to live, breathe and move better in it.“* (FREUDENTHAL in SARAMA/CLEMENTS 2008, S. 79)

Geometrische Denkentwicklung in der Kindheit –Was können Kinder?

So setzen sich viele Kinder bereits vor dem Schuleintritt in freien Spielsituationen und in Gesprächen mit den Eltern mit geometrischen Inhalten auseinander. Wichtige mathematische Aspekte dabei sind Raumorientierung, der Umgang mit geometrischen Objekten, die Auseinandersetzung mit Abbildungen und Modellen und der Vergleich von geometrischen Größen. Für den Vortrag wurde der Teilaspekt „Umgang mit geometrischen Objekten“ herausgegriffen und genauer betrachtet. Im Umgang mit geometrischen Objekten können Kinder bereits prototypische Darstellungen von Formen und Körpern identifizieren (vgl. z.B. CLEMENTS ET AL. 1999, S. 196 ff.). So ist es ihnen beispielsweise möglich einen Kreis, ein Quadrat oder ein Dreieck als solche zu identifizieren und mit der korrekten Bezeichnung zu benennen. Im Folgenden wird daher davon ausgegangen, dass bereits Kindergartenkinder über mathematische Kompetenzen im Allgemeinen sowie geometrische Fähigkeiten im Besonderen verfügen.

Theoretischer und analytischer Rahmen – das Van-Hiele-Modell als Versuch einer Beschreibung der geometrischen Denkentwicklung

Die Theorie zur kindlichen Auseinandersetzung mit geometrischen Objekten wird von zwei Forschungsrichtungen beeinflusst: Zum einen ist damit der Ansatz nach PIAGET gemeint, der biologisch determinierte, geistige Entwicklungsphasen des geometrischen Denkens auf Basis von Akkomodation fokussiert (PIAGET 1967). Zum anderen geht es um den mehr mathematikdidaktischen Ansatz nach VAN HIELE, der auf der Beschreibung von ‚levels of thinking' in einem instruktionalen Kontext basiert (VAN HIELE 1984; vgl. auch FRANKE 2009). Für die Ausführungen hier wird der Ansatz von VAN HIELE genauer beschrieben. VAN HIELE definiert fünf Denkebenen[1], die der Entwicklung geometrischen Denkens inhärent sind und von Kindern durchlaufen werden: Auf *Denkebene 0 (räumlich-anschauungsgebundenes Denken)* erfassen Kinder räumliche Beziehungen und geometrische Objekte in ihrer unmittelbaren Umgebung. Sie erfassen die Objekte ganzheitlich auf Basis ihrer topologischen Eigenschaften und ihrer visuellen Wahrnehmung. Auf dieser Denkebene ist der Umgang mit Material von zentraler Bedeutung. *Denkebene 1 (geometrisch-analysierendes Denken)* zeichnet sich durch zunehmendes Analysieren der Eigenschaften geometrischer Objekte seitens der Kinder aus. Die Eigenschaften werden durch Handlungserfahrungen und genaues Betrachten wahrgenommen. Auf *Denkebene 2 (geometrisch-abstrahierendes Denken)* können Kinder schließlich auch die Eigenschaften verwandter geometrischer Objekte identifizieren und zueinander in Beziehung setzen. Jede der hier vorgestellten Denkebenen zeichnet sich durch spezifische Eigenheiten aus, die der Abgrenzung voneinander dienen. VAN HIELE betont an dieser Stelle auch die besondere Rolle der Sprache, da sich jede Denkebene durch eigene linguistische Symbole auszeichnet.

Methodische Überlegungen und Forschungsfokus

Der im Vortrag vorgestellte Teilaspekt des eigenen Forschungsprojekts ist Teil der Längsschnittstudie erStMaL (early Steps in Mathematics Learning). Innerhalb des Projekts soll die mathematische Denkentwicklung von Kindern im Kindergartenalter und im Übergang zur Grundschule erforscht werden. Dazu werden den Kindern in der gewohnten Umgebung des Kindergartens mathematische Spiel- und Erkundungssituationen angeboten, in denen sie sich im Austausch mit anderen Kindern mit verschiedenen mathematischen Bereichen beschäftigen. Diese Situationen werden videografiert und ausgewählte Sequenzen transkribiert sowie mit videogestützten, bildlichen Stillfolgen verknüpft. Die hier im Zentrum stehende Frage lautet: Wie bringen Kindergartenkinder ihre Vorstellungen, Ideen und Konzepte zu geometrischen Objekten durch Sprache und Handlung zum Ausdruck? Zur Auswertung werden die Transkripte sequenzanalytisch betrachtet, d.h. die Einzeläußerungen werden sequenziell, angelehnt an konversationsanalytische Verfahren ausgewertet und zusammenfassend interpretiert.

[1] Im Folgenden werden lediglich die ersten drei Denkebenen genauer erläutert, da gerade sie im Zusammenhang mit dem hier eingenommenen Forschungsfokus und dem vorzustellenden Fallbeispiel von Interesse sind.

Um zu einer konzeptuellen Ausdeutung hinsichtlich kindlicher Konzepte in der geometrischen Denkentwicklung zu gelangen, werden die Denkebenen nach VAN HIELE hinzugezogen und als deduktive Kategorien an das Material herangetragen.

Erste Analyseergebnisse in einem Fallbeispiel

Im Fallbeispiel beschäftigen sich Sina und Victoria (4;6 und 4;10 Jahre) mit verschiedenen, farbigen geometrischen Körpern aus festem Schaumstoff. Die relevanten geometrischen Körper wurden bestimmt und mit Namen belegt: ein roter Würfel wird als ‚Würfel', ein blauer Zylinder und ein gelber Kegel werden als ‚Kreisel' und eine rote Pyramide als ‚Cornflake' bezeichnet. Gegen Ende der Sequenz formuliert Victoria eine Zuordnung zwischen den oben beschriebenen geometrischen Körpern.

111			Victoria	Und die zu den da\ *fasst den Kegel auf den Zylindern kurz an*
112 113			Sina	Größer\ *schiebt ihren Kegel-Zylinderturm ein Stück zum Pyramiden-Würfelturm*
114			B	*zu FK 71* Warum gehören die denn zusammen/
115			Victoria	*zuckt kurz mit den Schultern* Weil- die
116 117		#	Sina	Das ist rot und rot\ *zeigt auf die Pyramide und auf den Würfel, fasst den Turm an, hebt beide Türme gleichzeitig in die Luft*
118 119 120 121			Victoria	Ja weil und guck- und das ist gehört zum Kreisel weil das ein Kreisel ist/ *zeigt auf den Kegel-Zylinderturm, nimmt beide dann an den Pyramiden-Würfelturm* und das gehört zu den Würfel weils- *dreht ihre Hand und zeigt erklärend ihre Handfläche*

Victoria betrachtet die Grundflächen der einzelnen Körper als ausschlaggebende Eigenschaften für die Formulierung ihrer Zuordnung, während Sina ein nicht im engsten Sinne mathematisches Kriterium (die Farbe) als Erklärung anführt. Victoria ordnet den Kegel den Zylindern zu, da beide eine kreisförmige Grundfläche haben und deshalb genau aufeinander passen. Entsprechendes gilt für den Würfel und die Pyramide. Für Kegel und Zylinder findet sie bereits Begrifflichkeiten, die ihre Zuordnung sprachlich unterstützen. Für den Würfel und die Pyramide ist dies nur bedingt möglich, da sie lediglich einen Begriff für den Würfel hat; die Pyramide kann sie nicht mit einem Begriff belegen. Dennoch scheint klar, dass sie sehr wohl erkennt, dass beide Körper die gleiche Grundfläche haben. An verschiedenen Stellen der vorgestellten Sequenz lassen sich Anknüpfungspunkte zu den Denkebenen nach VAN HIELE identifizieren: Die Mädchen operieren und äußern sich nicht nur auf Denkebene 0, sondern können die geometrischen Körper hinsichtlich ihrer Eigenschaften analysieren (Denkebene 1) und diese auch zueinander in Beziehung setzen (Denkebene 2), was in Victorias Zuordnung auf Basis der Grundflächen deutlich wird.

Zusammenfassung und Ausblick

An dem gewählten Beispiel zeigt sich, dass das Van-Hiele-Modell den komplexen Vorstellungen der Kindergartenkinder zu geometrischen Objekten nicht gerecht wird, da ihre Vorstellungen und Ideen über die lineare Beschreibung nach VAN HIELE hinausreichen. Um diesem Aspekt Rechnung zu tragen sind im eigenen Forschungsprojekt das Aufspüren und Beschreiben von „Meilensteinen“ der geometrischen Denkentwicklung von besonderer Bedeutung. Mit dem Begriff Meilensteine sind zentrale Punkte der Denkentwicklung gemeint, die nicht in einem linearen Stufen- oder Phasenmodell zu denken sind. Sie sind vielmehr auf einem Kontinuum zwischen Entwicklung und Interaktion und Materialitäten (soziale und materielle Umwelt) anzuordnen. Die Aspekte Sprache und Handlung sind bei der Identifikation solcher Meilensteine zentral, da sie das sind was die Kinder „zeigen“ und worüber auf vorhandene Vorstellungen, Ideen und Konzepte geschlossen werden kann. Da das Van-Hiele-Modell nicht genügt, um die geometrische Denkentwicklung adäquat zu beschreiben, werden in der weiteren Forschungsarbeit wichtige Ansätze aus der Theorie des Conceptual Change und der mathematischen Konzeptentwicklung integriert.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

Literatur

Clements, Douglas H. et al. (1999): Young Children's Concepts of Shape. In: Journal for Research in Mathematics Education, Jg. 30, H. 2, S. 192–212.

Franke, Marianne (2009): Didaktik der Geometrie in der Grundschule. 2. Aufl., [Nachdr.]. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl. (Mathematik Primar- und Sekundarstufe).

Ginsburg, Herbert P. et al. (2008): Mathematical Thinking and Learning. In: McCartney, Kathleen; Phillips, Deborah (Hg.): Blackwell Handbook of Early Childhood Development. Massachusetts.: Blackwell Publishers (Blackwell Handbooks of Developmental Psychology), S. 208–229.

Piaget, Jean (1967): The Child’s Conception of the World. London: Routledge &Kegan.

Sarama, Julie; Clements, Douglas H. (2008): Mathematics in the Early Childhood. In: Saracho, Olivia N.; Spodek, Bernard (Hg.): Contemporary Perspectives on Mathematics in Early Childhood Education. Charlotte: Information Age Publishing, S. 67–94.

van Hiele, Pierre M. (1984): The Child's Thought and Geometry. In: Fuys, David et al. (Hg.): English Translation of Selected Writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele, S. 243–252.

Roland RINK, Lüneburg, Torsten FRITZLAR, Halle

Zu Fähigkeiten von Grundschulkindern im Umgang mit Verhältnissen

Der Umgang mit Verhältnissen ist wesentlich für viele Bereiche des Alltags, aber auch der Schulmathematik. Für die Sekundarstufe denke man beispielsweise an die Bruch- oder Prozentrechnung, den Dreisatz, Proportionalität und Antiproportionalität, an die Ähnlichkeitslehre oder die Stochastik. Auch in der Grundschule gehen Lernende bereits – allerdings eher implizit und wenig systematisch – mit dem Verhältnisbegriff um (z. B. Maßstab, Zufallsgeneratoren).

Zu Fähigkeiten im Umgang mit Verhältnissen gibt es bereits umfangreiche Untersuchungen (z. B. HART, 1981; KARPLUS, 1983). Allerdings waren die beteiligten Schülerinnen und Schüler stets mindestens 12 Jahre alt. Mit PIAGET gibt es einen bedeutenden Entwicklungspsychologen, der jüngeren Kindern einen erfolgreichen Umgang mit Verhältnissen sogar vollständig abspricht. Uns scheint es deshalb eine wichtige Herausforderung, eine detaillierte Erkundung entsprechender Fähigkeiten bei Lernenden am Ende der (traditionellen) Grundschulzeit zu versuchen.

1. Theoretischer Rahmen

Eine mathematische Grundlegung des Verhältnisbegriffs ist auf verschiedene Arten möglich (z. B. STREHL, 1979). An dieser Stelle mag ein eher intuitiver Zugang genügen: Danach werden durch ein Verhältnis zwei Zahlen oder Größen (z. B. Längen, Gewichte, Zeitspannen) zueinander multiplikativ in Beziehung gesetzt.

Abhängig von der durch das Verhältnis beschriebenen Konstellation lässt sich zwischen verschiedenen (Verwendungs-) Typen von Verhältnissen unterscheiden. In der Literatur findet man häufig die folgende Differenzierung:

- Ist die beschriebene Konstellation durch eine Teil-Ganzes-Struktur gekennzeichnet, liegt ein *Teil-Ganzes-Verhältnis* dann vor, wenn sich eine Komponente des Verhältnisses auf einen Teil, die andere auf das Ganze bezieht. Teil-Ganzes-Verhältnisse sind grundlegend für die Bruch- und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- Entsprechend wird von einem *Teil-Teil-Verhältnis* gesprochen, wenn sich beide Komponenten auf Teile eines gemeinsamen Ganzen beziehen. Diese Verwendung von Verhältnissen ist im Alltag typisch.

- Wird eine Konstellation ohne Teil-Ganzes-Struktur durch ein Verhältnis beschrieben, findet sich in der englischsprachigen Literatur häufig der Terminus *„rate problem“*. Die Komponenten des Verhältnisses können dann demselben Größenbereich entstammen oder zu verschiedenen Bereichen gehören. Im zweiten Fall kommt es oft zu einer Reifikation der Relation (man denke beispielsweise an Geschwindigkeit, Dichte oder Druck).
- Ist eine Konstellation durch ein Zahlenverhältnis beschreibbar, kann die Frage nach dem *Grundverhältnis* – also dem Verhältnis mit den kleinstmöglichen natürlichen Zahlen als Komponenten – sinnvoll sein.

2. erste Ergebnisse einer kleinen empirischen Untersuchung

Der in einer Untersuchung zum Umgang mit Verhältnissen verwendete Kontext sollte Grundschulkindern bekannt, spracharm, wenig künstlich und unaufwändig sein. Besonders wichtig scheint uns darüber hinaus, dass er möglichst frei von weiteren Vorstellungen (beispielsweise zum Zufall oder zur Ähnlichkeit) ist, die in diesem Alter zu Verständnisschwierigkeiten oder zusätzlichen, das Umgehen mit Verhältnissen „überlagernden“ Anforderungen führen könnten. Zumindest für eine erste Erkundungsstudie haben wir deshalb ausschließlich auf Zahlenverhältnisse zurückgegriffen. Beispielsweise die in der folgenden Aufgabe beschriebene Situation – ein „rate problem“ – legte für alle beteiligten Viertklässler eine verhältnisbezogene Herangehensweise nahe: „Auf einem Sportfest gibt es ein Tauziehen zwischen Lehrern und Schülern. 3 Lehrer ziehen dabei so stark wie 6 Schüler.“

Aufgabe der Kinder war es nun, äquivalente Verhältnisse zu identifizieren (a) und zu konstruieren (b) (vgl. VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, 1991).

a) äquivalente Verhältnisse identifizieren: Den Viertklässlern wurden weitere Tauziehspiele der Form „x Lehrer gegen y Schüler“ vorgegeben; basierend auf der (dann doch etwas künstlichen) Annahme, dass alle Lehrer sowie alle Schüler gleich stark sind, waren die Paarungen mit einem äquivalenten Kräfteverhältnis auszuwählen.

b) äquivalente Verhältnisse konstruieren (eine Proportion vervollständigen): Den Viertklässlern wurden weitere Lehrergruppen der Form „x Lehrer“ vorgegeben, zu bestimmen waren passende Schülergruppen, sodass resultierende Kräfteverhältnisse äquivalent bzw. „die Tauziehspiele auch unentschieden“ sind.

Diese Unterscheidung scheint uns wichtig: Während ein Bearbeiter bei Aufgaben des Typs b) lediglich mit einer Relation umgehen und zu dieser fehlende Werte bestimmen muss (Missing-Value-Aufgaben; TOURNIAIRE & PULOS, 1985), sind bei Aufgaben vom Typ a) verschiedene Relationen involviert. Noch wichtiger wird dies bei Vergleichsaufgaben („Gewinnen die Lehrer oder die Schüler das Tauziehspiel?“), deren Einbezug in die Hauptuntersuchung geplant ist.[1]

Des Weiteren wurden die in den Aufgaben verwendeten Verhältnisse variiert. Vorgegeben wurden einfache (z. B. 1:2, 1:3) und „schwierigere“ Grundverhältnisse (z. B. 2:3, 3:5) sowie „erweitere“ Verhältnisse mit (z. B. 3:9) oder ohne (z. B. 6:10) Teilerbeziehung.
Auch die zu beurteilenden oder zu ergänzenden Verhältnisse wurden hinsichtlich verschiedener Aspekte variiert. Sollen beispielsweise zur oben beschriebenen Situation die Vorschläge „9 – …“, „6 – …“, „12 – …“ zu passenden Lehrer-Schüler-Paarungen ergänzt werden, wird das Vervielfachen des Ausgangsverhältnisses bzw. das Nutzen äußerer Verhältnisse nahegelegt. Vorschläge wie „1 – …“, „4 – …“, „11 – …“… erfordern dagegen anspruchsvollere Herangehensweisen.

Bisher konnten wir 20 Kinder aus verschiedenen vierten Klassen zweier Grundschulen in halbstandardisierten Einzelinterviews von 30 bis 40 Minuten Länge mit diesen und ähnlichen Aufgaben konfrontieren. Die Antworten der Kinder ließen – auch bei der hier vorgestellten Aufgabe – vielfältige Bearbeitungsstrategien erkennen:

Gleiche Differenz: Verhältnisse werden als äquivalent beurteilt, wenn die beteiligten Zahlen dieselbe Differenz besitzen. Möglicherweise ist den so urteilenden Kindern der multiplikative Zusammenhang in der beschriebenen Konstellation unklar. Gelegentlich gehen aber auch Kinder bei „schwierigen“ Verhältnissen auf diese Weise vor, die bei einfachen Verhältnissen oder Verhältnisreihen zu richtigen Ergebnissen kommen. Es könnte sich also auch um eine Ausweichstrategie handeln, die aufgrund fehlender mathematischer Möglichkeiten herangezogen wird.

Verdoppeln und Halbieren: Verhältnisse werden als äquivalent identifiziert, wenn sie sich durch Verdoppeln bzw. Halbieren ineinander überführen lassen.

Verdoppeln, Halbieren und Zusammensetzen: Die vorherige Strategie wird von einigen Kindern um das Zusammensetzen erweitert: Das Ausgangsverhältnis ist 2:3; 4 - …, 6 - … „Ich habe erst verdoppelt, dann wusste ich, wie viele Kinder so stark wir 4 Lehrer sind. Dann musste ich nur noch 2

---

[1] Da für die uns interessierende Altersgruppe kaum Vorerfahrungen vorliegen, haben wir bei den ersten Erkundungen auf mitunter sehr anspruchsvolle Vergleichsaufgaben zunächst verzichtet.

Lehrer und 3 Kinder mit 4 Lehrern und 6 Kindern zusammenrechnen und das war dann 6 Lehrer und 9 Kinder."

Inneres Verhältnis: Wenn es die Vorgaben ermöglichen (Teilerbeziehung), nutzen Kinder das innere Verhältnis: 1:2 – Ein Lehrer ist so stark wie zwei Schüler, die Anzahl der Lehrer muss immer verdoppelt werden.

Äußeres Verhältnis und Verhältnisreihe: Kinder nutzen äußere Verhältnisse (nicht nur Verdoppeln bzw. Halbieren) und bauen bei Bedarf eine Verhältnisreihe auf: 2:3 – 2 Lehrer sind so stark wie 3 Kinder, 4 Lehrer wie 6 Kinder, 6 Lehrer wie 9 Kinder, usw. „Die Lehrer sind immer die 2er Reihe und die Kinder immer die 3er Reihe.

Grundverhältnis: Ist das Ausgangsverhältnis „erweitert" (z. B. 4:6), bilden einige Kinder zunächst das Grundverhältnis und arbeiten mit diesem weiter.

Die Auswertung zeigte zudem, dass die Aufgaben von über 80% der Kinder richtig gelöst wurden.

Ob der geringen Stichprobe müssen diese Ergebnisse natürlich mit aller Vorsicht betrachtet werden. Dennoch macht es Mut zu sehen, welche vielfältigen Strategien Grundschulkinder beim Lösen von Verhältnisaufgaben anwenden. Dies deutet an, dass die absolute Aussage von PIAGET doch nicht gültig ist.

Ähnliches dachte sich wohl auch FREUDENTHAL wenn er schreibt: „Warum weiß die Mehrheit der 16jährigen nicht mit Verhältnissen Bescheid? Weil sie, wenn überhaupt, dieses **natürliche Phänomen** [Hervorhebung, R. R.; T. F.] zu spät erlernt haben und dann gleich in gebrauchsfertiger algorithmisierter Form." (FREUDENTHAL, 1983, S. 6)

Literatur

Freudenthal, H. (1983). Rechnen – gibt es das noch? *Mathematik lehren*, 1, 4 – 9.

Hart, Kathleen M. (1980): Secondary School-Children´s Unterstanding of Ratio an Proportion. Dissertation. Betreut von David Johnson. London. Chelsea College.

Heuvel-Panhuizen, M. van den (1991). Ration in special education. In L. Streefland, *Realistic Mathematics Education in Primary School*. Utrecht.

Karplus, Robert; Pulos, Steven; Karplus, Elizabeth K. (1983): Early adolescents' proportional reasoning on 'rate' problems. In: Educational Studies in Mathematics, H. 14, S. 219–233.

Strehl, R. (1979). *Grundprobleme des Sachrechnens*. Freiburg.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16* (2), 181-204

KLAUS RÖDLER, Frankfurt

Abstraktionsstufen der Zahl

Zahlen und Rechnen aus kulturhistorischer Perspektive

Wir sind gewohnt, Rechenvorgänge als ein Operieren mit Zahlen zu begreifen. Rechendidaktik scheint daher zwangsläufig mit der Entwicklung von Zahlverständnis zu beginnen. Zahlen werden dabei mit den Zahlzeichen und Zahlwörtern identifiziert, die somit didaktisch mit Sinn zu unterfüttern sind. Ein Blick in die Kulturgeschichte zeigt jedoch, dass es sich bei Zahlzeichen und Zahlwörtern vor allem um Kommunikationsmittel handelt, um ein Vokabular, das bestimmte Aspekte der Wirklichkeit beschreibbar werden lässt. Und an diesem Vokabular lässt sich eine Entwicklung der zunehmenden Verschlüsselung beobachten, die sich als zunehmende Abstraktion niederschlägt. Strukturbedürfnisse bestimmen zunehmend die Gestalt der Worte und Zeichen. Wenn wir diese historische Tatsache ernst nehmen, erkennen wir, dass Zahlen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau verstanden werden können und dass die *innere Zahl*', mit der ein Kind rechnet nicht notwendig die gleiche Struktur besitzt wie unsere *‚innere Zahl'*. Zwischen der *‚äußeren Zahl'*, mit der in der Klasse kommuniziert wird, und der *‚inneren Zahl'*, mit der ein Kind seinen Rechenvorgang faktisch steuert, ist daher zu unterscheiden. Dadurch bekommen wir neue Handlungsmöglichkeiten und gewinnen einen inklusiven Ansatz des Rechnens, der bis in den Bereich des Vorschulalters und bei Geistigbehinderten trägt.

Was ist eine Zahl? Was heißt ‚rechnen'?

Zahlen können in sehr unterschiedlicher Gestalt daher kommen. Sie können ihren Gehalt unterschiedlich verschlüsseln. Jeder erkennt unmittelbar den Wert von ‚III'. Diese Zahl, es sind die ältesten Zahlzeichen der Menschheit, zeigt voll und ganz ihren kardinalen Gehalt. Und sie verweist zugleich auf ihren Ursprung, nämlich einen durchgeführten Zählprozess. Zahlen entstehen ursprünglich als *‚analoge Abbildung'*.

An der ägyptischen Tausend (Lotusblume) oder der römischen Fünfzehn (XV) erkennen wir einen Abstraktionssprung. Hier wird die Zahl aus Wertebenen gebaut, Wertebenen, die sich in ihrer Unterschiedlichkeit jedoch noch sichtbar machen. Diese symbolischen Wertebenen erlaubten es, auch große Zahlräume erkennbar darzustellen. Erst sehr jung ist dagegen unser Positionssystem, das die kardinale Grundlage wie auch die Struktur nach dezimalen Wertebenen endgültig in Ziffern und Positionen versteckt, was im Unterricht zu den beobachtbaren Konsequenzen führt: Schwache Rechner verstehen Zehner und Hunderter als unterschiedliche Arten von Einern und statt mit reversiblen Wertebenen rechnen sie mit den als Einern verstandenen Ziffern. (23+34= 57, weil 2+3=5 und 3+4=7)

Unser Verständnis von Zahlen ist durch die Zahlreihe geprägt ist. Wir zählen mit Worten („Eins, Zwei, Drei, …") und schreiben mit abstrakten Zeichen (1, 2, 3, …). Mit diesen Worten und Zeichen fängt alles an. Und für nicht wenige Kinder hört es damit auch auf. Rechnen bleibt Zählen, ergänzt mit zunehmenden Tricks wie ‚vorne mit vorne' oder ‚1 davor' oder ‚0 dran' oder ‚Ich denke mir das untereinander.'

Die Zahl des Rechenanfängers ist also nicht dieselbe wie die des kompetenten Rechners. Zahlen und Rechenvorgänge sind nur auf der Oberfläche der Worte und Zeichen gleich. Im Innern sind sie völlig verschieden.

Kinder, die in die Schule kommen, können im Allgemeinen etwas zählen und der Unterricht knüpft genau da an. Der Unterricht bestärkt das Zahlreihenkonzept, anstatt das protoquantitative Wissen zu nutzen, das die Kinder ebenfalls mitbringen. *„72% der Vierjährigen, 81% der Fünfjährigen und 92% der Sechsjährigen zeigen ein unerschütterliches Verständnis der protoquantitativen Veränderungen der Teile-Ganzes-Beziehungen"*, schreiben Gerster/Schultz. Dagegen gelingt es rechenschwachen Kindern gerade nicht, Zahlen und Rechenvorgänge im Zusammenhang mit diesen protoquantitativen Schemata, das heißt in den Strukturen von Teile-Ganzen-Beziehungen zu sehen.[1] Unsere abstrakten Zahlen lösen offensichtlich eine massive Verunsicherung aus, die eine Anbindung an die vorhandenen protoquantitativen Schemata erschwert.

Ich glaube, eine Ursache dafür liegt genau darin, dass wir unsere Zahlen nicht als ein Kommunikationsmittel begreifen, als eine bestimmte Sprache für Alltagserfahrungen, sondern dass wir die Abstraktionen für das Eigentliche nehmen. Indem wir von der gesprochenen und geschriebenen Zahlreihe ausgehen, behandeln wir die Worte und Zeichen als Zahlen, obwohl sie nur eine Wort- bzw. Zeichenfolge sind. Damit ist das rechenschwache Kind von Anfang an auf der falschen Spur.

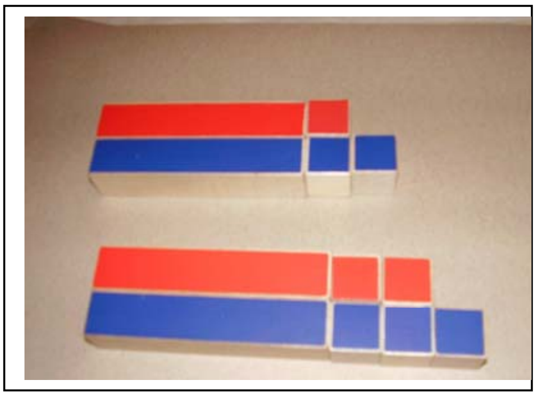
Didaktische Konsequenzen[2]

Statt mit der Zahlwortreihe sollten wir mit dem Bilden *konkreter Zahlen* beginnen. Dazu suchen wir in unserer Umwelt sinnvolle, (für die Kinder relevante) Zählanlässe. Dieses Zählen findet aber auf Steinzeitniveau statt, das heißt, wir bilden die analoge Abbildung nicht in erster Linie in die Zahlwortreihe ab, sondern in ein konkretes Zählmaterial (Würfel) und übersetzen die Anzahl als Zahlzeichen in Form von Strichlisten. Kardinalität, Invarianz, Seriation und Klassifikation sind damit von Anfang an greifbare Eigenschaften der so gebildeten Zahlen. Unsere Zahlworte und Zahlzeichen sind dagegen nur Kommunikationsmittel, die daran angebunden werden und diesen Gehalt aufnehmen. Wir versuchen nicht die ‚3' mit der Menge ‚III' zu verbinden. Die ‚III' ist uns keine Darstellung der ‚3', sondern die ‚III' ist selbst eine in der Wirklichkeit gefundene und durch analoge Abbildung entstandene Zahl, die in symbolischer Schreibweise *auch* das Zeichen ‚3' hat.

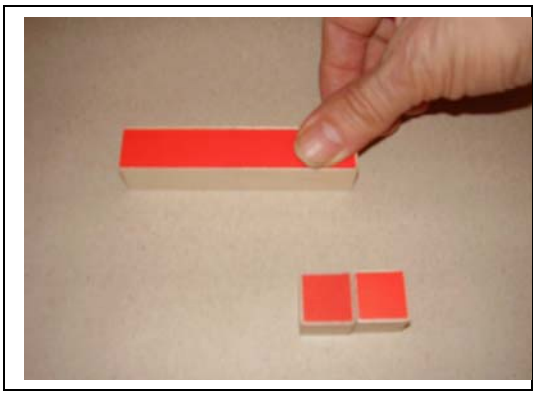
Rechnen im Anfangsunterricht wird zu einem *‚analogen Handeln mit konkreten Zahlen'*. Weil solchermaßen verstandenes Rechnen nur Handlungen nachspielt, die vom Alltag her protoquantitativ bekannt sind, können wir bereits in den ersten Schulwochen alle vier Grundrechenarten einführen. (Addieren heißt zusammenfügen. Subtrahieren heißt auseinanderziehen. Multiplizieren heißt mehrfach gleiches zusammenfügen. Dividieren heißt an eine bestimmte Anzahl von Kindern verteilen oder in gleiche Haufen aufteilen.) Nicht das Rechnen ist schwierig, sondern das Rechnen mit unseren Zahlen. Deshalb gilt es diese beiden Bereiche zu trennen, um den Bereich des Rechnens nicht mit dem Bereich der Zahlen zu behindern!

Das Rechnen mit *konkreten Zahlen* und der damit verbundene Verzicht auf den Primat der abstrakten Zahlreihe erlaubt es, Zahlen und Rechenvorgänge kardinal und damit vor allem im Blick auf deren innere Zusammenhänge und Strukturen kennen zu lernen. Operation-Gegenoperation, Teil und Ganzes tauchen automatisch als zu reflektierende Zusammenhänge auf. Gleichzeitig motiviert das Bedürfnis, gut wahrnehmbare Vorgänge zu haben, auf natürliche Weise Musterbildungen und die frühe Einführung einer ersten *konkreten Bündelung*, nämlich der Fünferstange.

Die Fünferstange als frühes Bündelungsobjekt hat drei zentrale Vorteile: Erstens lässt sie auch Zahlen über Vier spontan erkennbar werden. Zweitens erlaubt sie, klassische Aufgaben im Zwanzigerraum ohne Zehnerübergang zu lösen. Da der Zehner bei ‚6+7' oder bei ‚7+8' aus den beiden Fünfern entsteht, genügt es, die Fünferreste zu addieren.[3] Und schließlich zeigt sie den Kindern, dass eben nicht alles ‚Eins' ist und dass Wertebenen in reversibler Verbindung stehen. Damit legt sie den Grund für das Denken in Wertebenen. Anders als eine reine Färbung von Kugeln am Rechenrahmen oder der Perlenkette baut eine konkrete Bündelung wie die Fünferstange eine Grenze auf und zwingt, wie bei ‚7-3', in die Auseinandersetzung.



6,7 und 8 mit Fünferstruktur[4]



‚7-3' durch virtuelles Entbündeln.

Die didaktische Stufenfolge ‚enaktiv-ikonisch-symbolisch' beschreibt nur unzureichend, worum es eigentlich geht, denn sie unterschlägt, auf welcher Abstraktionsstufe die Handlung vollzogen, dargestellt und symbolisiert wird. Schon die enaktive Stufe der Rechenhandlung unterscheidet sich gravierend, je nachdem, ob sie mit Zählmaterial, konkreten Bündelungsobjekten, symbolischen Werten oder einem konkreten Positionssystem wie dem Rechenbrett durchgeführt wird. Jedes Rechenmittel setzt an einer anderen ‚inneren Zahl' an. Jedes erlaubt auf einem anderen Abstraktionsniveau verständig zu rechnen und Zahl-, bzw. Rechenzusammenhänge kennen zu lernen. Dies sollte im Arithmetikunterricht der Grund- und Sonderschule deutlich mehr Beachtung finden.

Literatur

Flexer, R.J. (1986) The power of five: The Step before the power of ten.*Arithmetic Teacher, 33* (11), S. 5-9.

Gerster, D.D., Schultz, R. (2004) Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte. *freiburg.de/freidok/volltexte/2004/ 1397/ pdf/ gerster.pdf*, Freiburg

Ifrah, G. (1987) *Universalgeschichte der Zahlen* Frankfurt/New York: Campus

Rödler. K. (1998) Die Geschichte der Zahlen und des Rechnens. *mathematik lehren 87/98*

Rödler. K. (2006) *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett: Rechnen durch Handeln* Seelze: Kallmeyer

Rödler. K. (2007) *Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen* Seelze: Kallmeyer

---

[1] Siehe Gerster, Schultz 2004, S. 78 f.
[2] Umfassend ist das Konzept dargestellt in Rödler 2006. Siehe auch: www.rechnen-durch-handeln.de
[3] Siehe dazu: Rödler 2006, S. 73 ff. und Gerster2004, S. 344 ff. und 365 ff.
[4] Rödler 2007, S. 23 ff. und Flexer 1986

Matthias RÖMER, Saarbrücken

Systematische Weiterentwicklung von Mathematiklehrerfortbildung - Das Projekt KOSINUS im Saarland

Die Ausrichtung des Mathematikunterrichtes an den Bildungsstandards für die Sekundarstufe 1 und die damit verbundene Strukturierung nach Leitideen und Hinwendung zur Kompetenzorientierung im Unterricht hat auch im Saarland schon vor dem Fortbildungsprojekt *KOSINUS* deutliche Spuren hinterlassen. Durch die Veränderung administrativer Rahmenbedingungen mit Einführung von Kernlehrplänen für die Erweiterten Realschulen (ERS) sowie Gesamtschulen (GeS) und durch die Diskussion über die Lehrpläne des achtjährigen Gymnasiums, ist ein hoher Fortbildungsbedarf an den Schulen feststellbar. Dabei kristallisieren sich folgende Themen heraus:

1. Die Bedeutung ‚kompetenzorientierten Mathematikunterrichts' und mithin die Frage, was Kompetenzorientierung über die kurzfristige Performanzorientierung hinaus bedeutet.

2. Die Integration bisher wenig oder gar nicht behandelter Inhalte in den Mathematikunterricht, als Beispiel sei die Stochastik in der Sekundarstufe 1 erwähnt.

3. Die verstärkte Einbindung neuer Medien in den Mathematikunterricht, welche jetzt verpflichtend in die Lehrpläne von ERS und GeS aufgenommen wurden.

4. Der Umgang mit den neu erworbenen Gestaltungsmöglichkeiten, die sich durch die - nur auf die inhaltlichen Kerne fokussierten - Lehrpläne ergeben.

5. Die Hinwendung zu anderen Unterrichtsformen, die neben neuen und veränderten Methoden auch eine erweiterte Sicht auf das Lernen, insbesondere auch aufgrund der wachsenden Heterogenität der Lernenden, zur Folge haben. Als Beispiel sei die intensive Diskussion über die konstruktivistische Sicht des Lernens und die Kritik an der Dominanz des fragend-entwickelnden Unterrichtsmodells genannt.

6. Die Frage, wie ‚kompetenzorientierter Unterricht' überhaupt auszusehen hat und wie man ihn konkret umsetzt.

7. Zuletzt die Reform der traditionellen Leistungsbewertung, die teilweise prozessorientierten Betrachtung Raum geben muss, wenn es darum geht,

einzelne Kompetenzbereiche zu bewerten, sowie eine Stärkung der diagnostischen Kompetenz bei den Lehrenden.

Diese Fülle an Aufgaben ist in der traditionellen Lehrerfort- und -weiterbildung in der bisherigen Form zumeist nicht leistbar. Umwälzungen dieser Größenordnung verlangen also nach Konzepten, welche zum einen die Komplexität der zu bewältigenden Aufgaben, aber auch die Trägheit des Systems, zum anderen die aktuelle Diskussion über Schul- und Unterrichtsentwicklung berücksichtigen. Daraus folgen verschiedene Anforderungen an Mathematiklehrerfortbildung:

A. Fortbildung muss langfristig sein und wirken. Das bedeutet, dass eine kontinuierliche Betreuung der Lehrpersonen in ihrem Lern- und Lehrprozess gewährleistet werden muss. Da es sich bei den geschilderten Veränderungen um erhebliche handelt, ist die beständige Hilfe und Unterstützung bei den Veränderungsprozessen überaus wichtig.

B. Fortbildung muss nachhaltig sein. Die erworbenen Inhalte und ‚conceptual changes' sollen lange nachwirken und ihren Niederschlag auch in der praktischen Arbeit finden. Das setzt eine langfristige Fortbildung voraus, stellt aber auch Anforderungen an die Struktur eines Fortbildungsprojektes, welches nicht alleine theoretische, sondern auch praktische Hilfe anbieten muss.

C. Fortbildung muss kommunikativ sein. Veränderungen in den Konzepten von Lehrerinnen und Lehrern können sich nur dann durchsetzen, wenn man Verbündete findet, die ebenfalls an die Wirksamkeit neuer und veränderter Modelle glauben. Diese wiederum findet man am besten an der eigenen Schule. Folglich ist es erforderlich jeweils immer ein ganzes Fachkollegium vor Ort fortzubilden, um die entsprechende Kommunikation über die Konzepte erst möglich zu machen. Darüber hinaus ist die Schule auch der Ort des Geschehens und der situierten Kognition; ein weiterer Grund dafür, die Fortbildung dort stattfinden zu lassen.

D. Fortbildung muss gleichsam eine Transmission zwischen Hochschule, Fortbildungsinstitutionen und Schulen darstellen. Die jeweiligen Stärken der einzelnen Institutionen müssen in einem Konzept vereinigt werden.

E. Fortbildung muss freiwillig sein. Kolleginnen und Kollegen müssen sich aus eigenem Antrieb an den Fortbildungen beteiligen und sollen auch am Ende selbst über eine Weiterführung in einem eventuell anderen Programm entscheiden.

Des Weiteren ergeben sich durch die speziellen Voraussetzungen im Saarland noch weitere Bedingungen aber auch Möglichkeiten, die es zu nutzen gilt:

- SINUS hat im Saarland an den weiterführenden allgemeinbildenden Schulen nicht stattgefunden. Ein entsprechender Fortbildungsstau ist feststellbar und von der Bildungsverwaltung wahrgenommen worden.
- Die Größe des Saarlandes und die überschaubare Anzahl an Schulen erlauben eine Bedienung aller weiterführender allgemeinbildender Schulen innerhalb von sechs Jahren.
- Eine durch den Lehrstuhl für Mathematik und ihre Didaktik erfolgte Pilotierung der Fortbildungsreihe kann in die allgemeine Umsetzung einfließen.
- Die räumliche Nähe einzelner Institutionen befördert einen reibungslosen Austausch zwischen Hochschule und Fortbildungsinstitut.

So geht es bei dem im Saarland seit Januar 2010 angelaufenen Fortbildungsprojekt *KOSINUS* weniger darum, etwas originär Neues zu machen, sondern vielmehr darum, aus den geeigneten Konzepten und Ergebnissen der didaktischen Forschung der vergangenen Jahre eine gezielte Auswahl zu treffen und einen geeigneten Transfer in die Schulen zu organisieren, um die Ideen nachhaltig auch in der täglichen Praxis zu verankern. Die einzelnen Module richten sich vor allem an folgenden Inhalten aus:

(<u>Vorbemerkung:</u> Alle Modulbeschreibungen sind nicht statisch zu verstehen. Vielmehr sind sie an die Anforderungen und Bedürfnisse der jeweiligen Fachkonferenz, Schule oder Schulform anzupassen. Verbindlich ist jedoch der langfristige Charakter, der eine Entwicklung vom Kleinen ins Große - von den Aufgaben hin zu einer langfristigen Planung von Unterricht - ins Auge nimmt.)

Modul 1 – Aufgaben:

Der Schwerpunkt des ersten Moduls liegt im Bereich der Aufgaben und des Wissensumgangs im Mathematikunterricht. Mit Beispielen werden neue Aufgabenformen erarbeitet und hinsichtlich ihrer inhaltlichen Relevanz aber auch insbesondere im Bezug auf die Bildungsstandards und die darin postulierten mathematischen Kompetenzen hin untersucht. Das Variieren von Aufgaben und die geeignete Diagnose von Schülerlösungen hinsichtlich der geleisteten mathematischen Kompetenzen stehen ebenfalls im Vordergrund dieser Einheit.

Modul 2 – Methoden im Unterricht:

Wie die Umsetzung und natürlich die Lösung geeigneter Aufgaben im Mathematikunterricht gelingen kann, ist das Thema des zweiten Moduls. Insbesondere eine kritische Überprüfung des Lehr-Lernverständnisses und die sich daraus ergebenden Konsequenzen für die Planung einzelner Stunden und die darin verwendeten Methoden sind Kernthema dieses Moduls. Es sollen geeignete Möglichkeiten aufgezeigt werden, den Schülerinnen und Schülern ein nachhaltiges Mathematiklernen zu ermöglichen. Schwerpunkte liegen insbesondere in den Bereichen Üben einschließlich der damit verbundenen Vorstellungen als auch im kooperativen und/oder dialogischen Lernen.

Modul 3 – Unterricht im Kontext:

Einzelne Unterrichtsstunden sind Bestandteil einer Unterrichtseinheit. Die Frage, wie in einer Einheit, die nicht notwendigerweise thematisch nur an mathematischen Inhalten orientiert sein muss, Grundvorstellungen über Mathematik aber auch Kompetenzen aufgebaut werden können, steht im Mittelpunkt des dritten Moduls. Wie funktioniert das kumulative Lernen von Mathematik überhaupt und welche Voraussetzungen müssen gegeben sein, damit Schülerinnen und Schüler Mathematik verstehen? Neben der Klarheit über Ziele insbesondere im Zusammenhang mit den mathematischen Kompetenzen der Bildungsstandards und wiederum der Frage des Übens ist das gezielte Planen ein wichtiger Baustein dieser Einheit.

Modul 4 – Langfristig planen und überprüfen

Das vierte Modul erweitert das dritte Modul dahingehend, dass über einen längeren Zeitraum sinnvolles Mathematiklernen ermöglicht werden soll. Im Mittelpunkt dieses Moduls steht die Entwicklung langfristiger Planungen, die ein Verstehen und Anwenden von Mathematik ermöglichen. Dazu zählt auch das sinnvolle Überprüfen der erworbenen Kenntnisse und Kompetenzen. In diesem Zusammenhang ist auch die Zusammenarbeit in der Fachkonferenz ein wichtiger Bestandteil. Diese vermag unter anderem annähernd vergleichbare Bedingungen und Ergebnisse an einer Schule herzustellen.

In diesem Projekt besteht die Herausforderung auch in einer wissenschaftlichen Begleitung der Wirksamkeit der Fortbildungsreihe. Wir haben uns dafür entschieden, einen Blick auf die Subjektiven Theorien beteiligter Lehrerinnen und Lehrer zu werfen und diese mithilfe einer gezielten Analyse von jeweils zwei Interviews mit derzeit über 40 Interviewpartnern zu erforschen. Eine Auswertung und eine ausführliche methodische Beschreibung werden Mitte 2011 verfügbar sein.

Literatur

Ausgewählte Grundlagenliteratur unter:

http://www.math.uni-sb.de/ag/lambert/roemer/

Jürgen Roth, Landau

Mathematik-Labor – Praxisbezogene Lehramtsausbildung

Lehramtsstudierende fordern immer wieder einen größeren Praxisbezug in ihrem Studium. Lehrende denken über Möglichkeiten nach, wie die Ausbildungsteile zur Fachmathematik und Mathematikdidaktik zusammengeführt und für die Studierenden als relevant für ihre spätere Unterrichtspraxis erfahrbar gemacht werden können. Am Institut für Mathematik in Landau wird dieses Ziel durch den Aufbau eines Mathematik-Labors verfolgt, das integraler Bestandteil der Lehramtsausbildung Mathematik für die Sekundarstufen sein wird. Das Mathematik-Labor ist als Schülerlabor konzipiert, in dem sich ganze Schulklassen in Kleingruppenarbeit selbstständig jeweils mit einem Thema befassen und es mit Hilfe von gegenständlichen Modellen und Computersimulationen mathematisch durchdringen.

1. Bedarf in der Lehramtsausbildung

In der Lehramtsausbildung sind die verschiedenen inhaltlichen Facetten (Fachwissenschaft und Fachdidaktik Mathematik, zweites Unterrichtsfach, Schulpraktika) miteinander in Beziehung zu setzen und als relevant für das Berufsleben erfahrbar zu machen. Daneben sollten die Lehramtsstudierenden an die fachdidaktische Forschung herangeführt werden, indem sie kleinere Forschungsprojekte selbst durchführen und so Wege des Erkenntnisgewinns in der Fachdidaktik erfassen. Ein weiteres Ziel ist die Verzahnung aller Phasen der Lehramtsausbildung, die bisher häufig weitgehend getrennt voneinander verlaufen. Die Einbindung des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ in die Lehramtsausbildung kann einen Beitrag zum Erreichen dieser Ziele leisten.

2. Konzept des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“

Mathematik wird in der Schule gelegentlich als formales und kalkülorientiertes Fach erlebt, dessen Inhalte im Alltag der Schülerinnen und Schüler praktisch keine Rolle spielen. Dieser Fehleinschätzung kann u. a. durch Lernumgebungen begegnet werden, in deren Mittelpunkt interessante Phänomene stehen, die Schülerinnen und Schüler durch einen selbsttätigen aktiv-experimentellen Umgang mit gegenständlichen Modellen und Simulationen mathematisch durchdringen (vgl. Appell, Roth & Weigand, 2008).

Beim Mathematik-Labor „Mathe ist mehr“ an der Universität Koblenz-Landau handelt es sich um ein Schülerlabor. Es werden ganze Schulklassen (ab der 10. Jahrgangsstufe) eingeladen, in Kleingruppen ca. drei Stunden lang an jeweils an einem Thema zu arbeiten. Durch experimentellen Umgang mit gegenständlichen Modellen und systematische Variation von Computersimulationen sollen sowohl das Verständnis technischer Vorgänge als auch das mathematische Grundlagenwissen verbessert werden. In beiden Fällen geht es nicht um die Phänomene an sich, sondern um deren mathematische Durchdringung. Die Schülerinnen und Schüler erkennen durch eigenständiges (mathematisches) Experimentieren und Modellieren die zugrunde liegenden Prinzipien, setzen diese in Beziehung zu ihrem mathematischen Wissen und vernetzen beides durch das Arbeiten mit Simulationen. Erfahrungen mit den gegenständlichen Modellen und Simulationen werden aufbereitet, systematisiert und darauf aufbauend werden mathematische Darstellungen sowie analytische Beschreibungen entwickelt. Es geht dabei um das Auffinden und Darstellen mathematischer Zusammenhänge, die Klärung notwendiger mathematischer Grundlagen und evtl. die Überprüfung von Hypothesen. Dazu werden in den Laborlernumgebungen schriftliche gestufte Hilfen angeboten, die individuell nach Bedarf abgerufen werden können.

Gegenwärtig werden Laborstationen zu innermathematischen Themen, sowie Themen mit Bezügen zu den Naturwissenschaften und zum Alltag erarbeitet (z. B. Linsen, Brechung, Lochkamera, Schatten, Spiegel, Biomechanik, Schiefer Wurf, Kristallstrukturen, Unendlich, Figurierte Zahlen, Kryptologie, Rollkurven, Historische Instrumente, Gleichdicks, Einparken, Baggerarmsteuerung, Lotto, Kürzeste Wege).

3. Einbindung in die Lehramtsausbildung Mathematik

Das Lehramtsstudium ist in Rheinland-Pfalz bereits modularisiert und setzt sich aus einem polyvalenten Bachelor- und einem schulartspezifischen Masterstudium sowie einem durchgehenden Praktikumsblock in der vorlesungsfreien Zeit zusammen. Um die Einbindung des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr“ in das Studium zu gewährleisten, wird es an verschiedenen Stellen in Module des Bachelor- und Masterstudiums integriert.

In der als Übung ausgestalteten Veranstaltung **Mathematik Modellieren** die zwei Semesterwochenstunden (SWS) umfasst und am Ende des Bachelorstudiums von allen Studierenden belegt wird, wenden die Studierenden ihre im Studium erworbenen fachlichen Fähigkeiten an, um in Kleingruppen offene Probleme zu bearbeiten. Anschließend betreuen sie zum selben Thema eine Projektgruppe im Rahmen der Schülerprojekttage Mathematik. Dadurch werden die Modellierungskompetenz der Studierenden geschult und ihre unterrichtspraktischen Fähigkeiten erweitert. In einem begleitenden **PC-Praktikum** (1 SWS) lernen die Studierenden Konzepte zur Gestaltung von Simulationen auf der Basis von dynamischen Geometriesystemen, Tabellenkalkulationsprogrammen und Computeralgebrasystemen kennen und setzen sie exemplarisch um.

Die **Bachelorarbeit** wird von Studierenden zum Teil in Zweierteams erstellt. Dabei werden Laborlernumgebungen, bestehend aus gegenständlichen Modellen, Simulationen, Arbeitsaufträgen und Hilfestellungen, entwickelt, evaluiert und optimiert.

Für Studierende des Lehramts Mathematik für eine Sekundarstufe ist die Belegung des **Didaktischen Seminars** (2 SWS) im Masterstudium verpflichtend. Hier werden in Kleingruppen Laborlernumgebungen einschließlich der zugehörigen gegenständlichen Modelle und Simulationen entwickelt, sowie Schülerinnen und Schülern bei ihrer Arbeit im Mathematik-Labor betreut und diese evaluiert (Leistungsentwicklungen, Motivationslage, Art der Zusammenarbeit, Einsatz der Medien, …). Studierende des gymnasialen Lehramts, die eine Masterarbeit und/oder Dissertation in Didaktik der Mathematik schreiben wollen, können an Stelle des Didaktischen Seminars auch das **Seminar zu fachdidaktischen Forschungsfragen** (2 SWS) belegen. Hier werden mit den Studierenden in sehr intensiver Kleingruppenarbeit qualitative und quantitative empirische Forschungsmethoden erarbeitet und in kleinen Forschungsprojekten an Themen im Umfeld des Mathematik-Labors erprobt (z. B. Einfluss der Gestaltung der Arbeitsaufträge auf den Bearbeitungserfolg der Schülerinnen und Schüler; Verwendung und Wirkung von gestuften Hilfeangeboten; Art der Nutzung von gegenständlichen Modellen und Simulationen, Abhängigkeit der Motivation und des Bearbeitungserfolgs von der Art des Themas (innermathematisch / Alltagsbezug); …)

Im Rahmen der **Masterarbeit** werden von einigen Studierenden die fachliche Aufarbeitung je eines Stationsthemas des Mathematik-Labors geleistet sowie Laborstationen entwickelt und evaluiert. Andere bearbeiten überschaubare Forschungsfragen im Rahmen des Mathematik-Labors (z. B. Gestaltung der Hilfeangebote, Zusammenspiel: Reale Modelle und Simulationen, Modellierungsprozesse beobachten und beschreiben, …) oder entwickeln vorhandene Laborstationen in Zusammenarbeit mit Referendaren des Studienseminars für den Einsatz im regulären Mathematikunterricht weiter. In den vertiefenden **Praktika** in der vorlesungsfreien Zeit werden solche weiterentwickelten Laborumgebungen im Mathematikunterricht getestet und per Videoaufzeichnung festgehalten und ausgewertet. Letztere können anschließend in Didaktikveranstaltungen zur Reflexion von Lehr-Lernprozessen eingesetzt werden.

Basierend auf die Ausbildung der Studierenden ist geplant in kleinen **gemischte Arbeitsgruppen** bestehend **aus Studierenden, Lehrkräften und**

Dozenten gemeinsam Lernumgebungen nach Art der Laborstationen zu gestaltet und für den Mathematikunterricht im Klassenverband zu optimiert. Es geht dabei um die Verbesserung der Fähigkeiten zur Konzeption und Gestaltung von Lernumgebungen für selbstständige Modellierungsprozesse bei allen Teilnehmern sowie die Bereitstellung von Unterrichtsmaterialien dazu im Internet auf der Seite www.mathe-ist-mehr.de. Die beteiligten Personengruppen bringen ihre je eigenen Stärken in diesen Prozess mit ein: Studierende erstellen gegenständliche Modelle und Simulationen, Lehrkräfte bringen ihre Unterrichtserfahrung in den Entwicklungsprozess ein und testen Lernumgebungen in ihrem Unterricht. Die Hochschuldozenten beraten und moderieren diesen Prozess.

4. Pilotversuch: Didaktisches Seminar

Im Wintersemester 2009/10 wurde in einem Pilotversuch ein Didaktisches Seminar nach dem oben dargestellten Konzept durchgeführt. Nach einer Einführung in die Konzeption des Mathematik-Labors „Mathe ist mehr" wurde eine Exkursion zum Mathematik-Labor an der Universität Würzburg durchgeführt, das im Hinblick auf die Schüleraktivitäten nach dem gleichen Konzept gestaltet ist wie das Mathematik-Labor „Mathe ist mehr" in Landau. Dort haben Studierendengruppen Laborstationen bearbeitet und wurden anhand eines vorgegebenen Beobachtungsbogens von anderen Studierendengruppen bei ihrer Arbeit beobachtet. Die Beobachtungsergebnisse wurden schriftlich festgehalten, allen zur Verfügung gestellt und im Plenum ausgewertet. Auf der Grundlage der daraus abgeleiteten Konstruktionsprinzipien haben je vier Studierende gemeinsam eine Laborstation entwickelt. Sie mussten ein Thema finden, einschlägige Literatur dazu sichten, erschließbare Inhalte identifizieren, gegenständliche Modelle, Simulationen, Arbeitsaufträge und schriftliche Hilfestellungen konzipieren und schließlich umsetzen. Abschließend wurden die Stationen mit anderen Studierenden getestet und aufgrund der Beobachtungen und Rückmeldungen überarbeitet.

Weiterführende Informationen zum Mathematik-Labor „Mathe ist mehr" findet man unter den Adressen www.mathe-labor.de und www.mathe-ist-mehr.de im Internet. Auf diesen Seiten werden nach und nach auch die entwickelten Simulationen zu den Laborstationen bereitgestellt.

Literatur

Appell, K., Roth, J. & Weigand, H.-G. (2008). Experimentieren, Mathematisieren, Simulieren – Konzeption eines MATHEMATIK-Labors. In E. Vásárhelyi (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 25 - 28). Münster: WTM-Verlag

Benjamin ROTT, IDMP Hannover

Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern

Die Relevanz des Problemlösens – insb. für den Mathematikunterricht – ist unbestritten. In den KMK Bildungsstandards gehört die Fähigkeit, Probleme zu lösen, zu den prozessbezogenen Kompetenzen, die „Schüler [...] im Mathematikunterricht erwerben sollen“ (S. 7); nach Winter gehört der Erwerb von Problemlösefähigkeiten zu den drei Grunderfahrungen, die den allgemeinbildenden Charakter des Mathematikunterrichts legitimieren.

Als *Problem* soll im Sinne Dörners (1979, S. 10) eine Aufgabe verstanden werden, die ihrem Bearbeiter eine personenspezifische Barriere entgegen setzt, für die also keine Schemata (Algorithmen) vorliegen.

Den unbestreitbar größten Einfluss auf das Problemlösen aus Sicht der Mathematikdidaktik hat bis heute Polyas (1949) „Schule des Denkens“ – einerseits wegen der dort beschriebenen Heurismen, „Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung“ (S. 118); andererseits wegen seiner Strategiehinweise, die in (fast) allen Artikeln und Lehrbüchern zum Problemlösen referiert werden (z.B. Heinze, 2007).

Polya selbst (S. 18 f.) spricht von „vier Phasen bei der Arbeit“ an einer Aufgabe und ordnet ihnen unterschiedliche Heurismen zu:

(1) Verstehen der Aufgaben
(2) Ausdenken eines Planes
(3) Ausführen des Planes
(4) Rückschau

Forschungsfragen

Auch wenn das Phasenmodell von Polya oft als lineares Modell gedeutet wird, ist es in m. E. nicht *deskriptiv*, sondern *normativ* zu verstehen und – wenn überhaupt – nur zur Beschreibung „idealer“ Problemlöseprozesse geeignet. Wie aber verläuft Problemlösen (-lernen) von SchülerInnen zu Beginn der Sekundarstufe?[1] Hierzu bedarf es weiterer Grundlagenforschung, wie Heinze (2007, S. 15) zusammen fasst:

> „Die Schwierigkeiten bei der Ausarbeitung von Fördermaßnahmen für die mathematische Problemlösekompetenz gehen sicherlich auch auf Defizite der Forschung zur Entwicklung der mathematischen Problemlösefähigkeit (individuell und im Mathematikunterricht) zurück. Es gibt bisher keine elaborierten Theorien zur Entwicklung dieser Fähigkeit (insbesondere im Rahmen der sozialen Interaktion des Unterrichtsgeschehens).“

Vor diesem Hintergrund widme ich mich folgenden Fragestellungen:

---

[1] An dieser Frage arbeitet auch Walzebug (in diesem Band).

- Wie verlaufen die Problembearbeitungsprozesse von Fünftklässlern?
- Eignet sich das Schema von Polya zur Beschreibung tatsächlicher Problembearbeitungsprozesse?
- Welche Phasen treten in welcher Reihenfolge auf?
- Inwiefern spielen heuristische Elemente eine Rolle in den Problembearbeitungsprozessen der Schüler?
- Welche Heurismen werden dabei besonders häufig eingesetzt? Welche erweisen sich als besonders hilfreich für die Problemlöser?
- Lassen sich Erfolg / Misserfolg mit diesen Betrachtungen erklären?

Die Studie – das Projekt MALU

Zur Beantwortung der oben gestellten (und anderen) Fragen dienen uns Videoaufnahmen, die im Rahmen der „**M**athe **A**G an der **L**eibniz **U**niversität" gewonnen werden. Bei MALU handelt es sich um ein seit Nov. 2008 laufendes Enrichment-Projekt, bei dem interessierte Fünftklässler verschiedener Gymnasien für je ein Schulhalbjahr wöchentlich an die Universität Hannover kommen. An diesen Nachmittagen arbeiten die SchülerInnen etwa die Hälfte der 90 Minuten in Paaren an Problemaufgaben.

Zusätzlich wurden sog. „Schüler-Experten", Schulsieger beim *Känguru*-Wettbewerb und Teilnehmer der Landesrunde der *Mathematik-Olympiade* (für 5./6. die Endrunde), bei der Bearbeitung bestimmter Aufgaben gefilmt.

Die von uns verwendeten Problemaufgaben stammen aus mehreren mathematischen Stoffgebieten und ermöglichen verschiedene heuristische Zugänge. Zur Auswahl siehe Lange (2009).[2]

Forschungsmethode

Nachdem verschiedene Methoden zur Auswertung von Videomaterial in Erwägung gezogen und teilweise ausprobiert worden waren, fiel meine Wahl auf das Verfahren zur *Protocol Analysis* von Schoenfeld (1985, Kap. 9). Schoenfeld teilt die Prozesse anhand der Videos in makroskopische Stücke, sog. *Episoden*: „periods of time during which problem solvers are engaged in a particular activity" (Schoenfeld, 1992, S. 189).

Nachdem ein Prozess unterteilt wurde, werden die Episoden charakterisiert, wobei es bei Schoenfeld sechs verschiedene Typen von Episoden gibt: *Reading*, *Analysis*, *Exploration*, *Planning*, *Implementation* und *Verification*. Dabei lassen sich diese Episodentypen den vier Polya'schen Phasen zuordnen (vgl. Abb. 1).

[2] Als Beispiel sei hier (nicht in der Form, wie wir sie den Kindern präsentieren) folgende Aufgabe genannt: „Wie viele Quadrate befinden sich auf einem Schachbrett?"

Wie die „Definition“ dessen, was eine Episode sei, vielleicht schon deutlich macht, bleiben die Ausführungen von Schoenfeld an vielen Stellen vage und sind nicht gut operationalisiert. Es hat fast ein Jahr der Einarbeitung (und zwei Bachelor- sowie eine Masterarbeit) gebraucht, bis unser Kodierhandbuch mit genaueren Beschreibungen der Episodentypen und Beispielen aus Transkripten ausgeschärft war. Ein wichtiger Schritt auf dem Weg hierzu war die Erkenntnis, wie stark die Episoden auf den Phasen Polyas aufbauen; Schoenfeld schreibt dies nicht explizit in seinem Manual, es wird aber deutlich, wenn man andere Teile seines Buches hinzu zieht (1985, Preface und Kap. 4; vgl. Abb. 1). Mittlerweile sind wir zufrieden mit den Übereinstimmungen zwischen unseren und den von Schoenfeld veröffentlichten Einteilungen sowie der Interrater-Reliabilität zwischen den Kodierern in Hannover.

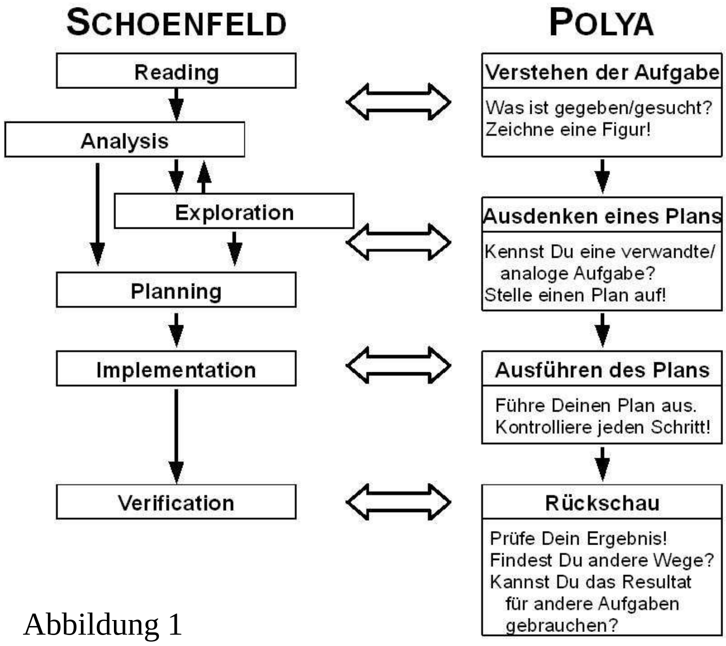


Abbildung 1

Erste Ergebnisse

Zum jetzigen Zeitpunkt wurde ein Großteil der Prozesse gesichtet, eine Aufgabe (14 Prozesse) wurde über alle bisherigen MALU-Gruppen mit der Schoenfeld-Methode ausgewertet und erste Ergebnisse zeichnen sich ab:

In Übereinstimmung mit der Literatur (vgl. Tietze, Klika & Wolpers, 1997, Kap. 3) tritt bei unseren Kindern die Rückschau im Sinne Polyas nur äußerst selten auf und ein Großteil der nicht zum Erfolg führenden Prozesse scheitert schon am Verstehen der Aufgabe. Letztere Beobachtung passt zu den Beschreibungen Schoenfelds (1985, Kap. 9), dass erfolglose Problemlöser wegen fehlender Selbstregulation einen einmal gewählten Lösungsansatz weiter verfolgen, ohne zum *Reading* oder zur *Analysis* zurück zu kehren, auch wenn dies angebracht wäre.

Zusätzlich zu den sechs von Schoenfeld beschriebenen Episodentypen konnten bei unseren Fünftklässlern zwei weitere Arten „konsistenten Verhaltens über eine bestimmte Zeitspanne“ identifiziert werden:

(1) *Schreiben*, Phasen, in denen die Probanden ihre (bisherigen) Erkenntnisse zusammen fassen, ohne inhaltlich weiter zu arbeiten, und

(2) *Abschweifung*, Zeitspannen in denen bei den Probanden kein aufgabenbezogenes Verhalten sichtbar ist.

Diskussion und Ausblick

Neben der Auswertung von mehr Prozessen durch Einteilung in Episoden sind weitere Auswertungsschritte geplant: Codierung der Videos in Bezug auf (a) Selbstregulation und (b) den Einsatz von Heurismen. Die Wichtigkeit von (a) hat u.a. Schoenfeld in seinen Untersuchungen bereits herausgearbeitet, leider müssen seine Ausführungen auch hier noch weiter operationalisiert werden. Zu (b) gibt es schon Arbeiten, die sich allerdings größtenteils auf die Auswertung der *Produkte* (Tests) konzentrieren (z.B. Collet, 2009); m. E. könnte die Untersuchung von *Prozessen* in diesem Zusammenhang sehr interessant sein.

Des Weiteren erscheint es lohnend, einzelne Episoden herauszugreifen und tiefer gehend auszuwerten. *Analysis* und *Exploration* bieten sich hier an, da in ihnen der meiste Heurismeneinsatz zu erwarten ist. Aber auch die *Abschweifung* birgt Potential: Lassen sich hier eventuell *Inkubation* und *Illumination* im Sinne Poincarés (1914) und Hadamards (1945) feststellen?

Literatur

Collet, C. (2009): *Förderung von Problemlösekompetenzen in Verbindung mit Selbstregulation – Wirkungsanalysen von Lehrerfortbildungen*. Münster: Waxmann.

Hadamard, J. (1945): *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press. Unveränderter Nachdruck von 1954.

Heinze, Aiso (2007): Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext. In: *JMD, Heft 1 2007*, Jg 28, S. 3 – 30.

KMK (2003): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mitt. Schulabschluss*.

Lange, D. (2009): Auswahl von Aufgaben für eine explorative Studie zum Problemlösen. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM Verlag.

Polya, G. (1949): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Poincaré, H. (1914): *Wissenschaft und Methode*. Berlin: Teubner.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando: Academic Press, Inc

Schoenfeld, A. H. (1992). On Paradigms and Methods: What Do You Do When the Ones You Know Don't Do What You Want Them To? Issues in the Analysis of Data in the Form of Videotapes. In: *The Journal of the Learning Sciences*, 2 , 179-214.

Tietze, U.-W.; Klika, M.; Wolpers, H. (1997): *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II – Band 1*. Braunschweig: Vieweg. 2. durchgesehene Auflage, 2000.

Walzebug, C. (2010): Math. Problemlöseprozesse von 6. Klässlern. In: *BzMU 2010*.

CHRISTIAN RÜEDE, Universität Zürich

Andere sehen anderes – Lesarten algebraischer Ausdrücke

Kieran (1989) bezeichnet das Strukturieren algebraischer Ausdrücke als Hauptanliegen des Algebraunterrichts der Sekundarstufe I und II. Daher untersuchen viele Studien, wie Schüler und Schülerinnen strukturieren und was sie aus ihren Strukturierungen folgern (z. B. Malle, 1993; Sfard, 1991). Gegenstand der hier vorgestellten Untersuchung ist, wie der Prozess, durch den Experten sowie Schüler und Schülerinnen zu ihren Strukturierungen gelangen, modelliert werden kann. Dazu liegen meines Wissens keine Untersuchungen vor.

Was ist mit „Strukturieren" gemeint?

Wer einen Term wie etwa $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$ vereinfacht, stellt Beziehungen zwischen Teilen des Terms her. Schwächere Schüler und Schülerinnen lesen diesen Ausdruck diagonal und stellen einen Bezug zwischen $6x^3$ und 6 her oder sie lesen den Ausdruck horizontal und versuchen die Addition im Zähler irgendwie auszuführen. Stärkere Schüler und Schülerinnen sowie Experten erkennen horizontale Verhältnisse wie 6 zu 9 und 4 zu 6 oder x^3 zu x^2 und x zu 1 und folgern, dass der Ausdruck gekürzt werden kann. Andere erkennen vertikale Verhältnisse wie 6 zu 4 und 9 zu 6 oder x^3 zu x und x^2 zu 1 und schließen mehr oder weniger direkt auf $\frac{3x^2}{2}$. Wiederum andere erkennen die Struktur $\frac{A}{B}$ und faktorisieren zuerst den Nenner, dann den Zähler, oder umgekehrt, und kürzen anschließend gemeinsame Faktoren. Egal, wie strukturiert wird, immer werden Bezüge im Ausdruck hergestellt und daraus Umformungen erschlossen. Diese Beobachtung legt nahe, unter *Strukturieren* eines algebraischen Ausdrucks das Herstellen von Bezügen innerhalb des Ausdrucks zu verstehen. Die Bedeutung der Struktur liegt in den *Inferenzen*, die mit ihr verbunden sind, etwa in den sich aus der Struktur ergebenden Umformungen.

Diese Umschreibung von „Strukturieren" ist vor dem Hintergrund einer Wittgensteinschen Begriffsauffassung zu verstehen: die Bedeutung eines algebraischen Ausdrucks liegt in seinem Gebrauch; beim symbolischen Manipulieren also darin, wie mit dem algebraischen Ausdruck umgegangen, wie er – kontextabhängig – angemessen umgeformt werden soll. Die Syntax regelt bloß die Korrektheit von Umformungen. Die Semantik liegt im (typischerweise impliziten) Wissen darüber, welche Umformungen wann angemessen sind – eine Frage, die nicht rekursiv entscheidbar ist, also über Mechanisches Manipulieren hinausgeht. Weil die Strukturen den Umformungen, die aus ihnen folgen, vorangehen, generieren sie Bedeutung. Insbesondere legt man sich mit jeder Struktur auf entsprechende Umformungen fest.

Strukturieren und Kohärenzbildung

Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks ist ein aktiver Konstruktionsprozess, eine Interaktion zwischen dem (als Zeichenreihe gegebenem) Ausdruck und der Person, welche den Ausdruck strukturiert. Je nach dem, über welches mathematische Vorwissen und über welche Schemata jemand verfügt und wie er die Kontextbedingungen in den Konstruktionsprozess einbindet, strukturiert er anders.

Ganz analog ist auch das Lesen eines Texts ein interaktiver Konstruktionsprozess zwischen dem Text und dem Leser. Auch bei diesem Prozess entscheiden Vorwissen des Lesers, die zur Verfügung stehenden Schemata und die Kontextbedingungen darüber, welche Bezüge zwischen den Satzteilen etabliert werden – man spricht hierbei von *Kohärenzbildung*.

Formal kann eine Analogie zwischen dem Strukturieren und dem Bilden von Kohärenz hergestellt werden. Beides sind interaktive Prozesse zwischen schriftlichen Dokumenten und dem Akteur, die durch Wahrnehmung und Kognition bestimmt sind, immer mit dem Ziel, identifiziere Einzelteile aufeinander zu beziehen. Die Struktur gibt dem algebraischen Ausdruck (im Kontext des symbolischen Manipulierens) seine Bedeutung, die Kohärenz dem Text, indem aus beiden einander entsprechende Inferenzen folgen. Im nächsten Abschnitt wird diese Analogie – welche als eine Analogie zwischen zwei Prozessen zu betrachten ist – ausformuliert.

Ein Prozessmodell des Strukturierens – in Analogie zum Textverstehen

Beim Textverstehen werden – mehrheitlich implizite – Teilprozesse postuliert, die nicht seriell, vielmehr parallel oder zeitlich überlappt und mehrmals durchlaufen werden (z. B. Ballstaedt, Mandl, Schnotz & Tergan, 1981). In Tabelle 1 sind diese Teilprozesse in die rechte Spalte eingetragen. In der mittleren Spalte sind die analogen Teilprozesse aufgelistet, die das Strukturieren algebraischer Ausdrücke bestimmen. Was unter diesen einzelnen Teilprozessen zu verstehen ist, wird nun erläutert.

Der algebraische Ausdruck liegt als visuell wahrnehmbares Objekt vor. Die vorkommenden Schriftzeichen werden also *decodiert*, das heißt, etwa als Variable oder als Relations- bzw. Operationszeichen erkannt. Die einzelnen Zeichen aktivieren Wissen über die Hierarchie und Gesetzmäßigkeiten der Operationen und über die Schreibweisen. Sie werden in diesen Begriffen *recodiert*. Diese Recodierung ist abhängig von der Expertise. Beispielsweise erfassen schwache Schüler und Schülerinnen einen Term wie $2x - 2 \cdot y$ fälschlicherweise gerne als $(2x - 2) \cdot y$. Ein Unterschied zum Textverstehen zeigt sich in der Leserichtung. Texte werden typischerweise zeilenweise von links nach rechts gelesen. Algebraische Ausdrücke hingegen werden etwa von links nach rechts, von rechts nach links, von oben nach unten, von unten nach oben, diagonal oder von der Mitte aus gelesen.

	Strukturieren eines algebraischen Ausdrucks	**Verstehen eines Texts**
Decodieren und Recodieren	Symbole (in nichtlinearer Leserichtung) erkennen und zu Teil-Termen zusammenfassen. Leitend dabei ist Wissen über die Hierarchie der Operationen, Schreibweisen und Gesetzmäßigkeiten der Operationen.	Buchstaben und Wörter (in linearer Leserichtung) erkennen und zu Propositionen („Sätzen“) zusammenfassen. Leitend dabei ist der Wortschatz und Wissen über die Grammatik.
Brücken-Inferenzen ausführen	When- und How-Schemata verwenden	Einzelinformationen verbinden
Enge Inferenzen ausführen	Umformen, Operationen ausführen	Intendierte, logisch zwingende Information einbeziehen
Elaborative Inferenzen ausführen	Mathematisches Vorwissen und Kontextbedingungen einbeziehen	Externe Information einbeziehen
Makrostrukturen bilden	Lösungsmethode identifizieren	Zusammenfassen

Tabelle 1: Teilprozesse beim Strukturieren alg. Ausdrücke und beim Textverstehen.

Ausgehend von den identifizierten Termen werden Bezüge zwischen diesen Termen hergestellt. Die Ausführung von *Brücken-Inferenzen* entspricht der Anwendung von Schemata. Mit solchen Schemata wird ein Vorschlag an die Ausdrücke herangetragen, welche Bezüge zu betrachten sind. Bei einem Ausdruck wie $\frac{24x + 8}{6x + 2}$ kann das lapidare How-Schema zur Anwendung gelangen, dass es sich hier um einen Bruch handelt und somit Nenner und Zähler zu faktorisieren sind. Der Ausdruck wird dann als $\frac{A}{B}$ strukturiert. Es kann bei diesem Ausdruck aber auch ein When-Schema verwendet werden, was beispielsweise zum Vergleich der Verhältnisse 24 zu 8 und 6 zu 2 führt. Je höher die Expertise einer Person, desto eher aktiviert sie nebst How-Schemata auch When-Schemata.

Nebst den Brücken-Inferenzen tragen auch *elaborative Inferenzen* zum Herstellen von Bezügen bei. Bei solchen Inferenzen führt der Einbezug von mathematischem Hintergrundwissen zu Bezügen. Zum Beispiel kann eine Gleichung wie $20x^3 + 30x^2 = 6x + 9$ als kubische Gleichung klassifiziert werden. Das Wissen über mögliche Lösungsverfahren kubischer Gleichungen kann motivieren, nach einem gemeinsamen Linearfaktor zu suchen, was dazu führt, dass man einen gemeinsamen Faktor links und rechts des Gleichheitszeichens sucht und somit im obigen Ausdruck einen Bezug zwischen 6 und 9 sowie 20 und 30 herstellen wird. Wenn zudem in der Aufgabe gefordert wird, dass die Gleichung im Kopf zu lösen sei, kann diese Rahmenbedingung die obige Argumentation unterstützen.

Schließlich führt das Ausführen von möglichen Umformungen sowie von vorliegenden Operationen dazu, dass an hergestellten Bezügen festgehalten wird oder dass neue Bezüge hergestellt werden können. Vor allem Novizen fassen beispielsweise einen Ausdruck wie $5x - 2 \cdot x$ primär als Multiplikation und weniger als Subtraktion auf. Erst wenn sie aufgrund des operationalen Bezugs von 2 und x ausmultiplizieren und das Ergebnis $2x$ erfassen, sind sie in der Lage, einen Bezug von dem links und dem rechts des Subtraktionszeichens herzustellen.

Vor allem beim Verstehen längerer Texte wird auch die Bildung von *Makrostrukturen* als Kohärenzbildung betrachtet. Dabei geht es darum, den bestehenden Text zusammenzufassen. Analog dazu wird auch für das Strukturieren ein Teilprozess vorgeschlagen, der im Zusammenfassen des Denkwegs besteht. Die Antwort auf die Frage, welche Lösungsmethode dem eigenen Vorgehen unterliegt, führt oftmals zur definitiven Strukturierung des Ausdrucks.

Literatur

Ballstaedt, S. P., Mandl, H., Schnotz, W. & Tergan, S. O. (1981). *Texte verstehen, Texte gestalten*. München: Urban & Schwarzenberg.

Kieran, C. (1989). The Early Learning of Algebra: A Structural Perspective. In S. Wagner & C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston, Virginia: Lawrence Erlbaum, Hillsdale.

Malle G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg.

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22* (1), 1-36.

Markus RUPPERT, Würzburg

Analogiebildung – eine grundlegende mathematische Denkweise

Das Auffinden und Herstellen von Analogien gilt als eine wichtige heuristische Strategie, deren Anwendung nicht zuletzt in der Mathematik herausragende Ergebnisse, wie z. B. die Entdeckung des Grenzwerts für die unendliche Summe reziproker Quadratzahlen durch L. Euler (vgl. z. B. Pólya, 1962), zu verdanken sind. Um diese Strategie im Mathematikunterricht gewinnbringend einsetzen und für Schüler zugänglich machen zu können, ist es zunächst notwendig, mathematische Inhaltsbereiche und Lernsituationen zu identifizieren, in denen Analogiebetrachtungen besonders fruchtbar sind. Dazu muss die Bedeutung des Analogiebildungsprozesses als mathematische Tätigkeit im Rahmen des Lernens von Mathematik eingeordnet werden. Dies wiederum kann nur unter Berücksichtigung kognitionspsychologischer Erkenntnisse geschehen.

1 Von der Verhältnisgleichheit zur Strukturabbildung

Ziel einer Analogiebildung ist es, einen unerschlossenen Sachverhalt in einem Bereich (Zielbereich) durch den Vergleich mit einem bekannten Sachverhalt in einem anderen Bereich (Ausgangsbereich) zugänglich zu machen. Die einfachste Form der Analogiebildung entspringt dem Begriffsverständnis der antiken griechischen Mathematik (z. B. bei Archytas von Tarent; αναλογία = Verhältnis, vgl. Tiemann, 1993). Analogiebildung wird hier verstanden als das Herstellen einer Verhältnisgleichheit der Form „A verhält sich zu B wie C zu D“. Im engeren Sinne sind hier tatsächlich Zahlen- oder Größenverhältnisse gemeint. In einem weiter gefassten Verständnis der Verhältnisgleichheit werden jedoch auch Objekte zueinander in Beziehung gesetzt, die nicht im obigen, streng mathematischen Sinne zueinander proportional sind. Die Verhältnisgleichheit basiert dann einerseits auf dem Vergleich von Objektattributen, vor allem aber auf dem Vergleich der Beziehungen zwischen den beteiligten Objekten. Eine so verstandene Analogie muss jedoch nicht unbedingt eindeutig sein (Beispiel: Quadrat verhält sich zu Würfel wie Dreieck zu Tetraeder – oder auch wie Dreieck zu dreiseitigem Prisma). Eine Überprüfung des Analogieschlusses ist also notwendig und muss die Ziele der Analogiebildung berücksichtigen. Welche Relationen im konkreten Fall zur Analogiebildung herangezogen werden, hängt dabei neben dem verfolgten Ziel der Analogiebildung auch vom Vorwissen ab (vgl. English, 2004).

In Grundintelligenztests zum Messen von Analogiebildungsfähigkeiten (z. B. Culture Fair Test CFT, CFT20) werden häufig Aufgaben verwendet, bei denen die Vervollständigung einer Verhältnisgleichung im obigen Sinn verlangt ist. Dennoch sind es beim Lernen von Mathematik nicht allein die hierzu notwendigen Fähigkeiten, die den Wert eines Analogiebildungsprozesses ausmachen. Vielmehr möchte man erreichen, dass Schüler in der Lage sind, eine vorgegebene unbekannte Situation zu analysieren und mit bereits Bekanntem zu vergleichen, um schließlich aufgrund gemeinsamer Strukturen bekannte Methoden und Strategien auf die unbekannte Situation zu übertragen („Kennst du eine verwandte Aufgabe?“, Pólya, 1949). Diese Fähigkeit wird in der jüngeren Kognitionsforschung durch das Konzept der Strukturabbildung beschrieben (vgl. Gentner, 1983). Der Prozess der Analogiebildung lässt sich dabei als folienartiges Übereinanderlegen und Vergleichen relationaler Strukturen veranschaulichen und der Analogieschluss kann in beiden beteiligten Bereichen als „Auffüllen“ fehlender Entsprechungen unter dieser Abbildung verstanden werden (ebd.). Im Zuge dieser Vervollständigung können zunächst Objekte und Relationen abgebildet (analogisiert) werden. Durch die Beziehung zwischen den Objekten werden Regeln festgelegt, wie mit diesen Objekten operiert werden darf (Methoden, Strategien). Die strukturelle Ähnlichkeit der beiden beteiligten Bereiche legt nun die berechtigte Hoffnung nahe, dass sich auch diese Regeln analogisieren lassen (man denke hier beispielsweise an die Analogie der Rechengesetze für Addition und Multiplikation oder an die Regeln für Konstruktionen im Zwei- bzw. Dreidimensionalen).

2 Analogiebildung als Prozess

Sternberg (1977) unterscheidet aufgrund seiner Beobachtungen beim Lösen von Analogieaufgaben sechs Phasen des Analogiebildungsprozesses: Encoding, Inferring, Mapping, Applying, Justification, Response. Um die Bedeutung des Analogiebildungsprozesses für das Lernen und Betreiben von Mathematik einordnen zu können, liegt ein Vergleich mit anderen dabei maßgeblich beteiligten Prozessen nahe. Bereits Pólya (1949) hat Analogiebildung als Problemlösestrategie erkannt. Zusammen mit den Betrachtungen aus dem ersten Abschnitt kann Analogiebildung sogar insofern als eine übergeordnete Problemlösestrategie bezeichnet werden, als durch sie Strategien von einem Bereich auf einen anderen übertragen werden können. Weiter lässt sich Analogiebildung im Sinne Hadamards (1949) als kreativer Prozess identifizieren und die Beschreibung des Strukturabbildungskonzepts zeigt, dass durch Analogiebildung neue Begriffe und Begriffsstrukturen geprägt werden, Analogiebildung also einen Beitrag zur mathematischen Begriffsbildung leisten kann.

Eine besondere Stellung nimmt der Analogiebildungsprozess beim Wechsel zwischen verschiedenen Repräsentationsformen im Allgemeinen und im Zusammenhang mit Modellbildungsprozessen im Speziellen ein. Darstellungen von Objekten auf verschiedenen Repräsentationsebenen können durch Analogiebildung aufeinander bezogen werden. Dabei entscheidet die Art der Repräsentation über den Blickwinkel unter dem ein mathematisches Objekt erscheint und kann so Wege zu weiterführenden Erkenntnissen eröffnen (vgl. Ruppert, 2010). Für den Prozess der mathematischen Modellbildung ist der ständige Perspektivwechsel zwischen Realsituation und mathematischem Modell charakteristisch. Die in der zu modellierenden Realsituation maßgeblich beteiligten Objekte und deren gegenseitige Beziehungen müssen mittels Analogiebildung in mathematische Objekte und Beziehungen übersetzt werden. Erkenntnisse, die bei der Arbeit mit dem mathematischen Modell gewonnen werden, müssen umgekehrt auf ihre Bedeutung für die Realsituation überprüft werden – auch dies geschieht durch Analogiebildung. Ebenso wichtig ist in diesem Zusammenhang der folgende Aspekt: Kann für zwei Situationen auf der realen Ebene eine Analogie hergestellt werden, so liegt die Vermutung nahe, dass diese durch dasselbe mathematische Modell beschrieben werden können. Bruder (2006) spricht hier von gemeinsamen Mathematisierungsmustern. Soll sichergestellt werden, dass der Transfer bei derartigen Aufgabenstellungen gelingt, so muss dieser Zusammenhang gezielt bewusst gemacht werden.

3 Zwei Dimensionen der Analogiebildung

Die bisherigen Ausführungen legen ein Studium des Analogiebildungsprozesses nahe, das sich auf dem Feld zwischen den beiden Dimensionen „Gegenstand der Analogiebildung“ (vgl. Abschnitt 1) und „Phase der Analogiebildung“ (vgl. Abschnitt 2) bewegt. Dabei sind zunächst die Fragen interessant, ob sich konkret beobachtete Analogiebildungsprozesse einerseits und die Entwicklung der Analogiebildungsfähigkeit andererseits innerhalb dieses Feldes beschreiben lassen.

Um solche Beobachtungen durchführen zu können, bedarf es eines geeigneten Beobachtungsrahmens. Dabei liegt es zunächst nahe nach geeigneten Inhaltsbereichen zu suchen, die einen solchen Rahmen bieten können. Besonders häufig wird die Bedeutung der Analogiebildung beim Übergang von der ebenen Geometrie zur Raumgeometrie herausgestellt (vgl. z. B. Becker, 1982). Vor allem durch die Entwicklung dynamischer Raumgeometriesoftware hat dieser Blickwinkel auf die Verzahnung innerhalb der Geometrie wieder an Aktualität gewonnen. Schumann (2006) beispielsweise spricht in diesem Zusammenhang von interaktiver Analogisierung. Weitere Möglichkeiten zur Analogiebildung ergeben sich auch dann, wenn gemeinsame mathematische Strukturen (z. B. Gruppe, Vektorraum, Symmetrie) oder allgemeine mathematische Prinzipien (z. B. Permanenzprinzip, Invarianzprinzip, Schubfachprinzip) zugrunde liegen.

Insgesamt zeigt sich jedoch, dass die genannten Inhaltsbereiche und die meisten bekannten Beispiele zur Analogiebildung weitgehend unverbunden nebeneinander stehen und sich, isoliert betrachtet, weder zum Studium von Analogiebildungsprozessen noch zur Beobachtung einer Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit eignen. Die obigen Ausführungen zur Bedeutung von Analogiebildungsprozessen im Zusammenhang mit Modellbildungsaufgaben können jedoch einen von den betrachteten Inhalten unabhängigen Rahmen bieten, der eben dies erlaubt. Ziel der weiteren Überlegungen ist es deshalb, innerhalb dieses Rahmens Aufgaben zu entwickeln, die eine Beobachtung von Analogiebildungsprozessen und der Entwicklung von Analogiebildungsfähigkeit auf der Grundlage des obigen Dimensionsmodells erlauben. Ausgehend von diesen Beobachtungen könnten sich Überlegungen anschließen, wie die Analogiebildungsfähigkeit im Mathematikunterricht gefördert werden kann.

Literatur

Becker, G. (1982). *Integration ebener und räumlicher Geometrie durch Bildung von Analogien*. Mathematica didactica, 15(1). S. 5-14.

Bruder, R. (2006). *Grundlagen für Analogieschlüsse: Mathematisierungsmuster und Vorgehensstrategien in Anwendungssituationen*. Der Mathematikunterricht, 52 (6). S. 5-18.

English, L. (2004). Mathematical and Analogical Reasoning in Early Childhood. In: English, L. (Ed.) *Mathematical and Analogical Reasoning of Young Learners.* Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gentner, D. (1983). *Structure-Mapping: A theoretical framework for analogy*. Journal of cognitive science, 7. S. 155-170.

Hadamard, J. (1949). *The Psychology of Invention in the Mathematical Field.* Princeton: Princeton University Press.

Pólya, G. (1949). *Schule des Denkens*. Bern: A. Francke.

Pólya, G. (1962). *Mathematik und Plausibles Schliessen. Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik.* Basel: Birkhäuser.

Tiemann, A. (1993). *Analogie – Analyse einer grundlegenden Denkweise in der Physik*. Thun, Frankfurt a. M.: Harri Deutsch.

Ruppert, M. (2010). *Würfelbetrachtungen – Drei Wege zu höheren Dimensionen*. Der Mathematikunterricht, 56(2). S. 34-53.

Schumann, H. (2006). *Interaktives Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum*. Der Mathematikunterricht, 52 (6). S. 37-60.

Sternberg, R. J. (1977). *Component Processes in Analogical Reasoning*. Psychological Review, 84. S. 353-378.

Ildar SAFUANOV, Moskau

Genetic approach to the teaching of discrete mathematics

As noted earlier (Safuanov, 2005), the principle of the genetic approach in teaching mathematics requires that the method of the teaching of a subject should be based, as far as possible, on natural ways and methods of knowledge inherent in the science. The teaching should follow the path of the development of knowledge. We will call the teaching of a mathematical discipline *genetic* if it follows natural ways of the creation and application of the mathematical theory. Genetic teaching gives the answer to the question: how can the development of the contents of the mathematical theory be explained?

Genetic teaching of mathematics at universities should have the following properties:

It should be based on students' previously acquired knowledge, experience and level of thinking;

For the study of new themes and concepts, the problem situations and wide contexts (matching the experience of students) of non-mathematical or mathematical content should be used;

In teaching, various problems and naturally arising questions are widely used, which should be answered by students independently with minimal necessary effective help of the teacher;

Strict and abstract reasonings should be preceded by intuitive or heuristic considerations; construction of theories and concepts of a high level of abstraction can be properly carried out only after accumulation of sufficient (determined by thorough analysis) supply of examples, facts and statements at a lower level of abstraction;

Students’ mental and cognitive activity should be stimulated: they should be constantly motivated;

The gradual enrichment of mathematical objects through the study of interrelations with other objects, through consideration of the objects themselves and by looking at results from new angles and in new contexts should be undertaken.

The genetic approach to the teaching of mathematical disciplines has various aspects: historical, logical-epistemological, psychological, socio-cultural. The basic themes of a course of discrete mathematics for pedagogical universities provides rich opportunities for using all these aspects, beginning with a historical one (see, e.g., Barnett et al., 2009). Further more, one can also apply the principle of the concentrated teaching (Safuanov, 2003) in this course

The program of a course includes the following themes:

Fibonacci numbers. Transformations of the sums of degrees of natural numbers. The Euler's summation formula. Elements of coding theory. Codes detecting and correcting errors. Hamming codes. Elements of combinatorics. Newton's binomial theorem. Pascal's triangle. The basic concepts of the graph theory. Eulerian graphs. Hamiltonian graphs. Planar graphs. The theorem of Euler about polyhedra. The nonplanar graphs of Kuratowski - Pontryagin. Bipartite graphs. The theorem of Koenig. The problem of Four colours.

It is expedient to begin the course with acquainting students with the method of mathematical induction. One can introduce the principle and method of mathematical induction informally, proceeding from reasons of common sense.

It is appropriate to demonstrate the first applications of the method of mathematical induction on the example of summation of consecutive natural numbers (or of their degrees). From these tasks, one can proceed to the proof of the Euler's summation formula (Graham, Knuth and Patashnik, 1994, pp.455-461).

As other applications of the method of mathematical induction it is possible to consider Catalan numbers, elements of combinatorics with Newton's binomial theorem and Pascal's triangle and, finally, Fibonacci numbers. The Fibonacci numbers have huge number of beautiful properties, many connections to other sections of mathematics; they have a lot of applications. The applications go as far as to the theoretical foundations of the stock and currencies exchange activities. The connections of Fibonacci numbers with gold section allow to consider the numerous applications in art – in architecture, music, together with applications in other spheres of the human activity - construction, botany etc.

Certainly, such concepts connected with names of famous scientists, as the Fibonacci numbers, the Pascal triangle, Newton's binomial formula, allow us to consider in detail both historical sources and preconditions of their origination. Therefore, it is possible to create fruitful problem situations for introduction and construction of these concepts. These problem situations will promote also the development of motivation of learning.

Elements of the coding theory (codes correcting errors, Hamming codes) constitute an applied theme intensively developed mainly during the second half of twentieth century. One can easily find both practical tasks, which have resulted in creation of the appropriate theories, and connections of these theories with such important sections of theoretical mathematics as linear algebra, theory of groups, theory of polynomials and theory of fields.

The great place in the course of discrete mathematics is occupied by elements of graph theory – one of major theoretical bases of modern applied mathematics which is distinct from traditional sections connected with concepts of limit and continuity. The graph theory also has been intensively developed mainly in 20-th century. However, the first sources of graph theory are in 18-th century, when Leonhard Euler was the first to pose and solve the famous problem on Seven Bridges of Koenigsberg. This problem, which until now has not lost its importance as an entertaining task for the capable pupils, results in the important concept of the Eulerian graph (graph containing an Eulerian cycle that is a cycle in a graph which visits each edge exactly once). It is possible to introduce also other concepts and results of graph theory (for example, Hamiltonian, planar and bipartite graphs) using a history of their origination from practical tasks and even from entertaining puzzles. For example, the concepts of planar and nonplanar graphs can be developed from the consideration of the famous problem of Three Houses and Three Wells, On the other hand, the famous Four Colour problem ("whether four coluors are sufficient to colour every planar map in such a way that regions sharing a boundary are coloured in different colours") gives rise to the demonstration of the complexity of graph theory. The simplified version of the problem where the number of colours is five can be solved more elementarily and its solution can be presented in a class.

Our experience of teaching discrete mathematics has contained rich manifestations of principle of concentrated teaching (Safuanov, 2003): anticipation, repetition, combination of functions and linkage (Verzahnung). For example, such topics as recurrences and coding theory are linked to many concepts of fundamental mathematics such as infinite series, groups, polynomials and matrices. Throughout the course, the ideas of induction and recurrence are repeatedly developed and used. Entertaining problems (Koenigsberg Bridges, Three Houses and Three Wells, Horse Tour on Chessboard) anticipate important concepts of graph theory. More globally, the course of discrete mathematics as a whole anticipates further, more sophisticated courses in Computer Science.

Thus, it is possible and useful to apply the genetic approach (combined with the principle of concentrated teaching) to the teaching of discrete mathematics

Literatur

Barnett, J., Bezhanishvili, G., Leung, H., Lodder, J., Pengelley, D., Ranjan, D., *Historical Projects in Discrete Mathematics and Computer Science*. – in: Resources for Teaching Discrete Mathematics, Hopkins, B. (editor), Mathematical Association of America, Washington, D.C., 2009.

Graham, R. L.; Knuth, D. E.; and Patashnik, O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

Safuanov, I. *Applications of the principle of the concentrated teaching in the design of the mathematical course at the university.* – In: Beitraege zum Mathematikunterricht 2003. Hildesheim: Franzbecker, 2003, S.557-560.

Safuanov, I. *The genetic approach to the teaching of algebra at the universities*. – In: International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 2005, v.36, p.257-270.

FLORIAN SCHACHT, Dortmund

Individuelle Begriffsbildungsprozesse in inferentialistischer Perspektive

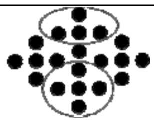
In einer 2009 durchgeführten Studie im Rahmen des Forschungsprojekts KOSIMA wurde genauer untersucht, inwiefern sich der vielfältige Umgang mit statischen und dynamischen Punktmustern zum Aufbau eines mathematisch tragfähigen Variablenbegriffs eignet. Entlang eines Fallbeispiels wird in diesem Beitrag ein Ausschnitt eines individuellen Begriffsbildungsprozesses zum Thema Variablenpropädeutik rekonstruiert. Im Fokus stehen hier zwei Szenen zum Umgang mit statischen und dynamischen Bildmustern. Ziel der Untersuchung ist zunächst, individuelle Begriffsbildungsprozesse auf deskriptiver Ebene explizit zu machen. Erst die genaue Beschreibung individueller begrifflicher Prozesse erlaubt eine Einschätzung zum Potential der Unterrichtsreihe mit Blick auf den Aufbau eines tragfähigen Variablenbegriffs. Das analytische Instrumentarium bilden dabei *individuelle Festlegungen* (vgl. Brandom 2000, Hußmann / Schacht 2009). Diese bilden die Grundlage für eine multiperspektivische Analyse sowohl individueller Begriffsbildungsprozesse als auch der zugrunde liegenden Unterrichtsreihe.

Anzahl von Punkten bestimmen – Propädeutik der Variable

In der Mathematik spielt der Musterbegriff eine herausragende Rolle (vgl. Wittmann 2005). Im Mathematikunterricht kann der vielfältige Umgang mit Mustern, z.B. mit statischen und dynamischen Punktmustern, gerade für die Arithmetik und Algebra und insbesondere für die Propädeutik der Variable in fruchtbarer Weise genutzt werden. Punktmuster sind sowohl mathematische Werkzeuge als auch theoretische Objekte bzw. Repräsentationen abstrakter mathematischer Ideen (vgl. Böttinger / Söbbeke 2009). Um dynamische arithmetische und geometrische Muster genauer zu untersuchen, bedarf es jedoch zunächst eines sicheren Umgangs mit statischen Punktmustern (erste Etappe der Unterrichtsreihe). In einer zweiten Etappe wird dann das Wachstum dynamischer Punktmuster thematisiert. Der Strukturierungsaspekt von Mustern kann sich hier noch tiefgreifender entfalten: Die Regel des Zuwachses wird genutzt, um die Anzahl von Punkten in hohen Folgegliedern zu bestimmen. Für die Beschreibung solcher Wachstumsvorgänge werden im Rahmen der Unterrichtsreihe Terme und Variable genutzt. Vor diesem Hintergrund bildet die intensive Auseinandersetzung mit statischen und dynamischen Punktmustern sowie mit Zahlenfolgen im Rahmen der Unterrichtsreihe die Grundlage für die Einführung der Variable.

Erkenntnisinteresse der Studie ist eine präzise Beschreibung individueller Begriffsbildungsprozesse zur Vairablenpropädeutik. Anhand von Fallbeispielen werden exemplarisch begriffliche Prozesse beschrieben. An Orhans Entwicklungsprozessen im Rahmen der Unterrichtsreihe lassen sich wichtige Phänomene beschreiben, die für den Aufbau eines mathematisch tragfähigen Variablenbegriffs von Bedeutung sind, z.B. die Strukturierung und Anzahlbestimmung von statischen und dynamischen Punktmustern.

Als Orhan zu Beginn der Unterrichtsreihe im Unterricht mit der Aufgabe konfrontiert wird, wie viele Punkte in dem Muster in Abb. 1 zu sehen sind, zählt er die Punkte zunächst einzeln ab. Die Mitschülerin Ariane unterbricht ihn: „Da musst du doch nicht zählen. Das sind 4·5!“. Orhan notiert nach kurzer Zeit in sein Heft: „Im Bild sind 20 Punkte. Oben sind 4 Punkte und unten sind 5 Punkte. Und die beide nehme ich mal.“ Später umkreist er jeweils 4 und 5 Punkte (vgl. Abb. 1). In einer Analyse der Szene wurden Orhans Festlegungen rekonstruiert. Individuelle Festlegungen sind kleinste Einheiten von Urteilen, mit denen das Subjekt Aussagen über seine Weltwahrnehmung formuliert. Mit jeder Festlegung wird das individuelle Wissen neu strukturiert und zugleich eine Position bezogen, für die man Gründe angeben können muss bzw. aus denen sich weitere Festlegungen ableiten. Festlegungen sind individuell und müssen nicht wahr sein. Orhan geht in dieser Szene folgende Festlegungen ein: *Ariane kann ein Produkt finden, das es erlaubt, das Muster zu strukturieren* sowie *Die Faktoren des Produktes lassen sich in der Zeichnung abtragen*. Diese beiden Festlegungen berechtigen Orhan nun zu einer weiteren und neuen Festlegung: D*ie Faktoren des Produkts kann man im Muster finden.*

 **Abb. 1**: Orhan: „*4·5=20*“	Orhans Hefteintrag: „ *Im Bild sind 20 Punkte. Oben sind 4 Punkte und unten sind 5 Punkte. Und die beide nehme ich mal.*“

Festlegungen als kleinste Analyseeinheiten

Anhand dieses Beispiels kann das Potential von Festlegungen für die Analyse individueller Begriffsbildungsprozesse genauer beschrieben werden: sie eignen sich sowohl zur Beschreibung lokaler Phänomene in gewissen Situationen (Kurzzeit-Perspektive) als auch zur Beschreibung von Entwicklungsprozessen wie z.B. der Entstehung neuer Festlegungen (Langzeit-Perspektive). Festlegungen adressieren keinen bestimmten epistemischen Status, sondern meinen jede Art von Urteil. Diese vorab nicht kategorisierende Perspektive ermöglicht, individuelle Begriffsbildungsprozesse sowohl als individuelle Vorstellungsentwicklungen zu beschreiben als auch zugrundeliegende Interaktionsmuster mit zu berücksichtigen.

Das obige Beispiel verdeutlicht, inwiefern die Rekonstruktion individueller Festlegungen Hürden im Umgang mit statischen Punktmustern auf lokaler Ebene (in Kurzzeit-Perspektive) explizit machen kann. Diese Festlegung, dass die zwei Faktoren 4 und 5 disjunkte Teilmengen im Muster darstellen, ist mathematisch nicht tragfähig. Insbesondere formuliert er nicht die Festlegung, dass das Produkt 4·5 als Bündelung von 4 gleichmächtigen Teilmustern aufgefasst werden könnte.

Das obige Beispiel gibt darüber hinaus Einblick in die Entstehung neuer Festlegungen. Deutlich wird dabei, dass neue Festlegungen diskursiv vor dem Hintergrund des eigenen Erfahrungshorizontes entstehen. Von besonderem Interesse ist dabei die Entstehung neuer Festlegungen. Festlegungen sind analytische Einheiten des Inferentialismus (Brandom 2000). Festlegungen werden durch weitere Festlegungen (sog. Berechtigungen) gestützt und können weitere Festlegungen implizieren. Vor dem Hintergrund dieser epistemologischen Annahme lassen sich Begriffsbildungsprozesse als die Entwicklungen individueller Festlegungen rekonstruieren. Arianes Festlegung ist Anlass für Orhan, die Faktoren des Produktes 4·5 im Muster zu finden. Das Ergebnis ist zwar mathematisch nicht tragfähig, jedoch in dieser Situation viabel. Orhans neue Festlegung (s.o.) entsteht somit vor dem Hintergrund sowohl von Arianes Festlegungen als auch seiner eigenen. Mit Festlegungen lassen sich somit nicht nur individuelle Vorstellungsentwicklungen beschreiben, sondern auch Interaktionsmuster rekonstruieren.

Dieses Beispiel verdeutlicht eine weitere Eigenschaft der analytischen Einheit der Festlegung: Sie steuern den individuellen Begriffsgebrauch. Orhans Multiplikationsbegriff in dieser Situation liegt die Festlegung zugrunde, dass die Faktoren eines Produkts zwei disjunkte Punktmengen in einem Muster darstellen (vgl. Abb. 1). Mit Blick auf die Verwendung von Begriffen fragt Brandom (2000 S. 253): „Was tun wir, wenn wir etwas aussagen, behaupten oder eine Erklärung abgeben? Die allgemeine Antwort lautet, daß wir eine bestimmte Art von *Festlegung* eingehen.“ Es soll an dem folgenden Beispiel aus einem Interviewmitschnitt noch einmal verdeutlich werden, inwiefern das Eingehen mathematisch nicht tragfähiger Festlegungen bei statischen Punktmustern sich auf den Begriffsbildungsprozess zur Variablenpropädeutik auswirken kann.

Ausblick

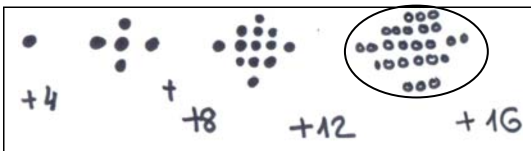
<table>
<tr>
<td>

Abb. 2: Aufgabe: 3 Muster sind gegeben. Zeichne das vierte Muster!</td>
<td>Orhans Festlegung: *Vielen dyamischen Punktmustern liegen arithmetischen Regelmäßigkeiten zugrunde, die man für die Anzahlbestimmung des nächsten Musters nutzen kann.*</td>
</tr>
</table>

Auftrag an Orhan in dieser Szene war, das Muster fortzusetzen und nach den gegebenen ersten drei Mustern das vierte zu zeichnen. Von zentraler Bedeutung in den dynamischen Situationen ist die Bestimmung der Regel des Zuwachses. Orhan zählt in dieser Situation zunächst jeweils zwei Muster ab und bildet Differenzen. Dann formuliert er die Regel: „Es kommen erst 4, dann 8, dann 12 Punkte hinzu: 4er Reihe.“ Obwohl Orhan dieses komplexe Wachstumsverhalten präzise benennen kann, hat er Probleme, das vierte Muster zu zeichnen. Eine Analyse dieser und ähnlicher Szenen und die Rekonstruktion der zugrundeliegenden Festlegungen ergeben, dass Orhan dynamischen Punktmustern wesentlich arithmetische Regelmäßigkeiten zuschreibt und dass er diese für die Anzahlbestimmung der nächsten Muster nutzt. Hürden sind bei der Identifizierung geometrischer Regelmäßigkeiten erkennbar. Die Analyse zeigt, dass sich das Eingehen der nicht tragfähigen Festlegung aus Abb. 1 in Langzeit-Perspektive auf die Bewältigung komplexerer Situationen (Abb. 2) auswirkt: Obwohl Orhan in dieser Szene auf hohem arithmetischen Niveau argumentiert, gelingt es ihm nicht, die geometrische Regelmäßigkeit für die Fortführung zu nutzen.

Im Hinblick auf den Aufbau eines tragfähigen Variablenkonzeptes erweist sich der vielfältige Umgang mit statischen und dynamischen Punktmustern als fruchtbar. Es zeigt sich auch, dass Hürden im Begriffsbildungsprozess z.T. auf andere nicht tragfähige Festlegungen zu anderen Zeitpunkten zurückgeführt werden können. So werden individuelle Begriffsbildungsprozesse rekonstruierbar als Entwicklungen individueller Festlegungsstrukturen sowohl in Kurzzeit- als auch in Langzeitperspektive.

Dieses Projekt ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

Brandom, Robert B. (2000): Expressive Vernunft. Begründung, Repräsentation und diskursive Festlegung. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Böttinger, Claudia / Söbbeke Elke (2009): Growing Patterns as Examples for Developing a new View onto Algebra and Arithmetic. In V. Durand-Guerrier (Ed.), European Research in Mathemat-ics Education VI. Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Re-search in Mathematics Education. Lyon, France.

Hußmann, Stephan / Schacht, Florian (2009): Ein inferentialistischer Zugang zur Analyse von Begriffsbildungsprozessen. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. S. 339-342. Münster: WTM.

Wittmann, E. Ch. (2005): Eine Leitlinie zur Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar)-Mathematik als Wissenschaft von Mustern. *Der Mathematikunterricht* 50, H.2/3, 5 – 22.

Ingolf SCHÄFER, Göttingen

Wissenskonstruktion „schwacher“ Schülerinnen und Schüler in Mathematik in der Sek. 1

Das Thema der „schwachen“ Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe 1 gerät immer mehr in den Fokus der mathematikdidaktischen Forschung. Dabei ist der untersuchte Personenkreis nicht sehr scharf definiert und wird meist im Kontext der „Rechenschwäche“ diskutiert (vgl. (Moser Opitz 2007) für einen Überblick über die verschiedenen Richtungen und Ansätze). Wenig erforscht ist allerdings die Tatsache, ob und, falls ja, in welcher Weise sich die Wissenskonstruktion solcher „schwacher“ Lernender von der „normaler“ oder gar „begabter“ unterscheidet.

In diesem Beitrag wird ein theoretisches Werkzeug dargestellt, mit dem sich der Autor dieser Frage nähern möchte und einige Hypothesen präsentiert, die sich aus der empirischen Exploration der Theorie ergeben haben.

Epistemische Handlungen

Einen geeigneten Rahmen zur Untersuchung von Wissenskonstruktion stellt m. E. ein handlungstheoretisches Konzept dar, das auf so genannten epistemischen Handlungen basiert; damit sind also solche Handlungen gemeint die mit Erkenntnisentwicklung verbunden sind. Der Prozess des Konstruierens vom neuem mathematischen Wissen zeigt sich dabei dadurch, dass das Individuum verschiedene solcher epistemischer Handlungen vollzieht.

Verschiedene Autoren haben hier ganz unterschiedliche Handlungen erwähnt. Beispielsweise findet Bikner-Ahsbahs (2005) bei der Untersuchung des Auftretens interessendichter Situationen die drei Handlungen *Sammeln, Verknüpfen* und *Struktur sehen* bei der Untersuchung von Schulklassen. Hülswitt (2008) findet ebenfalls drei solche Handlungen, nämlich *Kreieren, Durcharbeiten* und *Entdecken* bei der Untersuchung von Kindergartenkindern. In der Theorie der kontextuellen Abstraktion (Hershkowitz et al. 2001) finden sich ebenfalls drei epistemische Handlungen, die den Prozess der Abstraktion in Mathematik begleiten: *Wiedererkennen, Aufbauen* und *Konstruieren.* Diese sind geschachtelt, d.h. ein Aufbauen setzt ein vorheriges Wiedererkennen voraus und Konstruieren beinhaltet Aufbau- und Wiederkennenshandlungen. Ferner kann es verschiedene, parallel ablaufende Prozesse der Wissenskonstruktion geben.

Eine vergleichende Analyse liefert Bikner-Ahsbahs (2007). Ich wähle hier die drei letztgenannten epistemischen Handlungen, da diese einerseits im Rahmen vieler Untersuchungen erfolgreich genutzt werden konnten und andererseits gerade das Wiedererkennen bzw. Nichtwiedererkennen von mathematischen Strukturen bei „schwachen“ Schülerinnen und Schülern meiner Erfahrung nach ein sehr grundlegendes Problem darstellt.

Emotive Färbung von Handlungen

In der Kognitionsforschung hat nach Schwarz (2008) die sogenannte „Emotive Wende“ Einzug gehalten, d.h. die starke Interaktion der emotionalen und kognitiven Areale des Gehirns wird allgemein anerkannt (Damasio 1995; Roth 2003), wenn auch kein weitgehend akzeptiertes Modell für Emotionen existiert (Schwarz-Friesel 2007). Es ist jedoch ein Fakt, dass neben anderen Informationen beim Übergang in das Arbeitsgedächtnis auch emotionale Information mit gespeichert wird und diese emotionale Information beispielsweise Abruf und Speichern von weiteren Informationen fördern oder behindern kann (Schwarz-Friesel 2007). Es ist also zu vermuten, dass gerade bei „schwachen“ Schülerinnen und Schülern mathematische Wissenskonstruktion durch die emotionale Färbung beeinflusst wird. Dabei erscheint mir die Metapher der Färbung geeigneter, um die Unschärfe der emotionalen Informationen zu charakterisieren, als die von Evans et al. (2006) benutzte Metapher der Ladung.

Um die emotive Färbung zu analysieren, sind beispielsweise eine linguistische Emotionsanalyse im Sinne von Schwarz-Friesel (2007) oder „Positionierungsanalysen“ im Sinne von Evans et al. (2006) möglich.

Die Selbstbestimmungstheorie der Motivation von Deci und Ryan (2000) bietet durch die drei postulierten psychologischen Grundbedürfnisse nach Kompetenz, Autonomie und sozialer Eingebundenheit hier einen weiteren Ansatz. Im Wesentlichen tragen nur solche Emotionen zu Verhaltensänderungen bei, die im Zusammenhang mit der Befriedigung bzw. Gefährdung der psychologischen Grundbedürfnisse auftreten.

Handlungstheoretische Hintergrundtheorie und Objektbezüge

Die Handlungstheorie von Oerter (1982) bildet die Hintergrundtheorie für den obigen handlungstheoretischen Ansatz. Oerter baut dabei auf den Arbeiten von Leontjew (1977) zur Tätigkeitstheorie auf und entwickelt diese in Richtung auf Handlungen weiter. Für Oerter stehen die Handlungen als primäre Realität an der Spitze der Begriffsentwicklung und alle anderen Begriffe müssen sich aus den Handlungen ableiten lassen.

Wichtig dabei ist, dass sich Handlungen stets auf Objekte beziehen, aber für das konkrete Individuum ein Objekt erst durch Handlungen wahrnehmbar wird. Dieser Unterschied bildet eine Stufe in dem Stufenmodell der Objektbezüge, das für Oerter aus drei Stufen besteht.

In der ersten Stufe sind Objekt und Individuum noch ungeschieden, d.h. der Bezug zum Objekt ist rein situational verhaftet. In der nächsten Stufe hat das Individuum das entsprechende Objekt für sich konstruiert und kann es demzufolge in unterschiedlich breiten Kontexten einsetzen. Bei der letzten Stufe des Objektbezugs handelt es sich strenggenommen um die Äquivalenzklassen des Objekts über die verschiedenen Kontexte, d.h. also das Objekt ohne den entsprechenden Gebrauch.

Am Beispiel des Objekt „ein Viertel" lässt sich das folgendermaßen erklären: Für einen Schüler ist ein Viertel einer konkreten Pizza, das bedeutungslos wird, wenn es aufgegessen wird, möglicherweise auf der ersten Stufe. Falls er Pizza (oder ähnliche Objekte) vierteln kann, aber dies Vierteln nicht in einem anderen Kontext beherrscht, wäre der Bezug auf der zweiten Stufe. Die abstrakte Bruchzahl „ein Viertel" bildet dann die dritte Stufe.

Mit Hilfe dieser Objektbezüge lassen sich nun die einzelnen epistemischen Handlungen entsprechend ihrer Stufen aufgliedern und ihre emotive Färbung studieren. Dabei ist zu beachten, das Handlungen, die sich auf die dritte Stufe beziehen, nicht direkt festzustellen sind, weil die Handlungen stets in Kontexte eingebettet bleiben, also re-kontextualisiert sind Interessant ist nun einerseits die Breite der jeweiligen Kontexte und andererseits der Einfluss, den eine negative Färbung auf das Wiedererkennen haben kann.

Hypothesen für die Foschung

Bei der bisherigen Auswertung einiger Lerninterviews von „schwachen" wie „normalen" Schülerinnen und Schülern fiel folgendes auf:

1. Situationen und Kontexte beeinflussen das Auftreten epistemischer Handlungen, insbesondere des Wiedererkennens, und zwar bei „Schwächeren" in größerem Maße.
2. „Schwache" Schülerinnen und Schüler wechseln seltener den mathematischen Kontext und bleiben oft situationaler.
3. „Stärkere" Schülerinnnen und Schüler können mehrere Kontexte zur gleichen Zeit verfolgen.
4. Emotive Färbungen können den Zugang zu Objekten erschweren und teilweise schon das Einlassen auf Wissenskonstruktionsprozesse verhindern:
    a. Emotive Färbungen können Wiedererkennen und Aufbauen negativ beeinflussen

b. Emotive Färbungen können im Extrem Vermeiden evozieren.

Diese Hypothesen sollen in zukünftiger Forschung systematisch untersucht werden. Am Ende sollte es möglich sein, gewisse Muster oder Typen in den epistemischen Handlungen zu finden und die Rolle der emotiven Färbung der Objektbezüge auf den Wissenskonstruktionsprozess besser zu verstehen.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation : Theorie interessendichter Situationen*. Hildesheim u.a.: Franzbecker.

Bikner-Ahsbahs, A. (2007). Ein Vergleich von Handlungsmodellen zur Entstehung mathematischen Wissens in Lehr-Lern-Situationen. In Peter-Koop, A. und Bikner-Ahsbahs, A. (Hrsg.) *mathematische bildung - mathematische leistung.* Hildesheim u.a: Franzbecker. 249-268

Damasio, A. (1995). *Descartes Irrtum. Fühlen, Denken und das menschliche Gehirn*. München u.a.: List.

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. Psychological Inquiry, 11(4), 227-268.

Evans, J., Morgan, C., Tsataroni, A. (2006). Discursive Positioning and Emotion in School Mathematics Practices. Educational Studies in Mathematics, 63(2), 209-226.

Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: Epistemic actions. Journal for Research in Mathematics Education, 32(2), 195-222.

Hülswitt, K. (2008). Freie mathematische Eigenproduktionen: Die Entfaltung entdeckender Lernprozesse durch Phantasie, Ideenwanderung und den Reiz unordentlicher Ordnungen. In Graf, U. und Moser Opitz, E., *Diagnostik und Förderung im Elementarbereich und Grundschulunterricht.* Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren. 150-164

Leontjew, A.N. (1977). *Tätigkeit, Bewusstsein, Persönlichkeit*. Stuttgart: Klett.

Moser Opitz, E. (2007). *Rechenschwäche-Dyskalkulie : Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern*. Bern u.a.: Haupt-Verl.

Oerter, R. (1982). Interaktion als Individuum-Umwelt-Bezug. In E. D. Lantermann (Ed.), *Wechselwirkungen*. Göttingen: Verlag für Psychologie. 101-127

Pendlington, S. (2006), Mathematics isn't easy. Mathematics Teaching Incorporating Micromath, 197, 3-8.

Roth, G. (2003). *Aus Sicht des Gehirns*. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Schwarz-Friesel, M. (2007). *Sprache und Emotion*. Tübingen und Basel: A. Francke Verlag.

Schwarz, M. (2008). *Einführung in die kognitive Linguistik*, 3. Auflage, Tübingen und Basel: A. Francke Verlag.

GDM-Tagung 2010
München
ABS-1-171

Ulrike Schätz
Ludwig-Maximilians-Universität München

Geometrie zum Anfassen

In dieser Veranstaltung wurden den Teilnehmerinnen und Teilnehmern Beispiele handlungsorientierten Geometrieunterrichts für den Einsatz in verschiedenen Alters- und Kenntnisstufen vorgestellt. Dabei sollten die „Handlungsprodukte“ ein ausgewogenes Verhältnis von „Kopfarbeit“ und „Handarbeit“ gewährleisten. Bei der Ganzheitlichkeit des handlungsorientierten Geometrieunterrichts wurden verschiedene Aspekte beachtet:

- **Personaler Aspekt:** Die Schüler und Schülerinnen sollen sich ganzheitlich – also als *ganze* Person – angesprochen fühlen und Mathematik positiv erleben. Sie finden selbsttätig eigene Fragestellungen.
- **Inhaltlicher Aspekt:** Die Schülerinnen und Schüler erarbeiten selbsttätig in Einzelarbeit oder in Partnerarbeit mathematische Lerninhalte. In diesem Zusammenhang geht es auch um Kommunizieren, Argumentieren, Begründen und Beweisen.
- **Methodischer Aspekt:** Die Schüler und Schülerinnen erleben verschiedene Unterrichtsmethoden und erwerben dabei Kompetenzen.

Inhalte

- Regelmäßiges Fünfeck falten
- Origami und Mathematik (Eigenschaften geometrischer Figuren und Modelle)
- Multiplizieren von Brüchen durch Falten
- Flächenformeln „erfalten“
- Innenwinkelsumme eines Dreiecks (Hinführung durch Falten, dann Begründung mithilfe eines Arbeitsblatts)
- Binomische Formeln „erfalten“
- Satz von Thales „erfalten“
- Satz von Pythagoras (Hinführung und Begründung mithilfe eines Puzzles und eines Arbeitsblatts)

PETRA SCHERER, Bielefeld, GÜNTER KRAUTHAUSEN, Hamburg

Ausgestaltung und Zwischenergebnisse des EU-Projekts NaDiMa (Partner Deutschland)

Dieser Beitrag ist Teil 2 zu Krauthausen/Scherer (2010a, in diesem Band).

1. Inhaltliche & Methodische Umsetzung

In der deutschen Projektgruppe wurden arithmetische Lernumgebungen für verschiedene Schuljahre konzipiert und erprobt. Dies geschah in drei zentralen Etappen (Pilotstudie, 1. & 2. Feldtest). Alle Unterrichtsstunden der Pilotstudie und des 1. Feldtests wurden videografiert und transkribiert. Erhebungen zur Motivation erfolgten über unterschiedliche, sich ergänzende Instrumente (in Abhängigkeit von der Projektphase oder vom Alter der Schüler: standardisierter Test SELLMO-S zur Lern- und Leistungsmotivation in der Schule; Items aus TIMSS 2007 zum Mathematikunterricht bzw. ihre Adaption für die eingesetzten Lernumgebungen; halbstandardisierte Interviews mit einzelnen Kindern, u. a. zu Lieblingsfächern, Einschätzung der Schwierigkeit des Mathematikunterrichts und analogen Fragen zur speziellen Lernumgebung, jeweils mit Begründungen).

Für den 1. Feldtest wurde im 2. & 4. Schuljahr die Lernumgebung Rechendreiecke (vgl. z. B. Krauthausen/Scherer 2010b) gewählt und in ca. acht Unterrichtsstunden u. a. mit folgenden Inhalten erprobt: einführende und offene Aufgaben, operative und problemorientierte Übungen (vgl. Scherer/Krauthausen 2010). Den Lehrpersonen wurden neben Hintergrundliteratur mögliche Stundenverlaufspläne inkl. Arbeitsblätter als Gerüst zur Verfügung gestellt. Ihnen war es freigestellt, aus den Einzelthemen auszuwählen oder diese auch zu modifizieren.

2. Natürliche Differenzierung bei offener Aufgabe

Bei offenen Aufgaben kann grundsätzlich auf individuellem Niveau gearbeitet werden. In welcher Form aber wird diese Offenheit *tatsächlich* genutzt? Zwei Probleme sind typisch: (a) eine grundsätzliche Unsicherheit bei offeneren Situationen, denn ein sachgerechter Umgang mit Offenheit im Unterricht muss von *allen* Beteiligten gelernt werden, um Beliebigkeit zu vermeiden. (b) Die Wahl eines angemessenen Schwierigkeitsgrads. Abgesehen davon, dass ›Schwierigkeit‹ ein subjektiver Begriff ist, gibt es bei der selbstständigen Wahl Kinder, die sich dabei systematisch und offensichtlich unterfordern. Wirksam ist hier u. U. das Selbstkonzept, speziell, ob ein Kind eher erfolgs- oder misserfolgsmotiviert ist: So wählen Misserfolgsmotivierte häufiger als Erfolgsmotivierte leichte Aufgaben, um sich den Erfolg von vornherein zu sichern, oder aber sie setzen sich unrealistisch hohe Ziele, so dass das Nichterreichen durch die große Aufgabenschwierigkeit erklärt werden kann (vgl. Lauth/Schwarz 1980, 172 f.). Andere Kinder – nicht nur die Leistungsstarken (vgl. z. B. Grossman 1975; Scherer 2007) – wählen bei offenen Aufgaben gezielt Zahlenmaterial oder Aufgaben (und dies erfolgreich), die im Unterricht noch nicht thematisiert wurden. Dies weist eher in die Zone der nächsten Entwicklung und kann deutlich zur Aufrechterhaltung der Motivation beitragen.

Bei unserer Erprobung sollten die Kinder ihre Rechendreiecke entsprechend der Kategorien *leicht*, *schwer* und *besonders* wählen (vgl. Krauthausen/Scherer 2011; auch van den Heuvel-Panhuizen 1996). Es zeigte sich für jede Kategorie ein recht weites Spektrum, wobei in den Kategorien leicht/schwer v. a. die Größe der Zahlen bzw. die erforderliche/›gefühlte‹ Rechenfertigkeit das Zuordnungskriterium waren. Dass es auch noch andere Kriterien gibt, macht u. a. den Reiz der (bewusst vorab nicht näher konkretisierten) Kategorie ›besondere‹ aus, die zu zahlreichen interessanten Lösungen und Begründungen führte (vgl. Krauthausen/Scherer 2011).

3. Natürliche Differenzierung bei problemorientierter Aufgabe

Im Projekt wurde u. a. der folgende Forschungsauftrag in Form von Behauptungen ›virtueller‹ Kinder eingesetzt: *Lisa behauptet: »Es gibt keine Rechendreiecke mit drei geraden Außenzahlen!« und Mehmet behauptet: »Es gibt keine Rechendreiecke mit drei ungeraden Außenzahlen!« Wer hat Recht? Probiere aus und erkläre!* Bewusst wurden hier eine wahre und eine falsche Behauptung kombiniert, um evtl. unterschiedliches Argumentationsverhalten der Schüler zu analysieren. Für die Ablehnung der ersten Behauptung reichte vielen die Angabe eines Gegenbeispiels. Bezogen auf die Fragestellung ist dies zunächst auch nahe liegend (hinreichend). Offen blieb dann aber eine Begründung bzw. die generalisierende Betrachtung *aller* Fälle, in denen ausschließlich gerade Außenfelder entstehen können (drei gerade oder drei ungerade Innenfelder). Im Unterricht, insbesondere bei der Reflexion im Plenum, muss hier die Lehrperson geeignete Impulse setzen und zur Diskussion auf der Meta-Ebene anregen. Die zweite Behauptung zu bewerten, war anspruchsvoller, da man zwangsläufig unterschiedliche Fälle untersuchen musste und unter Verwendung natürlicher Zahlen keine drei ungeraden Außenfelder möglich sind. Die Äußerungen wiesen hier ein breites Spektrum auf; einige Schüler hatten wenig Erfahrung mit unlösbaren Aufgaben und konnten diese nur schwer aushalten. So suchten einige nach Alternativen und Variationen, die die Aufgabe lösbar machten, und mündeten in andere Zahlbereiche (Brüche) oder Variationen des Formats (Änderung der Operation zur Multiplikation, in eine symmetrische Figur, z. B. Viereck, Sechseck; vgl. Krauthausen/Scherer 2010b).

4. Fazit & Perspektiven

Die Projekterprobungen konnten zeigen, dass die den Lernumgebungen innewohnende Substanz, die ein Arbeiten auf unterschiedlichen Niveaus ermöglicht, von den Schülern auch angenommen wird. Die jeweiligen Aufgabentypen (offene Aufgaben, offenere Forschungsaufträge, gezielte Problemstellungen) zeigten unterschiedliche Effekte und ließen sowohl inhalts- als auch prozessbezogene Kompetenzen integrativ zum Tragen kommen – ausdrücklich und von der Sache her nahe liegend.

So zeigte sich die natürliche Differenzierung u. a. in der *Wahl des Zahlenmaterials* (bei der problemorientierten Aufgabe geschickterweise kleine Zahlen, was auch reflektiert werden sollte) und durch die Anzahl der bearbeiteten Beispiele. Differenzierungen ergeben sich auch hinsichtlich der Problemlösestrategien (z. B. von den Innen- oder den Außenzahlen ausgehen; Beziehung Summe der Innenzahlen zur Summe der Außenzahlen untersuchen). Festzustellen waren Argumentationen anhand konkreter Zahlenbeispiele oder in allgemeiner Form. Das Spektrum reichte von der Betrachtung von Einzelfällen über Fallunterscheidungen, bis hin zur Vollständigkeit. Insgesamt kann durch solche Forschungsaufgaben ein grundsätzliches Begründungs- und Beweisbedürfnis geweckt werden (Winter 1983).

Der Vorteil substanzieller Lernumgebungen besteht darin, dass Anforderungsniveaus nicht vorab festgelegt sind und mit fließenden Übergängen in natürlicher Weise ermöglicht werden. In der von uns eingesetzten Form – mit dem Zusammenspiel individueller Zugänge und Bearbeitungen, Partner- und Kleingruppenarbeit, aber eben auch mit zentralen Reflexions- und Integrationsphasen – wird auch das soziale Lernen nicht vernachlässigt.

Die ersten Ergebnisse zeigten, dass die Motivation für den Mathematikunterricht und das Mathematiklernen insgesamt recht hoch ist, nicht nur bei leistungsstarken Schülern. Speziell wurde zu den eingesetzten Lernumgebungen geäußert, dass diese Aufgaben mehr Spaß gemacht haben, weil dort Muster auftraten, weil man selbst etwas aussuchen konnte oder weil man erfolgreicher war als sonst im Mathematikunterricht. Im Verlauf des Projekts werden die Motivationsaspekte noch genauer auszuwerten sein. Die Beispiele dokumentieren aber eindrücklich, dass intrinsische Motivation nicht zwingend an Anwendungsorientierung gebunden ist. Entscheidender als die Frage, ob Realitätsbezüge oder innermathematische Strukturen, scheint das Merkmal der enthaltenen Substanz zu sein, für die es die Kinder (u. U. neu) zu sensibilisieren gilt.

Hinsichtlich der Lehrerrolle sind insbesondere wesentlich: die eigene mathematische Durchdringung der Problemstellung, eine antizipierende Reflexion möglicher Strategien und Niveaus und die Analyse tatsächlicher Schülerbearbeitungen, Überlegungen zur Integration verschiedener Lösungen und Begründungen und damit verbunden auch die Fähigkeit, Plenumsdiskussionen angemessen zu moderieren. Dem Umgang mit den verschiedenen Schülerbeiträgen, ob verbal oder schriftlich, kommt eine zentrale Bedeutung zu: Da diese oft unvollständig oder nicht unbedingt mathematisch korrekt sind, muss die Lehrperson über ein vielfältiges Repertoire verfügen, wie z. B.: um Präzisierung nachfragen, insistieren, die Schüleräußerung zurückspiegeln (*»Ich habe dich jetzt so verstanden ...«*), ggf. mit dem bewussten Durchspielen eines Missverständnisses, um dadurch Konflikte zu erzeugen, die erneutes, präziseres Formulieren erfordern. Insgesamt ist eine Unterrichtskultur erstrebenswert mit einem durchgängigen und expliziten Modellverhalten der Lehrperson und der gewohnheitsmäßigen Initiierung und Aufrechterhaltung von Metakommunikation (z. B. über den Schwierigkeitsgrad von Aufgaben und entsprechende Wertmaßstäbe).

Literatur

Grossman, R. (1975). Open-ended lessons bring unexpected surprises. *Mathematics Teaching*(71), 14-15.

Krauthausen, G./Scherer, P. (2010a). Heterogenität, Differenzierung, Individualisierung – Hintergründe des EU-Projekts NaDiMa. (in diesem Band)

Krauthausen, G./Scherer, P. (2010b). *Umgang mit Heterogenität. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht der Grundschule*. Handreichung des Programms SINUS an Grundschulen. Kiel: IPN-Materialien. http://www.sinus-an-grundschulen.de/fileadmin/uploads/Material_aus_SGS/Handreichung_Krauthausen-Scherer.pdf

Krauthausen, G./Scherer, P. (2011). Natürliche Differenzierung durch offene Aufgaben im Rahmen substanzieller Lernumgebungen. Erscheint in: *Grundschulunterricht*(1).

Lauth, G./Schwarz, H. (1980). Anspruchsniveau im Vergleich von Schülern der Grundschule und der Schule für Lernbehinderte. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 31(3), 169-173.

Scherer, P. (2007). Offene Lernumgebungen im Mathematikunterricht – Schwierigkeiten und Möglichkeiten lernschwacher Schülerinnen und Schüler. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, 58(8), 291-296.

Scherer, P./Krauthausen, G. (2010). Natural Differentiation in Mathematics – The project NaDiMa. Erscheint in M. van Zanten & al. (Hrsg.), *Proceedings of 28th Panama Conference*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1996). *Assessment and realistic mathematics education*. Utrecht: Freudenthal Institute.

Winter, H. (1983). Zur Problematik des Beweisbedürfnisses. *Journal für Mathematik-Didaktik*(1), 59-95.

Das Projekt NaDiMa wird gefördert unter 142453-LLP-1-20089-1-PL-COMENIUS-CMP (vgl. www.nadima.eu).

Georg SCHIERSCHER, Schaan/LI

Die Null – das Rad der Mathematik?

Übersicht

- Vorbemerkung
- ZAHL als umfassendes Thema
- Kulturfluss von Osten nach Westen
- Die Null – Zwilling der Unendlichkeit
- Zusammenfassung

(Die Kurzfassung des Vortrages erfolgt hier umständehalber nur sehr rudimentär und vorwiegend plakativ. Es sei auf den Abriss im Programmbuch der GDM 2010 und vor allem auf die Literaturliste verwiesen.)

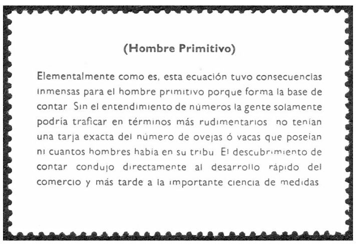
1. Vorbemerkung

Zero als Bezeichnung für ungesüsste Säfte, „schwarze Null" oder gar „rote Null" bei Bilanzen kriselnder Geschäfte, Schuldenuhr in New York, der die Nullen ausgehen, um die Staatsverschuldung der USA anzuzeigen; Billionen für Boni und Verluste! Nichts Einfacheres und Selbstverständlicheres als Zahlen? Nein, warnt Richard Dedekind, da „manche, eigentlich sehr zusammengesetzte Begriffe (wie z. B. der der Anzahl von Dingen) fälschlich für einfach gelten".

2. ZAHL als umfassendes Thema

„Die ganze Welt ist Harmonie und Zahl." Oder kurz: „Alles ist Zahl." (Pythagoreer)

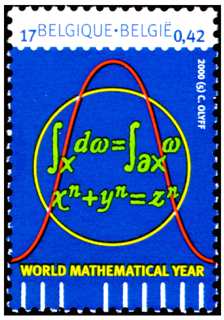
Zählen – reihen – bündeln



Briefmarke aus der Serie „Die zehn mathematischen Formeln, die das Antlitz der Erde verändert haben" (Nicaragua 1971).

„So elementar sie ist, hat diese Gleichung [1+1=2] unermessliche Konsequenzen für den frühen Menschen gehabt, denn sie bildet die Grundlage des Zählens. Ohne Zahlverständnis konnten Menschen nur in rudimentären Begriffen miteinander verkehren; sie hatten weder ein exaktes Mass für die Anzahl der Schafe oder Kühe, die sie besitzen, noch dafür, wie viele Leute zu ihrem Stamm zählen. Die Entdeckung des Zählens führte direkt zur schnellen Entwicklung des Handelns und später zur wichtigen Wissenschaft des Messens.“ (Übersetzung des auf der Rückseite der Briefmarke abgedruckten spanischen Textes.)

Im Laufe der Geschichte wurden viele Techniken des Zählens entwickelt: Kerbungen in Knochen und Holz, Knoten (z. B. das Quipu der Inkas), Fingerzahlen (5er-Bündelung per Hand, 10er-Bündelung mit beiden Händen, 20er-Bündelung mittels der Hände und Zehen) u.a.



Aus Anlass des WORLD MATHEMATICAL YEAR 2000 erschienene belgische Briefmarke, an deren unteren Rand ein Muster mit acht (3+5) Kerbungen – siehe Umrandung in der linken Abb. - aus dem berühmten, mindestens 10'000 Jahre alten Ishango-Knochen aus Belgisch-Kongo abgebildet ist.

Beugung und Dreigeschlechtigkeit

Die Die frühen Menschen kannten nur 1, 2, 3, (4), dann viele. Diese Zahlwörter waren Eigenschaftswörter (Adjektive) wie z. B. klein, farbig, schön. Was ist davon geblieben? In unserer Schriftsprache unterliegt nur noch die Eins der Beugung und Dreigeschlechtigkeit. Die Null hat dies wegen ihres relativ jungen Alters nicht mitgemacht; sie erscheint dementsprechend auch nicht in der Bibel.

Loslösung von den Dingen

Die Loslösung der Zählreihe von den gezählten Dingen hat dem Menschengeist grosse Mühe bereitet, aber auch der Umstand, dass null zu keinem Ding gehört, sondern zur Leere, zum Nichts. Eine Leistung unserer Zählreihe ist ihre Unabhängigkeit von den Dingen. Unsere Zahlen wurden dadurch selbst zu Objekten: eine folgenreiche Abstraktion!

3. Kulturfluss von Osten nach Westen

Das Positionsprinzip und der Begriff der Null waren in Indien schon im 5. Jh. n. Chr. bekannt. Unser Ziffernsystem geht mindestens auf diese Zeit zurück. Es gilt zu beachten, dass z. B. in der babylonischen Zahlschrift (ab dem 2. Jh. v. Chr.) die Null „nur“ als Fehlzeichen, nicht aber als Zahl auftritt.

Griechisches, persisches und indisches Kulturgut wurde in Bagdad übersetzt und in jener Gegend mitunter weiterentwickelt. Von dort wurde es von den Arabern als Vermittler nach Westen gebracht, wo es sich in lateinischen Übersetzungen allmählich im Abendland verbreitete. Wenigstens zwei bedeutende, auch in der Schulmathematik bekannte Namen aus dieser Zeit seien in diesem Zusammenhang erwähnt: Al-Chwarizmi (etwa 780-850) verfasste die Schrift „De numero Indorum“, der Mönch Gerbert von Aurillac (ca. 945-1003) verwendete als späterer Papst Sylvester II. bei seinem Klosterabakus Rechensteine, die – zwar sinnwidrigerweise – oben mit indischen Ziffern inkl. der Null versehen waren.

Der Codex Vigilanus von 976 – er wurde von einem Mönche namens Vigila in Nordspanien kopiert - ist die erste bekannte europäische Handschrift, in der man die neuen Ziffern indischen Ursprungs antrifft. Sie kommen auf der Briefmarke zum Internationalen Mathematikerkongress in Madrid 2006 als Motiv zu Ehren.

Seit 713 sassen die Araber in Spanien. 976 wurde in Cordoba die erste westliche Hochschule gegründet: Es wurde zum westarabischen Kulturzentrum, hinkte aber Bagdad zwei bis drei Jahrhunderte hinterher. Dementsprechend traf auch die indische Null mit Verspätung ein.

Im Mittelalter verhalfen besonders Fibonacci (ca. 1180-ca. 1250) und später die Rechenmeister, allen voran Adam Ries (1492-1559), den indischen Ziffern zu Geltung. Hindernisse für deren Verbreitung gab es viele: Nutzungsverbote wegen Angst vor Fälschungen (0 statt 6, 0 statt 9), Papiermangel, Verwurzelung mit den römischen Zahlen und dem vertrauten Abakus, gedankliche Schwierigkeit mit der Null. Sie war von wenigen verehrt, von vielen aber als Teufelswerk gehalten oder zumindest verspottet. Aus der Ablehung heraus kam sie auch zu ihrem Namen: nulla figura, lat., kurz: nulla, zu Deutsch: null.

WORLD MATHEMATICAL YEAR 2000				
0+0	0-0	0·0	0/0	0^0
0+1	0-1	0·1	0/1	0^1
0+∞	0-∞	0·∞	0/∞	0^∞
1+0	1-0	1·0	1/0	1^0
1+1	1-1	1·1	1/1	1^1
1+∞	1-∞	1·∞	1/∞	1^∞
∞+0	∞-0	∞·0	∞/0	∞^0
∞+1	∞-1	∞·1	∞/1	∞^1
∞+∞	∞-∞	∞·∞	∞/∞	∞^∞
MUCH MATH				

4. Die Null – Zwilling der Unendlichkeit

Die meisten Paradoxien oder gar Widersprüche erwachsen aus dem mathematischen Unendlich!

Was ist beispielsweise 1:0, 0:0 und etwa 0 hoch 0? Zu 1:0 schreibt Leonhard Euler: „[..] Denn da 1:0 eine unendlich grosse Zahl bedeutet, und 2:0 unstreitig zweimal so gross ist, so ist klar, dass auch eine unendlich grosse Zahl noch 2 mal grösser werden kann." (Vollständige Anleitung zur Algebra. Seite 41)

Man teste sein CAS bez. der Terme wie 1:0, 0:0, ∞:∞, 1: ∞, 0 hoch 0. Maple liefert zu Letzterem den Wert 1 (obwohl f(x,y)=x hoch y nicht stetig nach (0,0) hinein fortsetzbar ist)!

John Wallis (1616-1703) verteidigt in seiner mathesis universalis (1657) das Anrecht der Eins, eine wirkliche Zahl zu sein, schreibt aber: „Nullum non est numerus" – die Null ist keine Zahl (1697)! Der Null ist es noch viel schlimmer ergangen als der Eins: Sie musste bis zum Ende des 17. Jh. auf ihre endgültige Anerkennung warten.

5. Zusammenfassung

Die indischen Mathematiker brachten die Null und die Zahlen einander näher und veränderten unser Verständnis der Zahlen selbst. Dies war ihre „ganz eigene und grossartigste Errungenschaft".

Die indischen Ziffern sind heute zur einzigen Zahlschrift der grossen Völker geworden. „Sie und nur sie haben es dem Menschen ermöglicht, seine Rechenfertigkeit ins Ungeahnte zu steigern und die Welt – im Guten und im Bösen – der Zahl untertan zu machen." (Menninger, S. 240)

Nach Alfred N. Whitehead (1861-1947) ist die Null „in gewisser Weise die zivilisierteste aller Kardinalzahlen, und nur die ausgeklügelten Formen des Denkens zwingen uns, sie zu verwenden".

Literatur

Dekind, R. (1969). Was sind und was sollen die Zahlen? Stetigkeit und Irrationale Zahlen. Braunschweig: Friedr. Vieweg & Sohn.

Holenstein, E. (2004). Philosophie-Atlas. Orte und Wege des Denkens. Zürich: Ammann.

Ifrah, G. (1993). Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt/Main: Campus.

(Zu kritischen Stellungnahmen zur Geschichte der Zahlen, speziell zu diesem Werk siehe Bulletin APMEP n° 398. Avril – Mai 1995. (S. 531-551) und Bulletin APMEP n° 399. Juin 1995. (S. 675-685). Den Hinweis verdanke ich Prof. Fritz Schweiger.)

Kaplan, R. (2006). Die Geschichte der Null. München u. Zürich: Piper.

Menninger, K. (1958). Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht. 2 Bände.

Seife, C. (2002). Zwilling der Unendlichkeit. Eine Biographie der Zahl Null. München: Goldmann.

Wussing, H. (2008). 6000 Jahre Mathematik. Eine kulturgeschichtliche Zeitreise – 1. Von den Anfängen bis Leibniz und Newton. Band 1.

THOMAS SCHILLER, Linz

Kennzeichenerkennung und digitale Bildverarbeitung als fächerübergreifendes Thema M/INF

Worum geht es?

Zu gutem Mathematikunterricht gehört das fächerübergreifende Arbeiten an Beispielen mit Realitätsbezug. Anhand derartiger Beispiele lernt man die sinnvolle Verwendung von mathematischen Mitteln kennen und erhöht zugleich die Motivation beim Lernen. Daher habe ich als Thema meiner Dissertation die (automatische) Kennzeichenerkennung ausgewählt, die fächerübergreifend und projektartig in Mathematik und Informatik behandelt werden kann. Die SchülerInnen erleben das System etwa an Mautstationen bei Urlaubsfahrten, wenn die Eltern sich nicht an Mautschaltern anstellen müssen, sondern gleich durchfahren können. Auch durch unter SchülerInnen immer mehr verbreitete moderne Smartphones mit integrierter Kamera und Gesichtserkennungsfunktion werden sie mit automatischen Erkennungssystemen konfrontiert, die nach ähnlichen bzw. sogar gleichen Prinzipien funktionieren wie die Kennzeichenerkennung.

Die Kennzeichenerkennung und weitere Grundlagen aus der digitalen Bildverarbeitung wurden in meiner Dissertation für den Unterricht (sowohl für Mathematik als auch Informatik) aufbereitet. Dabei wurde dem Thema entsprechend viel Wert auf Computereinsatz (Tabellenkalkulation, Computeralgebrasystem, dynamische Geometriesoftware, …) gelegt. Zum leichteren Verständnis wird bei den Beispielen zusätzlich der jeweilige fachliche Hintergrund erläutert. Auch der Programmcode, der für den Informatikunterricht gedacht ist, wurde ausgiebig kommentiert und es gibt zahlreiche Hinweise auf mögliche Probleme im Unterricht und Lösungsvorschläge. Die Beispiele dienen zum Verstehen von einzelnen Teilfragen des Themengebiets – zu den Teilfragen gehören etwa das Erhöhen des Kontrastes eines Bildes, um einzelne Objekte darauf besser erkennen zu können, das Auffinden von Kanten, also raschen Übergängen zwischen hellen und dunklen (bzw. verschiedenfärbigen) Bereichen, welche Objekte abgrenzen, und das Erkennen von Geraden – mit mathematischen und informatischen Mitteln, sodass man am Ende alle Teilprobleme und Lösungsansätze und somit die gesamte Kennzeichenerkennung versteht.

Kantenerkennung

Im menschlichen Sehen und vermutlich auch in anderen biologischen Sehsystemen spielen Kanten eine wichtige Rolle. Komplette Figuren können aus wenigen auffälligen Linien rekonstruiert werden. Kanten könnten grob dadurch beschrieben werden, dass sich dort im Bild, wo sich eine Kante befindet, die Intensität stark ändert, und zwar innerhalb einer kleinen Umgebung und entlang einer ausgeprägten Richtung. Stärkere Intensitätsänderungen sind an der betrachteten Stelle ein stärkerer Hinweis auf eine Kante. Die Stärke der Intensitätsänderung entspricht der ersten Ableitung, welche daher ein Ansatz zur Bestimmung der Kantenstärke ist. [Burger u. a._2006, S. 117] Die Steilheit der Grauwertfunktion gibt also die Stärke einer Kante wieder. Die Steilheit der Grauwertfunktion ist nichts anderes als der Betrag des Gradienten und die Richtung der Kante ist orthogonal zur Richtung des Gradienten. [Tönnies_2005, S. 174f]

Die Kantenerkennung kann uns dazu dienen, die Position und Orientierung des Kennzeichens am Foto zu bestimmen und es entsprechend zu skalieren und zu drehen. Auch bei der optischen Zeichenerkennung (OCR) kann Kantenwissen nützlich sein.

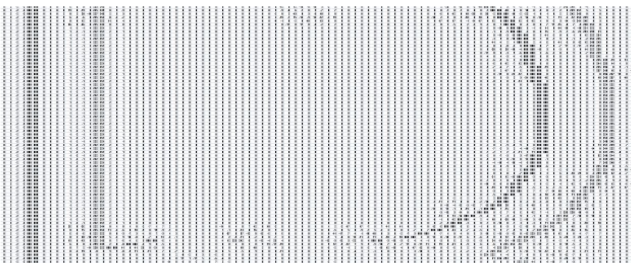
Ein aufgenommenes Bild kann als zweidimensionale Zahlenmatrix aufgefasst werden. Ein digitales Bild I ist, etwas formaler betrachtet, eine zweidimensionale Funktion von nicht negativen ganzzahligen Koordinaten auf eine Menge von Bildwerten, also $I\colon N \times N \rightarrow \mathit{Bildwertemenge}$. In dieser Form können Bilder im Computer dargestellt, gespeichert, bearbeitet, komprimiert oder übertragen werden. Bilder können also als numerische Daten betrachtet werden. [Burger u. a._2006, S. 10]

Graustufenbilder können also als Funktion I(u, v) betrachtet werden. Um die SchülerInnen nicht gleich mit zweidimensionalem Differenzieren zu überfordern, bietet es sich an, das Ganze zuerst eindimensional zu betrachten, indem man sich auf eine Bildzeile beschränkt. (Der Weg über den eindimensionalen Fall wird etwa auch in [Burger u. a._2006, S. 118ff] bestritten.) Man könnte etwa eine Funktion zeichnen, die relativ konstant einen hohen Wert (z. B. 250) hält, dann zu einem gewissen Zeitpunkt relativ plötzlich innerhalb eines kurzen Zeitraumes steil nach unten abfällt (z. B. bis zum Wert 10) und danach wieder relativ konstant auf dem Wert bleibt, auf den sie zuvor gefallen ist. Zusätzlich wird die Ableitungsfunktion benötigt. Man kann dann klar erkennen, dass die Ableitungsfunktion überall, wo die Funktion selber relativ konstant ist, ungefähr beim Wert 0 bleibt und nur beim relativ raschen Wechsel von 250 auf 10 plötzlich einen größeren negativen Ausschlag bekommt. Dort, wo also die betrachtete Bildzeile von einem fast perfekten Weiß auf ein fast perfektes Schwarz wechselt, also eine Kante vorliegt, besitzt die Ableitungsfunktion einen auffällig niedrigen Wert. Bei einem Wechsel von einem dunkleren in einen helleren Bereich hingegen ginge der Ausschlag ins Positive, da die Grauwertefunktion an-steigt. Derartige Ausschläge in der Ableitungsfunktion können also als Positionen für Kanten interpretiert werden.

Was den SchülerInnen hoffentlich auffallen wird, ist, dass hinter den zu analysierenden Bildern keine kontinuierlichen Funktionen stecken und daher nicht differenziert werden kann. Aber:

Die Ableitungen können durch Differenzen approximiert werden. Das Differenzieren in x- Richtung kann durch Differenzbildung des Pixelgrauwerts nach dem gerade betrachteten Bildpunkt mit dem Grauwert des Pixels vor dem gerade betrachteten Bildpunkt angenähert werden. [Tönnies_2005, S. 175]

Wichtiger Hinweis: Das Hintergrundwissen zum Differenzieren wird nicht unbedingt benötigt. Im Unterricht sollte es völlig ausreichen, wenn man erklärt, dass große Änderungen der Pixelwerte zwischen nahe beieinander liegenden Bildpunkten Anzeichen für Kanten sind. Wie bereits erwähnt wurde, ist laut [Burger u. a._2006, S. 117] eine Kante ja ein Ort von großer Intensitätsänderung. Somit lässt sich diese Grundidee hinter der Kantenerkennung im Unterricht bereits viel früher umsetzen, denn die benötigten Differenzen eignen sich auch schon für die Unterstufe. Greift man auf ein Programm zum Import bzw. Export von Pixelwerten zurück, so kann eine einfache Kantenerkennung beispielsweise in einem Tabellenkalkulationsprogramm umgesetzt werden. Dort können die erhaltenen Ergebnisse ausgewertet und interpretiert werden. Auch Visualisierungen in einem Tabellenkalkulationsprogramm sind möglich, wie der folgende Bildausschnitt zeigt, in dem die obere Hälfte des Buchstabens B sehr gut zu erkennen ist. Für derartige Visualisierungen muss weit herausgezoomt werden, was sich schnell umsetzen lässt. Man kann im Endeffekt im Unterricht, wenn man auf diese Weise arbeitet, schnell zwischen den Berechnungsformeln (Formelansicht), den Ergebnissen und einer bildähnlichen Darstellung wechseln, was sehr von Vorteil ist, da man alle Darstellungsmöglichkeiten somit quasi fast gleichzeitig sehen kann.



Zeichenerkennung mit Merkmalsvektoren

Ein Merkmal ist ein bestimmter, durch einen Skalar repräsentierter Aspekt der Bedeutung eines Objekts. Ein einzelnes Segment kann durch Merkmale beschrieben werden. Bei der Klassifikation werden die Merkmale ausgewertet, weshalb danach bei für eine Klassenzuordnung ausreichenden Merkmalen durch die Abbildung auf Merkmale eine Datenkompression erreicht werden kann. [Tönnies_2005, S. 296] (vgl. [Hofman_2008]: Der Wandel der Bilddaten in eine Zeichenkette ist eine sehr starke Kompression der ursprünglichen Rohdaten (1:31600). [Hofman_2008])

Merkmale lassen sich in einen mehrdimensionalen Merkmalsvektor zusammenfassen. Die Vektoren spannen einen Merkmalsraum auf. Ist beispielsweise zwischen Muttern und Schrauben zu unterscheiden, so wären die Anzahl der Löcher und die Kreisähnlichkeit mögliche Merkmale. Von jedem Segment wird der in diesem Fall zweidimensionale Merkmalsvektor im Merkmalsraum bestimmt. Merkmale sind gut gewählt, wenn die Merkmalsvektoren von Segmenten einer Klasse nahe beieinander liegen und zu unterschiedlichen Klassen gehörige Vektoren gut voneinander getrennt sind. [Tönnies_2005, S. 296]

Mögliche (formbasierte) Merkmale wären etwa der Flächeninhalt, der Umfang, die Länge des Randes, die Ausdehnung des Segments entlang seiner kürzesten und längsten Achse, die Kreisähnlichkeit, … [Tönnies_2005, S. 299] Auch topologische Maße, etwa die Anzahl der Löcher, sind Formmaße. [Tönnies_2005, S. 300]

Im Zusammenhang mit der (z. B. im Informatikunterricht umgesetzten) merkmalsbasierten Zeichenerkennung könnte man im Unterricht Wettkämpfe durchführen. Einzelne Schülergruppen können unabhängig voneinander an der Optimierung der Kennzeichenerkennung arbeiten. Die Vorgaben seitens der Lehrkraft können hier sehr unterschiedlich sein. Beispielsweise kann die Schriftart oder die Anzahl der möglichen verschiedenen Zeichen in den Nummernschildern vorgegeben werden. Je mehr unterschiedliche Zeichen zulässig sind, desto komplizierter wird die Situation. Auch können echte Kennzeichenfotos verwendet werden, was die Schwierigkeit noch um einiges erhöht, weshalb hier mit einer stark reduzierten Anzahl an zulässigen Zeichen gearbeitet werden sollte.

Literatur

[Burger u. a._2006] Burger, W.; Burge, M. J.: Digitale Bildverarbeitung, Eine Einführung mit Java und ImageJ, 2. Überarbeitete Auflage, Springer- Verlag Berlin Heidelberg 2005 und 2006; ISBN 978-3-540-30940-6 (Print) bzw. 978-3-540-30941-3 (Online) (SpringerLink), ISBN-13 978-3-540-30940-6

[Hofman_2008] Hofman, Y.: License Plate Recognition - A Tutorial; http://www.licenseplaterecognition.com (03.10.2008)

[Tönnies_2005] Tönnies, K. D.: Grundlagen der Bildverarbeitung, Pearson Studium, 2005, ISBN 3-8273-7155-4

TABEA SCHIMMÖLLER, Vechta

Wie verstehen Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit?

Dass für die Mathematik und die Analysis im Besonderen die Unendlichkeit von zentraler Bedeutung ist, scheint unverkennbar und so bezeichnete WEYL (1966) die Mathematik sogar als „Wissenschaft von der Unendlichkeit“. Doch obwohl der Unendlichkeit in der Mathematik eine besondere Rolle zukommt, taucht sie im Unterrichtsgeschehen der Sekundarstufe I selten bzw. gar nicht auf und wird weder in den Bildungsstandards noch in dem Kerncurriculum des Fachs Mathematik explizit erwähnt. Dennoch werden mathematische Inhalte thematisiert und damit Anforderungen an die Schülerinnen und Schüler gestellt, die zwingend Unendlichkeitsaspekte beinhalten, wie bspw. die Erläuterung der Zahlbereichserweiterung, das Darstellen von Zahlen auf der Zahlengeraden oder das Rechnen mit unendlich periodischen Dezimalbrüchen (vgl. NK, 2006). Wie verstehen also Schülerinnen und Schüler den Begriff der Unendlichkeit, der nicht direkt behandelt wird, aber dennoch implizit eine große Rolle spielt? Und inwieweit sind ihnen die verschiedene Unendlichkeitsaspekte, denen sie im Laufe ihrer Schulzeit im Fach Mathematik begegnen, vertraut?

Forschungsstand

In wichtigen einschlägigen Arbeiten zum Unendlichkeitsbegriff (PIETZSCH, 1967; PIAGET & INHELDER, 1971; TALL, 1977; Arbeitsgruppe um FISCHBEIN, 1979; vgl. dazu BEUTELSPACHER & WEIGAND, 2002; WINTER, 2000, MARX, 2006; TSAMIR & TIROSH, 2006) wird deutlich, dass der Unendlichkeitsbegriff durch seine Vielschichtigkeit ein sehr schwer zu fassender Ausdruck ist und die Vorstellungen der Probanden über die Unendlichkeit auffallend defizitär sind. Jedoch muss an dieser Stelle auch kritisch angemerkt werden, dass insgesamt nur wenige Studien existieren, die sich mit dem Phänomen der Unendlichkeit auseinandersetzen und dass viele dieser Untersuchungen auch wenig aktuell sind. Zudem konzentriert sich der Großteil der Arbeiten auf die Begegnung mit der Unendlichkeit in der Sekundarstufe II bzw. im Studium. Die Schülerinnen und Schüler werden aber schon sehr viel früher mit der Unendlichkeit konfrontiert.

Untersuchungsdesign

Um zu ermitteln, was Schülerinnen und Schüler unter Unendlichkeit verstehen und was sie damit verbinden, wurde auf eine empirische Untersuchung zurückgegriffen, welche sich aus den vier Phasen Standortbestimmung 1, pädagogische Intervention, Standortbestimmung 2 und Follow-

Up-Test zusammensetzte. Als Probanden wurden Schülerinnen und Schüler der 8. Jahrgangsstufe der Realschule gewählt, die sowohl mit den natürlichen, ganzen und rationalen Zahlen vertraut sind und zudem bereits mit unendlich periodischen Dezimalbrüchen umgehen mussten. Eruiert werden soll unter anderem, welches individuelle Verständnis die Schülerinnen und Schüler von Unendlichkeit, von der Mächtigkeit der Zahlbereiche, von unendlich periodischen Dezimalbrüchen und von der Dichtheit der rationalen Zahlen haben. Zur Untersuchung wurden insgesamt vier Gruppen ausgewählt, welche wiederum in die zwei Untersuchungsstränge Experimental- und Kontrollgruppe unterteilt wurden, sodass die Erhebung an insgesamt zwei Realschulen in jeweils zwei achten Klassen des gleichen Jahrganges erfolgte. Zur Standortbestimmung wurde ein Fragebogen ausgearbeitet, um das Verständnis und die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler vom Unendlichkeitsbegriff zu erheben. Zwischen Standorterhebung 1 und 2 wurde eine pädagogische Intervention durchgeführt, wobei der experimentelle Stimulus mit einer Unterrichtseinheit gesetzt wurde, welche für eine Dauer von fünf Unterrichtsstunden konzipiert wurde und als Thematik „Gleichmächtigkeit von Mengen“ beinhaltete. Dieser Unterrichtsinhalt wurde gewählt um zu eruieren, inwieweit die Schülerinnen und Schüler in der Lage sind, einen völlig neuen Unendlichkeitsaspekt aufzunehmen und inwieweit die Auseinandersetzung mit der Unendlichkeit die Gedanken der Probanden in Gang setzt. Zwei Monate nach der pädagogischen Intervention folgte ein Follow-Up-Test mit der Durchführung von Einzelinterviews, um die Ansichten einzelner Probanden zur Unendlichkeit näher zu ergründen und um die Nachhaltigkeit der Intervention zu untersuchen.

Exemplarischer Ausschnitt aus dem Datenmaterial

Erste Ergebnisse der Untersuchung liegen noch nicht vor, daher soll mit der Auswahl von vier Fragen aus dem Fragebogen ein erster Einblick in das Datenmaterial gegeben.

<u>Schüler: PASCAL</u>

(1) Was verstehst du unter „unendlich“?
- „Ich verstehe darunter, dass wenn man 1000 Billion nimmt, die Zahl danach.“

(2) Nenne ein Beispiel, wo etwas Unendliches vorkommt.
- „Weiß ich nicht.“

(3) Wo findest du in der Mathematik etwas Unendliches?
- „bei der Periode, da geht es immer weiter z.B. $0{,}333333\overline{3}$.“

(4) Wie viele Bruchzahlen gibt es zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$? Begründe deine Antwort.
- „Ich glaube dazwischen gibt es keine Zahlen weil es die direkte Zahl danach ist.“

Schülerin: MARIE

(1) Was verstehst du unter „unendlich“?
- „Unendlich ist wenn etwas immer weitergeht, es zwar einen Anfang hat aber wie im Wort beschrieben kein Ende hat. Etwas Unendliches muss aber nicht unbedingt einen Anfang haben.“

(2) Nenne ein Beispiel, wo etwas Unendliches vorkommt.
- „Das Universum, es wird vermutet, dass es unendlich ist, denn es ist noch nicht genau erforscht.“

(3) Wo findest du in der Mathematik etwas Unendliches?
- „z.B. eine Gerade. Sie hat keinen Anfang oder ein Ende so wie etwa eine Strecke.“

(4) Wie viele Bruchzahlen gibt es zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$? Begründe deine Antwort.
- „$\frac{1}{3},\frac{1{,}1}{3},\frac{1{,}2}{3},\frac{1{,}3}{3},\frac{1{,}4}{3},\frac{1{,}5}{3},\frac{1{,}6}{3},\frac{1{,}7}{3},\frac{1{,}8}{3},\frac{1{,}9}{3},\frac{2}{3}$ Also 10 Stück.“

Schülerin: SONJA

(1) Was verstehst du unter „unendlich“?
- „Unendlich bedeutet für mich, dass etwas sehr lange sich fortsetzt wie bei z.B. $0{,}\overline{3}$, da geht die 3 unendlich weiter.“

(2) Nenne ein Beispiel, wo etwas Unendliches vorkommt.
- „Ein Ameisenhaufen mit ganz vielen Ameisen. Da weiß man nicht wie viele drin sind. Also unendlich.“

(3) Wo findest du in der Mathematik etwas Unendliches?
- „Bei z. B. $0{,}\overline{4}$ da geht die 4 ja unendlich weiter

(4) Wie viele Bruchzahlen gibt es zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$? Begründe deine Antwort.
- „Es gibt dort unendlich viele Zahlen. Da man die Zahlen immer erweitern kann.“

Schüler: VICTOR

(1) Was verstehst du unter „unendlich“?
- „Dass es kein Ende gibt, irgendwann fängt alles von vorne an wie so ein Kreis.“

(2) Nenne ein Beispiel, wo etwas Unendliches vorkommt.
- „Donut, Pizza also die Form hat weder Anfang noch Ende“

(3) Wo findest du in der Mathematik etwas Unendliches?
- „Ein Kreis, eine 8 und ∞ und Periode.“

(4) Wie viele Bruchzahlen gibt es zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{2}{3}$? Begründe deine Antwort.
- „Viele, Begründung $\frac{2}{4},\frac{1}{2}$ usw.“

Pascal und auch Sonja scheinen mit der Unendlichkeit etwas zu verbinden, das für sie nicht mehr beschreibbar ist, so bspw. eine Zahl die sie nicht mehr benennen können oder die Anzahl von Ameisen in einem Ameisenhaufen. Marie hingegen beschreibt die Unendlichkeit als etwas ohne Anfang und Ende und ist in der Lage den Begriff sowohl zu definieren, abzugrenzen als auch mit geometrischen Beispielen zu untermauern. Victor wiederum verbindet das Unendliche mit einem Kreislauf und stützt dieses durch das Beispiel eines Kreises. Der Unendlichkeitsaspekt, dass zwischen zwei rationalen Zahlen unendlich viele weitere rationale Zahlen existieren, scheint anhand dieses exemplarischen Auszugs nur Sonja bekannt zu sein. Da sie zuvor jedoch Ameisen in einem Ameisenhaufen als ein Beispiel für etwas Unendliches nennt, muss noch weiteres Datenmaterial herangezogen werden, um genauere Aussagen über ihr Verständnis treffen zu können.

Ausblick

Anhand dieses nur kleinen Auszugs wird deutlich, wie breit gefächert und individuell die Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler über Unendlichkeit sind. Zudem lässt sich erkennen, dass das Verstehen dieses Begriffs und dass das Wissen über Unendlichkeit keinesfalls selbstverständliches Nebenprodukt des Umgangs mit Mathematik sind. Der Begriff der Unendlichkeit, als fundamentaler und faszinierender Begriff in der Mathematik, ist durch die Verankerung in so vielen mathematischen Inhalten auch im Mathematikunterricht ständig präsent und durch eine Vernachlässigung bei der Begriffsvermittlung können Defizite entstehen, welches sich auf das Verstehen von Zusammenhängen auswirken.

Literatur

Beutelspacher, A. & Weigand, H.-G. (2002): Endlich…unendlich! in: *Mathematik lehren*, 112, S. 4-8.

Marx, A. (2006): *Schülervorstellungen zu „unendlichen Prozessen“*. Texte zur mathematischen Forschung und Lehre 50. Hildesheim, Berlin: Franzbecker Verlag.

Niedersächsisches Kultusministerium (NK) (2006): *Kerncurriculum für die Realschule. Schuljahrgänge 5-10.* Hannover: Unidruck.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (2006): PME 1 to 30 – Summing up and looking ahead: A personal perspective on infinitive sets, in: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N (Hg.): *Proceedings of the 30th Conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1, Prague, S. 49-63.

Weyl, H. (1966): *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, 3. Aufl., München: R. Oldenbourg.

Winter, M. (2000): Am liebsten habe ich nur gerechnet… . Reflexionen zu Einstellungen von Lehramtsstudenten zur Mathematik und zum Mathematikunterricht, in: Institut für Didaktik der Naturwissenschaften, der Mathematik und des Sachunterrichts (Hrsg.): Zugänge zur Mathematik: Lernprozesse – Verfahren - Einstellungen, *Vechtaer fachdidaktische Forschungen und Berichte*, Heft 2, S. 35 – 58.

Florian SCHIMPF, Ludwigsburg, Christian SPANNAGEL, Heidelberg

Wer suchet, der findet – Zur Oberflächenreduktion in DGS

1. Einleitung

Dynamische Geometriesysteme (DGS) bieten vielfältige Möglichkeiten geometrische Sachverhalte mit dem Computer zu untersuchen und exploratives Lernen zu fördern. Durch die Nutzung eines DGS im Unterricht kann ein besseres Verständnis für geometrische Zusammenhänge erzeugt werden. Darüber hinaus kann ein schülerzentrierter Unterricht und eine Selbststeuerung des Lernens ermöglicht werden (Elschenbroich & Seebach, 2000; Kittel, 2007; Ritter, 2002; Roth 2006; Roth, 2008). Die Bedienung eines DGS erfolgt in der Regel durch Benutzungsprozesse mit der Maus an der grafischen Benutzungsoberfläche (GUI). Das Auffinden einzelner Icons auf der GUI beansprucht kognitive Kapazitäten, welche dann für das Erlernen der mathematischen Fachinhalte nicht mehr zur Verfügung stehen. Es wird angenommen, dass die Reduktion der Icon-Anzahl auf der GUI die lernhinderliche kognitive Belastung der Nutzer verringert und die Orientierung in einem DGS verbessert. Neuere Forschungen zu reduzierten Benutzungeoberflächen liefern Hinweise, dass eine Reduktion die Auffindbarkeit (*findability*) von Icons erhöht (Findlater & McGrenere, 2008; Findlater, 2009). Jedoch ist in reduzierten GUI das Bewusstsein (*awareness*) um fortgeschrittene Elemente vermeintlich geringer als in vollen Oberflächen.

In einem Experiment an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg wurden systematisch veränderte Benutzungsoberflächen des DGS Cinderella (Richter-Gebert & Kortenkamp, 1999) Versuchspersonen präsentiert und die Blickbewegungen der Nutzer bei Suchaufgaben mittels Eyetracking aufgezeichnet und ausgewertet.

Für das Design des Experimentes wurden folgende Hypothesen zugrunde gelegt:

- Reduzierte Benutzungsoberflächen erhöhen die Auffindbarkeit bereits benutzter Icons in DGS.
- Volle Benutungsoberflächen erhöhen das Wissen um noch nicht benutzte Icons in DGS.

2. Experiment

Um die möglichen Effekte einer GUI-Reduktion zu ermitteln, wurden für das Experiment mit Hilfe einer Bildbearbeitungssoftware systematisch veränderte Oberflächen des DGS Cinderella generiert. Ingesamt standen drei Varianten zur Verfügung: Neben der Originalbenutzungsoberfläche mit 48

Icons (volle Oberfläche) wurde eine reduzierte Oberfläche erzeugt, in der 25 Icons gelöscht wurden. Als dritte Variante wurde eine ebenfalls reduzierte Benutzungsoberfläche angeboten, bei der jedoch die 23 verbleibenden Icons in einer lückenlosen Aufreihung präsentiert wurden (kompakt reduziert). Die drei Oberflächen sind in Abbildung 1 dargestellt.

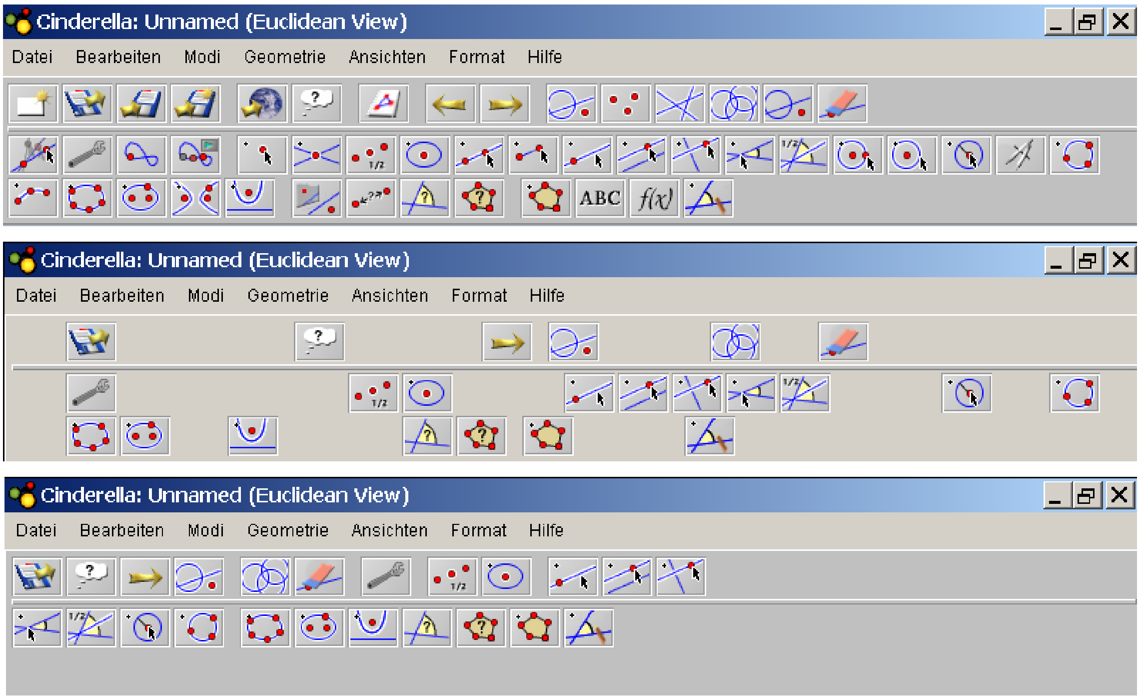


Abbildung 1: Die drei im Experiment verwendeten Cinderella-Oberflächen

Für das Experiment wurden 70 Lehramtsstudierende der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg akquiriert. Um die Möglichkeit der Vorkenntnisse von Cinderella auszuschließen, konnten nur Studierende an dem Experiment teilnehmen, die nicht Mathematik als Fach studieren. Die Teilnehmer (51 gültige Datensätze in der Auswertung, 43 weiblich, 8 männlich) wurden randomisiert auf die drei Oberflächen verteilt.

Im Experiment wurde den Versuchspersonen in einer Lernphase für jeweils 3 Sekunden ein einzelnes Icon gezeigt. Im Anschluss daran wurde für jeweils 10 Sekunden die entsprechende GUI von Cinderella präsentiert, in der das zuvor präsentierte Zielicon gefunden werden sollte. Insgesamt mussten in der Lernphase fünf Icons gefunden werden. In einem anschließenden Nachtest wurde den Versuchspersonen die volle Benutzungsoberfläche präsentiert, in der insgesamt zehn Icons gefunden werden mussten. Neben den fünf bekannten Icons aus der Lernphase mussten fünf neue Icons gesucht werden.

Die Augenbewegungen der Nutzer wurden mit einem berührungslosen binokularen Eyetrackingsystem aufgezeichnet und ausgewertet. Die Zeit bis zur ersten Fixation eines Icons durch die Versuchsperson (*Auffindzeit*) wurde in Millisekunden gemessen.

3. Ergebnisse

Für jede der drei Versuchsgruppen (volle/reduzierte/kompakt reduzierte GUI) wurden die Mittelwerte der Auffindzeiten für drei Icongruppen (Lernicons in der Lernphase, Lernicons in der Testphase, neue Icons in der Testphase) berechnet (siehe Abbildung 2). Eine zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung und mit dem GUI-Typ und der Icongruppe als Faktoren ergab nur einen signifikanten Unterschied im Faktor Icongruppe (F=22.85, krit. F-Wert bei α=0.001 beträgt $F_{(2,47)}$<8.03). Eine bonferroni-korrigierte Post-Hoc-Test-Analyse ergab allerdings keine signifikanten Unterschiede zwischen den einzelnen Icongruppen. Tendenziell haben aber die Versuchspersonen aller drei Gruppen für das Auffinden neuer Icons in der Testphase im Mittel mehr Zeit benötigt als für das Auffinden der Lernicons in Lern- und Testphase. Ein Interaktionseffekt zwischen GUI-Typ und Icon-Gruppe ließ sich nicht ermitteln. Beide Hypothesen wurden somit nicht bestätigt.

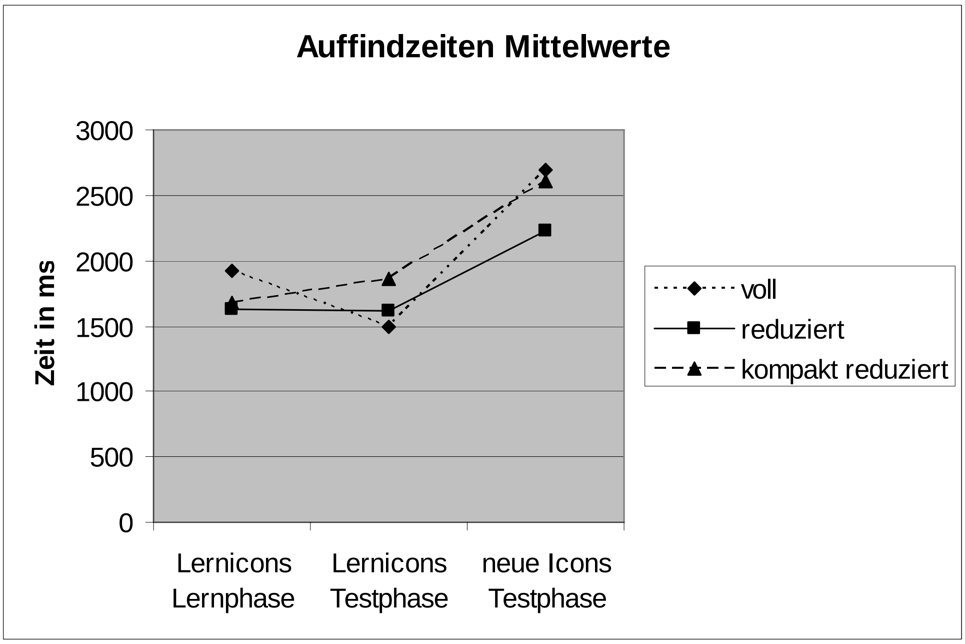


Abbildung 2: Mittelwerte der Auffindzeiten

4. Fazit und Ausblick

Aus den Ergebnissen der Studie lässt sich schlussfolgern, dass unterschiedliche GUI-Typen keinen Einfluss auf die Auffindzeiten von Icons in dem

DGS Cinderella haben. Lehrpersonen können sich somit aus fachdidaktischen Gründen für die Verwendung entweder von vollen oder von reduzierten Oberflächen entscheiden, ohne damit längere Suchprozesse von Icons seitens der Schüler zu riskieren.

Bei dem hier durchgeführten Experiment handelt es sich um ein wahrnehmungspsychologisches Experiment, bei dem Versuchspersonen Icons und systematisch veränderte Oberflächen präsentiert wurden. Aussagen über die Effekte der GUI-Reduktion beim Bearbeiten von Aufgaben im DGS Cinderella sind deshalb nur eingeschränkt möglich. In geplanten Folgeexperimenten sollen daher im Kontext konkreter Konstruktionsaufgaben mit dem DGS die Effekte der GUI-Reduktion untersucht werden.

5. Danksagung

Wir danken Irene Reeb für die Hilfe bei der Durchführung des Experiments. Dank gilt außerdem der LANDESSTIFTUNG Baden-Württemberg für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeit im Rahmen des Eliteprogramms für Postdoktorandinnen und Postdoktoranden.

Literatur

Elschenbroich, H.-J. & Seebach, G. (2000). *Dynamisch Geometrie entdecken. Elektronische Arbeitsblätter mit EuklidDynaGeo und II*. Rosenheim: CoTec.

Findlater, L. (2009). *Supporting Feature Awareness and Improving Performance with Personalized Graphical User Interfaces*. PhD dissertation, University of British Columbia 2009, http://faculty.washington.edu/leahkf/pubs/findlater-phd-thesis.pdf (Stand 03.10.2009)

Findlater, L. & McGrenere, J. (2008). *Comprehensive User Evaluation of Adaptive Graphical User Interfaces*, Workshop on Usable Artificial Intelligence, CHI 2008, http://faculty.washington.edu/leahkf/pubs/CHI2008-findlater-UsableAI.pdf (Stand 28.09.2009)

Kittel, A. (2007). *Dynamische Geometrie-Systeme in der Hauptschule*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

Mann, M. (2008). *Lernunterstützung durch interaktive Lernumgebungen für den Geometrieunterricht*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker

Richter-Gebert, J. & Kortenkamp, U. (1999). *The Interactive Geometry Software Cinderella*. Heidelberg: Springer.

Ritter, W. (2002). *Ein Jahr dynamische Geometrie mit Geonext in der 8. Klasse*. Bayreuth: Bayreuther Schriftenreihe math-kit.

Roth, J. (2008). Dynamik von DGS – Wozu und wie sollte man sie nutzen? In In: U. Kortenkamp, H.-G Weigand, T. Weth (Hrsg.), *Informatische Ideen im Mathematikunterricht* (S. 131-138). Hildesheim: Franzbecker.

Wolfgang SCHLÖGLMANN, Linz/Donau

Erwachsene und Mathematik – einige Anmerkungen

Einleitung

Das Thema Mathematik und Erwachsene kann aus verschiedenen Perspektiven betrachtet werden. Erwachsene bilden aufgrund des Konzeptes vom „Lebenslangem Lernen“ eine große Gruppe unter den Mathematiklernenden da viele Weiterbildungskurse auch mathematische Anteile besitzen. Wichtig ist dabei, dass erwachsene Lernende in ihrer Besonderheit wahrgenommen werden und sich von Schülerinnen und Schülern dadurch unterscheiden, dass sie bereits über Berufserfahrung verfügen. Bei Untersuchungen zu Mathematikkenntnissen, dem Verhältnis zur Mathematik, aber auch zum Verhalten beim Bearbeiten von mathematischen Aufgabenstellungen kann man feststellen, dass hier viele Erfahrungen aus dem Mathematikunterricht in der Schule einfließen. Dies bedeutet, dass auch längerfristige Auswirkungen des schulischen Mathematikunterrichts untersucht werden können.
An der Universität Linz wurden zahlreiche Untersuchungen zum Verhältnis von Erwachsenen zur Mathematik durchgeführt (Jungwirth, Maaß und Schlöglmann,1995) über die immer wieder auf den Bundestagungen (Schlöglmann, 1990 - 1999) vorgetragen wurde.

Mathematikkenntnisse von Erwachsenen

Die noch vorhandenen Mathematikkenntnisse aus der Schulzeit und auch eventuell erworbene Kenntnisse aus Berufstätigkeit oder Alltag beeinflussen natürlich die Möglichkeiten des Mathematiklernens in Weiterbildungskursen. Zu beachten ist in diesem Zusammenhang, dass die Kenntniserhebungen bei Erwachsenen einige Besonderheiten aufweisen. So gibt es im schulischen Bereich große internationale Untersuchungen, wie TIMSS oder die PISA – Studien die regelmäßig durchgeführt werden. Auch im Erwachsenenbereich gab es vergleichende Studien der OECD und in einigen Staaten wie in den USA oder in Großbritannien ist es üblich in bestimmten Abständen den Kenntnisstand der Bevölkerung zu erheben. Für Österreich existieren derartige Unersuchungen nicht. Um auch für Österreich solche Daten zu erheben ergab sich die Möglichkeit Kenntniserhebungen einer Institution zur beruflichen Rehabilitation auszuwerten, die durchgeführt wurden um Umschulungsmaßnahmen möglichst effektiv zu gestalten. In dieser Kenntniserhebung wurde der Kenntnisstand in den Bereichen Mathematik, Deutsch, Geometrisch Zeichnen und Physik untersucht. Für den Bereich Mathematik stand ein Datensatz von je nach Aufgabe 2600 – 3600 Personen zur Verfügung. Die

Aufgaben, die von der Institution zur beruflichen Rehabilitation entwickelt wurden, bezogen sich auf Kenntnisse aus der Schulmathematik die bis Ende der Schulpflicht vermittelt werden. Nun erfüllen diese Daten natürlich nicht die Kriterien der Repräsentativität für die erwachsene österreichische Bevölkerung, so sind keine Personen enthalten die über 57 Jahre alt sind, und es ist auch keine Repräsentativität bezüglich der berufstätigen Bevölkerung gegeben. Männer sind in der Stichprobe überrepräsentiert (63,6% Männer gegenüber 36,4% Frauen). Auch ist die Gruppe der Personen die eine berufliche Ausbildung (Berufsschule) absolviert haben mit 82,5% stark überrepräsentiert, es sind jedoch auch Personen getestet worden, deren höchste Ausbildung mit dem Absolvieren der Schulpflicht endete und es befinden sich auch Personen mit Höheren Bildung bis zum Universitätsstudium unter den Getesteten. Trotzdem erschienen die Daten bei entsprechend vorsichtiger Interpretation geeignet Erkenntnisse über das noch vorhandene Schulwissen aus Mathematik zu liefern.
Es ist hier aufgrund der Seitenbeschränkung nicht möglich die Aufgaben und die Ergebnisse genauer darzustellen, dazu sei auf Schlöglmann (1998) verwiesen. Es wird hier auch nur auf das Rechnen mit Zahlen eingegangen. Die Daten deuten darauf hin, dass etwa 90% der Erwachsenen mit überschaubaren natürlichen Zahlen ohne Taschenrechner sicher Rechnen können. Diese Sicherheit im Umgang nimmt aber beim Vorhandensein von zusätzlichen Schwierigkeiten, wie dass die Hierarchie von Rechenoperationen zu beachten ist oder wenn Klammern vorkommen, stark ab. Für Dezimalzahlen gilt, dass Addition und Subtraktion noch sicher beherrscht werden, während bei Multiplikation und Division die Rechensicherheit stark abnimmt. Für das Rechnen mit Brüchen findet man die Ergebnisse, die bereits aus den Untersuchungen für Schüler bekannt sind. Das deutet darauf hin, dass auch durch den weiteren Unterricht, den ja fast alle Erwachsenen durchlaufen haben und in dem Brüche verwendet wurden, die Probleme im Bruchrechnen nicht behoben wurde. Umso bedeutsamer erscheint aus dieser Sicht die Ersterarbeitungsphase. Es muss aber noch angemerkt werden, dass es Personen gibt, die auch einfache Rechenaufgaben nicht bewältigen. Interessant ist es vielleicht auch, dass die Korrelation zwischen den Mathematikkenntnissen und den Kompetenzen aus Deutsch höher ist, als die Korrelation mit Physik/GZ.

Verhalten von Erwachsenen beim Bearbeiten von Aufgaben aus der elementaren Algebra

Im Rahmen einer Lehrveranstaltung zur elementaren Algebra stellte ich den Studierenden die Aufgabe einer erwachsenen Person eine einfache

Aufgabe aus der elementaren Algebra zu stellen und den Lösungsprozess zu dokumentieren. Aus diesen Protokollen ergeben sich teilweise sehr interessante Einblicke in Beliefs von Erwachsenen, die sich während des Mathematikunterrichts in der Schule entwickelt haben und die diesen Erwachsenen vermutlich so nicht bewusst sind, sondern die nur während Aktionen auftreten.

So lässt sich bei zahlreichen Erwachsenen feststellen, dass sie bei Gleichungen diese nicht als Beziehungen zwischen Zahlen oder Größen wahrnehmen (Malle 1993), sondern bestimmte Buchstaben in der Formulierung erwarten. In einem Interview bei dem die Variablen M (Anzahl der Männer) und F (Anzahl der Frauen) in Beziehung gesetzt und in Form einer Gleichung geschrieben werden sollten, begann ein Erwachsener: „x =“. Auf die Frage warum er x schreiben würde antwortete er:

„Naja, wenn ich eine Gleichung schreiben muss, dann brauch ich doch irgendwo ein x“.

Hier ist das Charakteristikum für eine Gleichung, dass ein bestimmter Buchstabe als Variablenbezeichnung vorkommt und nicht, dass eine Beziehung vorliegt. Sfard und Linchevsky (1994) haben so ein Konzept als ein pseudostrukturelles Konzept bezeichnet, bei dem das Zeichen, in diesem Fall das x, zum Ding an sich wird und nicht auf etwas verweist.

Einen weiteren interessanten Punkt stellt die unterschiedliche Behandlung von Zahlen und Variablen beim Lösen einer Gleichung dar.

Beim Bearbeiten der Gleichung: $x/4 + 3 = 19$ wurde in der ersten Phase festgestellt, dass dann $x/4 = 16$ sein müsste, da 16 + 3 gleich19 wäre. Das Auftreten der Variable führte aber zur Aufgabe der inhaltlichen Interpretation der Gleichung, vermutlich wurde nach einem Lösungsverfahren gesucht das nicht gefunden wurde, und in der Folge kam es zur einer starken emotionalen Reaktion und zum Abbruch der Aufgabenbearbeitung.

Als letztes Beispiel dieser starken Orientierung an der Form sei noch eine Aufgabenbearbeitung angeführt bei der die Aufgabe lautete: $r^2 - r^2/4 =$. Die Aufgabe wurde sofort zu einer Gleichung, nämlich: $r^2 - r^2/4 = 0$ erweitert, die im Folgenden durch Ausmultiplizieren und Herausheben von r zu: $4r^2 - r^2 = 0$ und anschließend: $r(4r - r) = 0$ umgeformt wurde. Auch an diesem Beispiel zeigt sich wieder die starke Bindung des Denkens beim Lösen von mathematischen Aufgaben an der Form.

Zusammenfassend sei gesagt, dass viele Erwachsene nur über ein unzureichendes Verständnis von mathematischen Begriffen verfügen. Dies dürfte dadurch verursacht sein, dass die im Verlaufe des Mathematiklernens notwendigen Reifikationsprozesse (Sfard 1991) nicht oder nur unzureichend erfolgt sind und als Konsequenz nur pseudostrukturelle Konzepte vorliegen, die Lernende dazu zwingen sich an der Form und nicht an den Inhalten eines Konzeptes zu orientieren.

Literatur

Jungwirth, H., Maasz, J. & Schloeglmann, W. (1995) *Abschlussbericht zum Forschungsprojekt Mathematik in der Weiterbildung,* Linz: Universität Linz.

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig/Wiesbaden, Vieweg.

Schlöglmann, W. (1990). Didaktische Forschungsaufgaben im Weiterbildungsbereich; *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 241-244.

Schlöglmann, W. (1991). Möglichkeiten der Internationalisierung mathematischer Weiterbildung, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 429-432.

Schlöglmann, W. (1992). Fernstudienelemente in der Mathematischen Weiterbildung, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 395 - 398.

Schlöglmann, W. (1993). Mathematikkenntnisse von Erwachsenen, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 319 - 322.

Schlöglmann, W. (1994). Mathematiklernprozesse bei Erwachsenen, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 326 - 329.

Schlöglmann, W. (1995). Mathematikkenntnisse von Erwachsenen - Konsequenzen für den Mathematikunterricht an Schulen, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 412 - 415.

Schlöglmann, W. (1996). Zur Bedeutung von Anwendung und Theorie in Kursen der mathematischen Weiterbildung, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 385 - 388.

Schlöglmann, W. (1997). Rahmenbedingungen für das Mathematiklernen von Erwachsenen, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 443 - 446.

Schlöglmann, W. (1998). Was ist das Spezifische am Mathematiklernen von Erwachsenen?, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 537 - 540.

Schlöglmann, W. (1998). Was bleibt vom schulischen Mathematiklernen - Mathematikkenntnisse bei Erwachsenen. *mathematica didactica* 21/1, 86 - 107.

Schlöglmann, W. (1999). Zum Einfluß affektiver Komponenten auf das Mathematiklernen von Erwachsenen, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 441 - 444.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics 22(3),* 1 – 36.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and the Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26 (3),* 191 – 228.

Anna-Katharina SCHNEIDER, Frankfurt, Rose VOGEL, Frankfurt

Portfolioarbeit im Studium – angehende Grundschullehrerinnen und -lehrer reflektieren ihre fachspezifische Lernkompetenz im Fach Mathematik

Professionelles Handeln von Lehrpersonen setzt vielfältige und alternative Handlungsmuster für die Unterrichtsgestaltung voraus. Die Wahrscheinlichkeit den Anspruch eines veränderten Verständnisses von Mathematiklernen einzulösen ist dann groß, wenn Lehrerinnen und Lehrer diesbezüglich hinreichend sensibilisiert und entsprechend ausgebildet werden. Dazu gehört auch, dass angehende Mathematiklehrerinnen und -lehrer ihre eigenen mathematischen Lernprozesse ausreichend reflektieren und weiterentwickeln. Sie müssen selbst zu Expertinnen und Experten des Lernens werden, damit sie sensibel und kompetent Lernprozesse für Schülerinnen und Schülern arrangieren und begleiten können.

1. Portfolioarbeit im Projekt "eLPort" im Fach Mathematik

Das hier vorgestellte „eLearning basiertes Portfolio“ (kurz „eLPort“) hat als Ziel, modulübergreifende Lernprozesse bei Studierenden des Faches Mathematik im Rahmen des Lehramtsstudienganges Grundschule zu unterstützen. Es ist ein Projekt, das im Rahmen des Förderprogramms der Goethe-Universität Frankfurt am Main zur Verbesserung der Lehre gefördert wird (Projektzeitraum 2008-2010)[1].

Die Portfolioarbeit basiert hier auf einem dreiteiligen Konzept, das aus dem Arbeits- und Entwicklungsportfolio, dem Leistungsportfolio und dem Präsentationsportfolio besteht. Alle drei Teile haben zwar unterschiedliche Ziele und Öffentlichkeitsgrade sind aber miteinander verschränkt. So umfasst das Arbeits- und Entwicklungsportfolio alle Arbeiten der Studierenden, die während der Veranstaltung, des Semesters bzw. des Studiums entstehen bzw. gesammelt werden. Aus dieser Sammlung wird unter speziellen Fragestellungen Artefakte für das Leistungs- bzw. Präsentationsportfolio ausgewählt, reflektiert, beurteilt und gegebenenfalls fortgeschrieben. Damit ist der Grundpfeiler „Reflexion“ allen Portfolioteilen gemeinsam.

[1] Projektverantwortliche: Prof. Dr. Rose Vogel und Prof. Dr. Götz Krummheuer, wissenschaftliche Mitarbeiterin: Anna-Katharina Schneider, Goethe-Universität Frankfurt am Main

2. Fachspezifische Lernkompetenz im Fach Mathematik

Die Auseinandersetzung mit der fachspezifischen Lernkompetenz im Fach Mathematik von angehenden Grundschullehrerinnen und -lehrern fokussiert das individuelle mathematische Lernen. Dieses wird in nicht unerheblichem Maße bestimmt von der mathematischen Schulbiografie der Studierenden und prägt deren Wahrnehmung und deren Umgang und Einschätzung der Angebote in ihrem Lehramtsstudium. Hinzukommt, dass in einem Lehramtsstudium die mathematische Lernkompetenz für den Bereich der Mathematikdidaktik erweitert werden muss. Die Auseinandersetzung mit den mathematischen Lernprozessen von Kindern, deren Gestaltung, Begleitung und Förderung wird neben der Vertiefung bzw. Erweiterung des individuellen mathematischen Verstehens für die Studierenden relevant.

Die im Projekt „eLPort" in der Portfolioarbeit unter anderem angeregte Reflexion der individuellen mathematischen und mathematikdidaktischen Lernkompetenz bezieht sich auf die vier Dimensionen von Lernkompetenz: die Sach-, Methoden-, Sozial- und Selbstkompetenz (Czerwanski, Solzbacher & Vollstädt 2002, S. 31). Die Dimension der Selbstkompetenz erscheint uns im Hinblick auf das spätere Tätigkeitsfeld der Lehramtsstudierenden von besonderer Bedeutung, denn sie umfasst das Bild und die Wertschätzung von Mathematik. Diese Dimensionen individueller Lernkompetenz werden für die Beschreibung professioneller Handlungskompetenz von Lehrpersonen aufgegriffen und fortgeschrieben (Frey 2008).

3. Angehende Grundschullehrerinnen und -lehrer reflektieren ihre mathematische Lernkompetenz

Im Kontext der Portfolioarbeit im Projekt „eLPort" wurden bestehende Lehr-Lern-Arrangements der verschiedenen Lehrveranstaltungen analysiert und unterschiedliche an der Grundkonzeption der Lehrveranstaltung orientierte sogenannte „Reflexionselemente" entwickelt (vgl. Vogel & Schneider 2010). Diese haben das Ziel die Reflexionsarbeit der Studierenden anzuregen, zu begleiten und zu strukturieren.

Am Beispiel des Lehr-Lern-Arrangements „Präsenzaufgaben" wird hier die Reflexionsarbeit von Studierenden des Lehramtsstudiengangs Grundschule im Fach Mathematik an der Goethe-Universität Frankfurt/Main vorgestellt und analysiert. Die „Präsenzaufgaben" sind integrativer Bestandteil der Lehrveranstaltungen des Grundstudiums (Vorlesung mit ergänzenden Übungen). Die Konzeption dieses Lehr-Lern-Arrangement sieht vor, dass die Studierenden innerhalb der wöchentlich stattfindenden Übungsgruppen (15-20 Personen) in Kleingruppen (4-5 Personen) für eine bestimmte Zeit an komplexen mathematischen oder mathematikdidaktischen Aufträgen vor

Ort, d.h. face-to-face arbeiten. Die Ergebnisse aus den Kleingruppen werden anschließend der gesamten Übungsgruppe vorgestellt und dort vergleichend und vertiefend diskutiert. Ein für die Arbeit in den Kleingruppen entwickelter Protokollbogen soll dabei die Reflexionsarbeit unterstützen und die Weiterarbeit in den Übungsgruppen vorbereiten. Es geht zunächst um eine Charakterisierung des Arbeitsauftrags und im Anschluss daran um das Beobachten des Lösungsprozesses und dessen Dokumentation. Auch über die Effektivität eingeschlagener Lösungswege in den einzelnen Kleingruppen soll nachgedacht werden.

Insgesamt wurden 68 Protokolle verfasst, die 62 fachliche und 192 fachdidaktische Aufträge umfassten. Diese wurden getrennt nach mathematischen und mathematikdidaktischen Aufträgen mittels der qualitativen Inhaltsanalyse nach Mayring (2007) analysiert. Dabei wurde die qualitative Technik der Strukturierung (Mayring 2007, S. 82 ff.) verwendet, bei der das Textmaterial unter bestimmten Kriterien analysiert wird, um spezifische Aspekte besonders hervorzuheben. Die Festlegung der Kategorien orientierte sich an den Fragen des Protokollbogens. Es wurden sieben Kategorien festgelegt, die folgende Aspekte aufgreifen: Nennung und Charakterisierung des Auftrags, Dokumentation der Lösungswege (Bewertung, Kommentierung, konkrete Beschreibung von Lösungen) und der Umgang mit Unklarheiten.

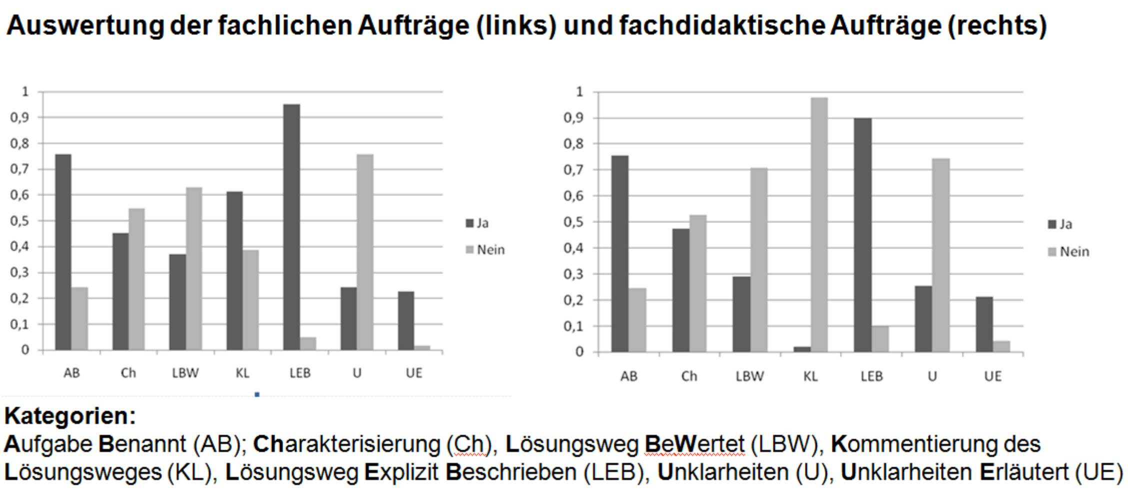


Abbildung: relative Häufigkeiten der Kategorien

Die Auswertung zeigt, dass der Aufforderung den Auftrag zu charakterisieren, bei den fachlichen Aufträgen weniger als bei der Hälfte der Aufträge nachgekommen wurde. Ein ähnlicher Effekt ist ebenfalls bei den fachdidaktischen Aufträgen zu erkennen. Eine solche Einordnung eines mathematischen oder mathematikdidaktischen Auftrags steht für eine erste Annäherung an die Fragestellung und Abschätzung, welche inhaltlichen und methodischen Anforderungen die Beschäftigung zeigt. Damit lässt sich unter anderem auch feststellen inwieweit Unklarheiten aus der Vorlesung eine Rolle spielen bzw. diese sich nun überhaupt zeigen. Die Analyse des Umgangs mit Lösungswegen zeigt für die fachlichen Aufgaben, dass zwar Lösungsalternativen wahrgenommen werden, aber doch eine Lösung favorisiert wird. Eine Kommentierung und Bewertung eingeschlagener Lösungswege ist in den Protokollen kaum zu lesen. Es wird in den meisten Fällen ein Lösungsweg benannt, verschiedene Lösungen werden eher weniger in den Blick genommen. Es zeigt sich damit ein Bild von Mathematik, das durch die Idee einer klaren, eindeutigen Bearbeitung von Aufgaben bestimmt ist. Die Analyse des Umgangs mit fachdidaktischen Aufgabenstellungen zeigt im Vergleich zu fachlichen mehr Unsicherheiten.

Eine solche Analyse bietet einerseits Einblicke in die Reflexionskompetenz der Studierenden und kann andererseits als Basis für die Weiterentwicklung der individuellen mathematischen und mathematikdidaktischen Lernkompetenz genutzt werden.

Ausblick

Aktuell werden die für ausgewählte Lehr-Lern-Arrangements entwickelten „Reflexionselemente“ erprobt und evaluiert. Des Weiteren werden die entwickelten „Reflexionselemente“ entlang eines einheitlichen Beschreibungsmusters, differenziert nach Studierenden und Lehrpersonen, beschrieben, so dass diese den Studierenden und den Lehrpersonen in einer Sammlung zur Verfügung gestellt werden können. Die stärkere Integration der Portfolio-Plattform „Mahara“ in die konkrete Portfolioarbeit der Studierenden stellt ein weiteres Ziel dar.

Literatur

Czerwanski, A., Solzbacher, C. & Vollstädt, W. (Hrsg.) (2002). *Förderung von Lernkompetenz in der Schule. Recherche und Empfehlungen.* Bd. 1. Gütersloh: Verlag Bertelsmann Stiftung.
(Online: http://www.bertelsmann-stiftung.de/cps/rde/xbcr/SID8108D57539F149A9/-bst/xcms_bst_dms_27565_27566_2.pdf, Stand: 11.04.2010)

Frey, A. (2008). *Kompetenzstrukturen von Studierenden in der ersten und zweiten Phase der Lehrerbildung*. Landau: Verlag empirische Pädagogik.

Mayring, Philipp (2007).*Qualitative Inhaltsanalyse. Grundlagen und Techniken*. 9. Auflage. Weinheim: Beltz.

Vogel, R. & Schneider, A.-K. (2010, in Druck). Portfolio – ein Weg zu einer kompetenzorientierten Grundschullehrer und lehrerinnenausbildung im Fach Mathematik. In K.-H. Arnold, K. Hauenschild, B. Schmidt & B. Ziegenmeyer (Hrsg.), *Zwischen Fachdidaktik und Stufendidaktik. Perspektiven für die Grundschulpädagogik.* Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Susanne SCHNELL, Dortmund

„Manchmal braucht man auch sehr viel Glück“ – Entwicklung von Schülervorstellungen zum Zufall

1. Individuelle Vorstellungen als Ausgangspunkt konstruktivistischen Lernens

Die Stochastik gilt in der Mathematikdidaktik als ein Themengebiet, in dem Lernende einerseits über ein breites Repertoire an vorunterrichtlichen, individuellen Vorstellungen verfügen, und in dem andererseits der Aufbau tragfähiger Vorstellungen als besonders schwierig erlebt wird (vgl. Wolpers/Götz 2002, S.135ff.). Als Vorstellungen werden dabei alle subjektiven, mentalen Strukturen bezeichnet, die von Lernenden zur Interpretation eigener Erfahrungen genutzt werden. Sie können sich auf verschiedenen Komplexitätsebenen befinden und umfassen sowohl Begriffe und Konzepte als auch lokale Theorien (Gropengießer 2001, S.30ff.).

Neben zum Teil bereits tragfähigen Ansätze basieren individuelle Vorstellungen häufig auf dem Verständnis von Wahrscheinlichkeiten als Hilfsmittel, Ergebnisse einzelner Zufallsversuche vorherzusagen anstatt der Betrachtung großer Versuchsreihen (vgl. Konold 1991, S.146ff). Das jenem empirischen Wahrscheinlichkeitsverständnis zugrundeliegende Gesetz der großen Zahlen hat sich als zentral erwiesen, um angemessene stochastische Aussagen überhaupt treffen zu können (Prediger 2008, S.145ff.). Die in vorunterrichtlichen Kontexten aufgebauten Vorstellungen haben sich jedoch möglicherweise in der persönlichen Erfahrung der Lernenden als hilfreich beim Umgang mit (einzelnen) zufälligen Vorgängen erwiesen und können als Filter für neue (mathematische) Konzepte dienen, welche sich erst an den bestehenden beweisen müssen (vgl. Confrey 1990, S. 19ff).

2. Vorstellungsentwicklung in der Stochastik

Die individuellen Vorstellungen der Lernenden sind also wichtige Ausgangspunkte beim Aufbau mathematischer Vorstellungen (Konold 1991, S.140ff). Im Sinne des Conceptual Change Ansatzes kann Vorstellungsentwicklung in zwei Richtungen verlaufen (Prediger 2008): Vertikal gedacht werden individuelle Vorstellungen durch den Unterricht zu tragfähigen überformt. Empirische Untersuchungen wie Konold (1991) zeigen allerdings, dass Lernende auch nach einem Stochastikunterricht weiterhin bestehende, individuelle (und zum Teil mathematisch nicht tragfähige) Vorstellungen in außerschulischen Situationen aktivieren. Demnach scheinen sich mathematische Vorstellungen nicht nur vertikal aus individuellen Vorstellungen heraus zu entwickeln, sondern auch horizontal zu ihnen

(Prediger 2008, S.132ff). Das Zusammenspiel verschiedener Vorstellungen sowie deren Entwicklung aus- und miteinander ist der Forschungsgegenstand der hier vorgestellten empirischen Studie, die innerhalb eines langfristigen Projekts zur Didaktischen Rekonstruktion der Einführung in die Stochastik angesiedelt ist (Prediger 2008).

3. Empirische Interviewstudie zur Vorstellungsentwicklung in der Stochastik – Lernumgebung und Methoden

Zur Untersuchung der Entwicklung stochastischer Vorstellungen wurde mit zehn Paaren von Schülerinnen und Schülern der 6. Klasse einer nordrhein-westfälischen Gesamtschule eine Reihe von aufeinander aufbauenden Spielinterviews geführt. Die Lernenden hatten zuvor noch keinen Stochastikunterricht in der Sekundarstufe I erhalten. Kernelement der für die Interviews genutzten Lernumgebung „Wettkönig" (Hussmann/Prediger 2009) ist ein Würfelspiel, bei dem die Lernenden aufgefordert werden, auf das schnellste von vier Tieren (Ameise, Frosch, Schnecke, Igel) zu wetten. Angetrieben werden die Tiere von einem 20-seitigen Farbwürfel mit ungleicher Farbverteilung, so dass die rote Ameise mit einer Wahrscheinlichkeit von 7/20 theoretisch das schnellste Tier ist. Für den Aufbau von Vorstellungen zum Gesetz der großen Zahlen ist die Unterscheidung der kurzen und langen Sicht zentral; im Kontext der Lernumgebung also die Anzahl der Würfelwürfe, nach der das Gewinnertier bestimmt wird: hier wird durch den Einsatz vorgegebener Protokolle explizit die Unterscheidung zwischen kurzen und langen Spielen (bis Wurfanzahl 10.000 über eine Computersimulation) vorgenommen. Die Lernumgebung dient zur Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs als Vorhersage über die Ergebnisse bei großer Versuchsanzahl im Sinne einer prognostischen Wahrscheinlichkeit. Schülerinnen und Schülern wird durch die konkrete Handlungssituation des Wettens eine Aktivierung und Auseinandersetzung mit individuellen Vorstellungen sowie die Ausdifferenzierung der Vorstellungen zur Auswirkung des Gesetzes der großen Zahlen ermöglicht.

Zur Betrachtung der Vorstellungentwicklung wurden die Interviews hinsichtlich der gebildeten Konstrukte untersucht. Konstrukte werden dabei als Aussagen verstanden, die zur Vorhersage oder Erklärung bestimmter Situationen (z.B. Würfelergebnisse oder Spielausgänge) dienen und Elemente verschiedener Vorstellungen sein können. Die Analyse auf der Ebene der Konstrukte ermöglicht Einsicht in die Zusammensetzung und Struktur von Vorstellungen.

4. Erste Einblicke in die Fallstudie zur Vorstellungsentwicklung von Ramona und Sarah

Die Schülerinnen Ramona und Sarah arbeiteten in fünf aufeinanderfolgenden Interviewsitzungen im Zeitraum von zwei Wochen an der Lernumgebung „Wettkönig" und wurden dabei videographiert. Die folgenden Ergebnisse beziehen sich auf die erste Interviewsitzung, in denen die Schülerinnen versuchten herauszufinden, auf welches Tier man „besonders sicher" wetten kann und warum.

Nach den ersten vier Spielen (Wurfanzahl zwischen 25 und 40) äußert Ramona eine Einschätzung der Siegchancen mit der Ameise als schnellstes Tier, die sie mit ihrer bisherigen Erfahrungen begründet. Zu diesem Zeitpunkt scheint den Schülerinnen die Farbverteilung des Würfels noch nicht präsent zu sein, sie wird jedoch direkt im Anschluss auf einen Impuls von Sarah hin ausgezählt. Dieses Konstrukt „Farbverteilung" dient im folgenden Verlauf des Interviews nicht nur zur Erklärung einzelner Würfelergebnisse, sondern auch dazu, die von Ramona geäußerte Beobachtung, die bisher nur empirisch erklärt werden konnte, weiter zu entwickeln:

I: „Jetzt habt ihr das ja ausgezählt- was heißt das denn?"

Sarah: „Dass Rot also mehr- also dass Rot eigentlich gewinnt, weil das hat mehr und dann kommt man auch mehr darauf, wenn man so jetzt würfelt"

Das zuvor rein empirisch begründete Konstrukt, dass das rote Tier das schnellste sei, wird nun über die Verteilung der Farben begründet, die desweiteren auch als Erklärung für das empirische Ergebnis dient. Das Konstrukt der Farbverteilung als grundlegendes Element für die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse führt somit zu einer vertikalen Entwicklung eines bestehenden Konstrukts und sichert dies zusätzlich ab.

Im weiteren Verlauf des Interviews zeigt sich, dass sich Konstrukte nicht nur linear weiter entwickeln können. Die folgende Aussage von Ramona zur Begründung, wieso sie bei einem Spiel mit Wurfanzahl zwei auf Frosch wetten möchte, ist eine Kombination von ‚Ameise als schnellstes Tier', ‚Farbverteilung' und eines Konstrukts ‚Glück', das vor allem für Ramona immer wieder zur Erklärung (theoretisch) unwahrscheinlicherer Ereignisse dient: *„Ähm, also das (zeigt auf Ameise) hat ja sieben, also sieben Punkte auf dem Würfel und das (zeigt auf Frosch) nur fünf. Also, das sind ja zwei weniger und dann könnten wir ja uns mal was trauen und das nehmen- (…) und dann haben wir vielleicht wenigere Chancen aber wenn wir Glück haben gewinnen wir vielleicht auch."*

Diese reflektierte Vorstellung ist eine tragfähige Strategie für die vorliegende Situation und veranschaulicht, dass sich zeitlich nacheinander aufgebaute Konstrukte zu komplexeren Netzen zusammensetzen.

5. Vorstellungsentwicklung über die Betrachtung von Konstrukten

Diese exemplarischen Einsichten in die Fallstudie zeigen, wie sich Konstrukte auf verschiedene Arten entwickeln und kombinieren. Im weiteren Verlauf der Studie stehen die Analyse der anschließenden Interviewsitzungen sowie ein Vergleich mit Ergebnissen anderer Interviewpartner im Vordergrund.

Ziel der Analysen ist die Beschreibung der Lernwege der Schülerinnen und Schüler. Desweiteren sollen so Konstrukte identifiziert werden, die zu einem mathematisch tragfähigen Wahrscheinlichkeitsbegriff führen. Das Erkennen der Zusammenhänge zwischen solchen Konstrukten kann dann zur Weiterentwicklung der Lernumgebung oder Übertragung auf andere beitragen.

Dieses Projekt ist eingebunden in das Forschungsprojekt „Kontexte für sinnstiftenden Mathematikunterricht“ (KOSIMA) unter Leitung von B. Barzel, S. Hußmann, T. Leuders und S. Prediger.

Literatur

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science, and programming. In C. B. Cazden (Hrsg.), *Review of research in education* (Vol. 16, S. 3-55). Washington, DC: American Educational Research Association.

Gropengießer, H. (2001). *Didaktische Rekonstruktion des Sehens*. Wissenschaftliche Theorien und die Sicht der Schüler in der Perspektive der Vermittlung. Oldenburg: Didaktisches Zentrum der Universität Oldenburg.

Hußmann, Stephan / Prediger, Susanne (2009). Je größer die Wurfanzahl, desto sicherer die Wette – Mit dem Spiel Wettkönig den Zufall auf lange Sicht erkunden. In *Praxis der Mathematik in der Schule,* 51(25), S. 24-29.

Konold, C. (1991). Understanding Students' Beliefs About Probability. In v. Glasersfeld, E. (Hrsg.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (S. 139-156). Amsterdam: Kluwer.

Prediger, S. (2008): Do you want me to do it with probability or with my normal thinking? Horizontal and vertical views on the formation of stochastic conceptions. In *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 3(3), S. 126-154.

Wolpers, H./Götz, S. (2002): Didaktik der Stochastik, Bd. 3. In Tietze, U.-P./Klika, M./ Wolpers, H. (Hrsg.), *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II*, Braunschweig: Vieweg.

CHRISTOF SCHREIBER, Frankfurt/ Main

Von der Inskription zum Diagramm

In diesem Beitrag möchte ich einen Aspekt meiner Dissertation näher beleuchten, nämlich die Entwicklung von Inskriptionen zu Diagrammen. Dabei stelle ich auch die Entwicklung eines Teilbereiches meiner Dissertation dar, in der es um die Analyse kollektiver schrift- und graphikbasierter Problemlöseprozesse mit der Peirce'schen Semiotik geht (Schreiber 2010).

1. Das Forschungsprojekt ‚Mathe-Chat'

Ausgangslage für das Projekt ‚Mathe Chat' (s. Schreiber 2006) war die Flüchtigkeit verbaler Kommunikation in Lernprozessen: Es ging darum, dass die Schüler ihre Kommunikation in einer kollektiven Problemlösesituation schriftlich fixieren sollten. Dies wurde durch ein ‚Chat-Setting' erreicht, in dem die Kommunikation zwischen zwei Chat-Partnern nur schriftlich graphisch stattfinden kann. Genauer untersucht wurde im Projekt inwieweit Schüler für ihre eigenen Lernprozesse Inskriptionen neu entwerfen, diese für einen kollektiven Aufgabenbearbeitungsprozess genutzt und weiterentwickelt werden, in welcher Weise der Gebrauch der Inskriptionen den interaktiven Lösungsprozess strukturiert und in wie fern diese Inskriptionen dazu beitragen, mathematisches Wissen zu generieren.

Den Begriff der ‚Inskriptionen' verwende ich in Bezug auf Latour und Woolgar, die Prozesse der Entstehung von Wissen in Forschungskontexten untersucht haben. Dabei fiel auf, dass immer wieder notiert und aufgezeichnet wird. Alles was in irgendeiner Form *festgehalten* wurde, wurde von Latour und Woolgar als „inscriptions" (Latour & Woolgar 1986) bezeichnet. Dabei wurden dann folgende Charakteristika der Inskriptionen als wichtig herausgearbeitet: Inskriptionen sind mobil, während der Versendung an einen anderen Ort unveränderlich, sie sind potentiell zu veröffentlichen oder Teil einer Veröffentlichung, ihr Maßstab ist beliebig, sie können miteinander verknüpft und günstig reproduziert werden. Die von mir untersuchten schriftlich/ graphischen Anteile der Kommunikation im Chat erfüllen diese Definition, daher spreche ich von Inskriptionen, welche die Schüler im Chat-Setting erzeugen.

Im Chat-Setting sieht dann die Arbeit der Schüler wie folgt aus: Die Schüler aus vierten Klassen arbeiten in verschiedenen Räumen und lösen über einen Chat verbunden gemeinsam ein mathematisches Problem. Dazu arbeiten die Schüler alleine oder zu zweit vor einem Bildschirm. Technisch haben wir dazu 2 Tablet - genutzt, die wireless miteinander verbunden waren. Zum Chatten war die Software „NetMeeting" bereits gestartet und die

Aktivitäten auf den beiden Bildschirmen wurden als Screenvideo aufgezeichnet. Das Programm Net Meeting bietet den Schülern folgende Möglichkeiten: Eine Chatbox, die mit der Tastatur zu bedienen ist und ein Whiteboard, auf dem Eintragungen mit einem Stift gemacht werden können. Dabei ist die Kommunikation in der Chatbox nach Dürscheid „quasisynchron“ (2003) und die über das Whiteboard „synchron“.

2. Die Analyse der Episoden

Teile der aufgezeichneten Sitzungen wurden später transkribiert. Dazu war es erforderlich, beide Seiten so zu berücksichtigen, dass getrennte wie auch gemeinsame Prozesse als solche zu erkennen sind. Die dafür eigens entwickelte Struktur der Transkripte ist bereits in Schreiber 2006 dargestellt. Auf Grundlage solcher Transkripte habe ich dann unter Beteiligung weiterer Personen Interaktionsanalysen (Krummheuer & Naujok 1999) durchgeführt. Die zusammenfassende Analyse war dann Grundlage für eine semiotische Analyse, die in die Semiotische Prozess-Karte (im Folgenden SPK) mündet: Zur Erstellung der SPK kam ich über die Auseinandersetzung mit der Peirce’schen Zeichentriade, dem Ground zur Triade und dem Rahmungsbegriff nach Goffmann (1996), dem Chaining wie es Norma Presmeg (2001) verwendet und dem auf dieser Idee basierenden, von mir so genannten Komplexen Semiotischen Prozess (Schreiber 2010).

Die von mir rekonstruierten Prozesse sind oft nicht linear. Nach meinen Analysen gibt es Repräsentamen, auf die sich der Betrachter mehrfach bezieht, also Repräsentamen, die in zwei Triaden ‚genutzt’ werden; Es gibt Interpretanten, die das Repräsentamen in der folgenden Triade darstellen, es gibt neu einsetzende Stränge, in denen der Interpretant einer Triade nochmals erweitert und wieder Repräsentamen einer neuen Triade wird. Dem Prozess unterliegt eine Rahmung, die für die Deutung der Repräsentamen wesentlich ist. Insgesamt stellt die SPK dann den Komplexen Semiotischen Prozess dar, wie er in der Aufgabenbearbeitung für eine Seite des Settings dargestellt werden kann.

4. Diagramme als besondere Zeichen

Hier möchte ich nochmals auf die besondere Rolle hinweisen, die Diagramme im Peirce’schen Sinne im Mathematikunterricht einnehmen. Besonders detailliert ausgearbeitet ist die „Sicht des Lernens von Mathematik als Teilnahme an einer Praxis diagrammatischer Tätigkeiten“ bei Dörfler (2006, 200ff). Von der Sicht auf die Mathematik als Wissenschaft über abstrakte Objekte ausgehend, plädiert Dörfler für „eine Verschiebung des Blickpunktes auf mathematische Tätigkeiten als ein Arbeiten mit materiellen, wahrnehmbaren und veränderbaren Inskriptionen“ (2006, 203).

5. Beispiele

Im Vortrag habe ich 3 Szenen aus dem Projekt ‚Mathe-Chat' als Screenvideo vorgestellt und dort in Kürze analysiert. Die Beispiele sind in meiner Dissertation in den Kapiteln 5.5 und 5.6 zu finden (Schreiber 2010). Fokussiert habe ich dabei auf die stattfindende Abduktion durch die Schüler, die die Entwicklung der Inskription zum Diagramm, bzw. die diagrammatische Nutzung der Inskription ermöglicht.

6. Ergebnisse

Es war die Absicht des Projektes in dem die Episoden entstanden sind, zu untersuchen, wie Schüler in kollektiven Problemlöseprozessen Inskriptionen entwerfen, nutzen und weiterentwickeln. Es zeigt sich in den Beispielen, dass die Verwendung von Inskriptionen als ‚gemeinsame Inskription' – das ‚gemeinsame' legt dann die diagrammatische Verwendung von Inskriptionen bereits nahe – durch einen abduktiven Schluss ermöglicht wird. Das Whiteboard als Möglichkeit der synchronen Kommunikation ist dabei vorteilhaft, da alle Beteiligten jederzeit in den Prozess der Entwicklung der Inskription eingreifen können.

Im Projekt war es mir möglich, Dörflers Thesen (vgl. Dörfler, 2006) zur Verwendung von Diagrammen in Lernprozessen empirisch zu belegen. Ich konnte zeigen, dass die Inskriptionen bei der ‚diagrammatischen Verwendung' nicht einzelne isolierte, sondern Teile eines Darstellungssystems. Ebenso zeigte es sich, dass es eine Art von ‚Legende' gibt, hier nicht explizit gegeben aber aus der gemeinsamen Praxis im Umgang mit den Diagrammen erlernt. Über die Diagramme wird gesprochen, die Diagramme selbst sind aber schriftlich, hier als Inskriptionen auf dem Bildschirm, vorhanden. Diagramme werden hier neu konstruiert und im Sinne einer Kaskade noch formalisiert. Die Inskriptionen der einen Seite werden für die Teilnehmer der anderen Seite des Chatsettings zum ‚Forschungsobjekt', das heißt, Operationen mit diesen Inskriptionen werden beobachtet, beschrieben und darüber kommuniziert, was für den Umgang mit Diagrammen nach Dörfler typisch erscheint.

So sollten dann auch aus meiner Sicht die Erzeugung und Verwendung von Inskriptionen in kollektiven Problemlöseprozessen ermöglicht werden: als gemeinsame Arbeit an diesen, in der alle Beteiligte die Entstehung beobachten und alle Beteiligte Beiträge leisten können. Die Bedingungen für die diagrammatische Verwendung von Inskriptionen sind dann besonders vorteilhaft. Einmal selbst erstellte, produktiv eingesetzte Inskriptionen können dann in späteren Problemlöseprozessen erneut abgerufen werden. Dabei kann auch eine schrittweise Weiterentwicklung, im Sinne einer Erweiterung oder Formalisierung stattfinden. Die gemeinsam erstellte und erfolgreich verwendete Inskription kann dann als (Teil einer neuen) Rahmung aktiviert werden. Die Inskriptionen können so zu selbst (mit-) erstellten Diagrammen werden, deren Nutzen für den Problemlöseprozess und deren mathematische Aussagekraft besonders hoch ist.

Hervorzuheben bleibt für mich, dass es sich insgesamt in der Entwicklung hin zum Diagramm genauer um eine diagrammatische Nutzung von Inskriptionen handelt. Es ist eben nicht die Inskription selbst, die zum Diagramm wird, vielmehr kann von einem Diagramm gesprochen werden, wenn die Inskription von den Nutzern als regelhaftes Darstellungssystem verwendet wird.

Literatur

Dörfler, Willi (2006). Diagramme und Mathematikunterricht. In *Journal für Mathematik-Didaktik 27*(3/4) Wiesbaden: Vieweg + Teuber Verlag, 200-219.

Dürscheid, Christa (2003). *Medienkommunikation im Kontinuum von Mündlichkeit und Schriftlichkeit. Theoretische und empirische Probleme*. In Zeitschrift für Angewandte Linguistik (38), 37-56.

Goffman, Erving (1996). *Rahmen-Analyse. Ein Versuch über die Organisation von Alltagserfahrungen.* Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Krummheuer, Götz & Naujok, Natascha (1999) *Grundlagen und Beispiele Interpretativer Unterrichtsforschung.* Opladen: Leske und Budrich.

Latour, Bruno & Woolgar, Steve (1986). *Laboratory life. The construction of scientific facts.* 2nd edition. Princeton: Princeton University Press.

Naujok, Natascha (2000). *Schülerkooperation im Rahmen von Wochenplanunterricht. Analyse von Unterrichtsausschnitten aus der Grundschule.* Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Presmeg, Norma (2001). *Progressive Mathematizing Using Semiotic chaining.* The 25th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Discussion Group 3, Semiotics in Mathematics Education: http://www.math.uncc.edu/~sae/dg3/norma-PME25DG.pdf (Abruf 17.03.2010)

Schreiber, Christof (2010; erscheint demnächst). Semiotische Prozess-Karten – chatbasierte Inskriptionen in mathematischen Problemlöseprozessen. In: Krummheuer, Götz & Heinze, Aiso (Hrsg.): *Empirische Studien zur Didaktik der Mathematik*, Münster: Waxmann.

Schreiber, Christof (2006). Die Peirce'sche Zeichentriade zur Analyse mathematischer Chat-Kommunikation. In *Journal für Mathematikdidaktik 27* (3/4). Wiesbaden: Vieweg + Teuber Verlag, 240-267.

Stanislaw SCHUKAJLOW, Jana KRÄMER, Werner BLUM, Michael BESSER, Roland BRODE, Dominik LEISS, Rudolf MESSNER, Kassel

Lösungsplan in Schülerhand: zusätzliche Hürde oder Schlüssel zum Erfolg?

Im vorliegenden Beitrag wird über den Einfluss eines die Aufgabenbearbeitung steuernden Instruments, des „Lösungsplans“, auf die Schülerleistungen, -einstellungen und -strategien beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben zu den Inhaltsbereichen Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen berichtet. Die entsprechende Teilstudie fand im Rahmen des Projekts DISUM statt (Leiter: W. Blum, R. Messner und R. Pekrun; siehe u.a. Leiss, Blum & Messner, 2007) und reiht sich in die Gesamtkonzeption des Projekts ein, das sich mit der Frage befasst, wie die Entwicklung einer kognitiv anspruchsvolle Fachkompetenz (der Modellierungskompetenz) im Unterricht wirksam und nachhaltig gefördert werden kann.

In vorangegangenen Teilstudien wurde festgestellt, dass Modellierungskompetenz im selbständigkeitsorientierten „operativ-strategischen“ Unterricht, der vorwiegend aus lehrerunterstützter ko-konstruktiver Gruppenarbeit mit Reflexionsphasen im Plenum besteht, besser als in einem „direktiven“ fragend-entwickelnden Unterricht mit Phasen der individuellen Schülerarbeit vermittelt werden kann (Leiss et al., 2008; Schukajlow et al., 2009; Blum et al., 2009). Allerdings waren die Fortschritte der Schüler normativ keineswegs befriedigend. Eine naheliegende Veränderung des Unterrichtskonzepts war es, einen „Lösungsplan“ für die Schüler zu entwickeln, ihn in die operativ-strategische Lernumgebung zu integrieren und seine Wirksamkeit empirisch zu evaluieren.

Der verwendete Lösungsplan beschreibt vier grundlegende Arbeitsschritte: (1) Aufgabe verstehen, (2) Mathematik suchen, (3) Mathematik benutzen und (4) Ergebnis erklären. Er stellt eine schülergerechte Version des bekannten siebenschrittigen Modellierungskreislaufs (Blum & Leiss, 2005) dar. Als handlungsleitende Hilfen wurden u.a. im Punkt (1) „Stell dir die Situation konkret vor“ und im Punkt (2) „Suche die wichtigsten Angaben und ergänze falls nötig fehlende Angaben“ genannt.

Zur Rolle strategischer Hilfen für schulisches Lernen

Die Bedeutung von Strategien für Schülerleistungen, für die Selbstregulation sowie für motivationale und emotionale Faktoren wurde in mehreren empirischen Untersuchungen nachgewiesen. Bei der praktischen Implementation dieser Ergebnisse in den Unterricht stellt sich jedoch die Herausforderung, dass die Hilfen einerseits allgemeingültig bleiben sollen und gleichzeitig eine Unterstützung bei der Bearbeitung von verschiedenen Modellierungsaufgaben anbieten müssen. Andernfalls werden die Hilfen von Schülern nicht benutzt. Ein weiterer Faktor, der die Wirkung solcher Hilfen abschwächen kann, ist die Tatsache, dass jede Hilfe verstanden (Nührenbörger & Steinbring, 2008; Otte, 1983) und im Gedächtnis längerfristig präsent gehalten werden muss. Dies erfordert mehr kognitive Anstrengungen von den Lernenden und nimmt zusätzliche Unterrichtszeit in Anspruch.

Methode der Untersuchung

In einer quasi-experimentellen Studie wurde der operativ-strategische Unterricht mit und ohne Lösungsplan gegenübergestellt. 96 Schüler aus sechs Realschulklassen der Jahrgangsstufe 9 wurden von einer erfahrenen Lehrperson, die im Projekt mitgearbeitet hat, ca. 5 Stunden an zwei Tagen unterrichtet, wobei in drei Klassen die Schüler den Lösungsplan zur Verfügung hatten. Die verwendeten Aufgaben und die Reihenfolge ihrer Behandlung waren in allen sechs Klassen identisch.

Vor und nach dem Unterricht wurden ein Modellierungstest durchgeführt und Fragebögen ausgefüllt. Beim Modellierungstest wurde ein Rotationsdesign angewandt, bei dem ein Schüler im Vor- und Nachtest unterschiedliche Aufgaben zu bearbeiten hat. Bei der Testauswertung wurde zusätzlich zu einer 0/1- bzw. 0/1/2-Kodierung der Items auch eine detaillierte Auswertung einzelner Modellierungsteilschritte anhand der Schülerlösungen vorgenommen. Die Lösungen wurden dabei u.a. nach Qualität und Passung des mathematischen Modells bzw. des Antwortsatzes ausgewertet.

Bei den Befragungen handelt es sich um Likert-Skalen mit 5-stufigen Antwortmöglichkeiten von „stimmt gar nicht“ bis „stimmt genau“. Mit Hilfe dieser Skalen wurden Selbstberichte der Schüler zu kognitiven (Wiederholung, Organisation, Elaboration) und zu metakognitiven Strategien (Planung, Kontrolle, Selbstregulation) sowie zum Interesse der Schüler erfasst. Die Reliabilität der Test- und Befragungsinstrumente lagen im befriedigenden bis sehr guten Bereich.

Neben den Tests und Befragungen wurden alle Schülergruppen und die Lehrperson videografiert, um das Treatment zu kontrollieren und eine qualitative Auswertung unterrichtlicher Arbeitsprozesse der Schüler zu ermöglichen. Dies geschah im Rahmen verschiedener studentischer Examensarbeiten.

Ergebnisse der Studie

Die Analyse der Testergebnisse mit ANOVA hat gezeigt, dass unter Kontrolle des Vortests Unterschiede in den Schülerleistungen im Nachtest beim Modellieren in Bezug auf den Inhaltsbereich Satz des Pythagoras bestehen. Die Effekte sind auf dem 10%-Niveau signifikant. Der operativ-strategische Unterricht mit dem Lösungsplan erwies sich dabei als die effektivere Lehr-/Lernform.

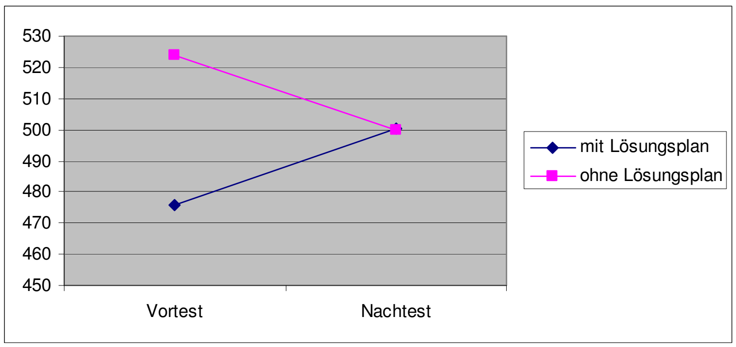


Abbildung 1. Modellierungsleistungen im Vor- und Nachtest. Inhaltsbereich Satz des Pythagoras

Die Untersuchung der Teilschritte „Mathematisches Modell / Rechnung" und „Antwortsatz" beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben zum Inhaltsbereich Satz des Pythagoras deutet ebenfalls auf tendenzielle Effekte zugunsten der Unterrichtsform mit Lösungsplan hin.

Neben den Schülerleistungen ist auch die selbstwahrgenommene Nutzung kognitiver Strategien der Schüler in der Lösungsplangruppe angestiegen. Bei den metakognitiven Strategien wurden Unterschiede zwischen den Unterrichtsgruppen im Nachtest bei der Planung, nicht aber bei der Selbstregulation und Kontrolle festgestellt. Das selbstwahrgenommene Interesse der Schüler in beiden Gruppen hat sich im Nachtest gegenüber dem Vortest nicht geändert.

Die Ergebnisse deuten darauf hin, dass der Lösungsplan in Schülerhand positive Wirkungen auf Schülerleistungen, -einstellungen und -strategien hat. Wie die qualitative Auswertungen zeigen, ist das Potential des Lösungsplans in der durchgeführten Unterrichtssequenz jedoch noch nicht ausgeschöpft worden. Zum einen sollten Strategien in einer längeren Unterrichtseinheit behandelt werden, damit ihre Ausführung auch wirklich sichergestellt werden kann (vgl. Modelle der Strategienvermittlung bei Bruder, 2003 oder Hasselhorn, 1996). Zum anderen sollte die Lehrperson noch intensiver darin geschult werden, wie der Lösungsplan im Unterricht vermittelt werden kann. Schließlich sollten spezifische Unterrichtsszenarien entwickelt werden, in denen eine intensive Auseinandersetzung mit dem Lösungsplans in die Aufgabenlösungen integriert ist und schrittweise im Sinne eines „Fadings“ abgebaut wird.

Die genannten Verbesserungsmöglichkeiten werden derzeit im Konzept eines „methoden-integrativen“ Unterrichts umgesetzt und empirisch im Rahmen des Projekts DISUM 2 erprobt.

Literatur

Blum, W. & Leiss, D. (2005). Modellieren im Unterricht mit der "Tanken"-Aufgabe. In: *mathematik lehren* (128), 18-22

Blum, W., Schukajlow, S., Leiss, D. & Messner, R. (2009). Selbständigkeitsorientierter Mathematikunterricht im ganzen Klassenverband? Einige Ergebnisse aus dem DISUM-Projekt. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*. Münster: WTM Verlag, 291-294

Bruder, R. (2003). *Methoden und Techniken des Problemlösenlernens. Material im Rahmen des BLK-Programms „SINUS“ zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts“*. Kiel: IPN

Hasselhorn, M. (1996). *Kategoriales Organisieren bei Kindern*. Göttingen: Hogrefe

Leiss, D., Blum, W. & Messner, R. (2007). Die Förderung selbständigen Lernens im Mathematikunterricht – Problemfelder bei ko-konstruktiven Lösungsprozessen. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* 28 (3/4), 224-248

Leiss, D., Blum, W., Messner, R., Müller, M., Schukajlow, S. & Pekrun, R. (2008). Modellieren lehren und lernen in der Realschule. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Münster: WTM Verlag, 370-373

Nührenbörger, M. & Steinbring, H. (2008). Manipulatives as tools in teacher education. In: D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 2: Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*. Rotterdam: Sense Publishers, 57 - 181

Otte, M. (1983). Texte und Mittel. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15*(4), 183-194

Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., Pekrun, R., Leiss, D. & Müller, M. (2009). Unterrichtsformen, Emotionen und Anstrengung als Prädiktoren von Schüler-Leistungen bei anspruchsvollen mathematischen Modellierungsaufgaben. *Unterrichtswissenschaft, 37*(2), 164-186

Stanislaw SCHUKAJLOW, Kassel; Dominik LEISS, Lüneburg

Helfen Strategien beim Lösen von Modellierungsaufgaben?

Im Mittelpunkt des vorliegenden Beitrags steht eine zentrale Frage der Lehr-Lernforschung, nämlich ob Strategien beim Lösen von Modellierungsaufgaben helfen. Um sich dieser Thematik zu nähern, wurde die Strategienutzung von Lernenden durch Selbstberichte erfasst und im Zusammenhang mit Modellierungsleistungen in zwei Inhaltsbereichen – Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen – betrachtet. Die Studie fand im Rahmen des Forschungsprojektes LESTRAM[1] statt, das sich allgemein mit der Rolle von Strategien im Rahmen des Bearbeitungsprozesses von Modellierungsaufgaben befasst.

Theoretische Grundlagen und Forschungsfragen

Gemäß der Konzeption von Kirby (1988) wird die Steuerung des menschlichen Verhaltens durch Strategien maßgeblich bestimmt. Diese Strategien werden traditionell in kognitive (Wiederholung, Organisation, Elaboration) und metakognitive (Planung, Kontrolle, Regulation) Strategiendomänen sowie Strategien des Ressourcenmanagements aufgeteilt (Pintrich & Garcia, 1994; Weinstein & Mayer, 1986). Durch die Förderung von Lern- und Lösungsstrategien können komplexe Transferprozesse, die für die erfolgreiche Bearbeitung von unbekannten Problemstellungen notwendig sind, erleichtert bzw. sogar erst ermöglicht werden. Speziell bei der Bearbeitung einer Modellierungsaufgabe bieten sich den Lernenden verschiedene fachspezifisch akzentuierte Strategien an, wie Verstehensstrategien (z.B. mehrfaches Lesen der Aufgabestellung), eine geeignete Repräsentation des beschriebenen Sachverhaltes (z.B. Skizze) finden oder eine Validierungsstrategie (z.B. eine Überschlagsrechnung).

Die Forschungsfragen der vorliegenden Teilstudie waren:

1. Wie oft berichten Schüler über die Nutzung von kognitiven und metakognitiven Strategien beim Lösen von Modellierungsaufgaben?
2. Welche Unterschiede gibt es in der selbstberichteten Nutzung der Strategien „Zeichnen einer Skizze“, „wiederholendes Lesen einer Aufgabe“, „Unterstreichen oder Ausschreiben der Angaben“, „Suche einer Analogie“, „Planung des Lösungsprozesses“, „Kontrolle des Zwischen und Endergebnisses“ beim Bearbeiten von Modellierungsaufgaben zu den Inhaltsbereichen Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen?

[1] **Le**rn**str**ategien im **M**athematikunterricht. Projektleiter D. Leiss, S. Schukajlow

3. Wie groß ist die Korrelation zwischen selbstberichteten Strategien und den Schülerleistungen beim Lösen der Modellierungsaufgaben?

Methode der Untersuchung

An der Untersuchung nahmen 86 Neuntklässler aus einem Gymnasium und einer Gesamtschule (Real- und Gymnasialkurse) teil, die erst einen Leistungstest bearbeiteten und dann einen allgemeinen und einen aufgabenbezogenen Fragebogen zu ihrem Strategieverhalten ausfüllten. Der Test und alle Fragebogenskalen weisen befriedigende bis gute Reliabilitäten (Cronbachs-α von 0.68 bis.0.81) auf. Bei den Fragebögen handelt es sich um Likert-Skalen mit 5-stufigen Antwortmöglichkeiten (von „stimmt gar nicht" bis „stimmt genau"). Beispielitems sind bei den allgemeinen Strategien:

Skala	***Beispielitem***
	Wenn ich eine etwas schwierige Textaufgabe löse …
Elaboration	*… überlege ich, wie ich bei ähnlichen Aufgaben gerechnet habe*
Organisation	*… ordne ich die Angaben aus dem Text so an, dass ich sehe, was zusammengehört*
Wiederholung	*… lese ich einige Sätze noch ein Mal*
Kontrolle	*… kontrolliere ich am Schluss, ob ich auch keinen Fehler gemacht habe*
Planung	*… mache ich mir einen Arbeitsplan*

Die fachspezifischen Strategie wurden aufgabenbezogen erfasst. Hierzu wurden sechs Modellierungsaufgaben aus dem Test bei der Befragung noch einmal abgebildet und die Lernenden wurden bzgl. ihrer Einstellung zu folgenden Aussagen befragt:

Strategie	***Aussagen***
	Beim Lösen dieser Aufgabe würde ich…
Zeichnen einer Skizze	*…eine Skizze zeichnen.*
Suche einer Analogie	*… überlegen, wie ich bei ähnlichen Aufgaben gerechnet habe.*
Wiederholtes Lesen der Aufgabe	*… einige Sätze noch ein Mal lesen.*

Unterstreichen oder Ausschreiben der Angaben	*… wichtige Angaben aus dem Text unterstreichen bzw. sie ausschreiben.*
Planung des Lösungsprozesses	*… am Anfang einen Arbeitsplan entwerfen.*
Kontrolle des Zwischenergebnisses	*… zwischendurch kontrollieren, ob ich noch auf dem richtigen Weg bin.*
Kontrolle des Endergebnisses	*… zum Schluss überlegen, ob das Ergebnis ungefähr passt.*

Der Modellierungstest bestand u.a. aus sechs Items zum Themenbereich Lineare Funktionen und Satz des Pythagoras (siehe die Beispielaufgabe Maibaum bei Leiss, et al., 2009)

Ergebnisse

Die Ergebnisse zur ersten Forschungsfrage zeigen, dass bzgl. der selbstberichteten Häufigkeit der Nutzung verschiedener Strategien Unterschiede bestehen. Obwohl die Verwendung von Planungsstrategien bei der Bearbeitung von mathematischen Aufgaben vielfach nachgewiesen wurde, wird diese Strategie gemäß den Schülerangaben bei Bearbeitung von Modellierungsaufgaben auffällig selten ausgeführt. Dies kann zum einen durch die Schwierigkeiten bei der Selbstwahrnehmung dieser metakognitiven Strategie erklärt werden. Lernende planen demnach nur unbewusst ihr Vorgehen und verneinen entsprechend ein strategiegestütztes Vorgehen bei der direkten Nachfrage. Zum anderen kann es sein, dass die Planung als Strategie durch die Lehrpersonen selten im Unterricht thematisiert wird, da der Unterricht sich vermutlich stärker auf die Bearbeitungsstrategien konzentriert. Möglich wäre auch, dass mehrschrittige Aufgaben, bei denen die Planung besonders wichtig ist, im Unterricht eher unterrepräsentiert sind.

Auch bei der fachspezifischen Strategiebefragung wurde eine signifikant seltenere Nutzung der Planung bei der Ausführung der Strategien zu den Themengebieten Satz des Pythagoras und Lineare Funktionen festgestellt. Dies kann als eine Art Validierung der Ergebnisse der Untersuchung der ersten Forschungsfrage verstanden werden. Weiter zeigt sich, dass es zwei Strategien gibt, die aus Schülersicht häufiger bei der Bearbeitung der Aufgaben zum Inhaltsbereich Satz des Pythagoras ausgeführt werden. Diese Strategien sind Zeichnen einer Skizze und Suche einer Analogie. Während die vermehrte Zeichnung einer Skizze bei den Aufgaben mit geometrischen Strukturen naheliegend erscheint, bleibt ungeklärt, warum die Suche nach Analogie ebenfalls inhaltsspezische Besonderheiten aufweist. Eine mögliche Erklärung wäre eine bessere Abrufbarkeit von analogen Strukturen wie z.B. Bilder, die längerfristiger im Gedächtnis gespeichert werden können.

Die dritte Forschungsfrage hat die Zusammenhänge zwischen Leistungen und selbstberichteter Nutzung von Strategien im Fokus. Es wurden Korrelationen weder mit selbstberichteten allgemeinen Strategien noch mit selbstberichteten aufgabenbezogenen Strategien festgestellt. Dieser Befund wird durch andere Forschungsergebnisse zu Lernstrategien gestützt (z.B. Spörer & Brunstein, 2006). Inwieweit der tatsächliche Strategieeinsatz eine Erklärung der unterschiedlichen Schülerleistungen liefern kann, müssen weitere Auswertungen zeigen. Entsprechend detailliert wird über die vorliegende Studie an einer anderen Stelle zu berichten sein.

Literatur

Kirby, J. (1988). Style, strategy and skill in reading. In R. R. Schmeck (Ed.), *Learning strategies and learning styles* (pp. 230-274). NY: Plenum.

Leiss, D., Bürgermeister, A., Harks, B., Klieme, E., Rakoczy, K., & Blum, W. (2009). Consequences of Classroom Assessment - Vorstellung des Projekts CoCa *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008*. Münster: WTM Verlag.

Pintrich, P. R., & Garcia, T. (1994). Self-regulated learning in college students: Knowledge, strategies and motivation. In P. R. Pintrich, D. Brown & C. E. Weinstein (Eds.), *Student motivation, cognition and learning* (pp. 113-133). Hilsdale: Erlbaum.

Spörer, N., & Brunstein, J. C. (2006). Erfassung selbstregulierten Lernens mit Selbstberichtsverfahren: Ein Überblick zum Stand der Forschung. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, 20*(3), 147-160.

Weinstein, C. E., & Mayer, R. E. (1986). The Teaching of Learning Strategies. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (3 ed., pp. 315-327).

STEPHANIE SCHULER, Pädagogische Hochschule Schwäbisch Gmünd

Spielen und Lernen – (k)ein Widerspruch?!

„Kinder lernen im Spiel.“ Anknüpfend an diese Alltagsvorstellung über den Zusammenhang von Spielen und Lernen wird im Folgenden der Zusammenhang von Spielen und Lernen insbesondere für den Kindergarten und die Grundschule kritisch diskutiert.

1. Was ist Spiel?

Der Begriff Spiel entzieht sich einer Definition, da er so verschiedene Phänomene wie das Kinderspiel, Sportspiele oder das Glücksspiel umfasst. Dennoch finden sich in der Literatur zahlreiche allgemeine Spieldefinitionen, die das *Spielgeschehen* (vgl. Scheuerl 1990, 65ff) bzw. die *Spieltätigkeit* (vgl. Oerter 1993, 1ff) durch verschiedene *Merkmale* beschreiben. Je nach Ansatz unterscheiden sich die Anzahl und die Bezeichnung der als notwendig erachteten Merkmale. Wiederkehrend finden sich jedoch folgende:

- Freiheit – Zweckfreiheit, intrinsische Motivation, Motivation durch flow-Erleben
- innere Unendlichkeit – Wiederholung
- Scheinhaftigkeit – Wechsel des Realitätsbezugs
- Ambivalenz – Wechsel von Spannung und Lösung

Im *phänomenologischen Ansatz* wird das Spielgeschehen als Kreisbewegung im Unterschied zu linear auf ein Ziel ausgerichteten Zweck- und Bedürfnishandlungen gefasst (vgl. Scheuerl 1990, 76). Im *handlungstheoretischen Ansatz* stellt sich das Spielen zunächst als eine Handlung wie jede andere dar. Allerdings zeichnet es sich durch eine verkürzte Handlungsstruktur aus. Im Unterschied zu Ernsthandlungen fallen die Folgen und teilweise auch das Ergebnis weg (vgl. Oerter 1993, 6).

„Zu recht wird an den allgemeinen Spieldefinitionen kritisiert, dass sie additiv Merkmale aneinander reihen, die im Einzelfall eines bestimmten Spiels nicht mehr alle nachweisbar sind“ (Einsiedler 1999, 10). In seinem *empirisch orientierten Ansatz* vertritt Einsiedler die Auffassung, dass Spiel nicht allgemein definiert, sondern allenfalls expliziert werden kann. „Spiel kann nach diesem Verständnis mehr oder weniger Merkmale haben und somit auch mehr oder weniger intensiv ausgeprägt sein“ (Einsiedler 1999, 12). Mittels empirischer Beobachtung lassen sich die Ausprägungen der Merkmale bei verschiedenen Spielformen wie z.B. dem Konstruktionsspiel oder dem Regelspiel näher bestimmen.

2. Welche Funktionen hat das kindliche Spiel?

Wie schon bei der Begriffsbestimmung geht Einsiedler im Unterschied zu früheren Ansätzen nicht von einer allgemeinen Funktion des (Kinder-)Spiels aus. Arbeitete Groos (1899) bereits Ende des 19. Jahrhunderts die *Vorübungs- und Einübungsfunktion* in das spätere Erwachsenenleben durch das Spiel heraus, so ordnet Piaget (1969) dem Spiel primär *kognitive Funktionen* zu: Das Spiel befördert die kognitive Entwicklung durch Assimilation im Sinne eines spielerischen Umgangs mit Handlungsschemata. Es dient somit nicht dem Erwerb, sondern dem Einüben von Handlungsschemata (vgl. Oerter 1993, 179). Nach Oerter dient das Spiel ganz grundsätzlich der *Lebensbewältigung und Sinnstiftung*, indem im Spiel aktuelle Thematiken bearbeitet werden (vgl. Oerter 2006, 6). Einsiedler betont die *differenziellen Funktionen* verschiedener Spielformen. Beim Objektspiel steht die biologische Funktion der Übung und Entwicklung im Vordergrund, wohingegen beim Regelspiel der kulturelle Eigenwert wie Freude, Genuss und Geselligkeit stärker hervorgehoben wird (vgl. Einsiedler 1999, 20). Aber auch Oerter weist verschiedenen Spielformen unterschiedliche Funktionen zu. Beim Regelspiel liegt diese in der Thematik des Gewinnens, des Sich-Messens und des Umgangs mit Niederlagen (vgl. Oerter 1993, 100ff).

Es wird deutlich, dass dem Spiel durchaus eine *Lernfunktion*, wenn auch eher im einübenden Sinn, zugeschrieben wird.

3. Das Verhältnis von Spielen und Lernen

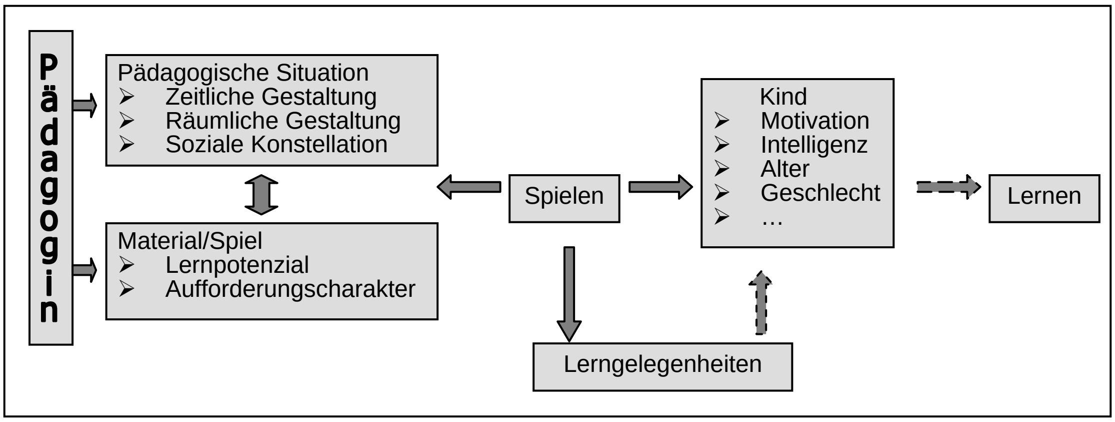
Einsiedler (1982, 5) vergleicht zwei Grundmodelle zum Verhältnis von Spielen und Lernen:

- *Input-Output-Modell*: Jedes Spielen impliziert Lernen.
- *Person-Situation-Modell*: Lernen im Spiel ist ein interaktives Geschehen, das einerseits von der Situation und andererseits von den personalen Voraussetzungen des Kindes bestimmt wird.

Ersteres ist als historische Position gegen die Annahme zu verstehen, dass Spielen und Lernen nichts miteinander zu tun haben. Letzteres macht deutlich, dass im Spiel zwar gelernt werden kann, es aber insbesondere im Kindergartenalter ein Stück weit zufällig bleiben muss. Einsiedler nennt dies das „Problem der Zufälligkeit des Lernens“ im Spiel (vgl. Einsiedler 1989, 297). Angesichts konstruktivistischer Annahmen stellt sich die Frage, ob die Zufälligkeit des Lernens im Spiel als ein besonderes Problem angesehen werden muss. Denn auch intentionales Lernen ist nicht gänzlich durch Lehren steuerbar, da Wissen individuell, ausgehend von Vorerfahrungen und vorhandenen Denkstrukturen, konstruiert wird. Vielmehr lenken konstruktivistische Annahmen zum Lernen die Aufmerksamkeit auf die Gestaltung der situativen Bedingungen des Lernens (vgl. Gerstenmaier & Mandl 1995).

4. Situative Bedingungen für das Lernen im Spiel

Aufgrund eigener empirischer Forschung im Kindergarten (vgl. Schuler 2008; Schuler & Wittmann 2009) wurde das Modell von Einsiedler wie folgt ausdifferenziert:



Im Spiel als interaktivem Geschehen von Kind und Situation entstehen Lerngelegenheiten, die das Kind aufgrund seiner momentanen und dauerhaften Voraussetzungen wahrnehmen, was wiederum zu Lernen führen kann. Eine Beschreibung dieser Bedingungen verweist auf die *Gestaltungsmöglichkeiten der Erzieherin bzw. der Lehrerin*. Sie hat einerseits Einfluss auf die räumliche und zeitliche Gestaltung sowie die soziale Konstellation, andererseits auf die *Auswahl der Materialien*. Bei Lernspielen für die Schule sollten „die Spielehandlungen und die erwünschten mathematischen Handlungen miteinander möglichst zur Deckung kommen" (Leuders 2008, 2). Auch im Kindergarten ist die Frage der Materialauswahl zentral. Spiele sollten einer genauen Analyse der mathematischen Möglichkeiten unterzogen werden (vgl. zu Kriterien der Materialauswahl Schuler 2008, zu Spielvorschlägen für den Kindergarten Schuler 2010a und 2010b). Daneben spielt im Kindergarten der *Aufforderungscharakter* (Anreiz zur Beschäftigung, zur Wiederholung, zum weiteren Spielen) eine wichtige Rolle. Im Unterschied zur Schule gibt es im Kindergarten nicht eine für alle Kinder verbindliche Rahmung wie beispielsweise eine Spielstunde. Vielmehr ist das Spielen von Gesellschaftsspielen ein Angebot unter anderen. Der Aufforderungscharakter kann sowohl vom Material als auch von der sozialen Konstellation ausgehen: Wird bereits gespielt? Wer spielt mit? Spielt die Erzieherin mit? Für das Erlernen eines Spiels, sowohl seines Regelwerks als auch möglicher Strategien, und das Ausschöpfen der mathematischen Möglichkeiten, ist ein mehrfaches Spielen notwendig. Im Kindergarten kommt es insbesondere dann zu Spielwiederholungen, wenn das Spiel als Spiel erlebt wird. Dies gilt auch für das schulische Spielen in offenen Lernformen.

Lernen im Spiel findet im wiederholten Spielen mit geeigneten Materialien statt. Es kann durch Fragen, Impulse und Kommentare der Erzieherin, die auf das mathematische Potenzial des Spiels gerichtet sind, intensiviert werden. Während dies in schulischen Zusammenhängen im Klassengespräch stattfinden kann, muss dies im Kindergarten teil des Spielgeschehens sein.

Literatur

Einsiedler, Wolfgang (1999): Das Spiel der Kinder. Zur Pädagogik und Psychologie des Kinderspiels. 3., aktualisierte und erw. Aufl. Bad Heilbrunn/Obb.: Klinkhardt.

Einsiedler, Wolfgang (1989): Zum Verhältnis von Lernen im Spiel und intentionalen Lehr-Lern-Prozessen. In: Unterrichtswissenschaft, 17, 291–308.

Einsiedler, Wolfgang (1982): Neuere Befunde zum Verhältnis von Spielen und Lernen im Kindesalter. In: Spielmittel, 5, 2–9.

Gerstenmaier, Jochen & Mandl, Heinz (1995): Wissenserwerb unter konstruktivistischer Perspektive. In: Zeitschrift für Pädagogik, 6, 867–888.

Groos, Karl (1899): Die Spiele der Menschen. Jena: Fischer.

Leuders, Timo (2008): Gespielt – gelernt – gewonnen! Produktive Übungsspiele. In: Praxis der Mathematik in der Schule, 22, 1–7.

Oerter, Rolf (2006): Spielen und lernen. Elemente einer Spielpädagogik in der Schule. In: Schulmagazin 5 bis 10, 7/8, 5–8.

Oerter, Rolf (1993): Psychologie des Spiels: ein handlungstheoretischer Ansatz. München: Quintessenz.

Piaget, Jean (1969): Nachahmung, Spiel und Traum. Stuttgart: Klett.

Scheuerl, Hans (1990): Das Spiel. Bd. 1 Untersuchungen über sein Wesen, seine pädagogischen Möglichkeiten und Grenzen. Weinheim, Basel: Beltz.

Schuler, Stephanie (2010a): „Ich hab' mehr Karten als du!“ Kartenspiele bringen Spaß und mathematische Lerngelegenheiten in die Kita. In: kindergarten heute, 1, 34–36.

Schuler, Stephanie (2010b): Das Bohnenspiel. Ein Regelspiel zur Förderung des Zahlbegriffs im Kindergarten und am Schulanfang. In: Grundschulunterricht Mathematik 1, 11–14.

Schuler, Stephanie (2008). Was können Mathematikmaterialien im Kindergarten leisten? – Kriterien für eine gezielte Bewertung. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker (CD-ROM).

Schuler, Stephanie & Wittmann, Gerald (2009): How can games contribute to early mathematics education? – A video-based study. In: Proceedings of CERME 6, Lyon. 2009.

Andreas SCHULZ, Freiburg

Ergebnisorientierung als Chance für den Mathematikunterricht? - Zusammenfassung der Befunde einer Studie im Mixed-Method-Design

Im Zentrum dieser Studie steht das Zusammenspiel von Lehrerhandeln und administrativ vorgegebenen Strukturen im Schulsystem: Zum Einen wird die ergebnisorientierte Bildungspolitik, mit deren Hilfe viele nationale Bildungsadministrationen zu Beginn des 21. Jahrhunderts eine Qualitätssteigerung von Unterricht herbeiführen möchten, analysiert. Zum Anderen wird Prozessen bei Mathematiklehrkräften auf den Grund gegangen, die für eine Umsetzung der aktuellen administrativen Innovationsideen Ergebnis- und Kompetenzorientierung notwendig sind und mit unterstützenden Begleitmaßnahmen angeregt und unterstützt werden sollen. Diese Untersuchung von Akteuren und Strukturen (vgl. Altrichter & Maag Merki, 2010) geschieht am Beispiel der Einführung von Ergebnis- und Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I in Luxemburg. Kompetenzorientierte Bildungsstandards für das Fach Mathematik wurden in Luxemburg im Schuljahr 2006-2007 eingeführt. Damit wird die hier vorgelegte Arbeit der Fachbezogenheit von Bildungsstandards gerecht. Zudem unterstützt die Fokussierung auf das Schulfach Mathematik und mathematikdidaktisch ausgeschärfte Hintergrundtheorien (Mason & Waywood, 1996) die zielgerichtete Analyse von administrativ vorgegebenen Strukturen im Schulfach Mathematik und verbunden damit die sensible Erfassung und Durchdringung von Innovationsprozessen bei Mathematiklehrkräften.
Die Datenerhebung und Auswertung dieser Studie fand im Zeitraum 2006 bis 2009 statt. Dabei kamen qualitative und quantitative Verfahren zum Einsatz. Die Datengrundlage dieser Studie umfasst Interviews mit Mathematiklehrkräften, Gruppendiskussionen mit Fachkollegien, repräsentativ erhobene Aufgaben aus Klassenarbeiten im Fach Mathematik, repräsentativ erhobene Fragebögen für Mathematiklehrkräfte, Experteninterviews mit der luxemburgischen Schuladministration sowie veröffentlichte und interne Dokumente des luxemburgischen Bildungsministeriums.
Lehrkräfte müssen als zentrale Akteure bei der Implementierung von Ergebnisorientierung und Kompetenzorientierung im Mathematikunterricht angesehen werden (vgl. Altrichter et al., 2010), und haben immer mehrere Möglichkeiten, auf die Innovationsideen zu reagieren (vgl. Oelkers, 2008). Dies führt zur zentralen Frage dieser Studie: „*Welche Innovationsprozesse finden bei Mathematiklehrkräften in Folge einer Einführung von Ergebnisorientierung und Bildungsstandards statt?*“ Ergänzt wird die Analyse und Interpretation durch eine ausführliche Reflexion der Konzeption und Um-

setzung des Mixed-Method-Designs. Auf diese Weise wird die in der Literatur bestehende theoretische Grundlage methodenintegrativer Forschungsdesigns (vgl. Kelle, 2008) vertieft und die Eignung des Mixed-Method-Designs für Studien insbesondere zur Evaluierung und Erforschung komplexer Gestaltungsverhältnisse im Schulwesen (vgl. Altrichter et al., 2010) belegt und veranschaulicht. Drei Ergebnisse der Studie werden im Folgenden in ihren wesentlichen Punkten wiedergegeben:

Bildungsstandards wirken als unkonkrete administrative Handlungsaufforderung an Lehrkräfte

Auf Grundlage der verknüpften qualitativen (längsschnittliche Interviews, Gruppendiskussionen, thematisch-sequenzielle Analyse) und der quantitativen Befunde (Strukturgleichungsmodell, latente Klassenanalyse, n=123) dieser Studie im Mixed-Method-Design wurde ein „Modell zur Umsetzung von Bildungsstandards durch Lehrkräfte" entwickelt gleichermaßen überprüft (Schulz, 2009b). Es konnte gezeigt werden, dass sich Lehrkräfte bei der Umsetzung von Bildungsstandards im Fach Mathematik und der damit verbundenen Entwicklung ihres Unterrichts nicht am Paradigma der Ergebnisorientierung orientieren. Anstatt ihre Handlungen an Unterrichtseffekten und überprüften Lernleistungen ihrer Schüler auszurichten, stehen für Lehrkräfte bei der Innovation ihres Unterrichts das Streben nach eigener *Handlungsfähigkeit* im Unterricht und im Kollegium, die Orientierung an persönlicher *Betroffenheit* und das Anliegen einer *kohärenten Sichtweise* auf bisherige und neue Konzepte im Vordergrund. Als besondere Schwierigkeit stellte sich heraus, dass Bildungsstandards nicht genug Informationen für Lehrkräfte enthalten, damit sich diese ein Verständnis der administrativen Innovationsideen rekonstruieren können (vgl. Hill, 2001). Die erfassten Umsetzungsprozesse von Bildungsstandards durch Lehrkräfte sind an langfristige, selbstbestimmte Zusatzarbeit sowie intrinsische Motivation gekoppelt und lassen sich als *Internalisierungsprozess* beschreiben und erklären. Dabei wirken Bildungsstandards als externe und unkonkrete Handlungsaufforderung der Administration an die Lehrkräfte. Dies entspricht eher einer traditionellen Inputsteuerung über Lehrpläne als einer Ergebnisorientierung.

Die Implementierung von Ergebnis- und Kompetenzorientierung macht die Bearbeitung von Spannungsfeldern notwendig

Im Zusammenhang mit der Einführung von Bildungsstandards werden Lehrkräfte mit wissenschaftlich konzipierten, teils empirisch fundierten, fachdidaktischen Innovationsideen unterstützt und konfrontiert. Diese Informationen müssen Lehrkräfte *verstehen*, mit ihren bestehenden Erfahrungen und Konzepten *verknüpfen* und in konkrete Unterrichtshandlungen *übersetzen* (vgl. Stipek, Givvin, Salmon & MacGyvers, 2001). Aus formalem Wissen muss praktisches Wissen generiert werden (vgl. Fenstermacher, 1994). Im Rahmen dieser Studie wurden Spannungsfelder (siehe Tabelle) identifiziert, die im damit angesprochenen Übersetzungsprozess als Innovationsherausforderungen und -Hemmnisse wirksam werden (Schulz, 2009). Die Spannungsfelder sind geprägt von teils widersprüchlichen Handlungsanforderungen, die an Lehrkräfte in ihrem Berufsumfeld gestellt werden, sowie von unterschiedlichen Begründungsanforderungen, die an *Wissen als Handlungsgrundlage im wissenschaftlichen, administrativen und unterrichtlichen Kontext* gestellt werden.

Spannungsfelder im mathematischen Lehrerprofessionswissen (PCK)

Kontext:	**Komponenten der Spannungsfelder:**
Typen des Lehrerprofessionswissens	Formales und praktisches Wissen
Perspektiven auf Schülerleistungen	Selektion und Förderung Manifeste und latente Merkmale Defizit- und Kompetenzorientierung Summative und formative Diagnose
Institutioneller Handlungsrahmen	Professionelle Kompetenzen zwischen Lehrerautonomie, institutionellen Gegebenheiten und Rechenschaftslegung

Beispielsweise werden im Rahmen der Implementierung von Bildungsstandards unterschiedliche Perspektiven auf Schülerleistungen (siehe Tabelle) weder ausreichend bewusst gemacht, noch deren unterscheidbare und sich gegenseitig ergänzende Funktionen expliziert. Dies wäre jedoch notwendig, um Lehrkräften ein Verständnis von Innovationen und damit eine Grundlage für die Umsetzung von Innovationsideen im Unterricht zu ermöglichen. Nur so können im größeren Umfang innovative Handlungsalternativen erkannt und entwickelt werden.

Integration Hypothesen generierender und Hypothesen überprüfender Forschungsschritte im Mixed-Method-Design

Der Erkenntnisgewinn dieser Arbeit basiert auf Triangulierung und komplementärer Ergänzung von Daten, Methoden und Theorien. Die hermeneutische Näherung an den Forschungsgegenstand kommt durch eine schrittweise Methodenentwicklung und eine systematische Reanalyse von Befunden zum Ausdruck. Diese Konzeption des Mixed-Method-Designs erwies sich in der Reflexion als gewinnbringend besonders auch für die Integration von explorativen und konfirmatorischen Arbeitsschritten, um sowohl gegenstandsangemessene Theorien zu entwickeln, Befunde zu validieren, verschiedene empirische und theoretische Perspektiven miteinander zu kombinieren und Ergebnisse abzusichern. Zudem erweist sich eine dichotome Gegenüberstellung von normativen und interpretativen oder qualitativen und quantitativen Vorgehensweisen in der Forschungspraxis, zumindest im Rahmen von Mixed-Method-Studien, als nicht angemessen. Die Reflexion der Teilstudien im Gesamtdesign dieser Studie veranschaulicht und stützt eine integrative Perspektive, in der unterschiedliche Forschungsmethoden im Vergleich passender auf einem gemeinsamen interpretativen Kontinuum angeordnet denn als konträres Paar gegenübergestellt werden (vgl. Prein & Erzberger, 2000).

Literatur

Altrichter, H. & Maag Merki, K. (2010). Steuerung der Entwicklung des Schulwesens. In H. Altrichter & K. Maag Merki (Hrsg.), *Handbuch Neue Steuerung im Schulsystem*. 1. Aufl. (Educational governance, S. 15–39). Wiesbaden: VS Verl.

Fenstermacher, G. (1994). The Knower and the Known: The Nature of Knowledge in Research on Teaching. *Review of Research in Education* (20), 3-56.

Hill, H. (2001). Policy Is Not Enough: Language and the Interpretation of State Standards. *American educational research journal* (38, 2), 289-318.

Kelle, U. (2008). *Die Integration qualitativer und quantitativer Methoden in der empirischen Sozialforschung: Theoretische Grundlagen und methodologische Konzepte* (2. Aufl.). Wiesbaden: VS Verl.

Mason, J. & Waywood, A. (1996). The role of theory in mathematics education and research. In A. J. Bishop (Hrsg.), *International handbook of mathematics education* (S. 1055–1089). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.

Oelkers, J. &. Reusser K. (2008). *Qualität entwickeln - Standards sichern – mit Differenzen umgehen.* Bonn, Berlin: BMBF.

Prein, G. & Erzberger, C. (2000). Integration statt Konfrontation. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 3* (3), 343-357.

Schulz, A. (2009a). Competence-orientation in literature and in teachers' perception: Implications for educational quality management and teacher education. In J. Maaß & W. Schlöglmann (Hrsg.), *Beliefs and attitudes in mathematics education. New research results* (S. 99–117). Rotterdam: Sense Publishers.

Schulz, A. (2009b) Führen Bildungsstandards zu Unterrichtsentwicklung? *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009.* Münster: WTM-Verlag.

Stipek, D., Givvin, K., Salmon, J. & MacGyvers, V. (2001). Teachers' beliefs and practices related to mathematics instruction. *Teacher and teacher education, 17,* 213-226.

Heinz Schumann, Weingarten

Raumgeometrisches Beweisen

Raumgeometrisches Wissen ist von Bedeutung für das Verstehen und Modellieren des „Raumes" als ein wesentliches Medium des Menschen; es schließt das raumgeometrische Beweisen ein.

1. Stichwörter zum Thema „Raumgeometrisches Beweisen"

Zur Legitimation des raumgeometrischen Beweisens

Erkenntnistheoretische Legitimierung

- Allgemeingültige Sicherung der durch Exploration gefundenen raumgeometrischen Erkenntnisse (Antwort auf die Frage nach der Richtigkeit)
- Erkärung für die raumgeometrischer Erkenntnisse (Antwort auf die Frage nach dem „*Warum?*")
- Das Beweisen ist eine prinzipielle Arbeitsweise der Mathematik.

Das raumgeometrische Beweisen ist die Voraussetzung für die Bildung von Satzgefügen und damit für die Theoriebildung in der Raumgeometrie.

Curriculare Legitimierung: „*Lernen mathematisch zu argumentieren*" als allgemeine mathematische Kompetenz (das Beweisen kommt in den Beschreibungen dieser Kompetenz leider nur nebensächlich vor). Ebene Geometrie anwenden. Heuristische Strategien üben. Raumvorstellung trainieren.

Idealtypische Beweisarten: Synthetisch-geometrische, analytisch-geometrische (koordinatengeometrische und vektorielle) Beweise, Berechnungsbeweise (inkl. Beweise von und mittels Ungleichungen), Konstruktionsbeweise, Abbildungsbeweise, Beweise mittels Darstellender Geometrie (diese sind heute relativ bedeutungslos, weil diese Art der Geometrie kaum noch vermittelt wird).

Anmerkungen: *Je algebraischer, desto weniger anschaulicher ist ein raumgeometrischer Beweis.*

Der raumgeometrischen Beweisfigur kommt eine zentrale Stellung zu! *Adäquate Beweisfiguren und Beweisentwicklungen werden mittels Interaktiver Dynamischer Raumgeometrie-Systeme im virtuellen Raum konstruiert.*

Einige Beweisstrategien: Analogiebildung (Beweis in der ebenen Geometrie – Beweis in der Raumgeometrie), Figurenergänzung – Figurenzerlegung, Verallgemeinerung – Spezialisierung, Zurückführung auf Aussagen der ebenen Geometrie, Zurückführung auf algebraische Aussagen, Verwendung physikalischer Deutungen. Besonderheit: Räumliches Beweisen von Aussagen der ebenen Geometrie

Generelle Probleme beim raumgeometrischen Beweisen: Es bestehen Mängel bei der Raumvorstellung, bei der Konstruktion räumlicher Beweisfiguren, bei planimetrischem und stereometrischem Vorwissen, bei der Erfassung komplexerer raumgeometrischer Zusammenhänge, im grundsätzlichen Umgang mit Beweisen

Anmerkung: Einfache räumliche Aussagen können vorausgesetzt werden. *Keine Beweise für evidente Aussagen!*

Einige Lernhilfen für das raumgeometrische Beweisen: Bereitstellen von Beweisen zum verstehenden Nachvollzug („*Geometrielernen durch Rezeption von Beweisen*"), Beweisfiguren bzw. den Beweisgang beschreibenden Figurenfolgen, „lokalem" Begriffs- und Satzrepertoire, Übungsmaterial (z. B. lückenhafte Beweise, visualisierte Beweisschritte zur Beweisargumentation, mit falschen Beweisschritten versetzte Permutationen von Beweisschritten).

Methodische Einordnung des raumgeometrischen Beweisens

Raumgeometrisches Beweisen ist Bestandteil folgender Methode für die Behandlung raumgeometrischer Sätze (**Schema**):

Behandlungsmethode für raumgeometrische Sätze

1. Satzfindung

1.1 **durch Konstruieren, Messen und Berechnen im virtuellen Raum** (auch als Lösung einer Konstruktions- bzw. Mess- bzw. Berechnungsaufgabe): Entsprechende raumgeometrische Figur konstruieren und analysieren (auch durch Einzeichnen weiterer und Hervorhebung wesentlicher Elemente; durch Messungen und Berechnungen, auch aufgrund von Messungen).
Ergebnis: *erste Vermutung*

1.2 **durch Analogisieren** (insbesondere von ebenen zu räumlichen Aussagen), **Generalisieren**, **Spezialisieren und anderer heuristischer Methoden wie Zerlegen, Zusammensetzen usw**): Entsprechende raumgeometrische Figur im virtuellen Raum konstruieren und analysieren.
Ergebnis: *erste Vermutung*

→ **Vermutung experimentell überprüfen, z. B. durch Formvariation der raumgeometrischen Figur. Ergebnis:** *Erhärtung der Vermutung mit Satzformulierung oder Widerlegung der Vermutung (Gegenbeispiel).*

2. Beweisfindung und - darstellung

2.1 Übernahme der Satzfindungsfigur aus 1. als Beweisfigur
2.2 Analyse des Beweisproblems: Voraussetzungen, Behauptung – Beweisidee
2.3 Wahl der Beweismittel: synthetisch, analytisch (vektoriell – koordinatengeometrisch), abbildungsgeometrisch usw.
2.4 Anwenden heuristischer Beweisfindungsmethoden (wie Vorwärtsbearbeiten, Rückwärtsarbeiten, Zurückführen auf Aussagen der ebenen Geometrie, bekannten Beweis analogisieren bzw.verallgemeinern bzw. spezialisieren usw.)
2.5 Dokumentation des Beweises unter dem Aspekt der Nachvollziehbarkeit

Schema

2. Drei Beispiele für raumgeometrisches Beweisen

Aus Platzgründen kann die getroffene Auswahl nur einen sehr kleinen Ausschnitt aus der Vielfalt an Beweisen in der elementaren Raumgeometrie (vgl. u. a. Schumann 2010) wiedergeben.

Beispiel 1 (Regelmäßiges Oktaeder)
Zwei zueinander senkrecht stehende Strecken, die einander halbieren, sind die Diagonalen eines Quadrats (**Abb. 1**).
Räumliches Analogisierung
Drei paarweise zueinander senkrecht stehende Strecken, die einander halbieren, sind die Diagonalen eines regelmäßigen … (**Abb. 2**)**.**
Beweis mittels den Aussagen: Gleichschenklig-rechtwinkliger Dreiecke mit kongruenten Katheten sind einander kongruent. Die spitzen Winkel eines gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks betragen jeweils *45°*.

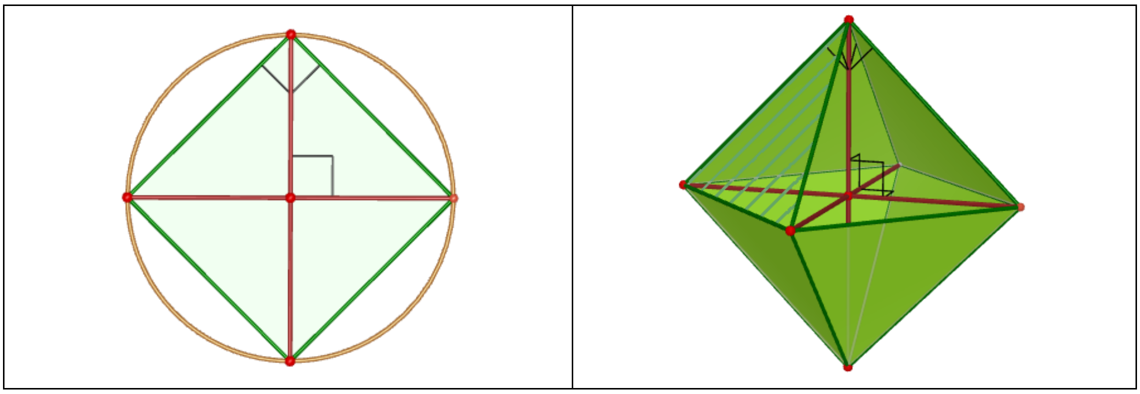


Abb. 1 - 2

Beispiel 2 (Umkugel-Hexaeder aus Vierecken)
Auf eine Kugel legen wir vier Punkte A, B, C, D, die nicht alle auf demselben Kreis liegen, und konstruieren durch A, B, C bzw. A, B, D bzw. B, C, D jeweils einen Kreis (**Abb. 3**). Auf den Kreis ABC legen wir den Punkt E, auf den Kreis ABD den Punkt F und auf den Kreis BCD den Punkt G. Die Kreise BFE, CEG und DFG schneiden einander (!) im noch fehlenden achten Eckpunkt H des Hexaeders, dessen Vierecksseitenflächen nun eingezeichnet werden können (**Abb. 4**, mit dem offenen „Seitenflächenfenster" ABFD). Aus der Konstruktion ergibt sich folgender Satz: ***Ein Umkugel-Sechsflächner aus Vierecken ist eindeutig bestimmt durch eine räumliche Ecke aus drei Sehnenvierecken.***

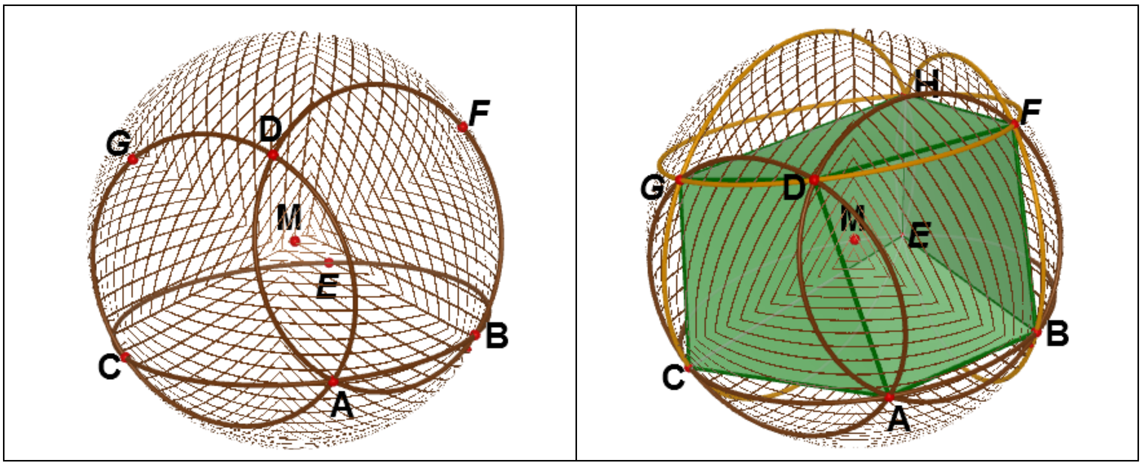


Abb. 3 - 4

Es ist zu zeigen: Wenn von acht Ecken eines Hexaeders ABCDEFGH aus Vierecken sieben auf einer Kugel liegen, dann liegt auch die achte Ecke auf der Kugel. – Zurückführung des Beweisproblems auf eine Aussage der ebenen Geometrie: Beispielsweise liegen ABCDEFG auf einer Kugel. Wir legen nun um A einen Spiegelungskugel, deren Radius beliebig sein kann. Bei Spiegelung an dieser Kugel geht die Umkugel von ABCDEFG in eine Ebene über, in der die Bildpunkte B', C', D', E', F', G' liegen (**Abb. 5**); A wird in den unendlich fernen Punkt abgebildet. Dabei werden die Kreise ABEC, ABFD, ADGC auf die Geraden B'E'D', B'F'D', D'G'C' abgebildet. Die drei Kreise BFE, CEG, DFG werden zu den Kreisen B'F'E', C'E'G, D'F'G'. Diese Kreise schneiden einander im Dreieck B'D'C' nach dem leicht zu beweisenden Satz von Miquel für Dreiecke. Also schneiden auch die drei auf der Umkugel von ABCDEFG liegenden Originalkreise einander.

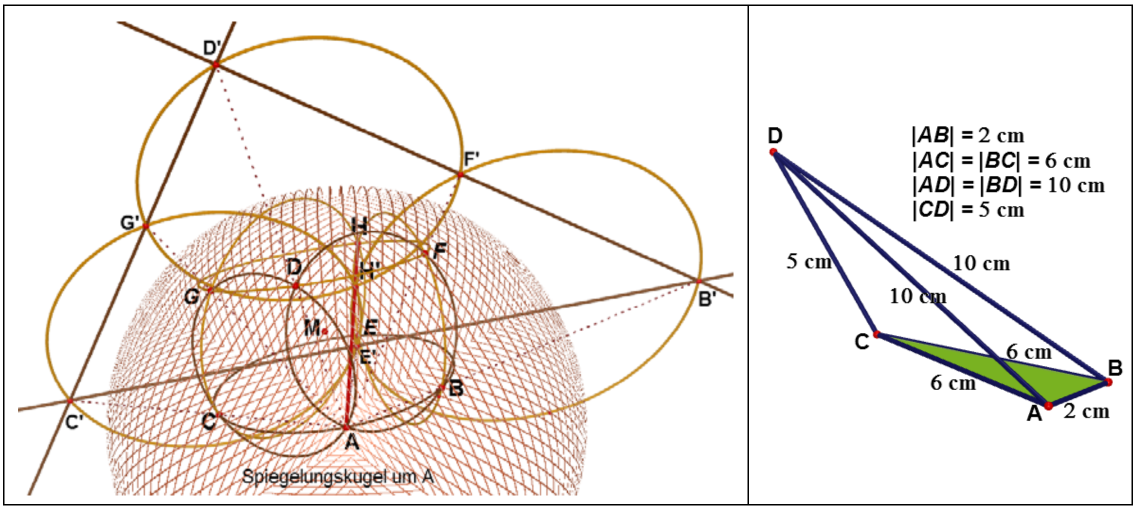


Abb. 5 - 6

Beispiel 3 (Eine Ungleichung für die Kanten eines Tetraeders)

Wie man leicht nachprüfen kann (**Abb. 6**), ist folgende Aussage im Allgemeinen falsch: *Die Summe von vier Kanten eines Tetraeders ist stets größer als die Summe der zwei übrigen Kanten.* Aber es gilt: ***Die Summe der Kanten zweier Gegenkantenpaare eines Tetraeders ist stets größer als die Summe der Kanten des dritten Gegenkantenpaars.***

Beweis: Beispielweise wählen wir die Gegenkantenpaare AD, BC; BD, CA. Mit der Dreiecksungleichung folgt:

$|BC| + |AC| > |AB|$, $|BC| + |BD| > |CD|$, $|AD| + |AC| > |CD|$, $|AD| + |BD| > |AB|$.

Die Addition der zwei ersten und der zwei letzten Ungleichungen liefert

$2(|BC| + |AD| + |AC| + |BD|) > 2(|AB| + |CD|)$.

3. Literatur

Schumann, H.: Eine Einführung in die Raumgeometrie. Erscheint 2010 bei Franzbecker, Berlin und Hildesheim – und die dort angegebene Literatur.

Michael SCHUSTER, Würzburg

Wiki-Lernpfade: Ein interaktives Werkzeug zum selbsttätigen Lernen und individuell angepassten Lehren

1. Das Pentagramm-Projekt

Angetrieben vom gemeinsamen Interesse, den Mathematikunterricht verbessern zu wollen, treffen sich seit 2005 Lehrkräfte und Dozenten im Rahmen des Pentagramm-Projekts an der Universität Würzburg. Dabei wurde dem Computer als Darstellungs- und Interaktionswerzkzeug und dem Internet als Plattform eine wichtige Bedeutung. Im Folgenden wird beschrieben, wie im Internet vorhandenes Material für den Mathematikunterricht gesammelt und zu neuen interaktiven Lernsequenzen (-pfaden) zusammengestellt wurde. Dabei spielte ein „Wiki“ eine zentrale Rolle.

2. Die Material-Datenbank mathematik-digital.de

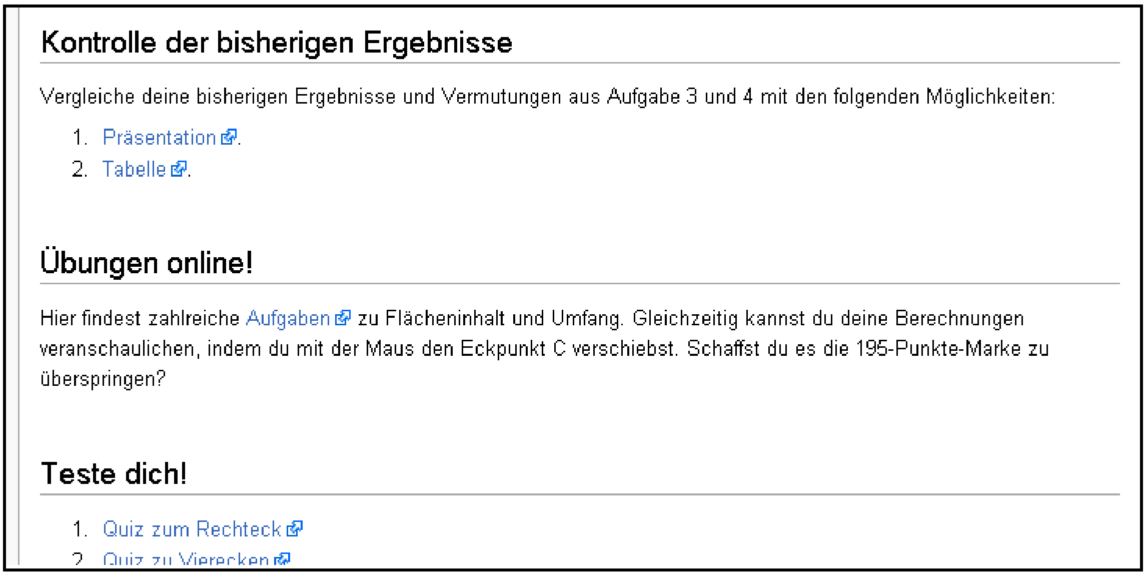
Um einen Überblick über die bereits existierenden Materialien im Internet zu gewinnen, wurde eine Datenbank (mathematik-digital.de) erstellt, in der Links auf die entsprechenden Seiten eingetragen werden können. Von einem Redaktionsteam wurden die Links bewertet und dadurch hierarchisch geordnet.

Diese Datenbank wird von der Pentagrammgruppe weiter gepflegt. Sie kann von jedem Nutzer erweitert werden, indem neue Links einfach eingetragen werden können.

Das Ziel war es dabei, die Materialien entsprechend dem bayerischen Lehrplan allen Lehrkräften zur Verfügung zu stellen.

3. Wiki-System

Mit Hilfe eines Wiki-Systems (Mathematik-Digital-Wiki) wurde den Lehrkräften die Möglichkeit gegeben mit geringem Aufwand (nur Internetanschluss, Browser und geringe Kenntnisse von Wiki-Befehlen nötig) eigene Internetseiten zu erstellen. Zu einzelnen Unterrichtsstunden und -sequenzen wurden Links von Internetseiten, in denen „gute" Veranschaulichungen, dynamische Darstellungen oder Übungsaufgaben mit Rückmeldung enthalten sind, in elektronischen Arbeitsblättern mit Arbeitsaufträgen in einen Kontext gestellt. So entstanden individuelle internetgestützte Lehr- und Übungsumgebungen.



Der Vorteil dieser elektronischen Arbeitsblätter besteht in der einfachen Nutzung vorhandener Internetseiten, die individuell auf den eigenen Unterricht angepasst werden können. Zudem können diese Arbeitsblätter nach einer Erprobung leicht verändert und so für die nächste Verwendung optimiert werden.

4. Wiki-Lernpfade

Im nächsten Schritt wurden diese elektronischen Arbeitsblätter im Wiki-System dahingehend ausgebaut und individualisiert, dass eigene dynamische Elemente (z.B. GeoGebra-Applets, Videos) und Rückmeldemöglichkeiten (z.B. Zuordnungs-, Lückentext- und Multiple-Choice-Aufgaben) eingebaut wurden.

Dies geschah in Kooperation der Mitarbeiter mit der österreichischen „Medienvielfalt", die bereits seit 2004 Erfahrungen mit computergestützten Lernumgebungen gesammelt haben. Insbesondere wurden sog. „Lernpfade" entwickelt, die ein kognitivistisch orientiertes (webbasiertes) Unterrichtsangebot darstellen, das dem Lernenden eigenes Erkunden und individualisiertes Lernen einräumt (STEPANCIK 2008, S. 152). Diese Lernpfade werden den Mathematik-Lehrkräften in Österreich zum Einsatz im Unterricht zur Verfügung gestellt.

Während die österreichischen Lernpfade noch statisch und vom Benutzer nicht veränderbar sind, bietet die Realisierung solcher Lernpfade mit einem Wiki-System neue Formen der Mitarbeit und Veränderbarkeit. So bieten Wiki-Lernpfade mehrere Vorteile gegenüber Lernpfade, die nicht mit einem Wiki-System erstellt sind:

- Mehrere Autoren können gemeinsam einen Wiki-Lernpfad online erstellen.
- Auch Autoren ohne HTML-Kenntnisse können Wiki-Lernpfade mit geringem Aufwand selbst erstellen.
- Jede Veränderung wird protokolliert und kann eingesehen und rückgängig gemacht werden.
- Lehrkräfte können Wiki-Lernpfade individuell auf den eigenen Unterricht anpassen.
- Kommentare zu den Wiki-Lernpfade können von Nutzern mit angefügt werden.

5. Erste Erfahrungen

In einer Untersuchung (Medienvielfalt Endbericht 2009) mit deutschen und österreichischen Lehrkräften wurden die Erfahrungen mit Wiki-Lernpfaden gesammelt und ausgewertet:

- Die Lernpfade sind von Lehrer/innen insgesamt gesehen gut bis sehr gut beurteilt worden.
- Das Feedback durch Schüler/innen war insgesamt sehr positiv.
- 65% der Schüler/innen möchten wieder mit einem Lernpfad im Mathematikunterricht arbeiten.
- Erstellung der Lernpfade war einfacher als ohne Wiki-System (nur Browser nötig, mehrere Autoren können online zusammenarbeiten).
- Änderungen können leicht vorgenommen werden.

6. Nächste Schritte

Durch diese positiven Rückmeldungen ermutigt, sollen nun Wiki-Lernpfade im Mathematikunterricht genauer untersucht werden. Dabei wurden mehrere Fragestellungen aufgeworfen:

- Können Wiki-Lernpfade dazu beitragen, manche Lerninhalte des Mathematikunterrichts besser – oder zumindest anders – zu lernen?
- Welchen Gestaltungskriterien müssen Wiki-Lernpfade genügen?
- Für welche Themen (Begriffslernen, Problemlösen, Argumentieren, Üben, ...) eignen sich Wiki-Lernpfade?
- Für welche Jahrgangsstufen eignen sich Lernpfade bzw. wie müssen sie jeweils gestaltet sein?
- Kann mit Wiki-Lernpfaden die Kooperation zwischen Lehrer/innen erhöht werden?
- Können Wiki-Lernpfade zur Individualisierung elektronischen Unterrichtsmaterials beitragen?

Diese Fragen sollen zum einen durch das Arbeiten mit einer Lehrergruppe (Einsatz von Wiki-Lernpfaden, Kooperation der beteiligten Lehrkräfte) und zum anderen durch die Untersuchung von Schüleraktivitäten (Umgang der Schüler mit Wiki-Lernpfaden, Leistungsveränderungen der Schüler) beantwortet werden.

Literatur:

Mathematik-digital.de, Universität Würzburg
http://www.mathematik-digital.de

Mathematik-Digital-Wiki, Universität Würzburg,
http://wiki.zum.de/Mathematik-digital

Medienvielfalt Endbericht, PH Niederösterreich 2009,
http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=131

Medienvielfalt im Mathematikunterricht, PH Niederösterreich,
http://rfdz.ph-noe.ac.at/index.php?id=49

Pentagramm-Projekt, Universität Würzburg,
http://www.dmuw/wissenschaft/pentagramm_projekt/

STEPANCIK, Evelyn, Die Unterstützung des Verstehensprozesses und neue Aspekte der Allgemeinbildung im Mathematikunterricht durch den Einsatz neuer Medien, Wien 2008, S. 151f
http://www.informatix.at/diss/diss_step_jan08.pdf

Fritz SCHWEIGER, Salzburg

Die Algorithmen von Poincaré, Brun und Selmer

Einer der bekanntesten Algorithmen ist der euklidische Algorithmus. Man gehe aus von zwei reellen Zahlen $a_0 > 0$ und $a_1 > 0$ mit $a_0 \geq a_1$. Dann bilde man $\delta(a_0, a_1) = (a_0 - a_1, a_1)$ und ordne bei Bedarf um. Ist also $a_0 - a_1 > a_1$, so setze man $a_0' = a_0 - a_1$ und $a_1' = a_1$, andernfalls $a_0' = a_1$ und $a_1' = a_0 - a_1$. Bald hat man diesen Algorithmus beschleunigt, indem man die Subtraktion durch eine Division ersetzt hat, also aus dem Paar (a_0, a_1) das Paar $\sigma(a_0, a_1) = (a_0 - ka_1, a_1)$ bildete. Dabei ist $k \geq 1$ die größte ganze Zahl, so dass dann noch $a_0 - ka_1 \geq 0$ gilt. Dann ist automatisch $a_1 \geq a_0 - ka_1$ und es erfolgt in jedem Fall eine zyklische Umordnung. Es ist sehr praktisch vom heutigen Standpunkt aus, hier Matrizen zu verwenden und den Algorithmus zu beschreiben in der Form

$$\begin{pmatrix} a_0' \\ a_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}.$$

Alle wichtigen Rekursionen können aus dem Produkt von Matrizen hergeleitet werden. Vor allem sind es die Näherungsbrüche, die damit bequem dargestellt werden:

$$\begin{pmatrix} p_{n+1} & p_n \\ q_{n+1} & q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wie man leicht einsieht, bricht dieser Algorithmus genau dann ab, wenn das Verhältnis $a : b$ rational ist. Ferner ist offensichlich der Algorithmus homogen, das heißt, das Paar (x_0, x_1) und das Paar $(\lambda x_0, \lambda x_1)$ führen auf denselben algorithmischen Verlauf. Schon den Griechen war bekannt, dass geometrische Verhältnisse zu periodischen Algorithmen führen können. Die Standardbeispiele sind der Goldene Schnitt und die Wurzel aus 2. Letztlich kann man auf den berühmten Satz von Lagrange hinweisen.

Die Idee der mehrdimensionalen Kettenbrüche hat mindestens zwei Wurzeln (siehe dazu auch Schweiger 2006). Es sind dies der Versuch, den erwähnten Satz von Lagrange über quadratische Irrationalitäten zu verallgemeinern (hier ist C. G. Jacobi zu nennen) und die Frage nach Approximationen eines n-tupels reeller Zahlen durch rationale Zahlen mit gemeinsamem Nenner. Interessanterweise ist die zweite Frage auch mit Musiktheorie verbunden. Verschiedene Vorschläge mehrdimensionaler Al-

gorithmen wurden auch von H. Poincaré, V. Brun und E. S. Selmer gemacht.
Im Jahre 1868 publizierte E. Heine die Arbeit „Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird“ die er im Nachlass von G. G. J. Jacobi (1804-1851) gefunden hatte. Seien u_0, v_0, w_0 drei positive Zahlen und seien $l_0 = [\frac{v_0}{u_0}], m_0 = [\frac{w_0}{u_0}]$. Dann setzt er $u_1 = v_0 - l_0 u_0, v_1 = w_0 - m_0 u_0, w_1 = u_0$. Mittels Matrizen erhält man

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -l_0 & 1 & 0 \\ -m_0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

Natürlich geht es mittels Iteration weiter. Ähnlich wie zuvor, sieht man leicht, dass die Tripel (u_0, v_0, w_0) und $\lambda(u_0, v_0, w_0)$ denselben algorithmischen Verlauf bestimmen.
Jacobi teilt am Schluss seiner Arbeit auch drei Beispiele mit, nämlich $(1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$, $(1, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9})$ und $(1, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{25})$, die alle periodische Algorithmen ergeben. Das letzte Tripel ist aber eine aufwendige Rechnung, denn man findet $(u_7, v_7, w_7) = (u_{13}, v_{13}, w_{13})$. Nun damit stehen wir schon vor einem bis heute ungelösten Problem: Ob das Tripel $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}, 1)$ eine periodische Entwicklung hat, ist unbekannt. Die Verallgemeinerung des Satzes von Lagrange ist ein noch offenes Problem.
Leichter lesbar sind etwa die beiden Arbeiten von Viggo Brun „Euclidean Algorithms and Musical Theory“oder „Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres“. Ein schöner Nachruf auf Viggo Brun ist aus der Feder Scribas erschienen (Scriba 1985).Gegeben sei wieder ein Tripel (a_0, a_1, a_2) mit $a_0 \geq a_1 \geq a_2 > 0$. Man bildet daraus zunächst $\sigma(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_1, a_1, a_2)$ und ordnet sodann um. Dies führt auf drei Möglichkeiten!

$$a'_0 = a_0 - a_1, a'_1 = a_1, a'_2 = a_2$$

$$a'_0 = a_0, a'_1 = a_0 - a_1, a'_2 = a_2$$
$$a'_0 = a_0, a'_1 = a_1, a'_2 = a_0 - a_1.$$

Natürlich lässt sich dies wiederum mittels Matrizen beschreiben.
Aber nun ist es Zeit, den Zusammenhang mit Musiktheorie aufzudecken, der auch im erwähnten Nachruf von Scriba beschrieben wird. In der sogenannten reinen Stimmung ist das Verhältnis der Frequenz eines Tones

zu seiner Oktave 1 : 2. Für die Quinte findet man 2 : 3 und für die Quarte 3 : 4. Nun will man ein Saiteninstrument bauen, welches innerhalb der Oktave eine feste Zahl von Tönen besitzt. Wenn man an ein Klavier denkt, sind dies 12 Saiten, die im umgekehrten Verhältnis kürzer werden. Man kann hier eine Exkursion in die Geschichte der Musik oder in die Musik anderer Kulturen einschieben. Nun stellen wir uns vor, das Verhältnis zweier aufeinander folgenden Saiten soll eine feste Zahl sein. Wir suchen also eine Zahl λ, so dass

$$\lambda^x \approx 2,\ \lambda^y \approx \frac{3}{2},\ \lambda^z \approx \frac{4}{3}.$$

Dies ist ein Problem diophantischer Approximation, nämlich das Tripel $(\log 2, \log\frac{3}{2}, \log\frac{4}{3})$ durch Tripel ganzer Zahlen anzunähern. Arbeitet man mit Näherungswerten, so findet man etwa die Entwicklung 122010100001.. Die Spalten der entsprechenden Matrizen sind nun die gesuchten Werte (x, y, z). Die Entwicklung 1220101 liefert etwa $(12, 7, 5)$, die Entwicklung 12201010000 die Näherungen $(53, 31, 22)$. Man kann auf ähnliche Weise auch von den drei Verhältnissen Oktave, Quinte und große Terz (5 : 4) ausgehen, also die drei Zahlen $(\log 2, \log\frac{3}{2}, \log\frac{5}{4})$ approximieren und findet das Tripel $(12, 7, 4)$.
In der musikalischen Praxis ist die Näherung $(12, 7, 5)$ von besonderer Bedeutung. Diese entspricht einer Einteilung einer Oktave in 12 aufeinander folgende Tonschritte, deren Frequenzen sich jeweils um den Faktor $\lambda = \sqrt[12]{2}$ erhöhen. Eine Quinte ist in der *temperierten* Stimmung statt durch $\frac{3}{2}$ durch $\lambda^7 \approx 1,498$ gegeben, also etwas „enger“. Dafür ist die Quarte $\frac{4}{3}$ mit $\lambda^5 \approx 1,335$ etwas „weiter“.
Dieser Faktor wird meist anders hergeleitet. Man fordert, dass 7 Oktavenschritte genau 12 Quintenschritte entsprechen. Tatsächlich ist dies in der *natürlichen* Stimmung nicht der Fall, denn 2^7 ist verschieden von $(\frac{3}{2})^{12}$. Es ist $2^{19} = 524288$ und $3^{12} = 531441$. Das Verhältnis $3^{12} : 2^{19} \approx 1,01365$ heißt das Pythagoreische Komma. Setzt man daher die Quinte mit λ^7 an, so erhält man wieder $2 = \lambda^{12}$.
In Norwegisch ist Ernst Selmers Arbeit (Selmer 1961) erschienen, die in einer einfachen Abänderung besteht. Sei $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq 0$ gegeben. Dann setze man $\sigma(a_0, a_1, a_2) = (a_0 - a_2, a_1, a_2)$. Dieses Tripel wird wieder absteigend geordnet. Selmer berechnet die Entwicklung von $(\log 2, \log\frac{3}{2}, \log\frac{5}{4})$, aber der wichtige Nenner 12 kommt unter den Näherungen nicht vor.
Henri Poincaré hat im Jahre 1884 einen etwas anderen Algorithmus beschrieben. Sei (a_0, a_1, a_2) ein Tripel nichtnegativer reeller Zahlen. Dann

gibt es eine Permutation π der Indizes, so dass die Bedingung $a_{\pi 0} \leq a_{\pi 1} \leq a_{\pi 2}$ erfüllt ist. Dann bilde man

$$(a_0', a_1', a_2') = P(a_0, a_1, a_2) = (a_{\pi 0}, a_{\pi 1} - a_{\pi 0}, a_{\pi 2} - a_{\pi 1}).$$

So harmlos dieser Algorithmus aussieht, so steckt er voller schwieriger mathematischer Probleme (Nogueira 1995). Aber entgegen den Hoffnungen Poincarés ist er für diophantische Approximation kaum brauchbar. Man erhält nach einiger Rechnung für das Tripel $(\log 2, \log \frac{3}{2}, \log \frac{4}{3})$ die Näherung $(11, 5, 4)$, aber nicht die musikalisch interessanten Werte $(12, 7, 5)$.
Mehrdimensionale Kettenbrüche könnten ein gutes Thema für den Unterricht sein. Der Zugang verwendet elementare Rechnungen. Dennoch stößt man rasch auf ein ungelöstes Problem. Der Einsatz von Taschenrechnern und Computern ist möglich. Teile von Originalarbeiten können im Schulunterricht vorgestellt werden. Dies kann selbständiges Arbeiten und mathematische Kreativität mit historischen und kulturellen Bezügen verbinden.

Literatur

Brun, V. (1964), Euclidean algorithms and musical theory. *L'Enseignement Mathématique* 10, 125-137

Brun, V. (1957), Algorithmes euclidiens pour trois et quatre nombres. 13ième Congr. Math. Scand. Helsinki, S. 45–64

Jacobi, C. G. J. (1868), Allgemeine Theorie der kettenbruchähnlichen Algorithmen, in welchen jede Zahl aus drei vorhergehenden gebildet wird. *J. Reine Angew. Math.* 69, 29-64

Nogueira, A. (1995), The three-dimensional Poincaré continued fraction algorithm. *Israel J. Math.* 90, 373–401

Poincaré, H. (1884), Sur une généralisation des fractions continues. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér.* A 99 (1884), 1014-1016 = *Oeuvres* V, pp. 185–187

Schweiger, F. (2006), Was leisten mehrdimensionale Kettenbrüche? *Mathematische Semesterberichte* 53, 231-244

Scriba, C. J. (1985), Zur Erinnerung an Viggo Brun. *Mitt. Math. Ges. Hamburg* 11, 271-290

Selmer, E. S. (1961), Om flerdimensjonal kjedebrøk. *Nord. Mat. Tidskr.* 9, 37–43

FRANZISKA, SIEBEL, Frankfurt

„Und das ist dann halt bei allen Zahlen so.“ Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen.

Algebraisches Denken lässt sich mit geeigneten Lernumgebungen auch in der Grundschule fördern. Am Beispiel von Rechendreiecken wird aufgezeigt, mit welchen Aufgaben verschiedene Variablenaspekte gezielt gefördert werden können, ohne dass Variablen mit Buchstabensymbolen eingeführt werden müssen.

Unbekannte, veränderliche und allgemeine Zahlen sind wesentliche Variablenaspekte, die vielfach in der Literatur angeführt werden (vgl. hierzu etwa Drijvers 2003, Siebel 2005). Malle charakterisiert diese Aspekte anhand der Art der Repräsentation von Zahlen aus einem Bereich: Variablen als unbekannte (aber bestimmte) Zahlen lassen sich dem Einzelzahlaspekt zuordnen. Variablen als veränderliche Zahlen (etwa in funktionalen Beziehungen) und allgemeine Zahlen (etwa zur Darstellung von Mustern und Rechengesetzen), lassen sich dem Bereichsaspekt zuordnen, wobei die Zahlen des Bereichs beim Veränderlichenaspekt nacheinander durchlaufen oder beim Simultanaspekt gleichzeitig repräsentiert werden.

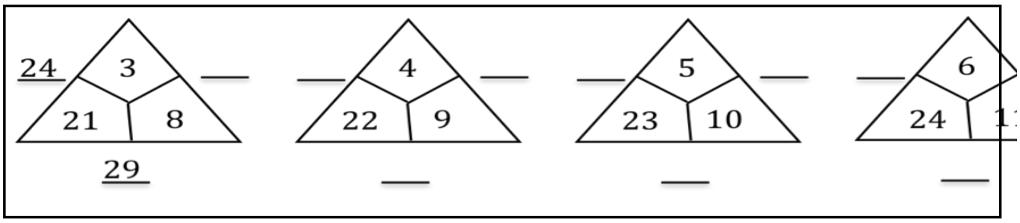


Abb. 1

Die beiden Viertklässlerinnen Sophia und Lisa bearbeiten Aufgaben zu einer operativen Folge von Rechendreiecken (s. Abb. 1). Hieran lassen sich verschiedene Variablenaspekte, die von beiden Schülerinnen genutzt werden, erkennen.

Zunächst berechnen Sophia und Lisa die leeren Felder der Rechendreiecke. Es ist charakteristisch für solche arithmetischen Aufgabenformate, dass der Auftrag „Berechne die leeren Felder!“ nach Einführung des Formats nicht mehr explizit gegeben werden muss sondern leere Felder als implizite Handlungsaufforderung verstanden werden. Vorrangiges Ziel ist es, in jedes leere Feld eine bestimmte Zahl einzusetzen. Dies geschieht bei Aufgaben wie im nebenstehenden Beispiel durch schrittweises Lösen der Aufgabe (vorwärts bzw. rückwärts rechnen). Diese Felder lassen sich wie auch andere Platzhalter als Vorformen von Variablen betrachten: Sie halten den Platz frei für bestimmte, aber zunächst noch unbekannte Zahlen, die hier unter dem Aspekt des Einsetzens betrachtet werden (vgl. Malle 1993, S. 46).

Nachdem die Mädchen die leeren Felder berechnet haben, vergleichen sie die ausgefüllten Rechendreiecke und benennen, was ihnen auffällt. Sophia:

„Also, da sind immer, bei jedem Dreieck wird eine Zahl immer, geht eine Stelle immer höher. Also 3, beim ersten Dreieck, Rechendreieck isses 3, beim zweiten 4, beim dritten 5, beim vierten 6.“ Kurz darauf fügt sie hinzu „und das ist dann halt bei allen Zahlen so“.

Noch während Sophia redet, korrigiert sie ihre eigenen Formulierungen: Zuerst sagt sie nur *3*, dann gibt sie mit *Dreieck* präziser den Ort an, schließlich fasst sie mit *Rechendreieck* genauer die Art des Dreiecks. Mit den Zahlen *3*, *4*, *5* und *6* beschreibt sie rein verbal, wie im inneren Feld oben ein Zahlbereich in zeitlicher Aufeinanderfolge repräsentiert wird. Dies entspricht dem Veränderlichenaspekt von Variablen (vgl. Malle 1993, S. 80).

Auch im ersten Satz korrigiert sich Sophia während des Sprechens. Dabei wechselt sie zwischen allgemeinen Ortsangaben wie *da* und dem konkreten Objekt *Zahl*. Das Ringen um Formulierungen und der Wechsel zwischen dem konkreten Zahlobjekt und der Einsetzstelle (insb. durch Lageangaben) ist charakteristisch für die weiteren Beschreibungen der beiden Mädchen (vgl. auch Siebel 2010). Sophias Beschreibungsansätze deuten auf einen Dualismus von Variablen als Veränderlichen: Sie stellt einerseits das Regelhafte durch einen kurzen Ausdruck dar und benennt zum anderen die konkreten Zahlen, die aufeinander folgen.

Sophias Arbeitspartnerin Lisa benennt ebenso ein Muster von Veränderungen. Sie beschreibt für die äußeren Zahlen: „Hier unten, da werden’s immer zwei mehr.“

Für einen Gebrauch von veränderlichen Zahlen, ist es wichtig, Muster von Veränderungen zu erkennen, als auch Zusammenhänge zwischen Mustern zu betrachten und zu begründen. So bietet sich für die Betrachtung von solchen Folgen eine Dreistufung an (vgl. Siebel 2010 und Steinweg 2004):

- Wie verändert sich das? Muster von Veränderungen erkennen und fortsetzen.
- Wie verändert sich das, wenn ...? Zusammenhänge zwischen Veränderung und Wirkung aufdecken und nutzen.
- Warum verändert sich das so? Zusammenhänge zwischen Veränderung und Wirkung beschreiben und begründen.

Während die Mädchen das Muster der Folge der Rechendreiecke zu Abb. 1 beschrieben haben, haben sie zur Folge in Abb. 2 das Muster fortgesetzt, d. h. sie haben die inneren Zahlen des vierten Rechendreiecks dem Folgenmuster entsprechend ergänzt. Die Frage „Was fällt dir auf?“ sowie die Aufforderung, die Folge der Rechendreiecke fortzusetzen, veranlasst die beiden, sich explizit mit der ersten Stufe auseinander zu setzen.

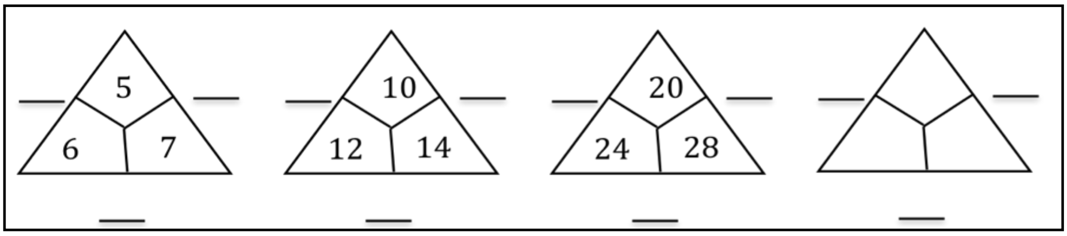


Abb. 2

Um die äußeren Zahlen des vierten Rechendreiecks (Abb. 2) zu berechnen nutzen sie jedoch ausschließlich die Regel für das Bildungsprinzip von Rechendreiecken (Addition der inneren Zahlen) anstatt das Muster der äußeren Zahlen zu nutzen. Die Schülerinnen nutzen keine Zusammenhänge zwischen den Mustern, wie es für die zweite Stufe beschrieben wurde. Allerdings ist dies bei dem gegebenen Zahlenmaterial auch nicht nachteilig. Um zu verdeutlichen, dass es sich lohnt, Zusammenhänge zwischen Mustern zu erkennen und zu nutzen, müsste man anderes Zahlenmaterial für die Aufgabe verwenden.

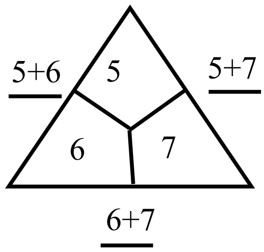
Die Bearbeitung der weiteren Aufgabenstellungen zur Folge der Rechendreiecke in Abb. 2 trägt zur zweiten Stufe bei, also Zusammenhänge zwischen den Mustern aufzudecken: Die Kinder sollten tabellarisch die Summe der inneren und der äußeren Zahlen festhalten und anschließend die Summen vergleichen.

	RD 1	RD 2	RD 3	RD 4
Summe der inneren Zahlen:	18	36	72	144
Summe der äußeren Zahlen:	36	72	144	288

Abb. 3

Lisa und Sophia stellen mit Bezug auf konkrete Zahlen fest, dass a) die Summe der äußeren Zahlen jeweils der Summe der inneren Zahlen des folgenden Rechendreiecks entspricht (diagonal) und b) die Summen der äußeren Zahlen jeweils das Doppelte der Summe der inneren Zahlen sind (vertikal). Die Mädchen decken also erfolgreich Zusammenhänge auf.

Um solche Zusammenhänge auch zur Fortsetzung der Folge oder zur Bearbeitung anderer Folgen angemessen zu nutzen, müssen die Zusammenhänge begründet werden (vgl. dritte Stufe). Für das gegebene Beispiel lässt sich dann feststellen, dass die erste Entdeckung (diagonal) sich nicht auf alle Folgen von Rechendreiecken verallgemeinern lässt sondern nur solche die nach dem Prinzip der Verdopplung aufgebaut sind.



Dagegen trifft die zweite Entdeckung (vertikal) auf alle Rechendreiecke zu. Dies lässt sich anhand verschiedener Darstellungen erläutern. An einem Rechendreieck mit konkreten inneren Zahlen (etwa 5, 6 und 7), deren äußere Zahlen als Term dargestellt sind (5+6, 6+7 und 5+7), kann man allgemein erläutern, wo und wie oft die inneren Zahlen in die außen stehenden Terme eingehen. Mit allgemeinen Erläuterungen spricht man die inneren Zahlen als allgemeine Zahlen an. Diese Argumentation lässt sich unterstützen durch Verwendung von Farbkärtchen mit je einer Farbe pro innere Zahl (vgl. Loska und Hartmann 2006)

Durch die Forderung, Zusammenhänge zu begründen, verbinden sich die Variablenaspekte der allgemeinen und der veränderlichen Zahl. Es findet ein Perspektivwechsel statt, im Fall der Rechendreieckfolge wechselt man von der horizontalen Sichtweise (von Rechendreieck zu Rechendreieck) zur vertikalen Betrachtung (von innen nach außen).

Diese Zusammenhänge lassen sich entdecken und begründen ohne Buchstabenvariable zu nutzen. Muster zu beschreiben hilft, sich von konkreten Zahlen zu lösen, und die konkreten Zahlen als Veränderliche oder als allgemeine Zahlen aufzufassen. So werden zentrale Variablenaspekte beziehungsreich und bedeutungsvoll erarbeitet.

Literatur

Drijvers, P.H.M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*. Utrecht: Freudenthal Inst.

Loska, R., Hartmann, M. (2006): Erste Schritte in die Algebra mit dem Rechendreieck. *Grundschule 1*, 36–38.

Malle, G. (1993): *Didaktische Probleme der Elementaren Algebra.* Wiesbaden: Vieweg.

Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache. Eine allgemein-mathematische Untersuchung.* Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft.

Siebel, F. (2010, im Druck). Wie verändert sich das, wenn...? Rechendreiecke und Zahlenketten analysieren. *Praxis der Mathematik in der Schule 52* (33).

Steinweg, A.S. (2004). Zahlen in Beziehungen – Muster erkennen, nutzen, erklären und erfinden. In Bönig, D., Scherer P. (Hrsg.): *Mathematik für Kinder - Mathematik von Kindern.* Frankfurt: Grundschulverband e.V., 232 - 242

Hendrik SIMON, Köln

Sollte die Multiplikation vor der Addition eingeführt werden? Ideen zum Anfangsunterricht in der Grundschule

Die derzeitige Stoffabfolge im Mathematikunterricht der Primarstufe sieht vor, dass im ersten Schuljahr die Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 20 und im zweiten Schuljahr darauf aufbauend der Zahlenraum bis 100 sowie die Multiplikation und Division eingeführt werden. Dieser Ansatz wirkt zwar angesichts der Peano-Axiomatik plausibel, steht aber in großen Teilen im Widerspruch zu den kognitiven Voraussetzungen des Menschen für das Mathematiklernen und meinen eigenen Erfahrungen in der Arbeit mit rechenschwachen Kindern.

1. Kognitive Voraussetzungen für das Mathematiklernen

Nach Feigenson et al. (2004) verfügen bereits wenige Wochen alte Kleinkinder über zweierlei numerische Fertigkeiten. Einerseits nehmen sie Anzahlen als unterschiedlich wahr, wenn diese mindestens im Verhältnis 2:1 (bei Erwachsenen 8:7) zueinander stehen (sogenanntes erstes Kernsystem), andererseits sind sie dazu in der Lage, Anzahlen von 1, 2 und 3 exakt wahrzunehmen (zweites Kernsystem). Die Rechenarten Addition und Subtraktion betreffend hat Wynn (1992) gezeigt, dass Kleinkinder bei konkreten Situationen (Wegnehmen oder Hinzufügen von Objekten hinter einer Sichtblende) korrekte Erwartungshaltungen bezüglich der Anzahl der Objekte ausbilden, die sich nach der Transformation hinter der Blende befinden müssen, sofern zu keinem Zeitpunkt mehr als 3 Objekte vorhanden waren. Diese Grenze kann überschritten werden, wenn das Kind zwei Gruppen von je zwei Objekten verschwinden sieht („Chunking-Prozesse“, Feigenson & Halberda, 2004).

Der menschlichen Wahrnehmung von Helligkeit und Lautstärke, aber auch anderer Größen, liegt eine logarithmische Skala zugrunde. So werden z.B. Helligkeitsunterschiede als gleich groß empfunden, wenn die Quotienten der zugeordneten Leuchtstärken gleich sind. Näher am Stoff der Grundschule ist die Beobachtung von Opfer & Siegler (2006), dass Kinder in der zweiten Klasse vorgegebene Zahlen auf einem leeren Zahlenstrich logarithmisch verteilt eintragen und nicht linear. So wird z.B. die 500 viel näher an der 1000 markiert als am Anfang des Strahls. Dieser Effekt verschwindet in der Regel im Laufe des dritten Schuljahres.

2. Kognitive Kompatibilität und motivationale Eigenschaften der Rechenarten

Angesichts der kognitiven Voraussetzungen für das Mathematiklernen kann man die beiden Rechenarten „Addition“ und „Multiplikation“ auf verschiedene Weisen miteinander vergleichen.

- Wiedererkennungswert enaktiver oder ikonischer Darstellungen: Die Darstellungen unterschiedlicher Plusaufgaben sind untereinander oft sehr ähnlich und enthalten meist nicht viele innere Querbezüge, die das Arbeitsgedächtnis entlasten und damit die Erinnerung stabilisieren können. Malaufgaben mit Ergebnissen derselben Größenordnung verwenden kleinere Zahlen und entsprechen in ihrer Darstellung oft charakteristischen Mustern oder mehrfach exakt wiederholten Handlungen.
- Kognitive Stabilität des Operators: Wendet man einen additiven Operator auf verschiedene Startwerte an, so scheint dieser sich auf kleinere Zahlen stärker auszuwirken als auf größere. Unsere logarithmische Wahrnehmung lässt den Schritt von 10 zu 15 größer wirken als den Schritt von 130 zu 135. Im Gegensatz hierzu erzeugt eine gleichbleibende Vervielfachung (Anwendung eines multiplikativen Operators) immer eine scheinbar gleich groß wirkende Änderung.
- Kognitive Stabilität des Ergebnisses einer Rechenaufgabe: Die Fehlerrechnung lehrt, dass zwei Additionsaufgaben, die kognitiv gleich erscheinen (erstes Kernsystem), auch gleich wirkende Ergebnisse haben, da auch die Summe innerhalb der erlaubten Abweichung bleibt. Bei der Multiplikation gilt dies nur, falls ein Faktor 1, 2 oder 3 ist (wird exakt wahrgenommen, zweites Kernsystem), ansonsten kann die Abweichung der Ergebnisse ähnlich scheinender Aufgaben größer werden als die geringere Abweichung der Faktoren.
- Kognitive Stabilität der Umkehrung: Bei der Addition ist diese teilweise sehr niedrig, da ähnlich wirkende Aufgaben wie 10-6 und 9-7 deutlich unterscheidbare Ergebnisse haben können. Bei der Division ist die kognitive Stabilität genauso hoch wie bei der Multiplikation.

Es kommen noch zwei Eigenschaften hinzu, die ich als motivationale Eigenschaften bezeichne. Mit motivationalen Eigenschaften eines mathematischen Themas sind solche gemeint, welche die Motivation des Kindes beeinflussen, das Thema zu lernen.

- Kosten-Nutzen-Relation bei Realsituationen: Die Bearbeitung additiver Realsituationen erfordert das Durchzählen zweier Mengen. Die Ergebnisermittlung durch Weiterzählen wäre vom Aufwand her gleich groß, sodass hier Rechnen keinen Vorteil bietet. Anders ist es bei der Multiplikation. Hier muss eine Menge abgezählt werden, die Anzahl gleich großer Mengen bestimmt werden und ein (in der Regel einfaches) Kriterium zur Bestätigung der Anzahlgleichheit der Mengen angewandt werden. Die Möglichkeit, das Ergebnis durch Rechnen zu bestimmen, bedeutet einen echten Vorteil.

- Memorisierungsdruck: Der Vorteil, den das Auswendig-Können von Ergebnissen bietet, ist bei der Multiplikation erheblich größer als bei der Addition. Daher liegen auf Gedächtnisleistung basierende Lösungsstrategien bei der Multiplikation näher.

Wie man erkennen kann, scheint die Multiplikation mit Ausnahme des 3. Punktes (kognitive Stabilität der Rechenaufgabe) diejenige Rechenart zu sein, die besser auf die Voraussetzungen für das Mathematiklernen zugeschnitten ist.

3. Alternative Stoffabfolge für die ersten beiden Schuljahre

Die vorangegangenen Ausführungen haben gezeigt, dass es gute Gründe dafür gäbe, die Multiplikation zur ersten gelernten Rechenart in der Grundschule zu machen. Es bleibt also zu zeigen, dass es mindestens eine sinnvolle Möglichkeit gibt, den Stoff der ersten zwei Schuljahre über die Multiplikation aufzubauen. Im Folgenden wird eine denkbare Stoffabfolge skizziert.

- Am Anfang steht die numerische Auswertung von statischen und dynamischen Situationen im Zahlenraum bis 100.
- Die numerische Auswertung erfolgt zunächst über das Abzählen und das Messen mit natürlichen Repräsentanten. Hierbei wird durch Schulung der auditiven Aufmerksamkeit ein besonderes Augenmerk auf die Zahlwortgrammatik der zweistelligen Zahlen gelegt. Die Kinder halten ihre Ergebnisse zunächst ikonisch oder mit konkretem Material fest. Die symbolische Ebene wird in zwei Stufen angegangen, indem die Kinder zuerst die Zahlen von 1 bis 9 und die Vielfachen von 10 schreiben lernen, später dann alle Zahlen bis 100.
- Dabei werden sowohl unstrukturierte und schwach strukturierte als auch multiplikative Situationen thematisiert, im weiteren Verlauf auch solche, die geringfügig von rein multiplikativen Situationen abweichen.
- Dieses Vorgehen führt zu einer bevorzugten Wiedererkennung von Ergebnissen multiplikativer Situationen, die nachfolgend eingehender untersucht werden. So können multiplikative Situationen gezielt er-

kannt, hergestellt, zueinander in Bezug gesetzt und/oder ausgewertet werden. Die Notation der Multiplikation wird eingeführt. Erste Ergebnisse von Malaufgaben, insbesondere die Vielfachen von 2, 10 und 3 werden automatisiert. Die Division tritt implizit auf.

- Über die Bearbeitung von fast-multiplikativen Situationen werden Addition und Subtraktion als geringfügige Abweichungen größerer Zahlen eingeführt, woraus einerseits die Eigenschaften des dezimalen Stellenwertsystems explizit abgeleitet werden können (an dieser Stelle auch Messen mit genormten Repräsentanten), andererseits aber auch die heuristischen Verfahren zur Addition einstelliger Zahlen, was zu einer schnelleren und sichereren Automatisierung führt.
- Darauf lassen sich die Verfahren zur Addition und Subtraktion zweistelliger Zahlen leicht aufbauen. Die Reihen des kleinen Einmaleins können effektiv hergestellt werden, sodass der Rest des kleinen Einmaleins automatisiert oder schnell aus Kernaufgaben abgeleitet werden kann.

Die geometrischen Themen Kongruenz (von Formen, Figuren und Anordnungen) und Muster (Bandornamente und Flächenornamente erkennen, fortsetzen und selbst entwerfen) unterstützen das vorgeschlagene Curriculum.

Literatur

Feigenson, L., Dehaene, S.,Spelke, E. (2004). Core Systems of Number. *Trends in cognitive sciences, 8(7)*, 307-314

Feigenson, L., Halberda, J. (2004). Infants chunk object arrays into sets of individuals. *Cognition, 91*, 173-190.

Opfer, J., Siegler, R. (2006). Representational change and childrens numerical estimation. *Cognitive Psychology*. doi: 10.1016/j.cogpsych.2006.09.002

Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.

Johann SJUTS, Leer

Aufgabenkompetenz erwerben – ein modellhafter Berufsfeldbezug in der Lehrerausbildung

In der aktuellen allgemein- und fachdidaktischen Diskussion gewinnt die Vorstellung eines neu akzentuierten Unterrichts eine zunehmende Bedeutung, in dem *Aufgaben* das Lernarrangement bestimmen, Aufgabenbearbeitungen förderdiagnostische Wirkung erzielen und dabei empirische Ergebnisse von Vergleichsarbeiten und Leistungsstudien Berücksichtigung finden (Thonhauser 2008). Voraussetzung ist, dass die Lehrperson über *Aufgabenkompetenz* verfügt.

Aufgabenkompetenz ist …

… die Fähigkeit, Aufgaben zu gestalten, Aufgaben zur kognitiven Aktivierung von Schülerinnen und Schülern zu nutzen und zur Überprüfung von Lernleistungen einzusetzen sowie Aufgabenbearbeitungen von Schülerinnen und Schülern zu analysieren,

… zugleich die Fähigkeit, individuelle und klassenbezogene Schülerleistungen auszuwerten sowie die Ergebnisse von Aufgabenbearbeitungen in Zentralarbeiten und Schulleistungsstudien aufzunehmen und umzusetzen,

… somit eine zentrale Kompetenz, die es in den verschiedenen Phasen der Ausbildung zu erwerben und in der Berufspraxis weiterzuentwickeln gilt.

Die Entwicklung von *Aufgabenkompetenz* obliegt allen Institutionen der Lehrerausbildung sowie der Lehrerfort- und -weiterbildung. Beteiligt sind die Universitäten mit Wissenschaft, Forschung und Lehre, ebenso die Studienseminare mit theoriebasierter Professionalisierung sowie schließlich die Schulen mit dem Anspruch eines reflektierten beruflichen Handelns. Der Schuldienst verlangt berufslang lernende Akteure, die mehrere Phasen in verschiedenen Institutionen durchlaufen – als Lehramtsstudierende in der Universität und in schulischen Praktika, als Referendarinnen und Referendare daraufhin im Studienseminar und an der Ausbildungsschule, als Lehrerinnen und Lehrer sodann in der Schule.

Es ist offensichtlich, dass der Erwerb von aufgabenorientierten didaktischen professionellen Fähigkeiten phasenübergreifend eine Rolle spielt, eine Institutionen verbindende Angelegenheit ist und sich daher modellhaft für eine Kooperation eignet.

Ein neuerdings gefördertes Projekt phasenübergreifender Lehrerausbildung, das *Aufgabenkompetenz* in den Mittelpunkt stellt, soll hier kurz Erwähnung finden.

Der *Stifterverband für die Deutsche Wissenschaft* hat 2009 mit der Ausschreibung „Von der Hochschule in den Klassenraum: Neue Wege der Zusammenarbeit zwischen Hochschulen und Studienseminaren in der Lehrerausbildung“ eine Initiative gestartet, um die gezielte Kooperation der für Lehrerausbildung zuständigen Institutionen zu fördern.

Ausgewählt worden ist neben den Projekten in Jena, Magdeburg und Stuttgart das „Modellvorhaben Nordwest: Entwicklung von Diagnose- und Förderkompetenz im Unterricht und in Lehr-Lern-Laboren“ der Carl von Ossietzky Universität Oldenburg in Zusammenarbeit mit dem Studienseminar Aurich für das Lehramt an Grund-, Haupt- und Realschulen sowie den Studienseminaren Leer, Oldenburg und Wilhelmshaven für das Lehramt an Gymnasien.

Dieses Projekt intensiviert die Zusammenarbeit von Bildungswissenschaften, Fachwissenschaften und Fachdidaktiken in Mathematik, Physik, Chemie und Biologie und verzahnt die Lehrerausbildungsphasen durch gemeinsame Veranstaltungen mit curricular abgestimmten Themenbereichen. Es führt Ausbildende und Auszubildende aus Universität, Studienseminaren und Kooperationsschulen in Teams zusammen und verstärkt die forschungs- und berufsfeldorientierte Lehrerausbildung durch phasenübergreifende Lerngelegenheiten.

Das Projekt fördert den Aufbau professioneller Fähigkeiten durch die Gestaltung und den Einsatz von Aufgaben zum fachbezogenen Diagnostizieren und Fördern und befähigt zur theoriegeleiteten und methodenbewussten Aufnahme von Ergebnissen aus Forschungsprojekten und Schulleistungsstudien. Es ermöglicht eine selbstgesteuerte und forschungsorientierte Beobachtung und Auswertung von Lehr-Lern-Prozessen im Unterricht sowie in naturwissenschaftlichen Lehr-Lern-Laboren und Problemlöseseminaren zur Mathematik.

Damit widmet es sich den verschiedenen Funktionen von *Aufgaben*, den Aufgaben zur Gestaltung von Lernprozessen (Lernaufgaben), den Aufgaben zum Diagnostizieren und Fördern (Förderdiagnoseaufgaben) sowie den Aufgaben zum Überprüfen und Testen (Überprüfungsaufgaben).

Die folgenden Ausführungen sollen die Bedeutung von *Aufgabenkompetenz* exemplarisch verdeutlichen; hieran zeigt sich auch, dass der Mathematikunterricht mittlerweile zur Drosophila der empirischen Lehr-Lern-Forschung geworden ist (Terhart 2009).

Im Rahmen des Projekts „Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunterricht und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz“ (kurz: COACTIV) waren die Mathematiklehrkräfte, deren Klassen an den PISA-Erhebungen 2003 und 2004 teilnahmen, Gegenstand der Forschung. Dabei wurden die von ihnen in den Schuljahrgängen 9 und 10 im Unterricht, in Klassenarbeiten und in Hausaufgaben eingesetzten Aufgaben – insgesamt etwa 45.000 – untersucht. Die Frage war, welches *kognitive Aktivierungspotential* die Aufgaben boten (Jordan u. a. 2008).

Von den vielen sehr detaillierten Ergebnissen sei hier die Kategorie des *Mathematischen Argumentierens* hervorgehoben. Mathematisches Argumentieren hat eine ausgewiesene Stellung in den Bildungsstandards, ist indes schon immer ein besonderes Kennzeichen mathematischen Denkens gewesen.

Die Analyse zeigt, dass mathematisches Argumentieren auf einem sehr niedrigen Niveau verlangt wird, „dass am Gymnasium immerhin jede zehnte Aufgabe in Klassenarbeiten mathematisches Argumentieren erfordert, während dies in anderen Schulformen nur für jede fünfzigste Klassenarbeitsaufgabe der Fall ist (Jordan u. a. 2008, S. 102). „Die Aufgaben, die deutsche Mathematiklehrkräfte verwenden, unterscheiden sich in ihrem kognitiven Niveau (...) kaum im Hinblick darauf, ob sie für den Unterricht, als Hausaufgaben oder für Klassenarbeiten eingesetzt werden. Darüber hinaus scheint insgesamt kein nennenswerter Anstieg im Niveau der für ein erfolgreiches Aufgabenlösen geforderten mathematischen Kompetenzen von der 9. zur 10. Klasse stattzufinden.“ (Jordan u. a. 2008, S. 99) Also: „Zieht man die von den Lehrkräften eingesetzten Aufgaben zu Rate, scheint mathematisches Argumentieren im deutschen Mathematikunterricht nahezu gar nicht gefordert zu sein.“ (Jordan u. a. 2008, S. 99)

Die Studie zieht als Fazit: „Bei den Analysen stellte sich heraus, dass das durch die Aufgaben vermittelte kognitive Aktivierungspotential im Mathematikunterricht in Deutschland sehr niedrig ausgeprägt ist. Daraus kann gefolgert werden, dass die Möglichkeit, Schülerinnen und Schüler über qualitätsvolle Aufgaben möglichst umfassend zu fördern, nur unzureichend genutzt wird. Die in Deutschland eingesetzten Aufgaben sind sehr homogen: Mathematisches Argumentieren findet kaum statt, die Aufgabentexte sind sprachlich wenig anspruchsvoll, es muss nur selten mit anspruchsvollen mathematischen Darstellungen umgegangen werden, außermathematische und innermathematische Bezüge werden im Sinn des Modellierens nur wenig hergestellt. Auch weitere Indikatoren für das kognitive Aktivierungspotential weisen auf einen kognitiv anregungsarmen Mathematikunterricht hin.“ (Jordan u. a. 2008, S. 103)

„Dass dieses geringe Potential zur kognitiven Aktivierung nicht nur aus theoretischer Sicht beklagenswert ist, sondern auch praktische Implikationen hat, konnte ebenfalls im Rahmen von COACTIC unter Nutzung der PISA-Schülerdaten gezeigt werden. So ließ sich in längsschnittlichen Analysen nachweisen, dass Schulklassen, in denen Aufgaben mit *relativ* höherem kognitiven Potential gestellt wurden, bei statistischer Kontrolle u. a. des Vorwissens nach einem Jahr deutlich bessere Leistungen aufwiesen.“ (Jordan u. a. 2008, S. 103)

Dazu passt, dass aus der Sicht von Gymnasialschülerinnen und -schülern die mathematischen Aufgabenstellungen von ihrer Struktur her in nur geringem Maße kognitiv herausfordernd oder selbständigkeitsfördernd sind (Prenzel u. a. 2004, S. 343).

„Berücksichtigt man im Zusammenhang mit diesen Resultaten aktuelle bildungspolitische Veränderungen wie die verbindliche Einführung der Bildungsstandards in allen Schulformen, so muss konstatiert werden, dass es auch nach mittlerweile mehreren Jahren (…) noch nicht hinreichend gelungen ist, eine kognitiv anregende Aufgabenkultur in den Schulen breit zu verankern. Dies ist (…) aber eine notwendige Bedingung für eine erfolgreiche Implementation der Standards.“ (Jordan u. a. 2008, S. 103 f.)

Also: Die Fähigkeit, Aufgaben zu gestalten, Aufgaben im Unterricht und zur Überprüfung von Lernleistungen einzusetzen sowie Aufgabenbearbeitungen zu analysieren und die Ergebnisse diagnostisch zu interpretieren, ist ein essentieller Bestandteil des professionellen Könnens von Lehrerinnen und Lehrern. Der Erwerb von *Aufgabenkompetenz* spielt phasenübergreifend eine bedeutende Rolle, ist eine Institutionen verbindende Angelegenheit und eignet sich modellhaft für eine bisher immer noch vernachlässigte Kooperation.

Literatur:

Jordan, Alexander & Krauss, Stefan & Löwen, Katrin & Blum, Werner & Neubrand, Michael & Brunner, Martin & Kunter, Mareike & Baumert, Jürgen (2008): Aufgaben im COACTIV-Projekt: Zeugnisse des kognitiven Aktivierungspotentials im deutschen Mathematikunterricht. In: Journal für Mathematik-Didaktik, Jahrgang 29, Heft 2, 2008, S. 83-107

Prenzel, Manfred & Baumert, Jürgen & Blum, Werner & Lehmann, Rainer & Leutner, Detlev & Neubrand, Michael & Pekrun, Reinhard & Rolff, Hans-Günter & Rost, Jürgen & Schiefele, Ulrich (Hrsg.) (2004): PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs. Münster 2004

Terhart, Ewald (2009): Didaktik. Eine Einführung. Stuttgart 2009

Thonhauser, Josef (Hrsg.) (2008): Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik. Münster 2008

Christian SPANNAGEL, Heidelberg, Florian SCHIMPF, Ludwigsburg

Zur Prozessorientierung in der Mathematikdidaktik

Aktuelle Bildungsstandards, beispielsweise in den Fächern Mathematik und Informatik, nennen *zentrale Inhaltskonzepte* (auch *Leitideen* oder *fundamentale Ideen*) und *zentrale Prozesskonzepte*, nach denen die in der Schule zu erreichenden Kompetenzen strukturiert werden (z.B. KMK, 2003; GI, 2008). Die KMK-Bildungsstandards für Mathematik führen beispielsweise als Inhaltskonzepte *Zahl*, *Raum und Form* und *Daten und Zufall* auf, als Prozesskonzepte *kommunizieren*, *mathematisch argumentieren* und *Probleme mathematisch lösen* (KMK, 2003). In diesem Artikel werden die Prozesskonzepte in den Blick genommen.

In einer prozessorientierten und wissenschaftsorientierten Sichtweise auf Unterricht sollen in einem Schulfach die Schülerinnen und Schüler insbesondere in diejenigen Denk- und Arbeitsweisen eingeführt werden, die in der entsprechenden Wissenschaftsdisziplin eine besondere Rolle spielen (*process as content*; Parker & Rubin, 1966; Costa & Liebmann, 1997). Costa und Liebmann (1997) haben 44 Prozesse vorgeschlagen und definiert, die Allgemeinbildungscharakter haben. Hierzu zählen beispielsweise *problem solving and problem posing*, *observing*, *comparing* und *investigating*. Fraglich ist jedoch, welche dieser Prozesse in welchen Disziplinen zentral sind.

Für die Informatik haben Zendler, Spannagel und Klaudt (2008) die zentralen Prozesskonzepte mittels einer empirischen Erhebung unter Informatikprofessorinnen und -professoren ermittelt. Die 44 Prozesse nach Costa und Liebmann (1997) wurden bezüglich vier Kriterien, die von Schwill (1993) vorgestellt wurden, beurteilt: Das *Horizontalkriterium* besagt, dass ein Prozess in vielen Bereichen der Disziplin eine Rolle spielt. Das *Vertikalkriterium* verlangt, dass ein Prozess auf allen intellektuellen Stufen vermittelt werden können muss. Nach dem *Zeitkriterium* müssen zentrale Prozesse eine längerfristige Relevanz in der Disziplin haben. Und ist das *Sinnkriterium* erfüllt, dann hat der Prozess einen Bezug zum Alltagsdenken und/oder zur Alltagssprache. Die Experteneinschätzungen wurden gemittelt und einer Clusteranalyse unterzogen. Die Resultate ergaben, dass in der Informatik die Prozesse *problem solving and problem posing*, *analyzing*, *generalizing*, *finding relationships*, *classifying* und *investigating* die vier Kriterien in besonderem Maße erfüllen und daher zu den zentralen Prozesskonzepten der Informatik zählen. Die quantitative Vorgehensweise erlaubt dabei zum einen, die Urteile verschiedener Experten zu mitteln, und zum anderen, das Prozessprofil der Informatik mit dem anderer Wissenschaften unter Nutzung quantitativer Methoden zu vergleichen.

In der hier beschriebenen Studie wurden die zentralen Prozesskonzepte der Mathematik mit derselben Methode wie in der Untersuchung zur Informatik erhoben und mit den zentralen Prozessen anderer Wissenschaften (Informatik, Physik, Germanistik) verglichen.

1. Methode

Aufgrund des niedrigen Rücklaufs in einer vorhergehenden Studie zur Ermittlung der zentralen Prozesse der Mathematik (Spannagel & Zendler, 2008) wurde zusätzlich weiteren Mathematikprofessorinnen und -professoren ein Fragebogen zugesandt. Die Daten der beiden Studien wurden anschließend zusammengeführt. Insgesamt wurden 240 Professoren an 17 verschiedenen deutschen Hochschulen befragt. Es wurden diejenigen Hochschulen ausgewählt, die im CHE-Ranking von 2006 die höchsten Bewertungen im Bereich „Forschungsreputation" erhalten haben. Insgesamt wurden 23 gültige Fragebogen zurückgesendet (Rücklaufquote 9,6%).

Im Fragebogen mussten die Mathematikprofessoren für jeden der 44 Prozesse von Costa und Liebmann (1997) beurteilen, inwieweit der Prozess die vier Schwillschen Kriterien erfüllt. So mussten sie beispielsweise im Abschnitt zum Horizontalkriterium auf einer Skala von 0 (*trifft nicht zu*) bis 5 (*trifft voll zu*) folgende Aussage für jeden Prozess beurteilen: „Der Prozess XYZ ist in vielen Bereichen der Mathematik anwendbar oder erkennbar."

2. Ergebnisse

Zunächst wurden die Mittelwerte für jede Prozess-Kriterium-Kombination getrennt berechnet. Außerdem wurde für jeden Prozess ein Gesamtmittelwert berechnet und die Prozesse nach ihren Gesamtmittelwerten absteigend sortiert. Das Ergebnis ist in Abbildung 1 zu sehen. Die 5 höchst bewerteten Prozesse sind *problem solving and problem posing*, *analyzing*, *generalizing*, *deductive reasoning* und *finding cause-and-effect-relationships*.

Anschließend wurden die Prozesse geclustert, und zwar mit den 4 Kriteriumsmittelwerten als Datenvektoren. Die Cluster wurden zudem in Cluster mit hohen Mittelwerten („Winner"-Cluster oder „W"-Cluster), mit Mittelwerten im mittleren Bereich („Intermediate"-Cluster" oder „I"-Cluster) und mit niedrigen Mittelwerten („Loser"-Cluster oder „L"-Cluster) gruppiert. Abbildung 2 zeigt aus Platzgründen nur die Winner-Cluster.

Horizontalkriterium	Vertikalkriterium	Zeitkriterium	Sinnkriterium	*Gesamtscore*	Prozesse
4.65	4.04	4.70	4.26	4.41	problem solving and problem posing
4.65	3.65	4.70	4.22	4.30	analyzing
4.74	3.65	4.65	3.87	4.23	generalizing
4.83	3.35	4.61	4.00	4.20	deductive reasoning
4.40	3.70	4.26	4.30	4.16	finding cause-and-effect relationships
4.26	3.70	4.17	4.04	4.04	finding relationships
4.22	3.26	4.57	3.83	3.97	investigating
4.17	3.23	4.04	4.30	3.94	transferring
4.04	3.96	3.39	4.30	3.92	presenting
4.13	3.48	4.13	3.96	3.92	classifying
3.65	3.74	3.91	4.30	3.90	ordering
3.78	3.70	3.96	4.17	3.90	inquiring
3.91	3.61	4.22	3.83	3.89	questioning
4.35	3.17	4.13	3.65	3.83	hypothesizing
4.13	3.26	4.00	3.87	3.82	forming, testing, and revising concepts and generalizations
3.70	3.48	3.65	4.13	3.74	comparing
3.91	3.35	3.74	3.96	3.74	summarizing
4.09	3.15	3.79	3.61	3.66	categorizing
4.09	2.65	4.20	3.39	3.58	researching
3.30	2.78	3.87	4.04	3.50	creating and inventing

Horizontalkriterium	Vertikalkriterium	Zeitkriterium	Sinnkriterium	*Gesamtscore*	Prozesse
3.00	3.57	3.57	3.83	3.49	observing
3.35	3.14	3.09	4.13	3.43	communicating
3.74	3.04	3.35	3.48	3.40	patterning
3.09	3.48	2.87	3.87	3.33	collaborating
4.00	2.83	3.48	2.96	3.32	syllogistic reasoning
3.35	2.65	3.57	3.65	3.30	generating criteria
3.39	2.83	3.30	3.30	3.21	transforming
3.26	2.78	3.22	3.52	3.20	imaging
3.43	2.96	3.13	3.04	3.14	sequencing
3.35	2.61	3.22	3.35	3.13	synthesizing
3.30	2.65	3.04	3.22	3.05	inferring
3.13	2.48	2.96	3.17	2.93	intuiting
2.70	2.96	2.65	3.35	2.91	contrasting
2.65	2.78	2.57	3.57	2.89	consulting
2.57	2.83	2.70	3.39	2.87	operationalizing
2.65	2.39	2.43	3.83	2.83	prioritizing
2.52	2.26	2.43	3.78	2.75	networking
2.78	2.48	2.48	3.00	2.68	self-evaluating
2.65	2.30	2.26	3.26	2.62	brainstorming
2.22	2.09	2.39	3.30	2.50	meaning making
2.17	2.35	2.13	3.30	2.49	mediating and coaching
1.96	1.91	2.22	3.57	2.41	decision making
2.09	2.30	2.13	2.96	2.37	using metaphor
2.26	1.96	2.00	2.74	2.24	facilitating

Abbildung 1: Mittelwerte der 44 Prozesse (N=23)

3. Vergleich mit anderen Disziplinen

Im Vergleich mit den Ergebnissen analoger Untersuchungen zur Informatik (Zendler, Spannagel & Klaudt, 2008) und Physik (Spannagel, Schimpf & Zendler, 2009) kann festgestellt werden, dass die Prozesse *problem solving and problem posing* und *analyzing* zu den höchst bewerteten Prozessen aller drei MINT-Fächern zählen. Als einziges der drei Fächer hat Mathematik den Prozess *deductive reasoning* im führenden Winner-Cluster. Größere Unterschiede ergeben sich im Vergleich mit einer Untersuchung in der Germanistik, die sich zurzeit in Auswertung befindet. Hier zählen *comparing*, *using metaphor*, *communicating* und *presenting* zu den höchstbewerteten Prozessen. In zukünftigen Studien wird ein statistischer Vergleich der Prozessprofile aller hier genannten Disziplinen durchgeführt.

4. Danksagung

Wir danken Irene Reeb für die Unterstützung bei der Fragebogenaktion. Dank gilt außerdem der LANDESSTIFTUNG Baden-Württemberg für die finanzielle Unterstützung der Forschungsarbeit im Rahmen des Eliteprogramms für Postdoktorandinnen und Postdoktoranden.

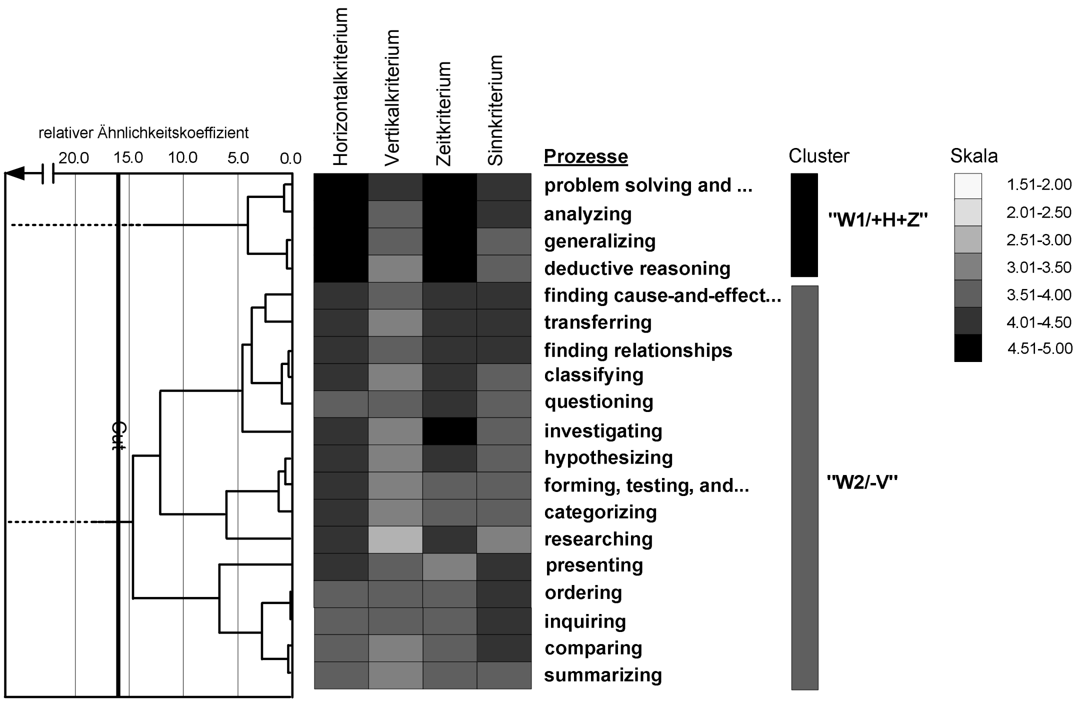


Abbildung 2: Die Winner-Cluster

Literatur

Costa, A. L. & Liebmann, R. M. (Hrsg.) (1997). *Envisioning process as content. Toward a renaissance curriculum*. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

GI – Gesellschaft für Informatik (2008). *Grundsätze und Standards für die Informatik in der Schule. Bildungsstandards Informatik für die Sekundarstufe I.* Abrufbar unter: http://www.gi-ev.de/fileadmin/redaktion/empfehlungen/Bildungsstandards_2008.pdf (Stand: 12. März 2010).

KMK – Kultusministerkonferenz (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Abrufbar unter: http://www.kmk.org/schul/Bildungsstandards/Mathematik_MSA_BS_04-12-2003.pdf (Stand: 12. März 2010).

Schwill, A. (1993). Fundamentale Ideen der Informatik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 25*(1), 20–31.

Parker, J. C. & Rubin, L. J. (1966). *Process as content. Curriculum Design and the application of knowledge.* Chicago: Rand McNally & Company.

Spannagel, C., Schimpf, F. & Zendler, A. (2009). Teaching Thinking in der Physik – Eine empirische Bestimmung zentraler Prozesse. *Notes on Educational Informatics – Section A: Concepts and Techniques, 5*(2), 1–14.

Spannagel, C. & Zendler, A. (2008). *Teaching Thinking* in der Mathematik – Ein empirische Bestimmung zentraler Prozesse. *Notes on Educational Informatics – Section A: Concepts and Techniques, 4*(2), 33–46.

Zendler, A., Spannagel, C. & Klaudt, D. (2008). Process as content in computer science education: empirical determination of central processes. *Computer Science Education, 18*(4), 231–245.

Grozio STANILOV, Sofia

KANONISIERUNG DER KURVEN ZWEITER ORDNUNG

Wir lösen mit Hilfe von Maple, die folgende wichtige Aufgabe der analytischen Geometrie der Ebene:
Es sei eine nichtausgeartete Kurve zweiter Ordnung bezüglich des Koordinatensystems $Oxy = Oe_1e_2$ gegeben:

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

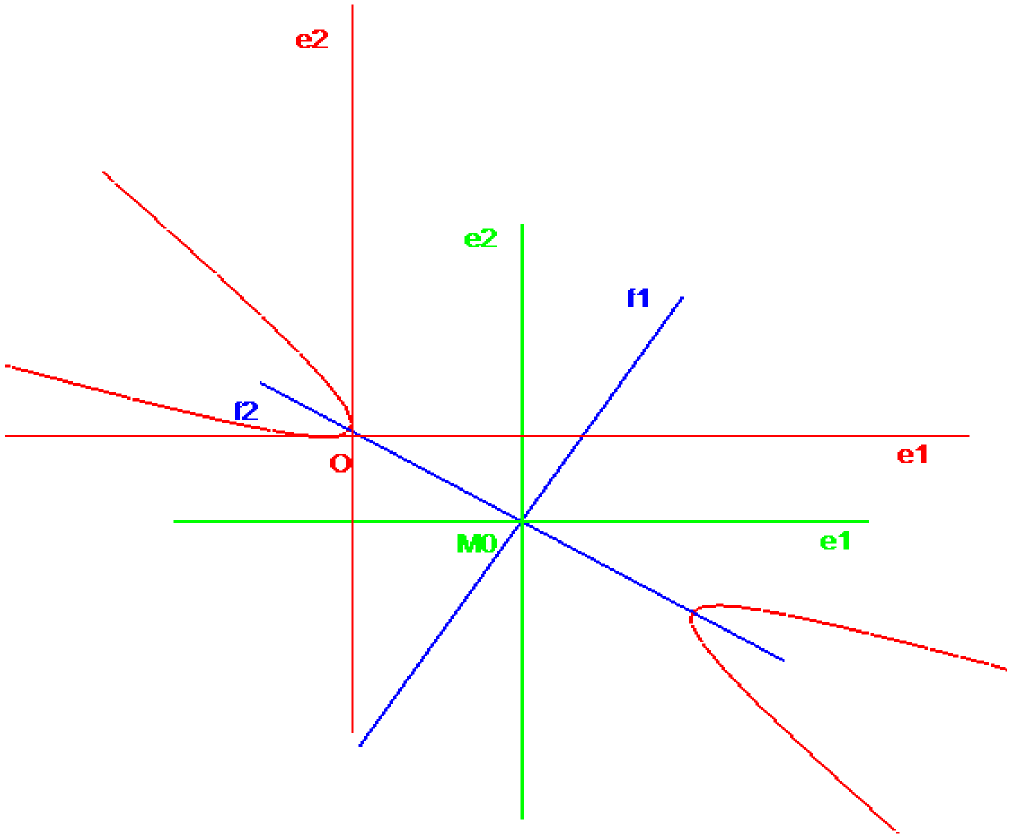
a/ Finde die kanonische Gleichung der Kurve!
b/ Finde die Koordinatentransformationen, die zur kanonischen Gleichung der Kurve führen!
c/ Zeichne die Kurve!
Um diese Aufgabe zu lösen, entwickeln wir zwei computerunterstützte Programme mit Hilfe von Maple.

1. Teil. Mittelpunktskurven (Ellipsen, Hyperbeln)

Schreibe die linke Seite der Kurvengleichung im Maple-Format:
```
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
```
Die Eigenwerte der zugehörigen Matrix sind
```
s1:=1/2*a11+1/2*a22+1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2);
s2:=1/2*a11+1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2);
```
Maple berechnet die Koordinaten des ersten normierten Eigenvektors:
```
p1:=2*a12/(8*a12^2+2*(a11-a22)^2-2*(a11-a22)*
        ((a11-a22)^2+4*a12^2)^(1/2))^(1/2);
p2:=-2*(1/2*a11-1/2*a22-1/2*(a11^2-2*a11*a22+a22^2+4*a12^2)^(1/2))
        /(8*a12^2+2*(a11-a22)^2-2*(a11-a22)*
        ((a11-a22)^2+4*a12^2)^(1/2))^(1/2);
```
Maple findet auch die Koordinaten des Mittelpunkts $M_0(x_0,y_0)$ der Kurve:
```
x0:=-(a12*a23-a13*a22)/(-a11*a22+a12^2);
y0:=-(-a11*a23+a12*a13)/(-a11*a22+a12^2);
```
Berechne noch die Konstante in der kanonischen Gleichung:
```
k:=simplify(eval(F,[x=x0,y=y0]));
```

Beispiel 1.
```
a11:=1; a22:=3; a12:=2; a13:=4; a23:=-5; a33:=8;
```
Man verwende das Paket:
```
with(plots):
t1:  =textplot([0,-4,O],align={LEFT},color=red):
t10:=textplot([75,-2.5,e1],align={LEFT},color=red):
t11:=textplot([-2.9,60,e2],color=red,align={LEFT}):
t12:=textplot([x0+43,y0-2.5,e1],color=green,align={LEFT}):
```

```
t13:=textplot([x0-3,y0+43,e2],color=green,align={LEFT}):
t14:=textplot([x0+p1*40-4,y0+p2*40,f1],color=blue,align={LEFT}):
t15:=textplot([x0-p2*40,y0+p1*40-4,f2],color=blue,align={LEFT}):
t2:  =textplot([x0-3,y0-3,M0],align={LEFT},color=green,thickness=4):
t3:  =plot([t,0,t=-45..80],thickness=1):
t4:  =plot([0,t,t=-45..80],thickness=1):
t5:  =plot([x0+t,y0,t=-45..45],thickness=2,color=green):
t6:  =plot([x0,y0+t,t=-45..45],color=green,thickness=2):
t7:  =plot([x0+p1*t,y0+p2*t,t=-40..40],color=blue,thickness=2):
t8:  =plot([x0-p2*t,y0+p1*t,t=-40..40],color=blue,thickness=2):
t9:  =implicitplot(F=0,x=-45..85,y=-60..40,color=red,thickness=2,
        numpoints=3000):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15],
        view=[-45..85,-65..65]);
```



Das erste Koordinatensystem $Oxy = Oe_1e_2$ ist rot[1] gezeichnet, das zweite $M_0e_1e_2$ grün und das dritte $M_0f_1f_2$ blau, wobei $f_1(p_1,p_2)$. Die Translation ist $Oe_1e_2 \to M_0e_1e_2$ oder $Oxy \to M_0x_1y_1$, die Rotation $M_0e_1e_2 \to M_0f_1f_2$ oder $M_0x_1y_1 \to M_0XY$.

[1] Die Farben sind nur in den elektronischen Versionen (online beziehungsweise CD), aber nicht in der Hardcopy erkennbar.

Die Transformationsformeln sind für die Translation:

```
x:=x0+x1; y:=y0+y1;
```

und für die Rotation:

```
x1:=simplify(p1*X-p2*Y); y1:=simplify(p2*X+p1*Y);
```

Die kanonische Gleichung ist

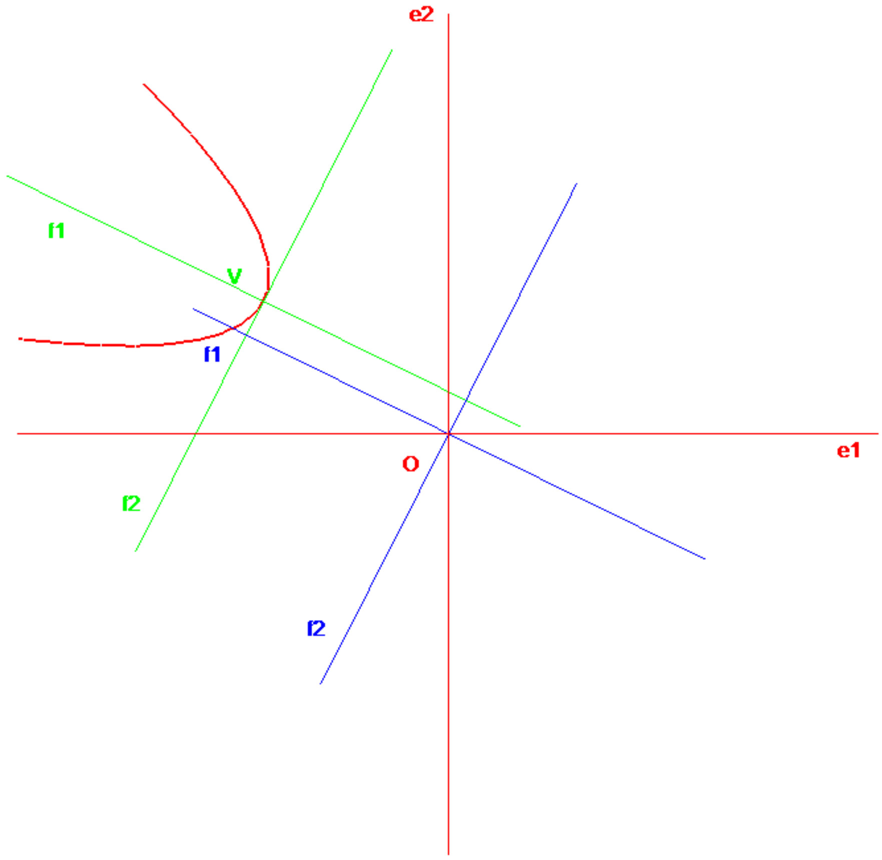
```
KanGleich:=s1*X^2+s2*Y^2+k=0;
```

2. Teil. Kurven ohne Mittelpunkt (Parabeln)

Hier stellen wir ein Programm für die Kanonisierung von Parabeln in klassischer Art vor. Zunächst wird eine Rotation durchgeführt, dann kommt eine Translation. Das Program wird gleich in dem Beispiel 2 vorgeführt.

Beispiel 2.

```
a11:=1; a22:=4; a12:=2; a13:=1; a23:=-2; a33:=6;
F:=a11*x^2+a22*y^2+2*a12*x*y+2*a13*x+2*a23*y+a33;
G:=eval(F,[x=m,y=n]); s1:= 0; s2:=a11+a22;
p2:=(1/sqrt(a12^2+a11^2))*a11; p1:=-a12*1/sqrt(a11^2+a12^2);
x:=x1*p1-y1*p2; y:=x1*p2+y1*p1;
F1:=simplify(eval(F,[a22=a12^2/a11]));
F2:=collect(F1,[x1,y1],recursive); x1:=X+a; y1:=Y+b;
a:= (a33*(a11^2+a12^2)^2-a11*(a11*a13+a23*a12)^2)/2/
        (a12*a13-a11*a23)/(a12^2+a11^2)^(3/2);
b:=a11*(a11*a13+a23*a12)/(a12^2+a11^2)^(3/2);
KanGleich:=collect(simplify(F2),[X,Y],recursive)=0;
v1:=eval(x,[x1=a,y1=b]); v2:=eval(y,[x1=a,y1=b]);
with(plots):
t1:  =textplot([-0.2,-0.2,O],align={LEFT,DOWN},color=red):
t2:  =plot([t,0,t=-3..3]):
t10:=textplot([2.8,-0.1,e1],color=red, align={DOWN}):
t3:  =plot([0,t,t=-3..3]):t11:=textplot([-0.1,3,e2],color=red,align={LEFT}):
t4:  =plot([p1*t,p2*t,t=-2..2],color=blue):
t5:  =plot([-p2*t,p1*t,t=-2..2],color=blue):
t6:  =textplot([v1-0.2,v2+0.13,V],align={WRITE,ABOVE},color=green):
t12:=textplot([p1*1.6-0.2,p2*1.6-0.2,f1],color=blue,align={ABOVE}):
t13:=textplot([-p2*1.6-0.2,p1*1.6,f2],color=blue,align={ABOVE}):
t14:=textplot([v1+p1*1.6,v2+p2*1.6-0.2,f1],align={WRITE},color=green):
t7:  =plot([v1+p1*t,v2+p2*t,t=-2..2],color=green):
t8:  =plot([v1-p2*t,v2+p1*t,t=-2..2],color=green):
t15:=textplot([v1-p2*1.6-0.2,v2+p1*1.6,f2],align={DOWN},color=green):
t9:=implicitplot(G=0,m=-3..3,n=-2..2.5,color=red,thickness=2):
display([t1,t2,t3,t4,t5,t7,t6,t8,t9,t10,t11,t12,t13,t14,t15]);
```



Bemerkung 1. Diese Arbeit ist eine Bearbeitung von Stanilov, G., Slavova, S. (2007).
Bemerkung 2. Ich bedanke mich für finanzielle Unterstützung bei der Alexander von Humboldt Stiftung.

Literatur

Stanilov, G. (2007). *Analytische Geometrie*, 5.Auflage. Sofia: SofTeh – bulgarisch.

Stanilov, G., Slavova, S. (2007). Canonization of Curves of Second Order by Computer Methods. In *Proceedings of the 36. Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians, Albena, April 02-06, 2007* (S. 410-416) – bulgarisch, englischer Abstrakt.

Anke STEENPASS, Duisburg - Essen

Grundschulkinder deuten Anschauungsmaterialien: Ziele und Konzept des Forschungsprojektes KORA

Das Projekt KORA - Grundschulkinder deuten Anschauungsmaterialien: Eine epistemologische **Ko**ntext- und **Ra**hmenanalyse zur Förderung der visuellen Strukturierungsfähigkeit - ist ein vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) gefördertes qualitatives Forschungsprojekt (Start: Februar 2010). Im Zentrum des Projektes steht die Analyse spezifischer Besonderheiten und Merkmale der visuellen Strukturierungskompetenz bei Grundschulkindern.

Theoretischer Hintergrund

KORA ist als qualitative Studie in ein umfassend angelegtes Gesamtprojekt - **E**pistemologische Bedingungen des Mathematik**l**ernens mit **An**schauungsmitteln (ELAN) - eingebettet, das sowohl qualitative, als auch quantitative Forschungsmethoden nutzt. Während in dem quantitativ ausgerichteten Projekt ein schriftlicher two-tiers test in multiple-choice Form mit Aufgaben zur Deutung von Anschauungsmitteln durchgeführt wird, zielt die qualitative Studie darauf ab, in klinischen Interviews genauere Erklärungen und Begründungen zur Bearbeitung visueller Deutungsanforderungen zu erkunden. Die wissenschaftliche Grundlage des Gesamtvorhabens ist eine abgeschlossene empirische Studie, in der die Fähigkeit zur visuellen Strukturierungskompetenz untersucht wurde (Söbbeke 2005). Mit Hilfe epistemologischer Analysen können Deutungen von Grundschulkindern auf vier verschiedenen Ebenen identifiziert werden, die Merkmale der visuellen Strukturierungskompetenz von konkret dinglichen Deutungen bis hin zu strukturorientiert relationalen Deutungen charakterisieren (s. Abb.1).

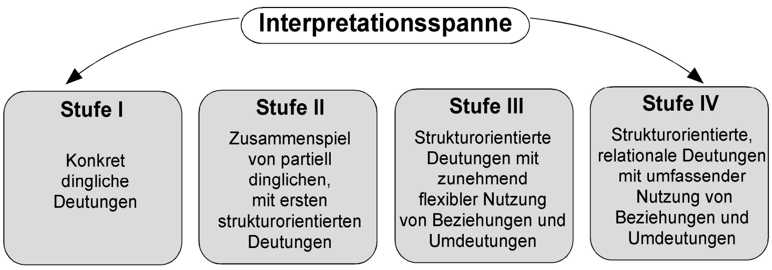


Abb. 1: Vier Stufen der visuellen Strukturierungskompetenz

Aufgabenbeispiel aus dem Interviewleitfaden

Die Datenerhebung im Projekt KORA erfolgt durch klinische Interviews, die theoriebasiert interpretativ ausgewertet werden. Um eine Vergleichbarkeit der Interviews zu gewährleisten, wird ein standardisierter Interviewleitfaden entwickelt, der eng an den schriftlichen multiple–choice–test angelehnt ist und hier anhand eines Beispiels vorgestellt werden soll: Zu dem dargestellten unbeschrifteten Zahlenstrahl (Abb. 2) sollen die Schülerinnen und Schüler einer dritten Klasse eine Aufgabenkarte auswählen, die besonders gut passt. In einem zweiten Schritt werden sie aufgefordert ihre Auswahl zu begründen und beide Aufgaben in die Darstellung einzuzeichnen. Abschließend erfragt die Interviewerin nähere Erläuterungen und Begründungen zu den nicht gewählten Aufgabenkarten.

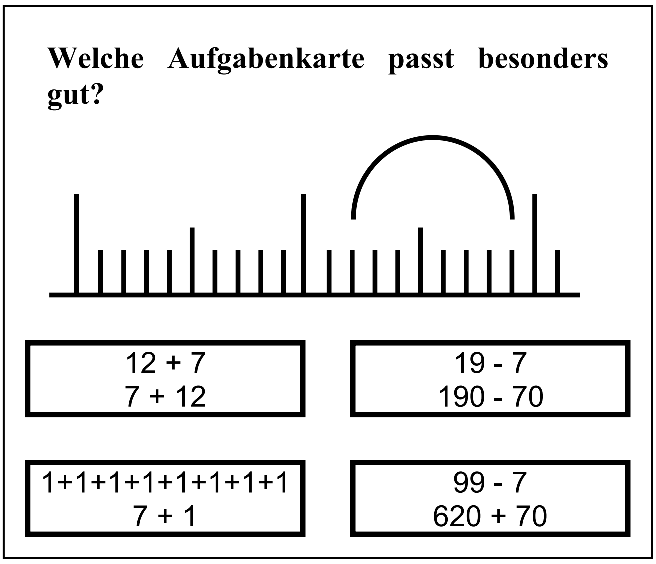


Abb. 2

Kindliche Deutungssichten am Zahlenstrahl

Im Rahmen von Probeinterviews hat sich gezeigt, dass Kinder mit sehr individuellen Deutungssichten an die Aufgabe herangehen und dementsprechend zu unterschiedlichen Ergebnissen kommen. Im Folgenden sollen einige Kinderlösungen von Drittklässlern zu der oben erläuterten Zahlenstrahlaufgabe (Abb. 2) skizziert und mithilfe der Interpretationsfolie „Vier Stufen der visuellen Strukturierungskompetenz“ (Abb. 1) näher charakterisiert werden:

Jenny wählt die Aufgabe „1+1+1+1+1+1+1+1“ und begründet ihre Wahl folgendermaßen: „die hier (*nimmt die Aufgabe 1+1+1+1+1+1+1+1)* weil (.) soll ich sagen warum´ (.) weil m hier steht ja eins plus eins plus eins plus eins plus eins plus eins plus eins plus eins´ und dann ähm unten wenn man dann immer eins plus eins plus eins plus eins *(tippt mit dem rechten Mittelfinger rhythmisch auf einzelne Skalierungsstriche)* und dann kann (.) und deswegen´ passt das hier *(tippt auf die Aufgabenkarte)* am besten weil (…) weil zum Beispiel wenn das jetzt (.) das sind sieben Einser und dann kann man direkt sieben abzählen *(tippt mit dem linken Zeigefinger auf die ersten Skalierungsstriche).*“ Jenny orientiert sich in ihrer Deutung an den konkreten, einzelnen Skalierungsstrichen der Darstellung, der abgebildete Bogen über dem Strahl findet keine Beachtung. Sie liest den Zahlenstrahl wie in einem Protokoll kleinschrittig von links nach rechts und tippt dabei auf die einzelnen Striche. Dabei nimmt sie eher eine handlungsorientierte, als eine globale, konzeptionelle Sicht auf den Zahlenstrahl ein. Daher entspricht ihre gewählte Lösung und ihr Vorgehen der Stufe 1 „Ebene konkret dinglicher Deutung“ (Abb. 1).

Luka geht in seiner Deutung ein wenig strukturorientierter als Jenny vor: Er wählt die Aufgabe „12 + 7“ und begründet mit den Worten: „Das ist ein Sprung von zwölf bis neunzehn *(zeigt auf den Bogen)*.“ Im Gegensatz zu Jenny beachtet er den Bogen, setzt ihn in Beziehung zu den anderen Elementen der Darstellung und deutet ihn als Repräsentation einer Addition. Die Positionen der Zahlen 12 und 19 ermittelt er ohne zu zählen und nutzt dazu – wie er später erklärt – die Länge der Skalierungsstriche als Strukturierungshilfe. Als ebenfalls passend bezeichnet er im weiteren Gespräch die Aufgabe „19 – 7“, der Bogen ist für ihn also ebenfalls als eine Subtraktion zu lesen. Die Aufgabe „99 – 7“ sortiert Luka als unpassend aus, denn: „…der Zahlenstrahl ist ja gar nicht lang genug.“ Da in Lukas Sichtweise der Zahlenstrahl mit einer Null beginnen muss, ist er in seiner Deutung des Ausschnittes auf einen bestimmten Zahlbereich festgelegt. Zusammenfassend konstruiert Luka erste Ideen einer Struktur und nimmt eine erste Koordination von Struktureinheiten vor. Seine Deutung ist demnach der Stufe 2 „Partiell dingliche, erste strukturorientierte Deutung“ zuzuordnen.

Stephan äußert sich folgendermaßen: „Ich glaube die beste Aufgabe ist (.) neunundneunzig minus sieben *(nimmt die Aufgabenkarte in die Hand)* weil neunundneunzig hier das passt ganz gut *(zeigt mit dem Finger auf die Position 99 am Zahlenstrahl)* dann wäre hier zwar die hunderteins und hier die hundert *(zeigt auf die entsprechenden Striche)* aber das macht ja nichts´ (.) und dann einfach minus sieben.“ Wie sich im weiteren Interviewverlauf zeigt, deutet Stephan den Bogen flexibel als Addition oder Subtraktion: „…zwölf plus sieben geht auch…“. Weiterhin interpretiert er den Zahlenstrahlausschnitt variabel, denn der erste Skalierungsstrich muss für ihn nicht zwangsläufig die Null darstellen. Damit ist Stephans Deutung der Ebene 3 „Strukturorientierte Deutung, zunehmend flexible Nutzung von Beziehungen und Strukturen“ zuzuordnen.

Caspar wählt die Aufgaben „620 + 70 und 99 – 7“: „ähm sechshundertzwanzig plus siebzig (..) oh Gott *(schaut abwechselnd auf Zahlenstrahl und Aufgabenkarte)* (.) ich glaub (.) man kann ja auch einfach so tun als würden das hier die Zehner sein *(zeigt auf einen einzelnen Skalierungsstrich und schaut auf den Zahlenstrahl)* und dann´ wäre hier die sechshundertzwanzig *(schreibt 620 unter den entsprechenden Strich)* und dann plus siebzig gleich sechshundertneunzig *(schreibt 690 unter den entsprechenden Strich)*.“ Caspar nimmt hier komplexe strukturelle Umdeutungen bezüglich des Bogens, des Zahlenstrahlausschnittes und der grundlegenden Maßeinheit vor. Seine Lösung ist somit in Ebene 4 „strukturorientierte, relationale Deutung, umfassende Nutzung komplexer Beziehungen“ einzuordnen.

Konsequenzen für das Forschungsprojekt

Die vier Ebenen der visuellen Strukturierungskompetenz sind nicht als Entwicklungsstufen zu verstehen. Damit werden die oben vorgenommenen Einordnungen von Schülerlösungen nicht als strikt festgelegte Kompetenzebenen verstanden. Vielmehr erlaubt die nähere Betrachtung der Schülerlösungen einen Einblick in schülerspezifische, spontane Deutungssichten und Herangehensweisen. Weiterhin stellt die Vielfalt der kindlichen Lesweisen und Arbeitsergebnisse die hohe Komplexität der Anforderung deutlich heraus. Im Deutungsprozess der Schülerinnen und Schüler hat ihre Beachtung folgender vier *Kontextelemente* der Zahlenstrahldarstellung einen wesentlichen Einfluss auf das Deutungsergebnis: 1. die Länge der Skalierungsstriche, 2. der Bogen, 3. der erste Skalierungsstrich (wird dieser zwangsläufig als Null oder variabel gedeutet?) und 4. der Abstand zwischen den einzelnen Skalierungsstrichen („Einerschritte“ oder flexible Deutung der Maßeinheit?). Während der Bogen für Luka scheinbar selbstverständlich als ein „Sprung von 12 bis 19“ zu verstehen ist, findet er in Jennys Interpretation keinerlei Beachtung. Sie geht mit einer „Zählsicht bzw. Zähl*rahmung*“ an die Aufgabe heran und bezieht sich in ihrer Deutung folglich auf die einzelnen zu zählenden Skalierungsstriche. Andere Kontextelemente bleiben zunächst einmal unberücksichtigt. Fragt man nach spezifischen Merkmalen, die die kindliche Deutung von Anschauungsmitteln kennzeichnen, so sind – über die visuelle Strukturierungskompetenz hinaus – sowohl der individuell genutzte *Kontext*, als auch die bewusst oder unbewusst eingenommene Sichtweise, die *Rahmung* (vgl. Goffman 1974, Krummheuer 1984) wichtige Analyseperspektiven. Im Projekt KORA werden folgende offene Fragen untersucht: Welche Rahmungen und individuell benutzten Kontexte können rekonstruiert werden? und: In welcher Weise beeinflussen diese die Deutung von Anschauungsmitteln? Zur Untersuchung dieser Fragen wird das theoretische Konstrukt „rahmungsbasierte visuelle Deutungskompetenz“ als begriffliches Beschreibungsmodell und als interpretatives Analyseinstrument ausgearbeitet.

Literatur

Goffman, E. (1974). Frame Analysis. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Krummheuer, G. (1984). Zur unterrichtlichen Dimension von Rahmungsprozessen. JMD 5(4), 285-306.

Söbbeke, E. (2005). Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern – Epistemologische Grundlagen und empirischen Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel. Hildesheim: Franzbecker.

Gudrun STEFAN, Viechtach

Mathematische Diskussionen mit Grundschülern als Chance für situativ-kollektive Interessenbildung

Die hier im Zentrum stehenden mathematischen Diskussionen entwickeln sich aus dem von mir initiierten Unterrichtsprojekt *Sprech- und Schreibanlässe im Mathematikunterricht der 3. und 4. Jahrgangsstufe*. Die Konzeption sieht vor, dass die Schüler offen ihr subjektives Erleben und Erlernen von Mathematik zum Ausdruck bringen können. Auf freiwilliger Basis besteht dazu die Möglichkeit, sich in Mathe-Tagebüchern, in videografierten Interviews, in der Mathe-Box (einem Zettelkasten für Notizen über Mathematik) sowie in der E-Mail-Kommunikation mit einem Professor für Mathematikdidaktik zu äußern. Die Mathe-Diskussionen entwickeln sich schwerpunktmäßig aus dem Verfassen der Tagebücher; sie entstehen auf Veranlassung der Schüler, die vorschlagen, sich die Tagebucheinträge gegenseitig vorzulesen. Diese anfänglichen Vorleserunden mit geringen Aussprachen entwickeln sich zunehmend zu richtigen Diskussionen, die auf genuinen Fragestellungen der Kinder basieren. Die Mathe-Diskussion *Wie sieht der Millionenwürfel aus?* basiert auf der Fragestellung eines Schülers, die aufgeworfen wird, nachdem mit Mehrsystemmaterial Zahlen im Zahlbereich bis 10000 dargestellt wurden. Auf freiwilliger Basis erarbeiten die Kinder dazu in ihren Tagebüchern Lösungsvorschläge, welche sie im Rahmen der Diskussion präsentieren und erörtern.

1. Methodologischer Ansatz

Die Mathe-Diskussion wurde videografiert und vollständig transkribiert. Bei der durchgeführten Interaktionsanalyse (Krummheuer/Fetzer 2005) wird basierend auf dem Partizipationsdesign von Krummheuer/Brandt (2001) der Produzentenstatus der aktiv beteiligten Kinder ebenso analysiert wie der Rezipientenstatus der zuhörenden Schüler und die sich entwickelnde Interaktionsstruktur. Interpretativ können dabei nicht nur Phasen interaktionalen Gleichflusses, sondern auch solche interaktionaler Verdichtung rekonstruiert werden. Mein Forschungsinteresse besteht nun darin zu untersuchen, ob diese interaktionalen Verdichtungen im Sinn von Angelika Bikner-Ahsbahs (2005) die Genese interessendichter Situationen darstellen.

2. Theorie interessendichter Situationen

In ihrem Forschungsansatz verbindet Angelika Bikner-Ahsbahs (2005) die Interessenforschung und den dort zunehmend erzielten Konsens, dass Interesse auch ein Ergebnis sozialer Prozesse ist, mit der Unterrichtsforschung und entwickelt ihre Theorie interessendichter Situationen. Eine interessendichte Situation als Konstellation des alltäglichen Mathematikunterrichts, in der situativ-kollektiv eine Interessenbeziehung zwischen Schülern und dem mathematischen Gegenstand emergiert, dokumentiert sich in kollektiven Handlungen, die drei Merkmale aufweisen müssen (2005, S. 129): *Involviertsein*: Die aktiv Partizipierenden involvieren sich nacheinander in die mathematische Aktivität. *Erkenntnisdynamik*: Die Lernenden konstruieren fortgesetzt mathematische Bedeutungen, so dass über das Sammeln und Verknüpfen dieser Bedeutungen eine Struktursicht erzielt wird. *Mathematische Wertigkeit*: Der Wert dieser Situation ist innerhalb der Mathematik begründet und entsteht durch die Produktion und Wertschätzung mathematisch gehaltvoller Ideen.

3. Entstehungsprozess situativ-kollektiven Interesses

Zu einer ersten interaktionalen Verdichtung kommt es im Diskussionsverlauf, als ein Schüler als gehaltvolle mathematische Idee den Vorschlag einbringt, mit Hilfe der verfügbaren zehn Tausenderwürfel zunächst einen Zehntausenderwürfel als Modul des Millionenwürfels zu konstruieren; der erste Realisierungsversuch scheitert allerdings, denn es entsteht ein Quader. In den folgenden Transkriptauszügen soll gezeigt werden, wie die Schüler nun in interessendichter Weise kollektiv ihren Wissensaufbau gestalten:

Rene: Wir müssen jetzt –alle zwei – müssen jetzt zwei Würfel von (*zahlreiche laute Wortmeldungen*) – äh – 4 Würfel von links wegnehmen und auf den andern da #
Lehrer: Mach´s.
Rene: draufstellen (*nimmt einen Tausenderwürfel*)

Mit seiner Turnergreifung unmittelbar im Anschluss an das Scheitern des ersten Konstruktionsversuchs dokumentiert Rene sein Involviertsein in die Idee des Zehntausenderwürfelmodells, denn er bringt sich sogleich mit einem eigenen Umsetzungsvorschlag ein. Der Lehrer reagiert situationsgesteuert, da er mit seiner Aufforderung (198), diesen Vorschlag handelnd zu konkretisieren, keine eigenen Erwartungen verfolgt, sondern dem Schüler die Gelegenheit einräumt, seine Bedeutungskonstruktion zu explizieren. Zahlreiche laute Wortmeldungen (195, 196) zeigen, dass sich weitere Schüler in diese Konstruktionsidee einbringen möchten.

Pascal: Soll i dir helfa?
Rene: Ja.
Schüler: (*nehmen Würfel vom Ende des Quaders weg, legen sie in einer zweiten Reihe auf die erste*)
Pascal: I helf dir.

Verbale Hilfsangebote (200, 204) und das aktive Engagement weiterer Kinder, die Renes Handlungsanweisungen umzusetzen beginnen, belegen eine fortgesetzte Involvierung in seine Konzeption.

205	< Rene:	Ja und dann noch re#
206	< Chantal:	Das wird´n Quader.
207	Robert:	N a a a, weil der#

Chantal übt nun Kritik (206) am entstehenden Handlungsprodukt und damit an Renes Konstruktionsvorschlag, was von Robert nachdrücklich zurückgewiesen wird (207). Während Chantal eine erste Bedeutungsverknüpfung zur vorausgegangenen Szene herstellt, in welcher letztendlich ein Quader entstand, identifiziert sich Robert dergestalt mit Renes Idee, dass er sie zu verteidigen beginnt, was er vermutlich auch argumentativ gestützt hätte, wenn er nicht unterbrochen worden wäre.

208	/Rene:	(*gibt Anweisungen für Mitschüler auf der gegenüberliegenden*
209		*Tischseite*) Rechts den andern da noch wegnehmen –
210	S:	Den müss ma auch da noch wegnehm´
211	Robert:	Recht wegnehmen – recht rechts rechts (*spricht sehr schnell*)

Durch seine Erteilung von Handlungsanweisungen zeigt Rene, dass er als Kreator die Verantwortung für den Konstruktionsprozess übernimmt. Sie werden von einem unbenannten Schüler (210), der durch seinen Einwurf erkennen lässt, dass er Renes Gedanken mitträgt, ebenso unterstützt wie durch Roberts Imitation (211), wobei die schnelle Sprechweise des Letzteren seine Ungeduld dokumentiert und zeigt, dass er den Produktionsprozess vorantreiben möchte.

212	Chantal:	(*nimmt vorne einen Tausenderwürfel weg*)
213	Robert:	(*baut die erste vordere Würfelreihe ab, will sie an die rechte*
214		*anfügen*)
215	S:	Na-in
216	Tom:	Oina g´hört wieder hie.
217	S:	Jetza.
218	Schüler:	(*bauen den Körper wieder um, sie nehmen die hinteren Würfel*
219		*und stellen sie vorne rechts hin, so dass wieder 2 Reihen je drei*
220		*Würfel dort stehen*)

Chantal und Robert setzen nun Renes Anleitungen handelnd um, was jedoch von zwei Schülern kritisiert wird (215, 216) und dazu führt, dass der entstehende Körper wieder umgebaut wird (218-220). Am Schluss dieser Szene entsteht wiederum ein Quader, bestehend aus drei mal drei Würfeln mit einem mittig aufgesetzten Würfel. Dieses Handlungsergebnis wird abschließend von einem Schüler negativ bewertet: *Is aber schief.*

4. Erkenntnisse

Die Interaktion der Kinder dokumentiert, dass sich die aktiv Partizipierenden nacheinander in die mathematische Aktivität, einen Zehntausenderwürfel zu konstruieren, involvieren. Ihr kollektives Engagement zeigt, dass sie dieses Konstruktionsproblem als persönlich bedeutungsvoll erleben. Die Erkenntnisdynamik bahnt sich vorläufig in einem Sammeln von Bedeutungen an; in ihren Versuchen, den Zehntausenderwürfel zu konstruieren, sammeln sie zunächst nur Erfahrungen für dessen Nicht-Konstruierbarkeit. Die Erkenntnisdynamik zeigt sich auch darin, dass der Lehrer den Erkenntnisprozess nicht anschieben muss, da die Schüler ihn durch ihre Teilnahme selber fortsetzen. Die mathematische Wertigkeit liegt hier eindeutig im Gegenstand Mathematik und dokumentiert sich in dem gemeinsamen Ringen um die Konstruktion des Zehntausenderwürfels. Somit emergiert hier nach Angelika Bikner-Ahsbahs eine interessendichte Situation, die ihre Ausgangsbasis in drei Faktoren findet: Das *situationsgesteuerte Lehrerverhalten* (2005, S.163) gibt den Schülern inhaltlich und interaktional den Raum, eigene Bedeutungskonstruktionen zu verfolgen. Die so entstehende erwartungsrezessive Interaktionsstruktur impliziert eine *akzeptierte Beteilungsunschärfe* (2005, S.289), die durch den leicht gängigen Wechsel zwischen Redner- und Zuhörerstatus, der sog. Rotation der Gesprächspartner, einen Handlungsspielraum für die Schüler generiert. Die Interaktionsstruktur ermöglicht auch eine Auffassungsdifferenz unter den Kindern, wie die angestrebte Konstruktion zu erreichen sei. Die solchermaßen *akzeptierte Deutungsunschärfe* (2005, S. 287 f.) scheint eine Klärungsmotivation zu evozieren und bietet zusätzliche Handlungsspielräume, sich mit eigenen Ideen zu involvieren oder an vorausgegangene Beiträge anzuknüpfen. Diese aktive Teilhabe an interessendichten Situationen ist geeignet, individuumbezogene Interessenentwicklungen in Mathematik zu unterstützen, zu fördern und im Idealfall zu generieren.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, A. (2001). Rahmenkonzept für eine auf den alltäglichen Mathematikunterricht bezogene Interessentheorie. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 119 - 122.

Bikner-Ahsbahs, A. (2004). Theorie interessendichter Situationen – Überblick und Einblick. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 97 – 100.

Bikner-Ahsbahs, A. (2005). *Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation*. Hildesheim: Franzbecker.

Krummheuer, G., Brandt, B. (2001). *Paraphrase und Traduktion*. Weinheim, Basel: Beltz.

Krummheuer, G., Fetzer, M. (2005). *Der Alltag im Mathematikunterricht*. München: Elsevier.

Stein, M.; Winter, K.; Jordan, R.; Podlogar, H., Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Das Projekt Mathe-Meister: Stand der Dinge

1. Einleitung

Qualifizierte Mitarbeiter und gut ausgebildetes Führungspersonal werden für Betriebe in Zukunft die wichtigste Ressource im internationalen Wettbewerb sein. Trotzdem weisen viele Interessierte an Meisterlehrgängen vor Lehrgangsbeginn starke Defizite im Bereich der elementaren Schulmathematik auf, obwohl mathematische Grundkenntnisse eine unverzichtbare Grundlage in allen Bereichen der Meisterqualifizierung sind. Das vom BMBF geförderte Projekt Mathe-Meister (Leitung: M. Stein, Universität Münster) entwickelt für verschiedene Berufsfelder internetbasierte Tests, mit deren Hilfe Interessenten/innen an Meisterlehrgängen prüfen können, ob sie die benötigten Basiskenntnisse in Mathematik besitzen.

Neben den Defiziten im mathematischen Bereich fallen auch große Defizite im Bereich der Lesekompetenz auf. Um diese zu verbessern, wird neben dem Testmodul eine Übungs-CD zum Textverständnis entwickelt.

1. Testentwicklung und Aufgabenauswahl

Mit der Testentwicklung im Rahmen dieses Projektes sollen Testaufgaben für einen internetbasierten Selbsttest erstellt werden. Diese sollen in einem bestimmten zeitlichen Rahmen lösbar sein, alle mathematischen Grundlagenbereiche abdecken, die zu Beginn der Meisterausbildung in den verschiedenen Berufssparten vorausgesetzt werden und zudem über ein gewisses diagnostisches Potential verfügen. Das bedeutet, dass die Probandenantworten auf diese Aufgaben fehleranalytisch ausgelesen werden können. Die getestete Person erhält so nicht nur die Meldung über ein falsches Ergebnis, sondern eine möglichst genaue Beschreibung des vermutlich vorliegenden Fehlers, wodurch eine Basis für konkrete Fördermaßnahmen geschaffen wird. Die Entwicklung bzw. Auswahl der Aufgaben für das Testportal verläuft in folgenden Schritten:

→ Zusammenstellung eines Aufgabenpools mit empirischen Daten

→ statistisch, inhaltlich und diagnostisch begründete Auswahl von Indikatoraufgaben

→ Entwicklung von Antwortalternativen mit diagnostischem Potential

a. Zusammenstellung eines Aufgabenpools

Die zu Beginn der verschiedenen Meisterlehrgänge vorausgesetzten mathematischen Grundlagen wie auch die darauf aufbauenden mathematischen Zusammenhänge werden nicht explizit in Rahmenvorgaben formuliert. Das Fach Mathematik als solches wurde 2005 im Rahmen der Meisterausbildung abgeschafft. Stattdessen soll seitdem eine Einbindung verschiedener mathematischer Inhalte in den anderen Unterrichtsfächern stattfinden. Zur Ermittlung der zu Beginn verschiedener Meisterlehrgänge vorausgesetzten mathematischen Grundlagen wurden sowohl alle verfügbaren Mathematiklehrwerke, wie auch andere Lehrwerke und Unterrichtsmaterialien einzelner Dozenten und Kammern analysiert. Anschließend werden auf Basis der in den verschiedenen Quellen dargestellten Anfangsthemen zuerst die mathematischen Inhalte und Anforderungen extrahiert und kategorisiert. Innerhalb dieser daraus folgenden umfangreichen und teilweise von den Anforderungen her sehr komplexen Kategorien wurden anschließend die in den einzelnen Bereichen vorausgesetzten grundlegenden Fähigkeiten ermittelt. Die so isolierten Grundlagen wurden anschließend durch Lehrende der einzelnen Berufssparten validiert, ggf. erweitert und berufspezifisch differenziert.

b. Bestimmung von Indikatoraufgaben

An den Tests nahmen in mehreren Phasen Meisterschüler, Studierende und Schüler allgemeinbildender Schulen teil. In der Datenerhebungsphase wurden 454 Meisterschüler im ersten Lehrgangsjahr aus verschiedenen Berufen getestet. Insgesamt wurden dabei 228 Items eingesetzt. Diese Items repräsentieren die mathematischen Anforderungen, die Teilnehmern von Meisterkursen verschiedener Gewerke zu Beginn ihres Lehrgangs abverlangt werden. Aufgrund der großen Anzahl von Items wurden diese auf drei Tests verteilt, welche sich aus Aufgaben zu den Oberthemen Arithmetik, Algebra, Geometrie, Bruchrechnung sowie Dreisatz und Prozentrechnung zusammensetzen. Innerhalb eines Tests wurden Aufgaben zu ähnlichen Fähigkeiten zu Aufgabenblöcken zusammengefasst; diese Aufgabenblöcke können selbst wiederum Oberthemen zugeordnet werden.

Mithilfe statistischer Analysen sollten die Aufgabenblöcke auf Homogenität überprüft werden. Des Weiteren sollten Aufgaben identifiziert werden, die besonders gut eine latente Variable repräsentieren. Diese Aufgaben werden im Folgenden auch Indikatoraufgaben genannt. Zur Identifizierung der Indikatoraufgaben wurde das Verfahren der Faktorenanalyse eingesetzt. Mithilfe dieses Verfahrens konnten Items eines Oberthemas in homogene Gruppen untergliedert werden (vgl. Bühner 2006, S. 180); die Items dieser

Gruppen lassen sich jeweils auf eine latente Variable zurückführen, die mehr inhaltliche Details enthalten als durch die Oberthemen vorgegeben. Durch die Faktorenanalyse können zudem Aufgaben identifiziert werden, die zu allen weiteren Aufgaben nur gering korrelieren und deshalb gesondert betrachtet werden müssen (vgl. Bühner 2006, S. 196).

Die beschriebene Vorgehensweise erläutern wir im Folgenden an den Aufgaben des Oberthemas Arithmetik. Jeder der drei Papiertests beinhaltet 9 Aufgaben zu elementaren Rechenverfahren inkl. dem Umgang mit Einheiten, 6 Aufgaben zur Wurzel- und Potenzrechnung sowie 4 Aufgaben zum Umrechnen von Einheiten. Die Lösungsquoten liegen zwischen 24 und 85 Prozent. Die Faktorenanalyse liefert für die Aufgabenzusammenstellung 5 homogene Aufgabengruppen, die auch inhaltlich sehr gut übereinstimmen. Das Verfahren identifiziert hoch korrelierende Aufgaben zur Umrechnung von Einheiten, zur Potenzrechnung, zu Grundrechenarten und zum Umgang mit Einheiten. Eine Aufgabe zur Wurzelrechnung wird vom Verfahren aussortiert, da diese Aufgabe mit keiner weiteren Aufgabe korreliert.

Zur Validierung der identifizierten Aufgabenblöcke wurde das Rasch-Modell der Item Response Theory verwendet. Die Item Response Theory setzt das Antwortverhalten von Personen und die dahinterliegenden latenten Variablen in Beziehung (vgl. Rost 2004, S. 133). Das Rasch-Modell stellt diese Verbindung wie folgt her: Zur Lösung einer Aufgabe ist ein bestimmtes Persönlichkeitsmerkmal (Personenparameter) nötig, dessen individuelle Ausprägung die Lösungswahrscheinlichkeit für eine spezielle Aufgabe festlegt; die Schwierigkeit einer Aufgabe wird durch einen Itemparameter angegeben. Ob das Rasch-Modell zutrifft, muss mit einem Modelltest festgestellt werden – dabei werden gleichzeitig diverse Gütekriterien wie Skalierbarkeit, Eindimensionalität sowie die Item- und Personenhomogenität überprüft (Moosbrugger & Kelava 2007, S. 255).

c. Ausarbeitung von Antwortalternativen

Ein weiterer Anspruch an das Selbsttestportal ist die individuelle Rückmeldung zu Defiziten und Fehlern. Hierbei sollen die Schüler Angaben darüber erhalten, in welchem Themengebiet bzw. bei welchen Fähigkeiten sie Defizite haben. Falls möglich, soll auch eine konkrete fehleranalytische Rückmeldung als diagnostische Basis für eine eventuelle Fördermaßnahme geliefert werden.

Um die fehleranalytische Auswertung aller Aufgaben zu ermöglichen, wurde ein gebundenes Antwortformat gewählt. Die dadurch für jede Aufgabe vorgegebenen Antwortalternativen sollen über ein möglichst hohes diagnostisches Potential verfügen. Um diese Antwortalternativen zu bestimmen, wurden die vollständigen Rechenwegnotationen der Probanden erfasst und fehleranalytisch untersucht und so letztlich typische korrekte und fehlerhafte Antwortalternativen für jede einzelne Indikatoraufgaben generiert.

2. Entwicklung der CD zum Textverständnis

Im Projekt Mathe-Meister wird zur Förderung der Lesekompetenz eine Übungs-CD entwickelt. Im Rahmen dieses Projektteils wurden in der Konzeptionsphase elf Aufgabenformate herausgearbeitet, die zum großen Teil auf bereits bestehende Trainingskonzepte zur Lesekompetenz der Deutsch-Didaktik zurückzuführen sind (vgl. Simon 2006; Haas 2002; Grabe, Spanjardt 2004; OECD 2000). Weitere konzeptionelle Aufgaben lagen im Grobentwurf der Benutzeroberfläche (GUI) sowie in der Erstellung von Texten nach den oben beschriebenen Anforderungen. Innerhalb der ersten Entwicklungsphase wurden die einzelnen Aufgabenformate mit der Entwicklungsumgebung „Director“ programmiert. Die entstandenen Prototypen der elf Aufgabenformate wurden im Rahmen einer formativen Evaluation an zwölf Berufsschülern aus drei verschiedenen Berufen getestet. Aufgrund der festgestellten Probleme hinsichtlich der Verständlichkeit des Programmverlaufs und der Bedienung wurden die Prototypen überarbeitet, so dass diese Fehler innerhalb einer zweiten Evaluationsphase nicht mehr auftraten. Im weiteren Projektverlauf werden zu den erstellten Texten passende Aufgaben entwickelt und diese dann an die jeweiligen Aufgabenformate angepasst. Zur Fertigstellung der CD werden im letzten Schritt die Benutzerverwaltung sowie die Menüstruktur programmiert.

Literatur

Bühner, M. (2006). *Einführung in die Test- und Fragebogenkonstruktion*. München: Pearson Studium.

Grabe, A.; Spanjardt, E. (2004). *Arbeitstechniken fürs Textverständnis*. Mülheim: Verlag an der Ruhr.

Haas, K. (2002). *Texte lesen, Inhalte verstehen – Ein systematisches Training zur Lesekompetenz*. Mühlheim: Verlag an der Ruhr.

Moosbrugger, H., Kelava, A. (2007). *Testtheorie und Fragebogenkonstruktion*. Heidelberg: Springer Verlag.

OECD Programme for International Student Assessment (2000). *PISA 2000 Beispielaufgaben aus dem Lesekompetenztest*.

Rost, J. (2004). *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. Göttingen: Verlag Hans Huber.

Simon, P. (2006). *Texte erschließen 9/10*. Berlin: Cornelsen.

Jürgen STEINWANDEL, Weingarten

Die Strukturerfassung regulärer und halbregulärer Körper. Ein Vergleich von interaktiver 3D-Computer-Simulation, Bild und Realmodell

1. Einführung

Die Kompetenz „räumliches Vorstellungsvermögen" ist für viele Bereiche des täglichen Lebens, als auch der Berufswelt, ein elementarer Grundbaustein. In der psychometrischen Tradition wird dabei von 3 bis 5 Faktoren ausgegangen (Linn & Petersen 1985/1986, Maier 1999, Judith Glück et.al, 2006). In der vorliegenden Arbeit wird vor allem auf die beiden Faktoren „mental rotation" und „spatial visualization" nach Linn & Petersen Bezug genommen.

Im Schulunterricht werden zur Erfassung räumlicher Strukturen von Polyedern (z.B. Anzahl ihrer Flächen, Art ihrer Flächen, Anzahl ihrer Kanten, usw.) Realmodelle (z.B. aus der Sammlung der Schule) und Bilder (z.B. Schulbuch), als auch Computeranimationen – z.T. interaktiv – eingesetzt. Bisherige Untersuchungen konzentrieren sich in diesem Kontext vorwiegend auf den Verdrehwinkel zweier zu vergleichender Abbildungen und analysieren hierbei z.B. die Bearbeitungsgeschwindigkeit oder die Fehlerhäufigkeit (Kosslyn, Margolis, Barrett und Goldknopf 1990, Peters et.al 1995, Glück 2005). Dabei werden weitere Variablen wie z.B. das Alter oder das Geschlecht in den Blickwinkel genommen. Weitere Arbeiten analysieren die Wirkungsweise von Computerumgebungen und deren Trainingseffekte (Souvignier 1999/2000, Hartmann & Reiss 2000, Hellmich et.al 2002, Ahmad 2009). Dabei sind die Befunde teilweise uneinheitlich bzw. widersprüchlich.

2. Forschungsfragen

In der hier vorgestellten Arbeit werden bzgl. der Untersuchung von regulären und halbregulären Körpern zwei weiterführende bzw. neue Aspekte untersucht:

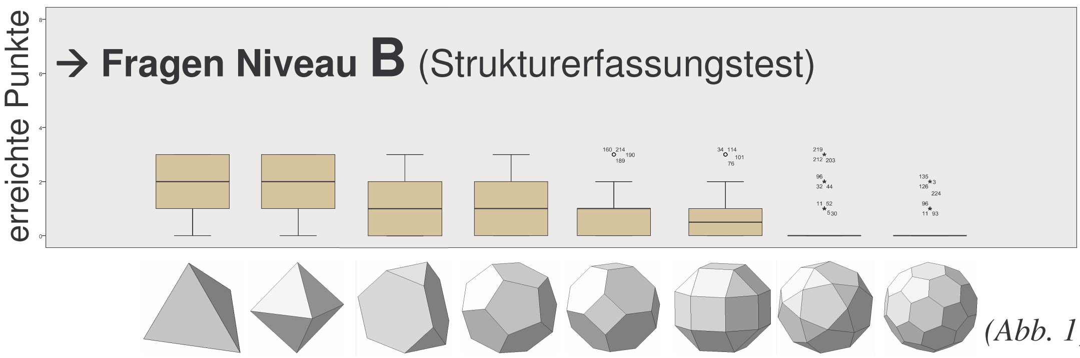
– Ist es möglich, die Komplexität eines Körpers unabhängig von der Betrachtung des Rotationswinkels zu quantifizieren und in wie weit behält ein solches Modell seine Gültigkeit für verschiedene Leistungsgruppen ?
  Hierbei wurde ein recht einfaches Modell zugrunde gelegt, indem der Komplexitätsgrad (K) wie folgt definiert wird:
  K = Anz. Ecken + Anz. Kanten+˙ Anz. Flächen

– Wie stark profitieren verschiedene Leistungsgruppen von den Präsentationen „Bildumgebung, Computeranimation bzw. Modell“ in Bezug auf die Bearbeitung von entsprechend spezifischen Fragestellungen ?

3. Untersuchungsdesign

Getestet wurden N=242 Schüler in insgesamt 11 Klassen der Klassenstufen 5 bis 9 an 5 Schulen der Schularten „Haupt-, Realschule und Gymnasium“. Zunächst wurden zwei Vortests durchgeführt: ein Arithmetiktest mit Inhalten zum Zahlverständnis und zu den Grundrechenarten im Zahlenraum der natürlichen Zahlen – sowie der Bausteinetest von Birkel & Schumann 2002. Mit Hilfe der Daten des Bausteinetests wurden die Schülergruppen skaliert und kontrolliert den Präsentationsumgebungen zugewiesen. Bei dem anschließenden „Strukturerfassungstest“ waren insgesamt 8 Körper zu bearbeiten, wobei jeweils 6 Fragen aus zwei Niveaugruppen zu beantworten waren. Fragen des Niveaus A konnten ohne die Kompetenzen „mental rotation“ und „spatial visualization“ beantwortet werden, während für die Items des Niveaus B diese notwendig waren. Die Bearbeitungszeit je Körper wurde dabei in Abhängigkeit vom Komplexitätsgrad vorgegeben und kontrolliert.

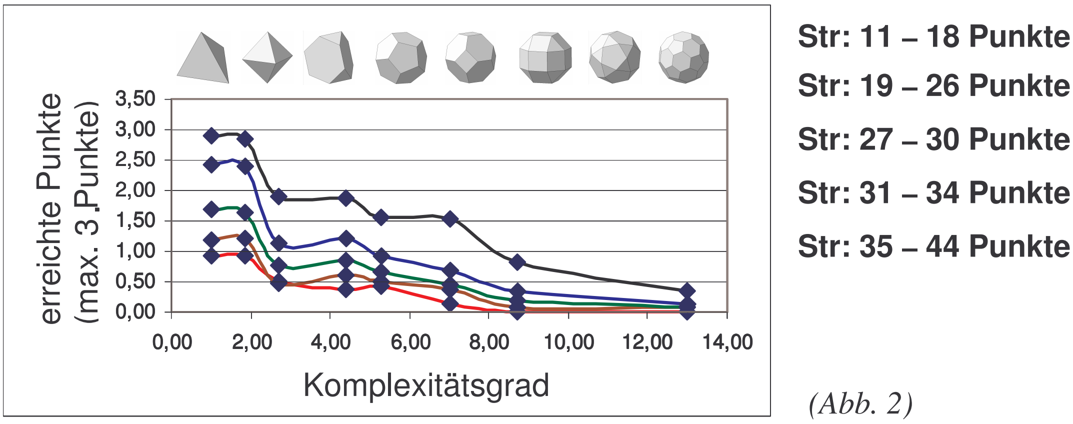
4. Erste Befunde



(Abb. 1)

<u>Hinweis:</u> Es werden hier nur Auswertungen bzgl. der Fragen Niveau B dargestellt, da diese im Besonderen für Argumentationen hinsichtlich der Kompetenzen „mental rotation“ und „spatial visualization“ relevant sind.

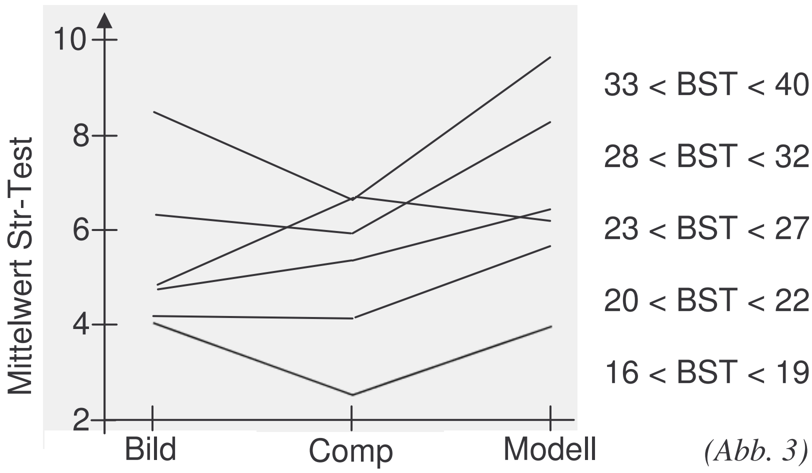
Die Analyse der Fragegruppe Niveau B (Abb. 1) bekräftigt eine „in Frage-Stellung“ des hier angewandten Komplexitätsgrads-Berechnungsmodells; paarweise wird hier nicht differenziert – es kann lediglich eine Tendenz bestätigt werden, welche nicht weiter verwunderlich ist.



(Abb. 2)

<u>Hinweis:</u> Analysiert werden hier ausschließlich die Fragen des Niveaus B, wobei fünf Leistungsgruppen bzgl. der Ergebnisse des Strukturerfassungstest gebildet wurden.

Die hier dargestellten parallelen Korrelationsverläufe unterschiedlicher Leistungsgruppen brachten einen unerwarteten Befund: Schüler mit besseren Ergebnissen zeigen diesen Leistungsbonus bei allen Körpern, unabhängig vom Komplexitätsgrad und in einem ähnlichen Maße. Oder anders ausgedrückt: relative Komplexitäts-Empfindungsmaße („ist leichter als“, „ist schwerer als“, ist gleich schwer“) zwischen den verschiedenen Körpern gelten nahezu für alle Leistungsgruppen.



(Abb. 3)

<u>Hinweis:</u> Bei Abb. 3 wurden folgende Körper nicht berücksichtigt (leichtester und die beiden schwierigsten Körper) um Anfangs- und Extremeffekte zu kontrollieren. Das Erscheinungsbild ist dabei ähnlich im Vergleich zu der hier nicht dargestellten Gesamtbetrachtung. Skaliert wurde dabei mit Hilfe des Bausteinetests.

Bei der Analyse dieser Auswertung werden folgende zwei „vorsichtige“ Thesen formuliert:

– Die Befunde sind bzgl. der Leistungsgruppen weiterhin uneinheitlich; so gibt es im „Mittelfeld“ Leistungsgruppen, die eher von der Computerumgebung profitieren. Schwache und starke Schüler profitieren am wenigsten von der Computerumgebung – was besonders bzgl. der oberen Leistungsgruppen überrascht.

– Starke Schüler profitieren am wenigsten von der Computerumgebung und im Besonderen vom Modell; dies ist ein sehr starker Hinweis, die bestehenden Ansichten hinsichtlich didaktischer Überlegungen – insbesondere im gymnasialen Bereich – bei der räumlichen Geometrie zu überdenken.

Literatur

Ahmad Rafi Khairulanuar Samsudin (9/2009): *Practising mental rotation using interactive Desktop Mental Rotation Trainer (iDeMRT).* In: British Journal of Educational Technology, H. Volume 40, Number 5, S. 889-900(12).

Glück J., Kaufmann H. Dünser A. Steinbügl K. (2005): *Geometrie und Raumvorstellung – Psychologische Perspektiven.* In: Informationsblätter der Geometrie (IBDG), H. 24 No. 1, S. 1–13.

Hartmann Jens & Reiss Christina (2000): *Auswirkungen der Bearbeitung räumlich-geometrischer Aufgaben auf das Raumvorstellungsvermögen.* In: Judith Glück, Hannes Kaufmann; Leutner, Detlev; Brünken, Roland (Hg.): Neue Medien in Unterricht, Aus- und Weiterbildung. Aktuelle Ergebnisse empirischer pädagogischer Forschung. Münster: Waxmann, S. 85–93.

Hellmich Frank; Hartmann Jens (2002): *Aspekte einer Förderung räumlicher Kompetenzen im Geometrieunterricht.* Ergebnisse einer Trainingsstudie mit Sonderschülerinnen und - schülern. In: ZDM, H. 34, S. 56–61.

Kosslyn S. M. Margolis J. A. Barrett A. M. &. Goldknopf E. J. (1990): *Age differences in imagery abilities.* In: Child Developement, H. 61, S. 995–1010.

Linn, M. C. &. Peterson A. c. (1985): *Emergence and characterization of sex differences in spatial ability: A Meta-Analysis.* In: Child Developement, H. 56, 6, S. 1479–1498.

Linn, M. C. &. Peterson A. c. (1986): *A meta-analysis of gender differences in spatial ability.* In S. Hyde & M.C. Linn (Eds.). In: The psychology of gender, Baltimore, S. 67–101.

Maier P.H.; Maier, Peter Herbert (1999): *Räumliches Vorstellungsvermögen: Ein theoretischer Abriss des Phänomens räumliches Vorstellungsvermögen.* Pädag. Hochsch., Diss.- Freiburg (Breisgau), 1994. 1. Aufl. Donauwörth: Auer.

Peters M., Laeng B. Latham K. Jackson M. Zaiyouna R. and Richardson C. (1995): *A redrawn Vandenberg and Kuse mental rotations test: Different versions and factors that affect performance.* In: Brain and Cognition, H. 28, S. 39–58.

Souvignier, Elmar (Hg.) (2000): *Förderung räumlicher Fähigkeiten. Trainingsstudien mit lernbeeinträchtigten Schülern.* Münster: Waxmann (Pädagogische Psychologie und Entwicklungspsychologie, 22).

Souvignier Elmar (1999): *Die Verbesserung räumlicher Fähigkeiten durch computerunterstützte Fördermaßnahmen: Zwei Evaluationsstudien.* In: Zeitschrift für Pädagogische Psychologie, H. 13, S. 4–16.

Christine STREIT, Nordwestschweiz

Einsatzmöglichkeiten eines beobachtungsgestützten Paper-and-pencil-Tests zum Erfassen von Schwierigkeiten beim Rechnen

l. Diagnose als schulische Aufgabe

Diagnose und Förderung werden zunehmend als zentrale schulische Aufgaben gesehen. Laut KMK-Beschluss vom 4.12.2003 müssen die Länder Grundsätze zur Diagnose und Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten in der Mathematik vorlegen. Die Frage, wie solch ein diagnostischer Auftrag konkret erfüllt werden kann, bleibt allerdings noch weitgehend unbeantwortet.

Standardisierte Testinstrumente wie z.B. ZAREKI, DeMat, OTZ usw. vergleichen die Leistungen einer Schülerin bzw. eines Schülers mit einer normierten Stichprobe. Sie lassen aber keine Rückschlüsse auf individuelle Fehlvorstellungen und die Denkprozesse der Kinder während der Bearbeitung der Aufgaben zu. Dazu sind qualitative Lernstanderhebungen notwendig, die eine prozessorientierte Diagnose ermöglichen und differenzierte Hinweise über den Lernstand eines Kindes in bestimmten Bereichen geben können (vgl. z.B. Schipper 2007). Beobachtungen von materialgebundenen Handlungen sowie der Gestik und Mimik der Kinder in Kombination mit der Methode des lauten Denkens lassen eine differenzierte Analyse der eingesetzten Strategien beim Lösen von Aufgaben zu. Solche qualitativen Instrumente weisen aber auch Nachteile auf: Sie sind sehr zeitintensiv und im Klassenverband nicht durchführbar. Zudem sind sie in der Regel nicht empirisch überprüft, die Analyse und Auswertung bleibt somit hauptsächlich der durchführenden Lehrperson oder sonstigen Fachkraft überlassen, wodurch immer eine gewisse Gefahr der Willkür gegeben ist. Vor allem aber stellt diese Art der Diagnostik hohe Anforderungen an die Lehrperson: Fundierte fachdidaktische Kompetenzen in den zu untersuchenden Inhaltsbereichen sind ebenso Voraussetzung wie das Wissen um qualitative Verfahren und Erfahrung im Führen diagnostischer Gespräche. In Deutschland ist Diagnose aber erst seit kurzem in der Lehrerausbildung verankert. Daher ist nicht zu erwarten, dass Lehrkräfte per se über die notwendigen Kompetenzen verfügen.

Um dieser Diskrepanz von Anspruch und Wirklichkeit entgegenwirken zu können, wird aktuell ein beobachtungsgestützter Arithmetiktest (BAT) entwickelt, der als Eingangsdiagnostikum zu Beginn der 3. Klasse eingesetzt werden kann. Parallel dazu wird an einem entsprechenden Diagnostikum für das 5. Schuljahr gearbeitet. Der BAT wird als Gruppentest eingesetzt. Damit ist er zwar zeitaufwändiger als der Bielefelder Rechentest (BIRTE 2), ein computergestütztes Diagnoseverfahren, das ebenfalls versucht diese Lücke zu schließen. Dafür beinhaltet der BAT aber die Möglichkeit der gezielten Beobachtung von typischen Verhaltensweisen, die zählende Rechner häufig zeigen, und die der Computer nicht erfassen kann.

2. Zur Konzeption des Diagnoseinstruments

In Anlehnung an das Berner Screening (Moser Opitz 2007) handelt es sich um ein Diagnoseinstrument, das Schüler und Schülerinnen mit „deutlich unterdurchschnittlichen" Leistungen im Arithmetikunterricht erfasst. Es soll die Grundlage für eine vertiefte qualitative Diagnose und eine darauf aufbauende gezielte Förderung sein. Damit ist eine rechtssteile Häufigkeitsverteilung angestrebt. So ist eine Differenzierung bei den leistungsschwächeren Schüler/innen möglich.

Die Schüler und Schülerinnen bearbeiten Aufgaben, die nach derzeitigem Stand der Forschung Hinweise auf Schwierigkeiten beim Rechnen liefern können. Im Mittelpunkt stehen folgende Bereiche:

(1) Zahlverständnis: Zählfertigkeit, Zahlbeziehungen und Stellenwertverständnis

(2) Rechenfertigkeit und Anwenden von Strategien

(3) Operationsverständnis

(vgl. z.B. Moser Opitz 2007, Geary 2004, Gerster/Schultz 1998)

Es gilt vor allem zu erfassen, ob die Schülerin bzw. der Schüler über flexible Rechenstrategien verfügt oder ob zählend gerechnet wird. Hier soll ein Beobachtungsbogen weiterführende Erkenntnisse liefern. Ein beigefügtes Testmanual gibt Hinweise zur Durchführung und Auswertung des Tests.

3. Methodisches Vorgehen und erste Ergebnisse

Eine erste Testfassung wurde von 7 Lehrerinnen am Ende der zweiten Klasse erprobt. Dabei wurden die Testaufgaben immer 4 bis 6 Kindern gleichzeitig vorgelegt. Die Lehrerinnen führten den Test nach Anweisung durch. Die Testergebnisse wurden ausgewertet, zusätzlich wurden in gemeinsamen Analysegesprächen die Rückmeldungen und Hinweise der Lehrerinnen gesammelt und die Ergebnisse bei der Überarbeitung der Testaufgaben entsprechend berücksichtigt.

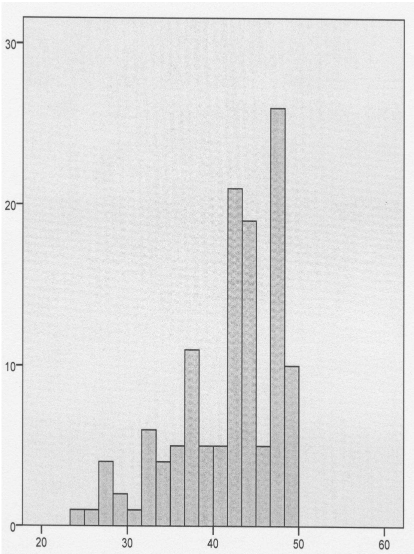
Während der Testdurchführung beobachtete eine Gruppe von 4 Studierenden die Kinder und notierte alle vermeintlichen Auffälligkeiten. In nachfolgenden Gesprächen wurden die Beobachtungen analysiert und kategorisiert. Dieser induktive Zugang wurde durch die Generierung von Kategorien aus theoretischem Vorwissen ergänzt. Zusätzlich wurden qualitative Interviews zur Überprüfung der Kategorien eingesetzt.

Um die Beobachtungsvalidität zu überprüfen, wurde der Test in der jetzigen Fassung dann erneut einer Gruppe von 48 Kindern vorgelegt, bei der immer zwei Studierende parallel den Beobachtungsbogen ausfüllten. Die Beobachterübereinstimmung wurde über Kreuztabellen berechnet. Die Kappa-Werte sind sehr gut (siehe nebenstehende Tabelle; Wirtz & Caspar, 2002: Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität).

Item	Kappa
B3	1
B4-1	1
B4-2	0,895
B5-1	0,944
B5-2	0,814
B6-A	0,773
B6-B	0,782
B7	0,84
B8-1	1
B8-2	0,891
Median	0,893
Mittelwert	0,8939

In der Pilotierungsphase wurde der Test mit 128 Schülern und Schülerinnen durchgeführt. Die Gruppengröße betrug 4 bzw. 5 Schüler. Es ist geplant, nach der aktuellen Itemanalyse das Instrument zu überarbeiten.

Anzahl Schüler



Die Häufigkeitstabelle zeigt keine Normalverteilung. Wie erwartet handelt es sich um eine rechtssteile Verteilung.

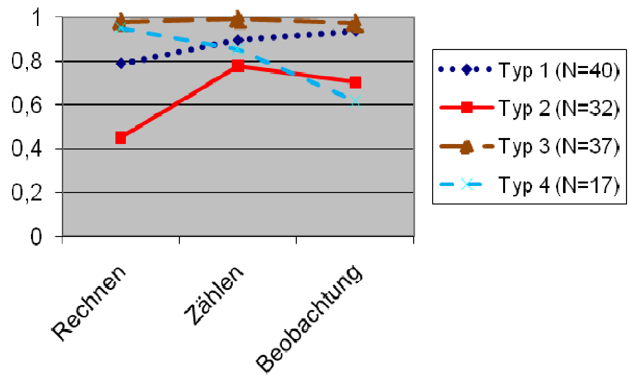
n=128
Mittelwert=41
Standardabweichung=6

Erreichte Punkte

Um das Risiko zu verringern, dass „Kinder mit Schwierigkeiten“ nicht erfasst werden, und um der rechtssteilen Verteilung zu entsprechen, wurde der Cut-off-Wert auf „Mittelwert minus eine Standardabweichung“ festgelegt. Diese Festlegung konnte durch eine Expertenbefragung (im Sinne der Angoff-Methode) gestützt werden. Die qualitativen Interviews werden mit insgesamt 27 Schüler/innen durchgeführt, deren Ergebnisse entweder in einem der beiden oder in beiden Testteilen im kritischen Bereich lagen. Diesbezüglich liegen noch keine abschließenden Ergebnisse vor.

Daneben wurde durch eine Clusteranalyse eine Gruppe von Schülern ermittelt, deren Testergebnisse ebenfalls durch qualitative Interviews überprüft werden. Diese Gruppe (Typ 4 in der Grafik) zeichnet sich dadurch aus, dass die Kinder im schriftlichen Test akzeptable Ergebnisse zeigten, im Beobachtungsbogen dagegen deutlich auffielen. Hier müssen diagnostische Gespräche zeigen, ob es sich tatsächlich um „zählende Rechner“ handelt, die der schriftliche Test nicht als Risikokinder erfasst hat.

Der Clusteranalyse zugrunde liegen drei reliable Skalen – „Rechnen“ (Cronbachs Alpha .875, 17 Items aus dem Test), „Zahlbeziehungen-Zählen“ (Cronbachs Alpha .853, 6 Items aus dem Test) und „Beobachtungen“ (Cronbachs Alpha .735, 8 Items aus dem Beobachtungsbogen).



4. Ausblick

Obgleich davon ausgegangen wird, dass der BAT Hinweise auf Fehlvorstellungen und vor allem zählendes Rechnen liefern kann, ersetzt er eine vertiefte prozessorientierte Lernstanderhebung nur zum Teil. Der Lehrkraft sollen konkrete Ansatzpunkte für weiterführende Fragen im Sinne einer “Fokussierung des diagnostischen Gesprächs auf zentrale Punkte“ und erste Hinweise für mögliche Förderkonzepte eröffnet werden. Und hierin liegt – neben der Zeitersparnis - auch sein Potential: Es kann auch dazu dienen, dass Lehrer und Lehrerinnen sich gezielter mit der Problematik auseinandersetzen und ihre didaktische und diagnostische Kompetenz in diesem Bereich erweitern.

Literatur

Geary, D. C. (2004). Mathematics and Learning disabilities. In *Journal of Learning Disabilities.* 37, 4-15

Gerster, H. D.; Schultz, R, (1998). Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht. Freiburg (PH). Unveröffentlichter Forschungsbericht.

Moser Opitz (2006). Diagnostik von Mathematikleistungen. In v. Stechow; Hoffmann (Hrsg.) *Sonderpädagogik und PISA.* (S. 279-290) Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Moser Opitz et.al. (2007). Berner Screening Mathematik 3. Bern Erziehungsdirektion. Download unter: www.erz.be.ch/besmath.

Schipper, W. (2007). Prozessorientierte Diagnostik von Rechenstörungen. In Lorenz; Schipper (Hrsg) *Hendrik Radatz - Impulse für den Mathematikunterricht* (S. 105 - 116). Braunschweig: Schroedel.

Oliver THIEL, Berlin

Mathematische Bildung in Berliner Kindergärten

Zur Beschreibung der Qualität der Arbeit im Kindergarten gibt es ein allgemeines Modell aus der Qualitätsforschung (Roßbach 1993, vgl. Tietze/Roßbach/Grenner 2005, 26), das drei Qualitätsbereiche unterscheidet: Struktur-, Orientierungs- und Prozessqualität. Zur *Strukturqualität* gehören u.a. die formale Qualifikation der Erzieherinnen, die Größe der Einrichtung und Gruppen und die Altersmischung in den Gruppen. Zur *Orientierungsqualität* gehören die Haltungen und Vorstellungen der Erzieherinnen (Thiel 2008, 2010a). Mit *Prozessqualität* sind u.a. die Interaktionen der Kinder mit Gleichaltrigen und Erzieherinnen gemeint (Thiel 2009).

Die beschriebenen Qualitätsdimensionen blenden soziologische und ökologische Merkmale des Elternhauses und weitere Rahmenbedingungen aus, da diese nicht zur Qualität des Kindergartens gehören. Aber äußere Bedingungen beeinflussen die Entwicklung der Kinder in starkem Maße. Dies beschreibt z.B. das Rahmenmodell, das bei der IGLU-Untersuchung verwendet wurde (vgl. Lankes u.a. 2003, S. 15f). Ich verwende eine Kombination aus beiden Modellen (weitere Details bei Thiel 2010a, S. 108).

1. Untersuchungsdesign

Welche strukturellen, einstellungsbezogenen und prozessualen Rahmenbedingungen der mathematischen Bildung im Kindergarten wirken sich besonders positiv auf die Entwicklung des mathematischen Denkens der Kinder aus? Um diese Frage zu beantworten wurden Kinder aus Berlin, die einen Kindergarten im letzten Jahr vor ihrer Einschulung besuchten, im November/Dezember 2007 und im Mai/Juni/Juli 2008 zu ihren mathematischen Kompetenzen[1] befragt und 54 Erzieherinnen und ein Erzieher[2] aus 30 Kindertagesstätten füllten Fragebögen zur Struktur- und Orientierungsqualität aus (Thiel 2010a). Zusätzlich fanden im Frühjahr 2008 Beobachtungen der Prozessqualität statt (Thiel 2009), auf die hier aus Platzgründen nicht nochmals eingegangen werden kann.

2. Familiärer Hintergrund

Etwa 20% der Varianz der mathematischen Kompetenz der Kindergarten-Kinder ein halbes Jahr vor ihrer Einschulung lässt sich mit Merkmalen des familiären Hintergrundes erklären. Von etwa gleicher Bedeutung sind die Stellung in der Geschwisterreihe, der Migrationshintergrund, der Sprachförderbedarf sowie der sozioökonomische Status der Eltern. Ein halbes Jahr

[1] Mit einem Interview von Ricken und Fritz (2007).

[2] Wenn ich im Folgenden von Erzieherinnen spreche, ist der eine Mann stets mit gemeint.

später haben alle bis auf die letzte Variable nur noch indirekten Einfluss, aber 11% der Varianz der mathematischen Kompetenz können allein durch den direkten und indirekten Einfluss der EGP-Klasse[3] der Familie erklärt werden. (Details finden Sie in Thiel 2010b.)

3. Strukturqualität

Über die Hälfte der Erzieherinnen ist um die 40 Jahre alt. 17% sind älter als 45 und 27% sind jünger als 36. Neun der befragten 55 Erzieherinnen waren nicht als Erzieherin ausgebildet, z.T. hatten sie eine höhere Ausbildung (z.B. Studium der Sozialpädagogik), z.T. eine weniger qualifizierte (z.B. Kinderpflegerin). Vier Erzieherinnen gaben an, dass Deutsch nicht ihre Erstsprache sei.

Es gab Einrichtungen ohne feste Gruppenstruktur bis hin zu großen Einrichtungen mit bis zu 21 Gruppen. Im Mittel waren es sechs Gruppen. Pro Einrichtung wurden zwischen 15 und 280 Kinder betreut, im Mittel 104. Die einzelnen Erzieherinnen hatten zwischen neun und 60 Kindern zu betreuen, im Mittel 22. In etwa der Hälfte der Einrichtungen gab es eine große Altersmischung (z.B. 1- bis 6-Jährige), in der anderen Hälfte fast altershomogene Gruppen (z.B. 5- und 6-Jährige). Nur in 10% der Einrichtungen lag die Altersspanne der Kinder beim Mittelwert von drei Jahren.

Fast alle Erzieherinnen arbeiteten mit dem Sprachlerntagebuch, das in Berlin obligatorisch ist. Die Lerndokumentation Mathematik (Steinweg 2006) wurde nur von drei Erzieherinnen eingesetzt. Auf die Frage, wo in ihrer Einrichtung mathematische Bildung stattfindet, antworteten 64% der Erzieherinnen *in den Gruppenräumen, die mit speziellem Material ausgestattet sind*, je 47% *im Garten* bzw. *außerhalb des Geländes der Kindertagesstätte*, 44% *in den Gruppenräumen ohne spezielles Material*, 26% *in Räumen, die mit speziellem Material ausgestattet sind* und 15% in einer *Lernwerkstatt*.

89% der Erzieherinnen meinten, dass mathematische Bildung praktisch immer im Alltag stattfindet. 20% nannten Zeiten zwischen *alle zwei Wochen 15 Minuten* und *jeden Tag eine halbe Stunde*, in denen sich die Kinder mit mathematischen Inhalten beschäftigen. *Wenn Sie in Ihrer Einrichtung spezielles Material für die mathematische Bildung der Kinder verwenden: Wie arbeiten die Kinder mit diesem Material?* Auf diese Frage antworteten 75% der Erzieherinnen: „*Die Kinder arbeiten selbstständig*.", 71%: „*Die Kinder arbeiten unter Anleitung*.", 62%: „*Die Kinder wählen das Material, mit dem sie arbeiten, selbst aus*." oder „*Die Kinder werden motiviert, sich mit*

[3] Sozioökonomischer Status nach Erikson/Goldthorpe/Portocarero (1979).

bestimmten Materialien zu beschäftigen.” und 42%: „*Die Kinder arbeiten mit Material, das ihnen gegeben wird*.”

Sieben von 55 Erzieherinnen arbeiteten noch nach dem alten DDR-Klassiker von Schinköthe und Kretschmer (1980), vier orientierten sich an den *Mathe-Kings* (Hoenisch/Niggemeyer 2007), ebenfalls vier hatten ein *Zahlenland*-Programm (Friedrich/de Galgóczy 2008 oder Preiß 2007) durchgeführt. **Keine** Erzieherin setzte mathematikdidaktisches Material (z.B. Müller/Wittmann 2002 oder Steinweg 2006) ein.

Die untersuchten Kinder zeigten im Mittel dann kurz vor ihrer Einschulung eine signifikant höhere mathematische Kompetenz, wenn ihre Erzieherin angab, dass ihre *Erstsprache Deutsch* sei und dass auf Grund des Bildungsprogramms die *Schulvorbereitung* und die *Elternarbeit* ausgeweitet wurden und nun mehr *über die Sicht auf das Kind reflektiert* wird. Außerdem zeigten diejenigen Kinder eine höhere Kompetenz, deren Erzieherin das Item „*Die Kinder arbeiten unter Anleitung*.” **nicht** angekreuzt hatten.

Auf den **Zuwachs** an mathematischer Kompetenz im letzten Kindergarten-Halbjahr hatte es signifikant positive Auswirkungen, wenn die Erzieherin angab, dass wegen des Bildungsprogramms *neue Lerngebiete eingeführt* worden waren, eine *Lernwerkstatt* oder *spezielle Räume* für die mathematische Bildung zur Verfügung stehen, in denen die Kinder das *Material, mit dem sie arbeiten selbst wählen*. Zudem war es positiv, wenn die Erzieherin eine *Fortbildung zur Didaktik* besucht hatte.

4. Orientierungsqualität

Im Hinblick auf das Bild, das Erzieherinnen von der Mathematik haben, lassen sich vier Aspekte unterscheiden (Thiel 2008, 2010a): 1. *Mathematik hat einen Nutzen* (Anwendungsaspekt), 2. *In der Mathematik herrscht ein großer Grad an Exaktheit* (Formalismus), 3. *Regeln und Schemata spielen in der Mathematik eine große Rolle* (Schema) und 4*Prozesse des Verstehens und Entwickelns sind in der Mathematik von großer Bedeutung* (Prozess). Teilt man die Erzieherinnen danach in zwei Gruppen ein, ob sie eher dem Schema- oder dem Prozess-Aspekt zustimmen, so tritt ein interessanter Zusammenhang zu Tage: Kinder, deren Erzieherinnen den Prozesscharakter der Mathematik stärker betonen, zeigen ein halbes Jahr vor ihrer Einschulung signifikant höhere mathematische Kompetenzen. Diesen Vorsprung holen die Kinder, deren Erzieherinnen Mathematik eher regelhaft und schematisch sehen, jedoch im letzten Kindergarten-Halbjahr auf. Offensichtlich lassen sich durch schematische Übungen kurzfristige Leistungssteigerungen erreichen, einen nachhaltigen Effekt hat aber eher eine Bildung, die Mathematik als kreative Tätigkeit versteht.

5. Fazit

Bislang schafft es der Berliner Kindergarten nicht, sozioökonomische Nachteile von Kindern auszugleichen. Meine Untersuchung zeigt, dass Strukturbedingungen dabei nur einen kleinen Einfluss auf die mathematische Kompetenzentwicklung der Kinder haben. Einen bedeutenden Einfluss haben jedoch pädagogische Überzeugungen. Um die frühe mathematische Bildung zu verbessern, ist demnach vor allem eine bessere Ausbildung der Erzieherinnen wichtig.

Literatur

Erikson, R., Goldthorpe, J.H. & Portocarero, L. (1979). Intergenerational class mobility in three Western European societies: England, France and Sweden. *British Journal of Sociology*, 30, 341–415.

Friedrich, G. & de Galgóczy, V. (2008). *Komm mit ins Zahlenland.* 4. Aufl., Stuttgart.

Grigutsch, S., Raatz, U. & Törner, G. (1998). Einstellungen gegenüber Mathematik bei Mathematiklehrern. *Journal für Mathematik-Didaktik,* 19 (1), 3 - 45.

Hoenisch, N. & Niggemeyer, E. (2007). *Mathe-Kings. Junge Kinder fassen Mathematik an.* 2. Aufl., Weimar, Berlin.

Müller, G.N. & Wittmann, E.Ch. (2002). *Das kleine Zahlenbuch, Band 1: Spielen und Zählen.* Seelze-Velber.

Preiß, G. (2007). *Leitfaden Zahlenland 1.* 2. Aufl., Bad Camberg.

Ricken, G. & Fritz, A. (2007). Ein entwicklungspsychologisches Modell für die Diagnostik und Förderung mathematischer Kompetenzen im Vorschul- und frühen Grundschulalter. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 441 - 444) Hildesheim, Berlin.

Roßbach, H. G. (1993). *Analyse von Meßinstrumenten zur Erfassung von Qualitätsmerkmalen frühkindlicher Betreuungs- und Erziehungsumwelten.* Münster.

Schinköthe, H. & Kretschmer, G. (1980). *Mengen und Längen im Kindergarten.* Berlin.

Steinweg, A. S. (2006): *Lerndokumentation Mathematik.* Senatsverwaltung für Bildung, Wissenschaft und Forschung, Berlin.

Thiel, O. (2008). Was denken Erzieherinnen über Mathematik? In E. Vasarhélyi (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2008* (S. 757 - 760). Münster.

Thiel, O. (2009). Prozessqualität mathematischer Bildung im Kindergarten. In M. Neubrand (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 395 - 398). Münster.

Thiel, O. (2010a). Teachers' attitudes towards mathematics in early childhood education. *European Early Childhood Education Research Journal*, 18 (1), 105-115.

Thiel, O. (2010b). Socio-economic diversity and mathematical competences. *European Early Childhood Education Research Journal*, submitted March 17th, 2010.

Tietze, W., Roßbach, H.-G. & Grenner, K. (2005). *Kinder von 4 bis 8 Jahren.* Weinheim.

Sandra THOM, Oldenburg

Der ‚mathematische Geist' als Wirkkraft entdeckenden Lernens im Mathematikunterricht Maria Montessoris

In der Berufung auf Blaise Pascal bezeichnete Montessori den menschlichen Geist als einen von Natur aus mathematischen, der sich durch Genauigkeit, Ordnung und Vergleich auszeichne.

Bislang wurde der mathematische Geist auf seine Funktion für die durch die bekannten Sinnesmaterialien möglichen Begriffsbildungsprozesse in der frühen Kindheit begrenzt oder in einer Verkürzung von ‚Mathematik' als ‚Umgang mit Zahlen' gar dem ‚Zahlensinn' Dehaenes gleichgesetzt. Dabei gibt es Anhaltspunkte für die Wirksamkeit des mathematischen Geistes auch für das Lernen von Mathematik in der Grundschule und damit für seine Bedeutung für die Konstruktion von Lernumgebungen für Kinder.

Unter Berücksichtigung der wenigen Erläuterungen Montessoris zum Inhalt und Umfang des Begriffs, seiner Begriffsgenese aus den Werken Pascals sowie der Untersuchung des Montessori-Materials als ‚materialisierte Denkresultate' (Klix) und damit als Überrestquelle im historisch-hermeneutischen Sinn kann der mathematische Geist als konstitutiv für die Konzeption des Mathematikunterrichts Montessoris herausgestellt werden. Exemplarisch werden nachfolgend Tätigkeiten des Ordnens und vor allem des Vergleichens herausgestellt. Dabei zeigt es sich, dass der mathematische Geist vor allem im Zusammenhang mit der Organisation der kognitiven Struktur (Schema), insbesondere der Abstraktion, seine Wirkung entfaltet: Wie von Peschek vor Jahrzehnten für die Grundschule angemahnt, *folgt* bei Montessori empirische Abstraktion der theoretischen Abstraktion in Folge von Handlungen an Material als ‚materialisierter Abstraktion'.

Operative Zusammenhänge erkennen

Durch grundsätzliche Handlungsorientierung können operative Zusammenhänge in besonderer Weise hergestellt werden. Die hiermit verbundene Flexibilität dient dem Erwerb heuristischer Strategien und damit der Ablösung von zählendem Rechnen wie vom konkreten Material generell. In diesem Zusammenhang ist aber vor allem das Ziel des Mathematikunterrichts Montessoris zu betonen, das im allgemeinbildenden Sinne im Aufbau von *Verständnis* besteht. Hierzu wird u.a. durch (auch operative) Zusammenhängen eine grundlegende Ordnung angelegt, wozu auch die Geschichten aus der Geschichte der Mathematik beitragen, wie von der Autorin dieses Beitrages bereits früher postuliert (Heckmann (2007)).

Muster erkennen und fortsetzen

Daneben umfasst der mathematische Geist die so benannte ‚visuelle Strukturierungsfähigkeit' (Söbbeke) bzw. den ‚Struktursinn' (Lüken) als vornehmlich auf gestalt- bzw. wahrnehmungspsychologischer Grundlage untersuchte und Kindern offensichtlich inhärente Fähigkeit zum Erkennen von Mustern als algebraischer Propädeutik. Diese Fähigkeit wird bei Montessori in hierfür sensiblen Phasen früh und weitreichend genutzt, wie zwei Beispiele in aller Kürze illustrieren sollen:

1. Das Stellenwertsystem wird in seiner genialen Einfachheit als Muster (z.B. mit dem Goldenem Perlenmaterial) dargestellt. Möglichkeiten zu seiner Fortsetzung ergeben sich einerseits aus der theoretischen Abstraktion durch die Handlung des Bündelns und Entbündelns sowie aus der empirischen Abstraktion durch Betrachtung der geometrischen Körper und/oder der bekannten Farbgebung für die einzelnen Stufenzahlen.

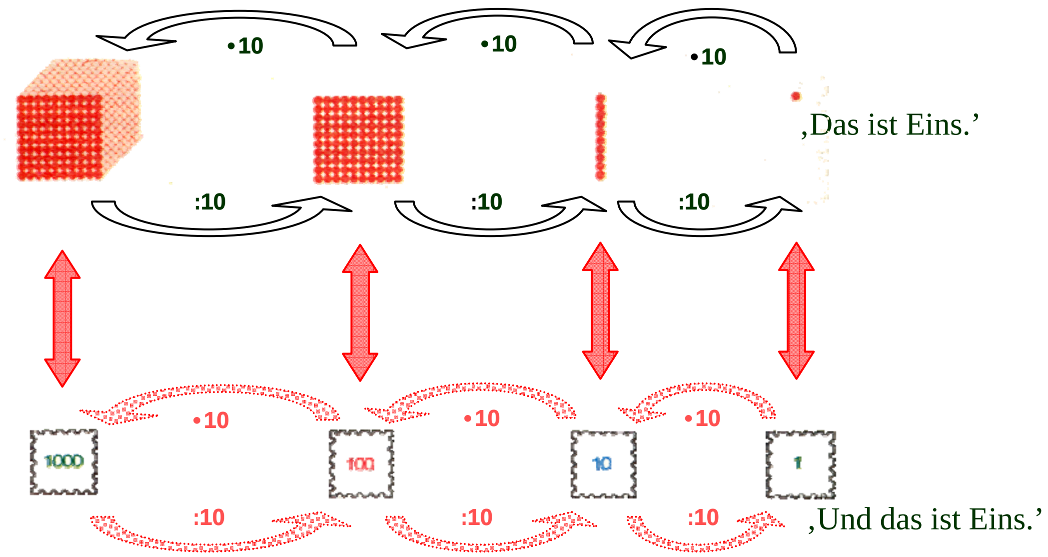
2. Die Reihe der natürlichen Zahlen wird mit heterogenem Material durch lineares Zählen bereits frühzeitig im Vertrauen auf die kindliche Fähigkeit zur Erkenntnis eingeführt, die sich hier im Erkennen und Fortsetzen des elementaren arithmetischen ‚Musters' zeigt:

„Es passierte auf einer Montessorischule, im Kindergarten. Man läßt die Kinder da in einem gewissen Stadium auf eine lange Rolle untereinander die Zahlen schreiben: 1, 2, ..., 10, 11. .... Nach 19 muß die Lehrerin vielleicht helfen, nach 29 vielleicht wieder, nach 39 geht es vielleicht schon von selber, nach 99 ist vielleicht wieder Hilfe nötig. Das Mädchen, das ich meine, ging ganz in dieser Tätigkeit auf. Es mußten immer wieder neue Rollen an die alte geklebt werden. Am dritten Tage überschritt sie die 1000. Bei 1024 streikte sie. „Es geht ja immer so weiter", sagte sie. Das Spiel war aus. […] Das Kind hat die Unendlichkeit entdeckt, und das ist das Alpha und Omega der Mathematik." (Freudenthal (1973) 161)

In Analogien denken

Erkenntnisse aus Kognitionspyschologie und Kybernetik eröffnen bei Betrachtung des menschlichen Geistes als ‚Mustererkennungsorgan' Möglichkeiten zu einem Verständnis von Mustererkennung jenseits wahrnehmungs- bzw. gestaltpsychologischer Fähigkeiten: Als „core of human cognition" (Holyoak / Gentner / Kokinov (2001) 2) ist analoges Denken *mehr* als eine mathematische Denkweise bzw. betrachtet man sie als solche, offenbart sich eine in der Geschichte von der griechischen Antike bis hin zur Wissenschaftlichen Revolution der Frühneuzeit nur in Nuancen sich unterscheidende Auffassung von Mathematik als ein wesentliches, *das* Mittel zur Erkenntnis und Beschreibung der Welt.

Diese Fähigkeit des menschlichen Geistes zum Analogisieren und damit eine eindeutig kognitionspsychologische Bedeutung wird von Montessori an zentralen Stellen ihres Konzepts genutzt. Am Beispiel der Analogiebrücken (Thom (2009) 191ff.) wird seine basale Bedeutung für ihr Konzept in besonderer Weise deutlich, denn mit seiner Hilfe kann Abstraktion erfolgen: Studien zeigen, dass der intra- wie auch der intermodale Transfer, die zur Abstraktion als Ablösung vom konkreten Material als exemplarischer Repräsentation notwendig sind, eine hohe kognitive Leistung von Kindern darstellen. Um einen solchen Transfer *allen* Kindern unabhängig von ihrer kognitiven Leistungsfähigkeit zu ermöglichen, verwendet Montessori im gesamten arithmetischen ‚Lerngang' Analogiebrücken in Form von Farben oder verbindenden Handlungen:



Das sog. ‚Markenspiel' und das ‚Goldene Perlenmaterial' oben im Bild weisen eine vergleichbare Tiefenstruktur mit einigen Abweichungen auf. Eine solche tiefenstrukturelle Ähnlichkeit ist jedoch für Kinder im Vergleich zur Oberflächenähnlichkeit erheblich schwerer erkennbar; deshalb werden über verbindende Handlungen (dunkle Pfeile) ‚Identitäten' der einzelnen Stufenzahlen bei Markenspiel und Perlenmaterial und so die für Kinder leichter erfassbare Oberflächenähnlichkeit hergestellt: Ein *retrieval* zur Quelle der Analogie, der mit dem Goldenen Perlenmaterial originär verknüpften Vorstellung vom Bündeln und Entbündeln (unausgefüllte Pfeile) wird möglich, dadurch auch *mapping* und ein Transfer der zwischen den Stufenzahlen fehlenden Relationen (gepunktete Pfeile). Damit haben die Kinder ein neues Material für ihre Arbeit und somit einen neuen Interessenspunkt, gleichzeitig bleibt die Vertrautheit des Umgangs durch den Transfer der Vorstellung erhalten, was sich aus Sicht der Motivationspsychologie positiv auf die Motivation zum Umgang mit dem somit nicht ganz neuen und nicht mehr alten Material auswirkt: So wird *flow* (Csikszentmihalyi) herbeigeführt bzw. ermöglicht. Es soll vor allem aber zur Ablösung vom Material im Sinne Dienes als ,Variation der Veranschaulichung' dienen und damit zur nicht-prototypischen Abstraktion als Schärfung des Begriffsinhaltes und zugleich zur Verallgemeinerung als Vergrößerung des Begriffsumfanges. Die Vielzahl an Materialien bei Montessori fördert also nicht die Bindung an das Material, sondern ermöglicht im Gegenteil gerade die Ablösung vom konkreten Material und die Schemainduktion grundlegender Vorstellungen, hier: vom dezimalen Stellenwertsystem, das im Vertrauen auf die Fähigkeiten von Kindern über sein fortsetzbares ,Muster' in materialisierter Abstraktion eingeführt wird.

Neben der durch das einzelne Material möglichen Erkenntnis durch theoretische und empirische Abstraktion sind damit auch und *gerade* die Verbindungen zwischen den Materialien in Form operativer Zusammenhänge und Analogiebrücken kennzeichnend für ein auf dem Prinzip des entdeckenden Lernens aufgebautes, grundlegend genetisches und auf Verstehen ausgerichtetes Unterrichtskonzept.

Literatur

Keith Devlin: Das Mathe-Gen oder wie sich das mathematische Denken entwickelt und warum Sie Zahlen ruhig vergessen können, 3. Auflage, Klett-Cotta: Stuttgart 2002

Hans Freudenthal: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd. 1 (Klett Studienbücherei Mathematik), Klett: Stuttgart 1973

Sandra Heckmann: Fächerverbindendes Arbeiten im Montessori-Mathematikunterricht, in: BMU 2007, 247-250

Keith J. Holyoak / Dedre Gentner / Boicho N. Kokinov (Hgg.): The Analogical Mind. Perspectives from Cognitive Science, Bradford / MIT: Cambridge / London 2001

Friedhart Klix: Die Natur des Verstandes. Hogrefe: Göttingen / Bern / Toronto / Seattle 1992

Werner Peschek: Untersuchung zur Abstraktion und Verallgemeinerung, in: Willibald Dörfler (Hg.): Kognitive Aspekte mathematischer Begriffsentwicklung. Arbeiten aus dem Projekt „Entwicklung formaler Qualifikationen im Mathematikunterricht" (Didaktik der Mathematik, Universität für Bildungswissenschaften in Klagenfurt, Bd. 16), Hölder-Pichler-Tempsky / Teubner: Wien / Stuttgart 1988, 127-190

Elke Söbbeke: Zur visuellen Strukturierungsfähigkeit von Grundschulkindern. Epistemologische Grundlagen und empirische Fallstudien zu kindlichen Strukturierungsprozessen mathematischer Anschauungsmittel (texte zur mathematischen forschung und lehre, Bd. 42), Franzbecker: Hildesheim / Berlin 2005

Sandra Thom: Kinder lernen entdeckend. Eine hermeneutische Untersuchung zur Konzeption und Realisierung des Mathematikunterrichts Maria Montessoris, Diss., Vechta 2009 (im Druck)

Marie TICHÁ, Praha, Filip ROUBÍČEK, Praha, Jana MACHÁČKOVÁ, Praha

Zwei geometrische Lernumgebungen zur natürlichen Differenzierung

Der Bedarf, funktionierende mathematische Grundfertigkeiten zu erreichen, stellt hohe Ansprüche an die professionellen Kompetenzen der Lehrer. Dazu gehört auch ihre Fertigkeit die Bedingungen für die Entwicklung der Bildungsvoraussetzungen aller Schüler zu schaffen. Dieser Artikel bringt Informationen über die laufende Forschung.

1. Natürliche Unterschiede, Individualisierung und Differenzierung

Allgemein wurde die Erkenntnis akzeptiert, dass Kinder unterschiedlich lernen, dass sie einen unterschiedlichen Zeitraum benötigen, auch wenn sie den gleichen Stoff unter den gleichen Bedingungen mit gleichaltrigen Mitschülern und mit dem gleichen Lehrer lernen. Deshalb tauchen Bemühungen auf, das Prinzip der Individualisierung des Unterrichts anzuwenden. Individualisierung hängt mit Differenzierung zusammen.

Eine der Formen der inneren Differenzierung ist die *natürliche Differenzierung*. Wir fingen während der Lösung des Projekts Comenius „Motivation via Natural Differentiation in Mathematics" (NaDiMa) an, uns für die Problematik der natürlichen Differenzierung zu interessieren. Sehr inspirierend für uns waren die Arbeiten von E. Wittmann, P. Scherer und G. Krauthausen (Wittmann, 2001; Krauthausen, Scherer, 2007). Es handelt sich um einen Zugang zur Problematik der Heterogenität im Mathematikunterricht, bei dem die Differenzierung nicht als Problem begriffen wird, sondern als etwas Normales, in einigen Aspekten sogar Zuträgliches. Wesentlich ist, dass sich zeigt, dass alle Schüler in der Klasse gleichzeitig am gleichen Inhalt arbeiten, die gleiche Aufgabe lösen können, und zwar auf unterschiedlichen Niveaus gemäß ihren Fähigkeiten.

2. Substanzielle Lernumgebungen

Wenn wir die natürliche Differenzierung ermöglichen und unterstützen wollen, müssen wir uns bemühen, eine *substanzielle Lernumgebung* zu schaffen, damit daraus eine solche Aufgabe oder eine solche Task entstehen können, mit der alle Schüler zurecht kommen, auch wenn sie auf unterschiedlichen Niveaus sind (Wittmann, 2001). E. Wittmann wies darauf hin, dass die Suche, Konzipierung und Schaffung von substanziellen Lernumgebungen einer der Bereiche ist, in dem Forscher und Lehrer dauerhaft und systematisch auf ganz natürliche Weise zusammenarbeiten können.

3. Substanzielle Lernumgebung in unserer Arbeit

Ähnliche Gedanken waren die Grundlage unserer Erwägung über das Studium des Prozesses des *Begreifens von Situationen* (Koman, Tichá, 1998). Unter dem Begriff *Begreifen einer Situation* verstehen wir den Gedankenprozess, in dem sich Tätigkeiten durchdringen, die insbesondere auf die Formulierung der Fragen und die Bildung der Aufgaben, die aus der Situation hervorgehen, auf die Lösung der gebildeten Aufgaben und auf die Interpretation der Lösungsergebnisse ausgerichtet sind. Wir bemühen uns um *authentisches Lernen,* um *Kontextkenntniss*, z. B. das Begreifen der Situation, die „Zwei oder mehr Personen in einem Auto" genannt wird.

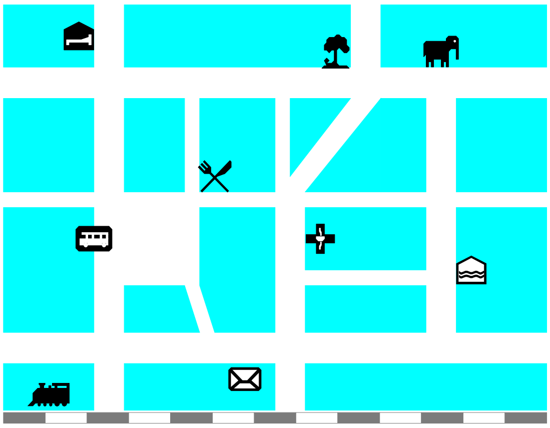
Situation: Jeden Tag fahre ich mit meinem eigenen Auto zur Arbeit. Auch meine Kollegen, die in der Nähe wohnen, fahren jeder mit dem eigenen Auto. *Aufgabe:* Wir erwägen, ob und wie wir die Kosten für den Arbeitsweg verringern könnten (näher Koman, Tichá, 1997).

```
                        Adam                  Bob       Arbeit
Einführungsaufgabe:       o----------------------o-----------o
                                  12 CZK              6 CZK
```

Bald erscheinen die Fragen: *Wie viele Kronen soll Bob Adam geben? Und wie macht man es, damit es gerecht ist?* Hier öffnet sich Raum für die natürliche Differenzierung. Die Schüler und Studenten schlagen in der Regel schrittweise verschiedene Strategien der Kostenteilung vor. Zum Beispiel: zu gleichen Teilen; gemäß der Anzahl der mitfahrenden Personen; im Verhältnis gemäß den Entfernungen; gemäß den Einsparungen. Über die Regeln der Kostenteilung entscheiden die Schüler in einer gemeinsamen Diskussion. Die genannte einfache Situation kann auf viele Arten modifiziert werden, das bedeutet z. B. die Topologie und die metrischen Parameter des Verkehrsnetzes oder die Personenanzahl zu ändern.

4. Arithmetik, Algebra – und was ist mit Geometrie?

Die meisten Arbeiten, welche die natürliche Differenzierung behandeln, mit denen wir uns bekannt machen konnten, bezogen sich auf die Arithmetik oder die Algebra. Im Rahmen der Lösung des Projekts NaDiMa versuchten wir daher, eine substanzielle geometrische Umgebung zu entwerfen, und wir stellten uns die Frage, ob und in welchem Maße es in diesem Umgebung möglich ist, eine natürliche Differenzierung zu realisieren. Wir bereiteten ein Unterrichtsexperiment vor. Wir realisierten eine Pilotforschung und anschließend ein Unterrichtsexperiment (im 4. Jahrgang und den zweiten Teil mit den gleichen Schülern im 5. Jahrgang). Wir entschieden uns für zwei Lernumgebungen, die wir als *Weg* und *Zimmer* bezeichneten. Wir erwarteten, dass diese Lernumgebungen die Notwendigkeit der klaren Ausdrücke zeigen und die Entwicklung geometrischen Vorstellungen und auch algorithmisches Herangehens unterstützen werden.



In der Umgebung *Weg* arbeiteten wir mit einem idealisierten Stadtplan. Anschließend konzentrierten wir uns auf drei Typen von Aufgaben: (a) die Veranschaulichung eines verbal beschriebenen Wegs im Plan, (b) die verbale Beschreibung eines Wegs, der im Plan eingezeichnet ist, (c) die eigene Wahl eines Wegs und seine Beschreibung.

Dann kommt folgende Aufgabe: Zeichne und Beschreibe den Weg von diesem Ort über jenen Ort zu dem Ort (zum Beispiel: vom Bus in den Zoo oder vom Bahnhof über die Post und die Apotheke zum Zoo). Wir setzten voraus, dass es dank der möglichen Wahl der Schwierigkeit der Aufgabe zu einer Differenzierung der Schüler kommt. Dass die Schüler unterschiedlich „komplizierte“ Wegen wählen und über verschiedene Möglichkeiten nachdenken werden, kombinatorische Erwägungen auftauchen werden. Diese Erwartung wurde aber nur in begrenztem Maß erfüllt. Daher entschieden wir uns für einen neuen Blickwinkel, und in der weiteren Phase unserer Forschung konzentrieren wir uns auf die Differenzierung bei der Bildung von Aufgaben im betreffenden Kontext (Plan). Wir vergaben folgende Task: Ihr wisst, dass in unserer Umgebung in alltäglichen Situationen viele Fragen entstehen. Eine solche Situation, in der Fragen und Aufgaben entstehen können, kann der Plan sein. Beschreibt eine Aufgabe aus dem Umfeld dieses Stadtplans.

Die Schüler bildeten meist die folgenden beiden Aufgabentypen: *Beschreibe den Weg. Wohin gelangst du?* Ganz ausnahmsweise tauchten Aufgaben auf, die eine Andeutung von Kombinatorik enthielten. In den erstellten Aufgaben fanden wir Unterschiede, und zwar bspw. in der Anforderung an die Anzahl von Orten, an denen man vorbeikommen soll; in der Anzahl der Richtungsänderungen; in der Nutzung „schräger“ Verbindungen usw. Wir beobachteten, dass jeder Schüler meist mit großem Interesse arbeitete. Wir können sagen, dass sich diesmal eine natürliche Differenzierung äußerte, dass alle Schüler die vorgegebene Aufgabe gemäß ihren Möglichkeiten erfüllten. In der zusammenfassenden Diskussion beschrieben sie dann ihr Vorgehen und sprachen über ihre Probleme bei der Erfüllung dieser Aufgabe. Sie begründeten ihre Lösungen. Uns erfreute die deutliche Verbesserung in der Struktur und in der Präzision des Ausdrucks.

Das Umfeld *Zimmer* erwies sich insgesamt als geeignete Unterlage für eine natürliche Differenzierung. Dieses Umfeld gibt die Möglichkeit, insbesondere Modellieren eines 3D Raums und der Objekte in 2D, Arbeit mit dem Maßstab, Vorstellungen über geometrischen Abbildungen (z. B. Verschiebungen, Drehungen, Symmetrien). Nach einigen einleitenden Unterrichtsstunden, wurde den Schülern die Task erteilt, den Raum mit Möbeln auszugestalten, wobei es von ihnen selbst abhängt, für wie viele Personen, ob sie das gesamte Möbel verwenden und ähnliches. In der Arbeit der Schüler im Umfeld *Zimmer* verzeichneten wir verhältnismäßig große Unterschiede. Sie betrafen insbesondere unterschiedliche reale Erfahrungen mit dieser Tätigkeit, die Fähigkeit, die Größe des Möbels abzuschätzen (Schätzungen und Messungen), die Vorstellungen von der Größe des (erforderlichen) Raums. Unterschiede gab es bei der Stückzahl der Möbel, der Personenanzahl und ähnliches. Erfreulich war die Bemühung um eine gerechte Anordnung im Fall der Einrichtung des Zimmers für mehrere Personen.

5. Anmerkungen zum Schluss

Bestandteil der Arbeit am NaDiMa Projekt ist auch die psychologische Beurteilung des Vorteils des realisierten Unterrichtsprojekts durch qualifizierte Psychologen. Diese Beurteilung zeigte, dass es bei der Mehrheit der Schüler sowohl zu einer positiven Weiterentwicklung im Rahmen der kognitiven Fertigkeiten und Auffassungsfähigkeiten als auch zu einer stärkeren Motivation zur Mathematik kam. Außerdem kam es zu einer Weiterentwicklung im Rahmen der Selbsteinschätzung in der Mathematik und zu einer insgesamt positiveren Beziehung zur Mathematik. Bei den meisten Schülern kam es zur Erhöhung von einem dieser beiden Motivationsfaktoren zum Mathematiklernen: (a) Mathematik macht Spaß, (b) ich will viel über Mathematik wissen.

Literatur

Koman, M., Tichá, M. (1997). Alltagssituationen im Mathematikunterricht. Folge 2: Eine Situation aus dem Verkehrswesen. *Mathematik in der Schule*, 35, 11, 590-596.

Koman, M., Tichá, M. (1998).On Travelling Together and Sharing Expenses. *Teaching Mathematics and its Applications.* Oxford University Press, 17, 3, 117-122.

Krauthausen, G., Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik.* München : Elsevier, Spektrum.

Wittmann, E. (2001). Developing mathematics education in a systemic process. *Educational Studies in Mathematics* , 48, 1, 1–20.

Anmerkung: Diese Untersuchung wurde durch das Förderungsprojekt GACR 406/08/0710 und durch AdW CR Institutional Research Plan No. AV0Z10190503 unterstützt.

Kerstin TIEDEMANN, Frankfurt am Main

Die Pause macht's! – Elterliche Unterstützung in mathematischen Diskursen mit Vorschulkindern

Mathematische Bildungsprozesse der frühen Kindheit finden auch im familialen Kontext statt und werden dort entscheidend von elterlicher Unterstützung beeinflusst. Im vorliegenden Beitrag wird dieser Aspekt aus funktionaler Perspektive beleuchtet. Wie ist die elterliche Unterstützung funktional für die Partizipation des Kindes an mathematischen Diskursen? Anhand einer Vorlesesequenz wird eine Antwort auf diese Frage entwickelt. Abschließend wird diese Rekonstruktion in die bisherigen Ergebnisse eingeordnet.

1. Unterstützung: das DASS

Die für diesen Beitrag als zentral erachtete Arbeit zur Unterstützung in Erwachsenen-Kind-Gesprächen wurde von zwei Linguisten vorgelegt. In ihrer Untersuchung zur kindlichen Erzählentwicklung postulieren Hausendorf & Quasthoff (1996) das *Discourse Acquisition Support System* (DASS). Dieses zeichnet sich laut den Autoren in funktionaler Hinsicht dadurch aus, dass die Unterstützung einer erwachsenen Person im Diskurs mit einem kindlichen Erzähler primär darauf ausgerichtet ist, die aktuelle Situation der Erzählungsproduktion zu bewältigen. In ihrem mikrolongitudinalen Forschungsdesign zeichnen die Autoren ferner nach, dass die Erzählkompetenz der Kinder im Verlauf der Zeit wächst. Diese Entwicklung der kindlichen Erzählkompetenz bringen Hausendorf & Quasthoff (1996) mit der rekonstruierten Unterstützung in Verbindung. Sie nehmen an, dass die erfolgreiche Bewältigung einer Erzählsituation gleichsam eine entwicklungsfunktionale Wirksamkeit beinhaltet. Diese zusammenfassende Annahme von der doppelten Wirksamkeit der Unterstützung in Erwachsenen-Kind-Gesprächen hat sich als ein fruchtbarer Anknüpfungspunkt für die Theorieentwicklung über Unterstützungsfunktionen in mathematischen Eltern-Kind-Diskursen erwiesen. Bisherige Ergebnisse sollen im Folgenden am Beispiel des Timings als Unterstützung skizziert werden.

2. Timing als Unterstützung

In ihrer Beschreibung der kognitiven Entwicklung hat Rogoff (1990) bereits darauf hingewiesen, dass die zeitliche Strukturierung von Interaktion als Unterstützung in Eltern-Kind-Diskursen fungieren kann. Sie spricht dabei von Timing als Unterstützung. Allerdings rekonstruiert sie dieses Phänomen nicht anhand empirischer Daten aus Erwachsenen-Kind-Diskursen, sondern bezieht sich dabei auf Fox (1988). Fox (ebd., S. 19f.) hat für den universitären Kontext empirisch gezeigt, dass Tutoren das Timing in der Interaktion nutzen, um Studierende in ihrem Lernprozess zu unterstützen. Unterbricht der Tutor seine eigene Äußerung und der Studierende greift sie auf und vervollständigt sie, so kann der Tutor diese Interaktionsroutine als Möglichkeit zur Diagnose nutzen und anhand der Äußerung des Studierenden einschätzen, inwieweit dieser die behandelten Inhalte bereits verstanden hat („utterance completion strategy“, ebd., S. 21).

In der Erforschung mathematischer Eltern-Kind-Diskurse konnte nun eine Interaktionsroutine rekonstruiert werden, die der „utterance completion strategy“ hinsichtlich ihrer Form ähnelt, jedoch funktional anders eingebunden wird: der diskursive Lückentext.

3. Der diskursive Lückentext

Bei dem diskursiven Lückentext handelt es sich um eine Interaktionsroutine, die sich dadurch auszeichnet, dass Mutter und Kind gemeinsam eine syntaktisch vollständige Äußerung produzieren. Die folgende Sequenz aus einer Vorlesesituation mit Paco (5.8 Jahre) und seiner Mutter illustriert dieses Phänomen. Die beiden lesen das Zähl- und Reimbuch „Es fährt ein Boot nach Schangrila“ (März, L. & Scholz, B. (2006): *Es fährt ein Boot nach Schangrila*. Stuttgart/Wien: Thienemann.).

Paco	*blättert um*
Mutter	*rhythmisch sprechend* `ein Specht als blinder Passagier versteckt sich heimlich an` *ihren Kopf zu Paco drehend* **`P i e r`**`-.`
Paco	drei\
Mutter	**`vier`**\ *rhythmisch sprechend* `derweilen sieben rote Krabben einander an den Scheren packen\ kribbelnd-krabbelnd steigt man ein . zwackt hier und da ein Zebra-Bein\` ..
Paco	*blättert um*

In dieser Sequenz beginnt die Mutter eine Äußerung, die sie dann aber unterbricht. Diese Unterbrechung wird durch eine Dehnung der letzten Silbe markiert, was nach Duncan & Fiske (1977) als ein Turn-Signal des Sprechers gedeutet werden kann. Die Mutter signalisiert Paco also damit, dass er im Folgenden den Turn übernehmen kann, ohne den Interaktionsfluss zu stören. Es entsteht eine Lücke und Paco ist eingeladen, sie zu füllen und sich damit am Diskurs zu beteiligen. So entsteht eine gemeinsame Situation, in der beide Interaktionspartner am Vorleseprozess beteiligt sind. Paco übernimmt den folgenden Turn und nennt ein Zahlwort: „drei\“. So haben er und seine Mutter gemeinsam eine syntaktisch vollständige Äußerung produziert. Die Lückenfüllung erfordert in diesem Beispiel Zahlenwortkenntnis; daher werte ich diese Sequenz als mathematische Unterstützung.

Pacos Vorschlag entspricht jedoch nicht dem Buchtext. Und so kann die folgende Äußerung der Mutter („**vier**\“) als Korrektur verstanden werden. Die Mutter setzt Pacos unzutreffendem Vorschlag für die Piernummer das richtige Zahlwort entgegen. Im Zuge einer Selbstauswahl übernimmt die Mutter dann den folgenden Turn, den sie nutzt, um das Vorlesen des Textes fortzusetzen. Durch den unmittelbaren Anschluss des Vorlesens an die Korrektur bindet die Mutter die Berichtigung in den Vorleseprozess selbst ein. So kann die Nennung des Zahlwortes vier nämlich nicht nur als eine Korrektur, sondern gleichzeitig als ein Element des Vorleseprozesses verstanden werden. Damit erinnert der diskursive Lückentext an dieser Stelle an die „utterance-completion strategy“, die von Fox (1988, S. 19ff.) identifiziert wurde. Auch wenn beim diskursiven Lückentext in aller Regel nur ein Wort als Fortsetzung einer unvollständigen Äußerung, nicht aber eine beliebige Vervollständigung gefordert ist, zeigt sich doch eine große Ähnlichkeit in der Unterstützungsfunktion, die Fox für die „utterance-completion strategy“ folgendermaßen beschreibt: Sie geht davon aus, dass mit dieser Strategie die Frage der Korrektur nahezu umgangen werden kann. Wenn der Student eine falsche Fortsetzung der Äußerung anbietet, kann der Tutor indirekt korrigieren, indem er sich darauf beschränkt, seine eigene Äußerung korrekt zu Ende zu führen (ebd., S. 20). Analog dazu erhält Paco die Möglichkeit, die Piernummer an der vom Text vorgegebenen Stelle zu nennen. Als er aber eine abweichende Variante für die Lücke vorschlägt, erübrigt sich eine explizite Korrektur, da die Mutter das Vorlesen des Textes fortsetzen kann. Die Korrektur erfolgt nebenbei, lediglich auf paralinguistischer Ebene durch eine Betonung markiert.

Damit scheint die mathematische Unterstützung in dieser Sequenz genau die Funktion zu erfüllen, die Hausendorf & Quasthoff (1996) für die Unterstützung der kindlichen Erzählentwicklung identifiziert haben. Die Unterstützung ist primär darauf ausgerichtet, die erfolgreiche Bewältigung der gegenwärtigen (Vorlese-) Situation sicherzustellen. Es geht offenbar nicht darum, dass Paco etwas über den thematisierten mathematischen Aspekt lernt, sondern vielmehr scheint im Mittelpunkt zu stehen, dass die Situation vorangeht.

4. Unterstützung: das MASS in Eltern-Kind-Diskursen

Beschreibt man auf der Basis des obigen Analysebeispiels analog zum DASS von Hausendorf & Quasthoff (1996) ein *Mathematics Acquisition Support System* (MASS) für Eltern-Kind-Diskurse, so lässt sich festhalten, dass ein zentrales Ergebnis der Linguisten übertragbar ist. Auch für mathematische Eltern-Kind-Diskurse kann rekonstruiert werden, dass die Unterstützung der erwachsenen Person primär darauf ausgerichtet ist, die aktuelle Situation zu bewältigen. Ob damit im Sinne Hausendorfs & Quasthoffs (1996) auch eine Entwicklung der kindlichen Kompetenz einhergeht, bleibt an dieser Stelle offen. Zumindest ist aber eine Lerngelegenheit beschrieben, die von der Funktion der mütterlichen Unterstützung geprägt ist. Das Bewältigen und Voranbringen der Situation stehen im Vordergrund.

Allerdings zeigen weitere Ergebnisse bereits, dass für mathematische Eltern-Kind-Diskurse eine weitere Unterstützungsfunktion rekonstruiert werden kann (vgl. Tiedemann & Brandt, 2010). So ist die Unterstützung in den Diskursen anderer Eltern-Kind-Tandems nicht auf eine Situationsbewältigung, sondern auf ein mathematisches Lernen ausgerichtet. Dabei kann die Bewältigung der Ausgangssituation in den Hintergrund rücken. Als Beispiel kann an eine Spielsituation gedacht werden, in der der Spielfluss unterbrochen wird, um zu klären, mit welchem Zahlwort die Zahldarstellung auf einer Spielkarte zu benennen ist. Auch bei dieser Unterstützungsfunktion geht es nicht darum festzustellen, ob das Kind in dieser Situation tatsächlich etwas lernt. Festzuhalten bleibt aber, dass Kinder im familialen Kontext in sehr unterschiedliche Diskurse eingebunden sind.

Aus dieser Skizze bisheriger Ergebnisse folgt, dass ein *Mathematics Acquisition Support System* (MASS) für den familialen Kontext eine Unterscheidung von Unterstützungsfunktionen enthalten muss. Der Ausdifferenzierung dieser Einsicht wird im Fortgang der Arbeit nachgegangen.

Literatur

Fox, B. A. (1988). *Cognitive and interactional aspects of correction in* tutoring (Tech. Rep. No. 88-3). Boulder: University of Colorado, Institute of Cognitive Science.

Hausendorf, H. & Quasthoff, U. (1996). *Sprachentwicklung und Interaktion: Eine linguistische Studie zum Erwerb von Diskursfähigkeiten.* Opladen: Westdeutscher Verlag.

Rogoff, B. (1990). Apprenticeship in thinking: cognitive development in social context. New York: Oxford University Press.

Tiedemann, K. & Brandt, B. (2010). Parents' Support in Mathematical Discourses. In: U. Gellert, E. Jablonka & C. Morgan (Hrsg.), *Proceedings of the 6th International Conference on Mathematics Education and Society* (S. 428-437). Berlin: Freie Universität Berlin. (http://www.ewi-psy.fu-berlin.de/en/v/mes6/documents/research_papers/Tiedemann_Brandt_MES6.pdf)

PHILIPP ULLMANN, Frankfurt

Deine Daten gehören Dir? Die Leitidee „Daten und Zufall“ im Zeitalter des Mikromarketings

Mit der Leitidee „Daten und Zufall“ ist eine Trendwende in der Mathematikdidaktik kodifiziert worden: Der in der Schule traditionell dominanten Wahrscheinlichkeitsrechnung steht nun die Datenkompetenz als ebenbürtige Partnerin zur Seite. Unklar bleibt dabei, was Datenkompetenz eigentlich meint. In den neueren einschlägigen Veröffentlichungen für den Stochastikunterricht gewinnt man nicht selten den Eindruck, der verständige Umgang mit Daten erschöpfe sich darin, die Hauptinstrumente der elementaren Statistik als bedeutsam einzusehen und kunstgerecht einzusetzen. Bereits vor acht Jahren argumentierte der AK Stochastik in der GDM in diesem Sinne: Unsere Welt sei geprägt vom Informationsaustausch und von der Analyse empirischer Daten; daher seien Kenntnisse und Fähigkeiten in Datenanalyse und Statistik eine wesentliche Voraussetzung gesellschaftlicher Teilhabe (AK Stochastik 2002, 1). Aber – so mein Einwand – kann man ernsthaft über die Erhebung, Aufbereitung und Auswertung statistischer Daten sprechen, ohne den Eigensinn ihrer Inhalte zu reflektieren? Am Beispiel Mikromarketing werde ich darlegen, was damit gemeint ist.

Mikromarketing

Mikromarketing kann man definieren als Marketing, das auf eine bestimmte Zielgruppe zugeschnitten ist und durch die Verknüpfung von Kundendaten mit mikrogeographischen Daten ermöglicht wird (GfK, Eintrag „Mikromarketing“).

Stellen Sie sich vor, Ihr Unternehmen wende sich an einen Mikromarketing-Dienstleister, weil es den Kundenkreis erweitern will. Zunächst werden Ihre Kundendaten in die Datenbank des Anbieters eingespielt, wo sie mit feinräumigen Daten wie Kaufkraft, Einkommensklasse des Haushaltsvorstandes, Alter, Haushaltsstruktur, Wohnumfeld, Lebensstil, soziales Milieu usw. verknüpft werden. Dann wird mittels statistischer Analysen ein spezifisches Kundenprofil erstellt. Schließlich werden diejenigen Regionen (Orte, Straßen) ermittelt, die Merkmale der Zielgruppe aufweisen, und in denen Ihr Unternehmen noch keine Kunden hat. Dieses Prinzip lässt sich unschwer auf andere Fragestellungen übertragen, z.B. Filialnetzoptimierung oder Marketingplanung.

Wie sehen solche Kundenprofile aus? Acxiom, einer der in Deutschland führenden Dienstleister im Bereich Datenmanagement, stellt in einer Werbebroschüre exemplarisch 14 Zielgruppen vor (Abb. 1).

Abb. 1: Zielgruppe „Jung & In Ausbildung“ (Acxiom 2009, 7)

Für jedes der 14 Segmente finden sich neben einer kurzen Charakterisierung stichpunktartige Bemerkungen zum Konsumverhalten. So werden etwa für die Gruppe „Jung & In Ausbildung“ im Bereich Medien ausgemacht: „Hohe Ausgaben für Telefon, Handy und Internet. Sehr lesebegeistert. Lesethemen: Musik/Film, Partnerschaft, Mode, Wirtschaft. Geringer Fernsehkonsum.“ Darüber hinaus zeichnen sich diese jungen Erwachsenen durch ein „geringes Anonymitätsbedürfnis“ aus.

An diesem Beispiel wird folgendes sichtbar:

- Informationsfluss und die Analyse empirischer Daten findet tatsächlich statt, und zwar in großem Stil. Einschlägige Datenbanken umfassen in der Regel mehrere 10 Millionen regelmäßig aktualisierte Datensätze (ZMG 1999, 36 f.).
- Es geht um viel Geld, und zwar um mehrstellige Millionenbeträge.

Wie steht es nun mit dem Eigensinn?

Deine Daten gehören Dir

Zunächst: Daten müssen erst einmal erhoben werden. Auch nach der Novellierung des Bundesdatenschutzgesetzes im vergangenen Jahr, die den Datenhandel strikter reguliert, sind Firmen eifrig darum bemüht, Kundendaten zu erheben – man denke an Gewinnspiele, „Treue“-Systeme oder

Vorzugsaktionen. Unternehmen wollen „ihre“ Kunden kennen, und das „geringe Anonymitätsbedürfnis“ der jüngeren Altersklassen bietet dafür die besten Voraussetzungen.

Unlängst nahm sich der *Spiegel* dieses Themas an (Abb. 2). In der Titelgeschichte findet sich unter der Überschrift „Wir hinterlassen überall Datenspuren“ ein Interview mit Philipp Schindler, Google-Chef für Nord- und Zentraleuropa. In froher Unbekümmertheit wird darin über den Mehrwert geplaudert, der den Konsumenten aus den Datenbanken von Google erwächst (*Der Spiegel* Nr. 2 / 11.1.10, 69). Es ist dieselbe Unbekümmertheit, mit der SchülerInnen intime Informationen auf Internetplattformen wie schülerVZ, myspace oder facebook einstellen – oder Fragebögen aus dem Mathematikunterricht ausfüllen.

Abb. 2: *Der Spiegel* vom 11.1.10

Nun ist an dieser freiwilligen Enteignung nichts auszusetzen, wenn sich die SchülerInnen möglicher Konsequenzen bewusst sind. Das führt uns zum nächsten Punkt: Die Daten, die für viel Geld erhoben werden, sprechen nicht für sich selbst, sondern müssen für noch mehr Geld analysiert werden. Damit werden sie Gegenstand einer tendenziell sinnentstellenden und maßlosen Verwertungslogik. Statistische Entitäten, konstruiert aus vermeintlich objektiven Daten nach mathematisch validierten Analyseverfahren, sind durch ihr mathematisches Format mit einem hohen Maß an rhetorischer Überzeugungskraft versehen, die sich im Prozess Ihrer Verwertung noch verstärkt: Die Zielgruppe „Jung & In Ausbildung“ wird im Augenblick ihrer Entstehung wirkmächtig und damit *wirklich*. Aus dem Versprechen, die Kunden besser zu kennen, wird die Gewissheit, den maßgeschneiderten Kunden geschaffen zu haben.

Folgerichtig offenbart sich schließlich der Eigensinn der Daten, indem uns die statistischen Objekte als wirkliche entgegentreten. Sie entscheiden darüber, welche Werbeprospekte in unserem Briefkasten landen und an welchen Plakaten wir auf dem Weg zur Arbeit vorbeikommen. Sie entscheiden darüber, wo ein Lebensmittelmarkt eröffnet oder ein Möbelhaus geschlossen wir. Sie entscheiden darüber, ob wir einen Handyvertrag bzw. eine Kreditkarte erhalten. Kurz: Indem wir uns über Konsum definieren, sind wir der sozialen Kontrolle und Normierung durch die Kennzahlen dieses Konsums unterworfen.

Um zwei möglichen Missverständnissen vorzubeugen: Es geht mir nicht darum, die Erhebung und Nutzung von Daten zu verteufeln. Unser Leben ist so selbstverständlich und grundlegend von der Sphäre des Konsums umschlossen, dass ein Ausbruch weder möglich noch wünschenswert wäre – es gibt ja tatsächlich einen Mehrwert. Es geht mir auch nicht darum, dass der Mathematikunterricht im Alleingang über gesamtgesellschaftliche Prozesse aufklären soll; damit wäre er sicher überfordert. Aber wenn in einem neu erschienenen Didaktikbuch zur Stochastik das Leitbild des Datendetektivs propagiert wird, der etwas ohne Vorurteile in „empirisch gesicherte“ Erfahrung bringen will, dann greift das deutlich zu kurz. Als Datenkompetenz jedenfalls sollte man das nicht vermarkten.

Fazit

Die Statistik ist ein mächtiges Werkzeug zur Strukturierung unserer Erfahrungswelt. Die Bedingungen und Konsequenzen einer solchen Strukturierung auszublenden bleibt gefährlich einseitig und blendet jegliche ernsthafte gesellschaftliche Kontextualisierung aus. Was Not tut, ist eine Besinnung auf die Inhalte der Daten und die Sensibilisierung für deren Eigensinn: für LehrerInnen, damit sie im Stochastikunterricht verantwortungsvoll und (notfalls) kritisch handeln können, für SchülerInnen, damit sie die Möglichkeit erhalten, eine bewusste und begründete Haltung einzunehmen.

Literatur

Acxiom (2009). *Märkte besser kennen und bedienen. Die PersonicX™ Zielgruppensegmentierung*. www.acxiom.de/SiteCollectionDocuments/pdf/Broschueren/PersonicX_Verbrauchersegmentierung_Broschuere.pdf (16.03.10)

AK Stochastik (2002). *Empfehlungen zu Zielen und zur Gestaltung des Stochastikunterrichts*. www.mathematik.uni-dortmund.de/ak-stoch/dokument/stellung.pdf (16.03.10)

GfK (o.J.). *Geomarketing-Glossar*. www.gfk-geomarketing.de/geomarketingwissen/geomarketing_glossar.html#c481 (16.03.10)

ZMG (1999) = Zeitungsmarketinggesellschaft. *Der Leser im Fokus. Zielgenaue Marktbearbeitung im Zeitungsvertrieb*. Frankfurt: ZMG

Bodo v. PAPE, Oldenburg

„Geht nicht." gibt's nicht. Plädoyer für eine Schulanalysis ohne Scheuklappen

Im Rahmen der Aufgabenstellungen der Analysis liegen einige Fragestellungen nahe, deren Formulierung man in der Schule schlichtweg aus dem Wege geht. Löst man sich von dem unbedingten Bestreben, eine termartige Lösung zu finden, so kommt man in derartigen Fällen leicht zum Ziel mit numerischen Lösungsstrategien. Diese kann man selbstständig auffinden und artikulieren sowie umsetzen in einfache Excel-VBA-Funktionen. Die Anreicherung des Instrumentariums um die zugehörigen numerischen Algorithmen führt zu einer Entlastung der Analysis von überkommenem algebraischem Ballast. Zugleich erfährt die Schulanalysis eine wichtige inhaltliche Bereicherung. (Am Horizont erscheint eine „animierte Analysis" mit bewegten bzw. kinematisch erzeugten Kurven (Verfolgungskurven, Gelenkkurven)).

1. Der Werkzeugkasten

Bei derartigen Fragestellungen kommt man gut klar mit Hilfe eines Werkzeugkastens von Excel-Funktionen, der sehr beschränkt ist und gut überschaubar. Basis ist ein Suchverfahren nach der „Wanderregel" zum Finden eines Gipfels in einer Landschaft:

„Sieh dich an deinem Standort um:
Falls in Schrittentfernung nach N, S, W, O das Niveau höher ist,
so begib dich dorthin.
sonst halbiere deine Schrittweite.
Das wiederhole so lange, bis die Schrittweite hinreichend klein ist."

Überträgt man diese Regel auf das Wandern auf einem Funktionsgraphen, so liefert sie sehr verlässlich die VZW-Stellen, die Extremstellen und die Stellen extremer Steigung in x-Richtung. (Eine Anpassung an spezielle Aufgabenstellungen erfordert in dem zugehörigen Funktionsmakro jeweils eine Abänderung von nur ein oder zwei Zeilen.)

Lässt man sich etwa zur Funktion $f(x) = 2^{\frac{x}{4}} - \frac{x}{2} + 2 \cdot \cos(2x)$ die Nullstellen im Bereich -5...15 in Abhängigkeit von der Startstelle aufzeichnen, so erhält man eine Treppe oberhalb der 1. Winkelhalbierenden. Bei dem – halbalgebraischen! – Newton-Verfahren dagegen zeichnet sich ein Treppe ab, die um die 1. Winkelhalbierende spielt: Gefunden wird jeweils eine Nullstelle „in der Nähe" der Startstelle. Knapp 20% der Werte sind allerdings Ausreißer, zusätzlich gibt es völlige Abdrifter.

Excel bietet die Möglichkeit, mathematische Funktionen zu definieren ohne die Beschränkung, dass die Werte direkt aus Termen stammen. Die Funktionswerte werden über Algorithmen ermittelt. Die so definierten Funktionen kann man dann aus dem - ohnehin bereits sehr umfassenden - Katalog der mathematischen Funktionen als „benutzerdefiniert“ abrufen.

Diese Option zur Erweiterung des Spektrums an Funktionen wird man als Mathematiklehrer sehr begrüßen. Zur Beruhigung all derer, die auf der Schule den MS-Office-Produkten gezielt aus dem Wege gehen möchten, sei gesagt: Diese Algorithmen lassen sich sämtlich auch in eine Tabellenlösung umsetzen. Ein derartiges Vorgehen liegt sogar nahe bei der Einführung und zum Austesten (Protokollierung des Ablaufs). Andererseits: In der Funktionsschreibweise ist die Beschreibung – als direkte Umsetzung der umgangssprachlichen Artikulation der Vorgehensweise – wesentlich knapper und besser zu durchschauen. Außerdem mangelt es den Tabellenlösungen an Transportabilität.

Excel-WhiteBox „Funktionen zu Analysis“

```
Const genau = 1E-8
Const bis = 1000
Const h = 1E-8

Function f(x)
f = ...
End Function
```

Ableitung

```
Function fstei(x))
fstei = (f(x+h) - f(x)) / h
End Function
```

VZWSuche vorwärts: Wanderregel

```
Function VZWPendel(start)
stelle = start
schritt = 0.1
Do
  stelle = stelle + schritt
  umkehr = f(stelle) * f(stelle - schritt) < 0
  If umkehr Then schritt = -(schritt / 5)
  fertig =  Abs(schritt) < genau Or stelle > bis
  Loop Until fertig
VZWPendel = stelle
End Function
```

Mittelwert / Integral

```
Function fmittel(von, bis, anzahl)
ibreite = (bis - von) / anzahl
stelle = von + ibreite / 2
Do
  summe = summe + f(stelle)
  stelle = stelle + ibreite
  Loop Until stelle > bis
fmittel = summe / anzahl
End Function

Function fintegral(a, b, n)
For i = 1 To n
  fintegral = fintegral + f(a + (i-0.5) * (b-a)/n
  Next
End Function
```

Maximumsuche vorwärts: Wanderregel II

```
Function ftop(start)
schritt = 0.01
stelle = start
Do
  topli = f(stelle) >= f(stelle - schritt)
  topre = f(stelle) >= f(stelle + schritt)
  top = topli And topre
  stelle = stelle + schritt
  If top Then schritt = -(schritt / 5)
  fertig = Abs(schritt) < genau Or Abs(stelle) > bis
  Loop Until fertig
If Abs(stelle) > bis Then stelle = -100
TopP = stelle
End Function
```

Bogenlänge

```
Function fboglen(a, b, n)
dx = (b - a) / n
x = a
For i = 1 To n
  dy = f(x+dx) - f(x)
  dl = (dx^2 + dy^2)^0.5
  fboglen = fboglen + dl
  x = x + dx
  Next
End Function
```

Krümmung

```
Function fkr (x)
dy = f(x + h) - f(x)
dl = (h ^ 2 + dy ^ 2) ^ 0.5
m1 = fstei(x+h)
m2 = fstei(x)
dwin = Atn(m1) - Atn(m2)
fkr = dwin / dl
End Function
```

Excel ist sicherlich kein spezifisches Schultool. Nach den Bildungsstandards der KMK geht es im MU allerdings um „Basisqualifikationen, die für die **weitere schulische und berufliche Ausbildung** von Bedeutung sind und die **anschlussfähiges Lernen** ermöglichen“. Hier ist Excel der 1. Platz unter den Mathematik-Tools kaum zu bestreiten.

Hat man sich im Hinblick auf den Einsatz einer Tabellenkalkulation erst einmal für Excel entschieden, so bietet sich ein weiteres Werkzeug an, und zwar ein kleines Programm, das

- viel Algebra erübrigt,
- die Mathematik animiert.

Zielwertsuche zur Anpassung

```
Sub finde()
[stelle] = 0
schritt = 0.1
Min = 100
Do
  [stelle] = [stelle] + schritt
  krit = Abs([wert] - [ziel])
  umkehr = krit > Min
If umkehr Then schritt = -schritt / 5
  Min = krit
Loop Until Abs(schritt) < 1E-8
End Sub
```

Der Algorithmus folgt dem „Wander“-Schema: Der Wert in einer Zelle „stelle“ wird verändert, vermittelt über andere Zellen ändert sich dann auch der Wert in der Zelle „wert“. Der Wert in dieser Zelle soll dem Zahlwert in der Zelle „ziel“ möglichst nahekommen, vielleicht auch möglichst groß werden („ziel“=100). Excel bietet für derartige Aufgaben selbst ein Werkzeug an, nämlich den Solver. (Ein Algebra-System wird nicht vorgehalten!) Der Solver mag für komplexe Probleme sehr mächtig sein. Im Bereich der Schulmathematik erweist er sich als undurchsichtig, schwer handhabbar und zudem unzuverlässig. Das Finde-Makro ist im schulischen Bereich schon deswegen vorzuziehen, weil es eine Möglichkeit bietet, die Darstellungen und Verfahrensweisen zu animieren.

„Algorithmik statt Algebra“

„Animation statt Algebra“

2. Beispiele

Die Möglichkeiten sind illustriert und kommentiert anhand von Problemstellungen aus dem Horizont der Schulmathematik

- Kurvendiskussion zu frei wählbaren Funktionstypen
- Bogenlänge und Krümmung von Kurven,
- Rekonstruktion einer Kurve aus ihrem Krümmungsverhalten
- Hochrechnung einer logistischen Entwicklung
- Weitere Anpassungen und Modellierungen
- Extremwertprobleme bei Funktionen in 2 oder 3 Variablen.

(30 Beispiele auf Herbsttagung 2009 / AKMUI Soest:
www.math.uni-sb.de/ag/lambert/AKMUI09/Folien/vonPapeSoest09.pdf)

3. Postulate für eine künftige Schulanalysis

Im Kleinen:

Eine Tilgung des Terminus „Wendestelle“ für die Stellen, in denen es genau geradeaus geht ist, ist längst überfällig. Die Bezeichnung stammt aus dem Kontext des Wanderns auf Kurven, und sie verschleiert die Tatsache, dass es sich um ein bereits abgehandeltes Problem handelt. (Maximierung)

Der Mittelwert sollte – wegen seiner Anschaulichkeit und seiner Anwendungsnähe – gegenüber dem Integral eine Aufwertung erfahren. (Flächen-, Körperberechnung über Mittelwert der Höhe bzw. der Querschnittsfläche)

Im Großen:

Bei den „Prozessbezogenen Kompetenzbereichen“ der KMK-Standards sollten die „numerischen Elemente der Mathematik“ einbezogen und gleichberechtigt neben die „symbolischen Elemente“ gestellt werden.

Bei den „Inhaltsbezogenen Kompetenzbereichen“ sollte unter „Algorithmus“ eingefügt werden: Die Schülerinnen und Schüler

- formulieren einfache Algorithmen zur Anpassung und Optimierung
- setzen einfache einschlägige Algorithmen auf ihrem Gerät um.

Lernziele: Die Schülerinnen und Schüler sollen wissen:

1. Mit dem Gebrauch eines CAS-Systems bewegt man sich in zwei unterschiedlichen mathematischen Welten, der der Algebra und der der Numerik.
   (F. Klein: „Präzisionsmathematik“ – „Approximationsmathematik“ = „derjenige Teil, den man in Anwendungen tatsächlich braucht“)
2. („Fundamental“:) „In allen praktischen Gebieten der Mathematik gibt es einen Schwellenwert der Genauigkeit“ (F. Klein $\varepsilon = 1E\text{-}7$))
3. Die Bedeutung des Computers für die Mathematik liegt weniger in der Ausweitung der ersten Welt als in der Erschließung der zweiten.
4. Verlässt man die vorgegebenen Wege der Schulmathematik, so gerät man - sofern man algebraisch unterwegs ist - rasch in eine Sackgasse.
5. Der Rückgriff auf Ableitungen beim Maximieren und Minimieren macht Sinn nur dann, wenn man algebraisch zum Ziel kommt. Ist man numerisch unterwegs, so ist dies ein unsinniger Mehraufwand.
6. Die entscheidende Power des Rechners liegt im Rechnen. Die „Computer-Algebra“ ist sekundär, insbesondere „vitae“.

KOSTAS VAINAS Volos, Griechenland

Fachübergreifenden Mathematikunterricht an den berufsbildenten Schulen

1.Einführung in die Problematik

Obwohl das griechische Erziehungsministerium und das Pädagogische Institut in den letzten Jahren enormes Interesse für die Verbesserung der beruflichen Erziehung zeigen (Gesetz: 3475/20060) ist die allgemeine Situation an den entsprechenden Schulen noch nicht zufriedenstellend. Die meisten Lehrerinnen und Lehrer, die an den Berufsschulen unterrichten, beklagen sich, dass ihre Schülerinnen und Schüler wenig Interesse am Unterricht zeigen (Abramidu u.a., 2008). Die frühere langjährige Gleichgültigkeit des Staats für die berufliche Erziehung, in Zusammenarbeit mit der falschen, aber starken Auffassung, dass die berufliche Erziehung niedriger als die allgemeine Erziehung ist, haben ihre negativen Konsequenzen im Bereich der Erziehung hinterlassen (Tzorzu u.a., 2008).
Die zurzeit herrschende Ansicht des Ministeriums und des Pädagogischen Instituts für Verbesserung der beruflichen Erziehung, konzentriert sich vor allem auf die ständige Ausbildung der Lehrerinnen und Lehrer und die zusammenarbeien, Versuchen in allen Bereichen der beruflichen Erziehung , einschließlich der Didaktik der Berufsfächern.

G. Kerschensteiner (1854-1932) hat einen wichtigen Vorschlag bezüglich der Neuordnung des Lehrstoffs der verschiedenen Schulfächer gemacht. Diese konnte man auch bei der Lehre der Mathematik an den beruflichen Schulen anwenden. Diesen Vorschlag werden wir weiter analysieren.

2.Der Einfluss Kerschensteiner’ s Ideen in der griechischen erziehrischen Situation

Wenn ein Grieche in Deutschland, vor allem in München, der Geburtsstadt von Kerschensteiner, über dem großen Münchner Pädagogen spricht, scheint, wie jemand in Athen, während der goldenen Epoche, die Eule birgt. Ich werde den Einfluss von Kerschensteiner in der griechischen, erzieherischen Situation kurz und besonderes über die von ihm verschlagene Neuordnung der Lehrstoff für den Mathematikunterricht erwähnen.

Von allen Richtungen und Tendenzen der deutschen Reformpädagogik, ist die jenige der Arbeitsschule in Griechenland am meisten bekannt. Sie war expediert, sowohl von den progressiven, wie auch von den konservativen Pädagogen und wurde realisiert in der griechischen Schule besonderes in den Zeitraum zwischen beiden Weltkriegen. Mehrere Bücher von Kerschensteiner sind auf Griechisch übersetzt (Kerschensteiner, 1916). Maria Amariotu die zwischen den größten neugriechischen Pädagogen dazugerechnet wird, war Schülerin von Kerschensteiner und sie spricht mit Enthusiasmus für ihren Lehrer „den Junge mit den weißen Haaren" (Kontomitros, 2006, S. 490)
Der große Münchner Pädagoge wird auch als der Vater der Berufspädagogik bezeichnet. In seiner Magna Charta der Berufsbildung betont er dass: «Allgemeinbildung und Berufsbildung in Wahrheit kein Gegensatz ist und auch keine Alternative, zwischen denen, der Lehrer zu wählen hätte, sondern … an der Pforte des allgemeinen Menschenbildung steht (notwendigerweise) die Berufsbildung» (Wilhelm, 1991, S. 114) Weiterhin betont der große Reformer der Berufserziehung, dass Schülerinnen und Schülern der Berufserziehung, unbedingt die Lehre der Fächer der Allgemeinbildung brauchen.

Die Einführung der Schülerinnen und Schüler, in der beruflichen, wie auch in der allgemeinen Bildung ist mit folgenden zwei Verfahren möglich: Erstes: Mit den beruflichen Fächern werden auch Fächer der Allgemeinbildung unterrichtet. Das geschieht problemlos in den Berufsschulen, aber die Schülerinnen und Schüler können nicht direkt die Nützlichkeit der Allgemeinbildung beim Lernen oder Üben des gewählten Berufs sehen. Das hat negative Folgen in ihrer Lernmotivation. Zweitens: Der Lehrstoff der Fächer der Allgemeinbildung wird mit dem Lehrstoff der beruflichen Fächer verbunden. Im Lehrplan werden nur die Berufsfächer erwähnt, dessen Lernstoff harmonisch und geeignet verbunden mit dem Lernstoff der Fächer der Allgemeinbildung ist. Auf diese Weise lernen die Schülerinnen und Schüler der Berufserziehung sowohl der Lernstoff der beruflichen Fächer, wie auch der Lehrstoff der Fächer der Allgemeinbildung. Dies scheint nicht zusammenhangslos mit dem Beruf, der jede Schülerin und Schüler gewählt hat. Im Gegensatz sehen sie, dass der Lernstoff der allgemeinbildenden Fächer hilft, bei der Ausübung des ausgewählten Berufes und betont seine Nützlich- und Brauchbarkeit.

3. Mathematikunterricht als Hilfsunterricht den beruflichen Fächern

An den beruflichen Schulen Griechenlands wird heute Mathematikunterricht als selbständiges Fach gelehrt. Das hilft natürlich den Wissenschaftscharakter der Mathematik. Aber das bedeutet zugleich, dass Schülerinnen und Schuler nicht die Gelegenheit haben, die Nützlichkeit des Mathematikunterrichts in der Ausübung ihres gewählten Berufs so gleich zu sehen. Es wird also folgende Änderung vorgeschlagen:
Der Lehrstoff der Mathematik soll an geeigneter Stelle mit dem Lehrstoff der Berufsfächer verbunden werden. Natürlich ist dies nicht leicht und nicht in allen Fällen möglich. In dieser Weise aber können die Schülerinnen und Schüler gerade die Nützlichkeit der Mathematik in der Praxis sehen. Sie verstehen dass sie müssen die mathematische Lehrstoff lernen, weil wichtig für die Ausübung ihres gewählten Berufs ist. Also spricht man über einen fachübergreifenden Mathematikunterricht, wobei das Wichtigste, das Thema und die problematische Situation sind.
Noch eine andere Möglichkeit ist die chronologische Ordnung des Lernstoffs, wobei man Mathematikunterricht und der geeignete Fachunterricht chronologisch näher bringen kann. Erst wird die Einheit vom Mathematikunterricht unterrichtet, und danach die Einheit vom Berufsfach, in der Mathematik angewendet wird. Auf dieser Weise scheint Mathematik als die Dienerin der verschiedenen Berufsfächer und nicht die Königin, nach der Ausdruckweise von Gauss.
Welche Vor- und Nachteile erweist sich mit dieser Neuordnung der Lernstoff an den beruflichen Schulen?

4. Die Neuordnung wird die Lernmotivation der Schülerinnen und Schüler steigern

Wenige Forschungen in Griechenland beschäftigen sich mit der Berufserziehung. Einige davon versuchen die Kriterien zu bestimmen, nach denen die Schülerinnen und Schüler die Berufserziehung gewählt haben. Allgemein zeigen sie, dass ein sehr hohen Prozentsatz der Schülerinnen und Schüler, die die Berufserziehung gewählt haben, (ungefähr 60 – 70%), einen bestimmten Beruf ausüben wollen (Vainas, K.– Ikonomou, O.– Kapaniaris, A.-Verdis) und deswegen haben diese Richtung der Erziehung gewählt. Dem zu Folge besteht einen sehr wichtigen Grund, damit die Lehrer der Berufserziehung, die Lernmotivation seinen Schülern steigern können (Kostaridu – Euklidi, 1995)
Alle lernenden Fächer in beruflichen Schulen sollen zum Lernen und Ausüben des gewünschten Berufs dienen. So sehen die Schülerinnen und Schüler, dass die mathematische Lehrstoff wie Rechnungen z.B. und

mathematische Kompetenzen einen wichtigen Teil des ausgewählten Berufes ist (Vainas, 1998)

Ein Nachteil dieser Neuordnung des Lernstoffs ist folgender: Wenn ein Fach der Allgemeinen Bildung die Methodologie und die Reihe des Berufsfachs verfolgt, verliert sie seine natürliche Ordnung. Diese Bemerkung ist sehr wichtig für den Mathematikunterricht, dessen natürliches Charakteristikum der Turmcharakter bei der Ordnung der Lernstoff hat (Wagenschein, 1979, S. 324)

Es ist offensichtlich, dass man dieser Begebenheit besondere Achtung schenken muss. Diese Anpassung des Lernstoffs Mathematik und Berufsfächern sollen auf keinen Fall die logische Reihe der Mathematik zerstören. Sonst wird der Mathematikunterricht für die Schülerinnen und Schüler nicht verständlich.

Verwendete Literatur:

Abramidu, F. u.a. (2008). Der Mathematikunterricht in der 2te Klase der Beruflichen Schulen In: Sitzungsbericht der panhellenische Tagung der G.M.G., Volos

Gesetz: 3475/2006. Organisation und Funktion der Sekundarberufliche Erzierung und andere Erlasse

Kontomitros, G. (2006). Die deutsche Reformpädagogik und ihre Einflusse in der griechischen Erziehung, waren die ersten Jahrzenten der 20 Jahrhundert. Diss, Volos

Kostaridu – Euklidi, A. (1995). Motivationspsychologie, Verlag Hellinika Grammata, Athen

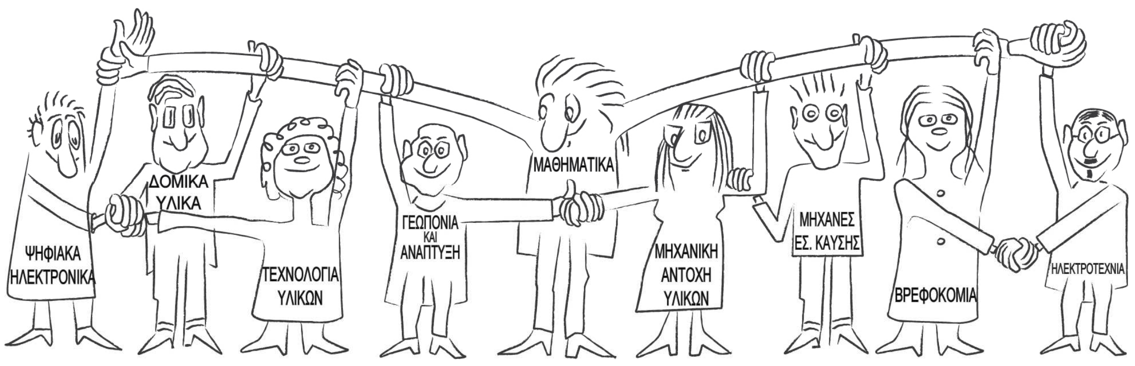
Tzorzu, Th. u.a.(2008). Die Lehre der Mathematikunterricht in den Beruflichen Schulen der Sekundarstufe. Einsichten der Lehrer und Leistungen der Schülerinnen und Schülern, In: Sitzungsbericht der panhellenische Tagung der G.M.G. Volos

Vainas, K.(1998). Lernmotivation im Mathematikunterricht, in Zeitschrift Neue Erziehung, H. 86, Athen

Vainas, K.– Ikonomou, O.– Kapaniaris, A.-Verdis, A. Mit welchen Kriterien wählen die Schülerinnen und Schüler die berufliche Erziehung, unter Veröffentlichung in der Zeitschrift: „Schritt an der Sozialwissenschaften „ Uni of Thessalia

Wagenschein, M. (1979). Verstehendes Lernen in: Volk, D. (Hrsg.): Kritische Stichwörter zum Mathematikunterricht, Wilhelm Fink Verlag, München

Wilhelm, T. (1991). Georg Kerschensteiner (1854-1932), In: Scheuerl, H.(Hrsg.): Klassiker der Pädagogik, Verlag C.H. Beck, München



Ödön VANCSÓ, Budapest, Attila KOMZSIK, Nitra

Modellieren und Motivation anhand der Erfahrungen gewonnen durch die Anwendung einer realitätsbezogene Aufgabe

1. Einführung, Problemstellung

Im DQME-II EU Project ist ein Hauptziel neue realitätsnahe Unterrichtsmaterialien zu entwickeln und in der Klasse auszuprobieren und zu evaluieren. Die originale Idee stammt von Heinz Böer, der die Lehrergesellschaft MUED gegründet hat. Er ist ein wichtiger Person auch in der DQME-II Projekt. Eine Sub-Gruppe von Hans Humenberger (Wien) geleitet beschäftigt mit dem „Restgeschwindigkeit“ Problem. Es gibt vier Version zu dieser Aufgabe die vom Gesichtspunkt der Offenheit in einer zunehmende Skala eingeteilt werden können (A, B, C1, C2). Damit sich unsere Interesse in letzten Jahren (auch wegen einem anderen Project LEMA) in die Richtung Modellieren gedreht ist, haben wir die vierte meist offene Variante ausgewählt und damit Schulexperimente durchgeführt. (Wir haben auch einige Ergebnisse Version A und B.) Die Problemauswahl kann dadurch begründet werden dass die Anzahl der Unfälle wegen hoher Geschwindigkeit sehr hoch sowie in Ungarn als auch Slowakei verglichen mit anderen EU Ländern. Diese Wahl unterstreicht unsere Auffassung über die Wichtigkeit der Erziehungsaspekt des Mathematikunterrichts auch, die traditionell nicht betont ist (weil in Ungarn oder in Slowakei wurde die Mathematik oft in einem Elfenbeinturm geschlossen). Der mathematische Inhalt der Aufgabe ist Manipulationen mit quadratischen Gleichungen und Ungleichungen, graphische Lösungswege und rein algebraische Umformungen. Im Modellierungsprozess spielen die Entlassungen eine wichtige Rolle. Die fachübergreifenden Aufgaben und Probleme sind sehr oft unterstrichen und in diesem Mal eine nicht ungewöhnte Beziehung zwischen der Mathematik und Physik im Mittelpunkt steht.

Das Experiment wurde bis jetzt in zwei Schulklassen in Slowakei und in einer in Ungarn durchgeführt. Die offene C2 Version der Aufgabe wie den Schülern präsentiert worden ist:

Ein Auto fährt in einer 30er-Zone mit 30 km/h. Ein anderes Auto überholt dieses mit 50 km/h. Als die beiden Autos genau nebeneinander sind, geht ein Kind ohne zu schauen auf die Straße (z. B. um einen Ball zu holen). Die Autos haben gleich starke Bremsen und die Fahrer reagieren auch gleich schnell. Das Auto mit 30 km/h kommt noch gerade vor dem Kind zu stehen. Welche Restgeschwindigkeit hat das andere Auto an dieser Stelle?

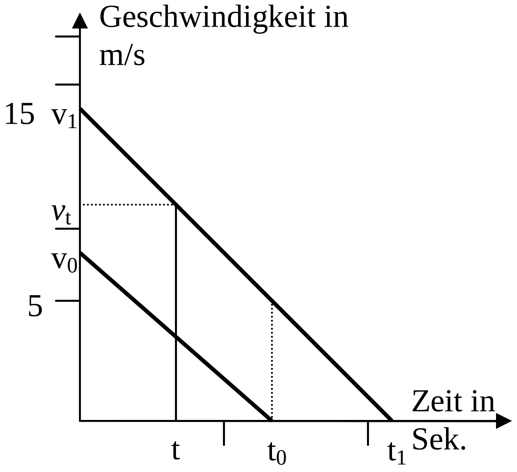
1) Schätze die Restgeschwindigkeit! Schätze die jeweilige Restgeschwindigkeit auch bei anderen Daten: wenn die Geschwindigkeiten (50km/h, 70 km/h) bzw. (70km/h, 100 km/h) – statt (30km/h, 50 km/h) – betragen!

2) Finde einen begründeten Wert für die Restgeschwindigkeit nicht nur durch Schätzung!

3) Wie kann man im allgemeinen Fall begründete Werte für die Restgeschwindigkeit angeben? Anfangsgeschwindigkeiten wie in 1) oder mit Variablen: v_0, v_0^*.

2. Eine graphische Lösungsmethode

Erst möchten wir eine „schöne“ Lösung vorstellen die klar zeigt, warum die erste falsche Schätzung (20 km/h) so oft bei dieser Aufgabe. Die ist *andere* wie in dem Projekt behandelten Versionen, und auf eine Repräsentation der Aufgabe durch eine Geschwindigkeits-Zeit Diagram basiert. Das erste einfache Modell ist die gleichmäßige Bremse ohne Reaktionszeit:



(1) $\frac{v_1 + v_t}{2} t = \frac{v_0}{2} t_0$ damit die Distanz vom Startpunkt des Bremsens und des Mädchens ist gleich für beide Autos;

(2) $\frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_t}{t_1 - t} = \frac{v_0}{t_0}$ aus ähnlichen Dreiecks (gleiche Beschleunigung). Aus (2) $v_t t_0 - v_0 t_1 = -v_0 t$ und $v_1 t_0 = v_0 t_1$, also $v_t - v_1 = -\frac{v_0 t}{t_0}$, aus der Gleichung (1): $v_t + v_1 = \frac{v_0 t_0}{t}$.

Aus den letzten zweien Gleichungen durch Multiplikation kommt: $v_t^{\,2} - v_1^{\,2} = -v_0^{\,2}$. Also kommt $v_t = \sqrt{v_1^{\,2} - v_0^{\,2}}$ aus. Im unseren Fall: $\sqrt{2500 - 900} = 40$ (km/h).

Das ist überraschend hoch, die meiste Schüler schätzten unter, allgemein ca. 20 km/h, also die Hälfte. Woher kommt diese falsche Schätzung? Aus der falsche Betrachtung, dass der Unterschied zwischen den Geschwindigkeiten konstant bleibt wegen der gleichen Bremsen. Das bezieht sich aber immer auf *gleichzeitiges* Messen. In unserem Fall steht keine Gleichzeitigkeit.

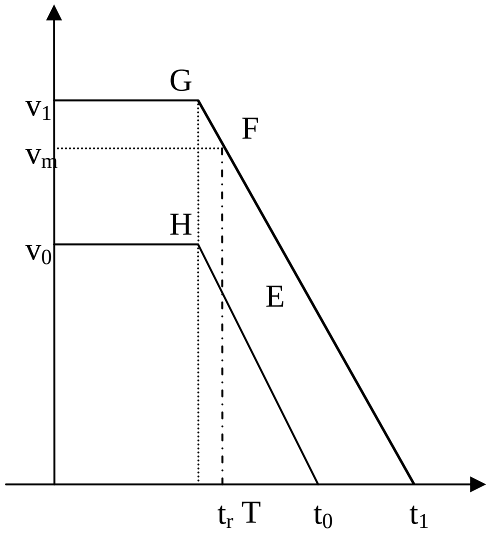
Ein rein physikalischer Gedanke macht die Lösung besonders einfach. Wenn die Bremsen sind gleich, dann die Arbeit der Reibung ist gleich auf einem bestimmten Weg für beide Wagen. Das erste Auto hat alle kinetische Energie verloren, also genauso viele Energie verliert das schnellere auch auf denselben Weg, also gilt es die Gleichung $E_r = \frac{1}{2} m v_1^{\,2} - \frac{1}{2} m v_0^{\,2} = \frac{1}{2} m v_r^{\,2}$ (E_r ist die „Rest kinetischer Energie“ der schnelleren Wagen als erreicht den Ort wo das Mädchen steht). Das zeigt sofort, dass $v_r = \sqrt{v_1^{\,2} - v_0^{\,2}}$. Diese Idee entstand während dem Vortrag von einem Zuhörer, Ladislaus Kvasz aus Prag.

Das Zweite Modell (Reaktionszeit in Hinsicht zu nehmen)

Hier soll der Inhalt des Dreiecks ETt_0 mit dem Inhalt von v_0HGv_1 Rechteck plus von dem *HEFG* Paralelogramma gleich sein. Algebraisch

$$(v_1 - v_0)T = (t_0 - T)(v_0 - [v_1 - v_m])$$

Es gibt hier auch viele ähnlichen Dreiecks, davon kann weitere Gleichungen abgeleitet werden. Es ist klar, dass die Restgeschwindigkeit noch höher wird als im ersten Fall. Es gibt auch noch solche Fällen, wobei die Restgeschwindigkeit gleich v_1 (das bedeutet der Fahrer das Bremsen nicht begonnen hat).



Wegen des fehlenden Platzes wird die Lösung nicht gegeben, die Leser können diese schon folgend das Verfahren des ersten Modells und die Graphik des zweiten Modells rekonstruieren. Sei es nur kurz erwähnt, dass einige Schüler in einer durch Computer gut gerüsteten Schule in Ungarn schöne Simulationen mit dem Programm „Geogebra“ gemacht, verschiedene Modelle aufgebaut und durch Geogebra präsentiert und nachgerechnet.

3. Ergebnisse

Bis jetzt haben wir nur die Daten aus zwei slowakischen Schulklassen und aus einer Klasse einer besseren Schule in Budapest. In diesen drei Fällen die Schüler in Kleingruppen gearbeitet. Die Schule in Komarno (SK) und in Tornalja (SK) sind sehr different die ungarische in Budapest (HU) fällt näher zur ersten. Die erste gehört zu den erfolgreichsten Schulen in Südslowakei in den Fächern Mathematik und Physik. In Komarno haben alle unter den fünf Gruppen die erste Frage korrekt beantwortet erkannt dass die Restgeschwindigkeit unabhängig von den Bremsen ist, aufgenommen allein derer Gleichheit. Sie haben die Restgeschwindigkeit auch im Fall einer bestimmten Reaktionszeit (1 s) angegeben. Die Lösungen zeigen, sie sehr erfahren in der Lösung solcher Aufgaben sind, und alle eine bestimmte Methode (ausgenutzt die Beschleunigung *b*) benutzt und am Ende bemerkt hat dass die Lösung unabhängig von der Beschleunigung ist. Sie haben graphische Mittel benutzt (*s*-*v* Diagramms) aber keine von den oben erwähnten. Die erste Schätzung war falsch ausgenommen eine Gruppe, die mehr als 20 km/h geschrieben. In Tornalja haben nur zwei aus fünf Gruppen irgendeine Lösung gegeben und sie auch nur im meist einfachen Modell (ohne Reaktionszeit). Sie haben aber die Restgeschwindigkeit nicht geschätzt. In Budapest gab es nur vier Gruppe, davon eine die Lösung bestimmen konnte. Die Schätzungen in allen Fällen falsch sind. In Budapest nur die Hälfte der Gruppen irgendeine graphische Repräsentation gewählt. Sie haben gar nicht mit der Reaktionszeit gerechnet. In einen anderen Klasse in Budapest, wo die Ergebnisse noch nicht aufgearbeitet haben die Gruppe ziemlich gut geschätzt aber nur wenige die Lösungen korrekt ausgerechnet. Sie haben viele Fehler gemacht, aber im Modellieren besser gewesen als die andere drei Klasse.

Im grob zu sagen in der Slowakei die Schüler besser in der Technik der Algebra sind und gut trainiert alles zu schreiben. Sie sind aber manchmal mechanisch und werden die Ergebnisse nicht erklärt. Im Modellieren haben sie wenigere Erfahrungen und bei der Interpretation eines Ergebnisses auch nicht stark. Die schwächere Schule ist aber ganz anders, dort die Technik nicht gut beherrscht und auch das Modell nur sehr grob. In der ungarischen Schule zeigten die Schüler wenigere Kenntnisse der algebraischen Technik als in der Schule in Komarno. Es ist aber wichtig betont zu werden, dass die Schüler in beiden Ländern ihre Überzeugung von der Wichtigkeit des Beibehaltens das Tempolimit ausgedrückt haben. Die Interviews zeigten wenigstens das Erreichen des Erziehungsziels des Experiments.

4. Schlussbemerkung

Aus den bisherigen Experimenten ist es klar zu sehen, dass die Studenten sehr wenige Erfahrungen in offenen Modellierensaufgaben haben. Sie brauchen die nötige Mittel selten, gibt es wenig Transfer zwischen Fächern in ihren Köpfen. In der besseren slowakischen Schule wurde die Algebra gut behandelt, die Schüler gaben aber keine Interpretation ihrer Ergebnisse. Sie haben gar nicht formuliert, warum sie oft falsch geschätzt haben. Sie ihre Modelle mit der Reaktionszeit verfeinert aber die Ergebnisse nicht mit dem einfacheren Modell verglichen worden sind.

Die Verfasser planen die ausführliche Analyse der Lösungen dieser Aufgabe durch Dokumenten zu publizieren die Daten gewonnen von den Schulexperimenten, die hier nur kurz berichtet. Die Zeitschrift ist eine internationale in Ungarn publizierte Zeitschrift TMCS (Teaching Mathematics and Computer Science) die gehoffte Termin ist das Ende dieses Jahres.

Literatur

A. Komžik -Ö. Vancsó: Modeling and motivation. In H-W. Henn & S. Meier (Hrsg.), *DQME-II Second annual publication of the Comenius Network DQME-II 2009* (S. 78-82) TU Dortmund

H. Humenberger: Brake applications and remaining velocity. In H-W. Henn & S. Meier (Hrsg.), *DQME-II First annual publication of the Comenius Network DQME-II 2008* (S. 67-82) TU Dortmund

Ingrida VEILANDE, Riga

Die Strukturen von Einheitswürfeln in die kombinatorischen Aufgaben.

Einfürung. Schon seit ferner Zeit haben die Menschen verschiedene Spiele, wo man Logik braucht, so auch Findigkeitsaufgaben fasziniert. Dank Computertechnologien sind heutzutage für viele Spiele interaktive Modelle geschafft. Um mögliche Lösungen zu finden, kann man mit Hilfe von Komputerprogrammen komplizierte Berechnungen machen. Deshalb kann man bei den Findigkeitsaufgaben die sichtbaren Gesetzmässigkeiten und deren Verallgemeinerungen manchmal als Mathematikaufgaben formulieren.

Eine Art von logischen Spielen ist die Zusammenstellung von räumlichen Figuren mit ziemlich einfachen Blöcken. Bei Lösung solcher Aufgaben muss man sowohl räumliche Vorstellungskraft als auch Findigkeit haben. Als Beispiel kann man hier den Erfinder des Soma Kubus den Dänen Piet Hein nennen. Das Spiel besteht aus 7 Steinen aus welchen den Kubus zusammenstellen muss. Das kann man in 240 verschiedenen Arten machen.

Wenn wir uns nicht nur auf den Kubus beschränken, dann kann man aus gegebenen Figuren tausend unterschiedliche Formen bilden. Wenn man mehrere gleiche Figuren oder noch andere Figuren, die nach ähnlichen Prinzipien gebildet sind, benutzt, dann sind die verschiedenen Varianten unbegrenzt viel (Thorleif's SOMA Page).

Wenn man ähnliche Aufgaben betrachtet, wo man die räumliche Figur aus farbigen Teilen zusammenstellen muss, dann wird nicht immer die Fehler- und Versuchsmethode genügen. Es scheint, zum Beispiel, die Aufgabe des Spiels ”Verrückte vier” einfach (Jaap's Puzle Page). Es sind vier Kuben gegeben, deren jede Fläche in einer von vier Farben gefärbt ist. Die Aufgabe ist sie in ein Stäbchen 1 x 1 x 4 so zu ordnen, damit in jeder Fläche 1 x 4 alle Farben vertreten sind. Es gibt nur zwei Lösungen, aber die gegebenen Kuben kann man in der Reihe auf 41472 Arten stellen. Die richtige Kombination kann man mit der Lösung der theoretischen Aufgabe von entsprechenden Graphen bekommen.

Kombinatorische Aufgaben. Ähnlich kann man eine Reihe von kombinatorial geometrischen Aufgaben betrachten, wo man aus Kuben zusammengestellte Figurenkonfigurationen und deren Eigenschaften betrachten kann. Die Aufgaben können unterschiedlich sein, zum Beispiel:

- Entsprechend den definierten Umstellungsbedingungen, muss man den Block aus der gegebenen Position auf eine andere Position umstellen, oder auch klären, ob die genannte Umstellung möglich ist;
- Klären, ob man die Figur aus den gegebenen Blöcken zusammenstellen kann;
- Ergründen irgendwelche bestimmte Eigenschaften, die der Figur eigen sind, die aus gegebenen Blöcken zusammengestellt ist;
- Bestimmen die Rundgangsmöglichkeiten der gegebenen Konfiguration;
- Begründen die Eigenschaften der Figuren bei unterschiedlicher Färbung.

In den Aufgabensammlungen von Mathematikolympiaden von verschiedenen Ländern kann man ähnliche Zweidimensionsaufgaben über die karierte Papiergitter und Figuren der poliominen Art finden. Aufgaben mit orthogonalen räumlichen Figuren sind ziemlich selten zu finden. Aber sie sind sehr wichtig für die Entwicklung der räumlichen Einstellungskraft.

Lösungsmethoden. Bei der Lösung solcher Aufgaben sind gewöhnlich kombinatorische Beurteilungen sowie allgemeine Urteilsmethoden verwendbar. Die Verwendung der Methode der Invarianz ist anschaulicher, wenn man die gegebene Konfiguration mit entsprechender Färbung vervollkommnet. Die Interpretationsmethode ermöglicht die gegebene geometrisch kombinatorische Aufgabe als theoretische Aufgabe der abstrakten Graphen zu betrachten. Die Methode des extremalen Elements dient bei der Lösung von Beweisaufgaben, bei welchen der Beweis mit Hilfe von entgegengesetztem konstruiert wird. Um qualitative zahlenmässige Beurteilung durchzuführen, ist das bekannte Schubfachprinzip (Aigner, Ziegler, 2010) als wichtige Argumentation zu betrachten, das bei der Lösung verschiedener Beweisaufgaben dient.

Beispiele. Die Aufgaben über die Zusammenstellung von Figuren. Bei solchen Aufgaben muss man feststellen, um die Figur aus den gegebenen Blöckenarten zusammenstellen kann oder muss man feststellen, wie der Mass der entsprechenden Figur möglich ist. Um zu begründen, dass die entsprechende Figur nicht zusammenstellbar ist, lässt eine besondere Färbung (zum Beispiel, Schachbrettfärbung) bei dem Beweis die Invarianzmethode mit dem Schubfachprinzip kombinieren.

<u>1. Aufgabe.</u> Der Kubus besteht aus 27 Würfeln. Kann man die äussere Schicht mit den Blöcken ersetzen, dessen Dimension 1 x 1 x 2 ist?

Aus Blöcken zusammengestellten Figureneigenschaften. In die Aufgaben dieser Weise wird das Schubfachprinzip gebraucht, um die Anzahl der gesuchten Figuren mit speziellen Eigenschaften zu bewerten.

2. Aufgabe. Der Kubus mit der Dimension 3 x 3 x 3 ist aus 8 Blöcken zusammengestellt. Kann es vorkommen, dass alle Blöcke unterschiedliche Grösse des Oberflächen haben?

3. Aufgabe. Der Block mit der Dimension 1 x 2 x 2 besteht aus vier zusammengeklebten Einheitskuben. Aus solchen Blöcken ist ein Kubus zusammengestellt, dessen Dimension 20 x 20 x 20 Einheiten sind. Man muss beweisen, dass man den Kubus mit der Nadel so durchstechen kann, dass keiner von den gegebenen Blöcken durchgestochen wird.

Rundgangsaufgaben. Die Aufgaben über die dreidimensionale orthogonale Gitter sind seinem Wesen nach den Aufgaben über die Figuren gleichwertig, die aus Würfeln zusammengestellt sind. Zum Beispiel, beim Paralellepiped kann isomorph solche orthogonale gitterförmige Figur sein, wo jedem Würfel ein Gitterknoten entspricht, und zwei Knoten sind mit der Kante verbunden, wenn entsprechende Würfeln eine gemeinsame Fläche haben.

5. Aufgabe. Aus dem orthogonalen dreidimensionalen Gitter ist ein Turm geschnitten mit der Dimension 1 x 1 x n. Der beinhaltet 4(n + 1) Knoten und entsprechende rechtwinkelige Gitterkanten. Eine Ameise kriecht auf die Turmkanten. Jede Kante besucht sie wenigstens einmal. Wie lang wird der kürzeste Weg der Ameise sein, wenn man annimmt, dass sie alle Kanten begangen hat?

Bemerkung. Die Hauptfrage der Aufgabe ist – die Existenz der Eulertour (Lovasz, Pelikan, Vesztergombi, 2005). Der kürzeste Weg von Ameise wäre in dem Fall, wenn sie jede Kante einmal begehen konnte. Die Eulertour ist durchführbar, wenn es nicht mehr als zwei Knoten mit ungerader Anzahl von ausgehenden Kanten gäbe. Aber die untere und obere Turmfläche hat 8 Ecken, die miteinander verbunden sind. Das bedeutet, dass es einige Kanten gibt, die die Ameise wenigstens zweimal begehen wird. Die Route der Ameise wird 8n + 7 Kanten lang sein.

Die Aufgaben über die Färbung. Man kann verschiedene Aufgaben über die Färbung betrachten:

- Die Figur aus bemalten Blöcken zusammenstellen, wo jeder von Blöcken mit einer bestimmten Farbe bemalt werden kann oder die Befärbung der Oberfläche unterschiedliche Farben hat.
- Wie kann man die Figurenblöcke bemalen, damit die gestellten Bedingungen erfüllt werden.
- Welche Eigenschaften hat die Figur, wenn ihre Blöcke auf eigene Faust bemalt sind.

8. Aufgabe. Es ist ein orthogonales Gitter in die Form eines Kubus gegeben, das n^3 Knotenpunkte (wo $n > 1$) beinhaltet. Jeder Knotenpunkt

ist in einer von drei Farben gefärbt – rot, gelb oder grün. Man muss beweisen, dass man unter ihnen drei Punkte finden kann – rot, gelb und grün, die die Ecken des rechtwinkeligen Dreiecks definieren!

Bemerkung. Diese Aufgabe ist vom Typ Ramsey, bei welchen die Existenz einer speziellen Art von der Elementenstruktur beweisen kann (Andzans, Chakste, 1996). Die Lösungsidee ist die Gitterstrecken, die paralell den äusseren Kanten sind, zu betrachten. Auf einem von diesen Strecken sind wenigstens zwei Punkte unterschiedlicher Farbe. Betrachten wir die Ebenen, die perpendikulär dieser Strecke sind, und beide Punkte beinhalten. Dann können wir verschiedene Spezialfällen analysieren und die Behauptung beweisen.

9. Aufgabe. Der Kubus ist aus 27 Würfeln zusammengestellt. Einige Würfel sind gefärbt. Keine Kubenschicht beinhaltet 3 oder 4 solche bemalten Würfeln, die in dieser Schicht in die Ecken des orthogonal aufgestellten Rechtecks sich befinden. Welche ist die maximal mögliche auf diese Weise gefärbter Würfelanzahl? (Die Kubenschicht ist der Kubenkante paraleller Block mit der Dimension 1 x 3 x 3.)

Schluss. Aufgaben dieser Art sind für Schüler verschiedenes Alters geeignet. Natürlich, man muss die Stufe der Aufgabenkompliziertheit für jede Altersgruppe beachten. Mit Hilfe von speziellen Klötzchen kann man sich mit den Möglichkeiten von Blöcken- oder Kuboiden - Zusammenstellungen bekanntmachen. Eine andere Möglichkeit besteht bei der Benutzung entsprechender interaktiver Programmen die im Internet vorhanden sind. Die Aufgaben über räumliche Figuren kann man in Mathematikzirkeln und bei Mathematikwettbewerben lösen. Um verschiedene Konfigurationen zu forschen, kann man sie auch bei den wissenschaftlichen Arbeiten von Schülern benutzen, sowie auch beim Finden allgemeiner Formeln und bei der Ausarbeitung spezieller Algorythmen.

Literatur

Aigner, M., Ziegler, G. M. (2010). *Das Buch der Beweise.* Berlin: Springer – Verlag.

Andzans, A., Chakste, J., Larfelds, T., Ramana, L., Seile, M. (1996) *Videjas vertibas metode*. Riga: Macibu Gramata.

Lovasz, L., Pelikan, J., Vesztergombi, K. (2005). *Discrete Mathematik.* Berlin: Springer – Verlag.

Jaap's Puzle Page. Erhalten am März, 2010 von: http://www.jaapsch.net/puzzles/insanity.htm

Thorleif's SOMA Page. Erhalten am März, 2010 von: http://www.fam-bundgaard.dk/SOMA/FIGURES/FIGURES.HTM

Martina VELTEN, Essen

Nacherzählen von Rechengeschichten

Wenn Textaufgaben gelöst werden, kommen mitunter verschiedene Strategien zum Einsatz. Eine Strategie, die möglicherweise zum erfolgreichen Bearbeiten von Textaufgaben beitragen kann, ist das mündliche Nacherzählen. In diesem Vortrag wird eine Studie vorgestellt, in welcher die Wirksamkeit dieser Strategie untersucht wurde.

1. Überblick über den theoretischen Hintergrund

Lesen ist nach dem Stand der heutigen Leseforschung ein konstruktiver Prozess, in welchem so genannte bottom-up und top-down Prozesse ineinander wirken (vgl. Christmann; Groeben 1999, S.146f.). Die Textinformation wird in diesem Prozess mit dem Vorwissen des Lesers verknüpft (vgl. Kintsch 1998, S.49f.; Greer 1997, S.301). Ergebnis dieses Prozesses ist ein Situationsmodell oder mentales Modell. Dieses besteht nach Kintsch (1998, S.49f.) aus der Textbasis, dem Vorwissen des Lesers und den Inferenzen, die während des Prozesses aufgrund von Text und Vorwissen gezogen werden.

Üblicherweise wird der Lösungsprozess einer Textaufgabe als ein mehrschrittiger Kreislauf modelliert. Er beginnt mit dem Lesen des Textes der Aufgabe. Resultat dieses ersten Schrittes ist ein Situationsmodell, welches als Grundlage für die Konstruktion eines mathematischen Modells dient. Letzteres wird zur Berechnung des Ergebnisses genutzt, welches abschließend anhand des Situationsmodells und des Textes überprüft wird (zur Darstellung des Prozesses vgl. Greer 1997, S.301; auch Reusser 1997, S.150ff.; Kaufmann 2008; Kintsch 1998, S.334).

Zur Lösung von Textaufgaben sind natürlich mathematische Fertigkeiten erforderlich. Eine Studie von Cummins et al. (1988, S. 419ff.; zitiert von Kintsch 1998, S. 344f.) deutet allerdings an, dass für ein erfolgloses Bearbeiten von Textaufgaben weniger mathematische, sondern vielmehr sprachliche Fertigkeiten verantwortlich sind. Um eine Aufgabe zu erfolgreich zu lösen, muss nach Kintsch (1998, S. 346) ein angemessenes Situationsmodell der Aufgabe gebildet werden.

2. Fragestellung und Design der Studie

De Corte und Verschaffel (1987) nutzten in ihrer Arbeit die mündliche Nacherzählung von Textaufgaben, um Einblicke in Verstehensprozesse von Kindern zu erhalten. Im Rahmen einer ihrer Arbeiten warfen sie die Frage auf, ob das mündliche Nacherzählen von Textaufgaben bereits hilfreich sein kann, diese auch erfolgreich zu lösen (vgl. De Corte und Verschaffel 1987, S. 56). Dies ist die zentrale Fragestellung in der hier vorgestellten Studie. Kann also das Nacherzählen von Rechengeschichten hilfreich sein, dass Kinder zunächst ein angemessenes Situationsmodell der Geschichte aufbauen und so die Aufgabe erfolgreich lösen?

Zur Untersuchung dieser Frage wurde eine Gruppe von Kindern zu Beginn des vierten Schuljahres gebeten, eine Rechengeschichte zunächst nachzuerzählen. Erst im Anschluss sollten sie die Aufgabe lösen. Zum Vergleich wurde eine andere Gruppe an Kindern gebeten, die lösungsrelevanten Informationen im Text zu kennzeichnen und an Beispielen zu begründen, warum die gewählte Information zur Berechnung des richtigen Ergebnisses notwendig war.

Als Material wurden zwei Rechengeschichten konstruiert, die im Gegensatz zu den üblichen Textaufgaben in Schulbüchern wesentlich länger sind und deren mathematische Struktur komplexer ist. Die zwei Rechengeschichten haben eine Länge von etwa einer halben Seite. Sie sind sich hinsichtlich der Textstruktur ähnlich. Beiden liegt die gleiche mathematische Struktur zugrunde und sie enthalten Zahlen, die für die Lösung der Aufgabe nicht erforderlich sind. Zudem sind die Kontexte der beiden Rechengeschichten unterschiedlich: Während in der einen Rechengeschichte eine vertraute Einkaufssituation beschrieben wird, ist in der anderen das eher unvertraute Thema „Energiesparen“ in Form einer Bestellung von Heizöl auf einem fernen Planeten zentraler Inhalt. Jedes Kind musste nur eine der beiden Geschichten bearbeiten. Da es zwei Strategien (im Folgenden mit „Nacherzählen“ und „Unterstreichen“ bezeichnet) und zwei Texte gab, wurden vier verschiedene Versuchsgruppen gebildet.

Um das Vorwissen und die Fertigkeiten der Kinder in Mathematik und im Lesen zu erfassen, wurde ein Mathetest, der aus einigen Rechen- und Textaufgaben bestand, eingesetzt. Zusätzlich wurde nach Genehmigung der Eltern auch Auskunft über den Leistungsstand der Kinder im Lesen eingeholt.

An der Studie nahmen 120 Kinder zu Beginn des vierten Schuljahres aus 18 Grundschulen, die in verschiedenen Stadtteilen von Essen liegen, teil. Da mitunter die Lage der Schule – im Norden oder im Süden von Essen – Einfluss auf die Leistung der Kinder haben kann, wurde sie bei der Einteilung der Kinder auf die vier Gruppen neben dem Geschlecht und des Ergebnisses in einem Mathetest als Verteilungskriterium berücksichtigt.

Die Studie begann mit der Durchführung des Mathetestes. Etwa zwei Wochen später folgten die Einzelinterviews mit den beiden Strategien. In jedem Interview wurde zunächst die zu bearbeitende Rechengeschichte durch einen Vorleser via Tondatei vorgelesen. Nach dem Vorlesen lasen die Kinder die Geschichte selbst. Anschließend folgte die Anwendung der Strategie: entweder musste das Kind die Geschichte nacherzählen oder es musste lösungsrelevante Informationen unterstreichen und seine Auswahl an einem Beispiel begründen, mindestens eine für die Aufgabe nicht erforderliche Zahl nennen und bei Bedarf erklären, wieso diese Zahl nicht zur Lösung erforderlich ist. Daran schloss sich die Lösungsphase an. Am Ende sollte jedes Kind seinen Lösungsweg erklären.

3. Erste Ergebnisse und weitere geplante Auswertungen

Um zu sehen, ob eine Strategie wirksamer für den Lösungsprozess als die andere ist, wurden zunächst die schriftlichen Lösungen der Kinder bewertet. Dazu wurde zunächst nur unterschieden zwischen „richtige“ oder „falsche Lösung“, wobei eine Lösung als richtig bewertet wurde, wenn erkennbar war, dass die Kinder die mathematische Struktur richtig erfasst haben. Rechenfehler (wie z.B. 2,40 € + 1,60 € = 3 €) beeinflussten die Bewertung nicht.

Die richtigen und falschen Lösungen verteilten sich wie folgt auf die beiden Strategiegruppen: Insgesamt 15 von 60 Kindern, die die Rechengeschichte nacherzählten, lösten die Aufgabe richtig. In der Gruppe der Kinder, welche lösungsrelevante Informationen unterstreichen mussten, gab es 19 richtige Lösungen. Der geringe Unterschied in der Anzahl richtiger Lösungen in beiden Gruppen lässt vermuten, dass die beiden Strategien sich in ihrer Wirksamkeit nicht unterscheiden, dass also die Variablen „angewandte Strategie“ und „Ausgang des Lösungsprozesses“ voneinander unabhängig sind. Ein χ^2-Test auf Unabhängigkeit bestätigte dies.

Vergleicht man die Anzahlen an richtigen Lösungen nach Texten getrennt, zeigt sich, dass die Geschichte mit eher unvertrautem Kontext erwartungsgemäß seltener richtig gelöst wurde (sechs richtige Lösungen von 60) als die Geschichte mit vertrautem Kontext (28 richtige Lösungen von 60). Ein χ^2-Test sprach für die Annahme, dass die Variablen „Kontext“ und „Ausgang des Lösungsprozesses“ voneinander abhängig sind. Dennoch überraschte, dass selbst zur Geschichte mit vertrautem Kontext nur knapp die Hälfte der Kinder eine richtige Lösung anfertigen konnte. Eine mögliche Erklärung dieses Ergebnisses kann in der Andersartigkeit und Komplexität der Texte liegen.

Weitere Auswertungen sind geplant:

Die Bewertung der Lösungen der Kinder wurde verfeinert. Dies soll an zwei Beispielen skizziert werden: Ein Kind wählt zwei Zahlen aus dem Text, addiert diese und hat seiner Meinung nach das richtige Ergebnis berechnet. Es hat die zur richtigen Lösung erforderlichen Schritte der Multiplikation, Addition und Division (Halbierung) nicht berücksichtigt. Ein anderes Kind bemerkt, dass jeweils zwei Zahlen aus dem Text miteinander multipliziert werden müssen, bildet anschließend die Summe der beiden Produkte, halbiert aber die erhaltene Summe nicht. Beide Lösungen werden nach der groben Beurteilung als „falsch" bewertet. Dennoch könnte man sagen, dass das zweite Kind die Aufgabe besser verstanden hat, zumindest eine Lösung anfertigen konnte, die eher der richtigen Lösung entspricht. Durch ein entsprechendes Punktsystem können die Lösungen differenzierter bewertet werden. Ein Vergleich des Effektes der beiden Strategien unter Verwendung der differenzierteren Bewertung wird noch erfolgen.

Ferner soll ein Vergleich des Effektes der beiden Strategien hinsichtlich des Geschlechts erfolgen. Mitunter ist möglich, dass sich zum Beispiel für Mädchen Nacherzählen als hilfreiche Strategie erweist, während die Jungen nicht davon profitieren. Ähnliches ist für die unterschiedlichen Leistungsgruppen (Mathetest und Leseleistung) möglich.

Neben der Auswertung der schriftlichen Bearbeitungen soll auch eine Auswertung der Interviews erfolgen. In dieser lässt sich u. a. beobachten, wie die Kinder die mathematischen Informationen wahrgenommen haben.

Literatur

Christmann, U., Groeben, N. (1999). Psychologie des Lesens. In B. Franzmann, K. Hasemann, D. Löffler, E. Schön (Ed.), *Handbuch Lesen* (pp. 145 - 223). München: Saur.

Cummins, D. D., Kintsch, W., Reusser, K., Weimer, R. (1988). The Role of Understanding in Solving Word Problems. *Cognitive Psychology, 20*, 405 - 438.

De Corte, E., Verschaffel, L. (1987). Using retelling data to study young children's word-problem-solving. In J. A. Sloboda, D. Rogers (Ed.), *Cognitive Processes in Mathematics* (pp. 42 - 59). Oxford: Oxford University Press.

Greer, B. (1997). Modelling realitiy in mathematics classrooms: the case of word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 293 – 307.

Kaufmann, S. (2008). Üben von Teilfähigkeiten. *Grundschule Mathematik, 16*(1), 32 – 35.

Kintsch, W. (1998). *Comprehension. A paradigm for cognition*. Cambridge u.a.: Cambridge University Press.

Reusser, K. (1997). Erwerb mathematischer Kompetenzen: Literaturüberblick. In F. E. Weinert, A. Helmke (Ed.), *Entwicklungen im Grundschulalter* (pp. 141 – 155). Weinheim: Psychologische Verlags Union.

Markus VOGEL, Heidelberg, Andreas EICHLER, Freiburg

Leitidee Daten und Zufall in der Sekundarstufe I

Mit den Bildungsstandards, welche die Kultusministerkonferenz im Jahr 2003 beschlossen hat, wurde die Leitidee Daten und Zufall verbindlicher Inhalt des Mathematikunterrichts für alle Bundesländer. Im Unterschied zur internationalen stochastikdidaktischen Diskussion nahm der Datenaspekt im deutschen Mathematikunterricht bis dahin gegenüber der Wahrscheinlichkeitsrechnung nur eine untergeordnete Rolle ein. Es stellt sich die Frage, wie die didaktische Schwerpunktverschiebung hin zu den Daten im Mathematikunterricht umgesetzt werden kann und wie Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu der einen Leitidee *Daten und Zufall* verknüpft werden können. Exemplarisch werden zentrale Beispiele und didaktische Überlegungen vorgestellt.

Inhalte der Leitidee Daten und Zufall

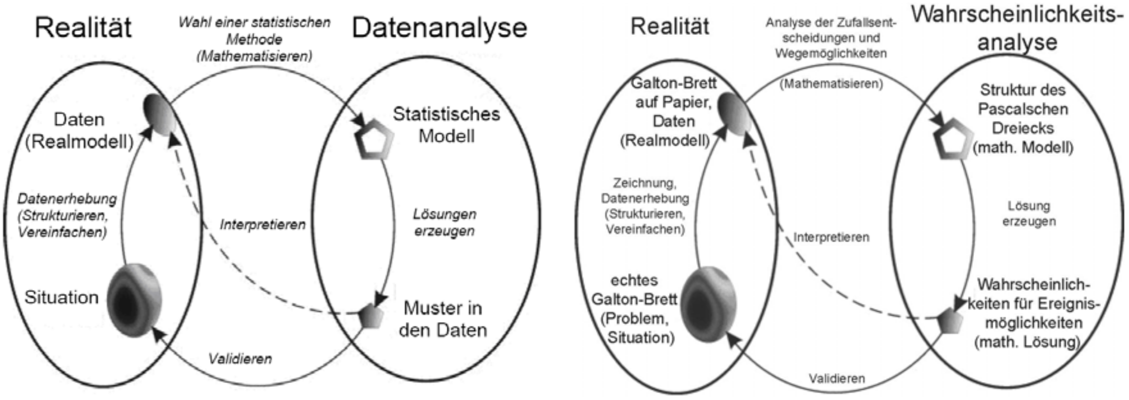
In den KMK-Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss aus dem Jahr 2003 (KMK, 2003) heißt es:

„Die Schülerinnen und Schüler
- werten graphische Darstellungen und Tabellen von statistischen Erhebungen aus,
- planen statistische Erhebungen,
- sammeln systematisch Daten, erfassen sie in Tabellen und stellen sie graphisch dar, auch unter Verwendung geeigneter Hilfsmittel (wie Software),
- interpretieren Daten unter Verwendung von Kenngrößen,
- reflektieren und bewerten Argumente, die auf einer Datenanalyse basieren,
- beschreiben Zufallserscheinungen in alltäglichen Situationen,
- bestimmen Wahrscheinlichkeiten bei Zufallsexperimenten."

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass es grundsätzlich darum geht, dass die Schülerinnen und Schüler lernen, Fragen an empirische Phänomene ihrer erlebten Umwelt zu stellen und mit den elementaren mathematischen Mitteln der Sekundarstufe I zu beantworten. Die Daten sind der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgeordnet und der statistische Aspekt geht über das bloße Erstellen von Grafiken als Teil des Sachrechnens deutlich hinaus. Der Zufall wird ebenfalls empirisch erfahrbar über die phänomenologische Wahrnehmung und experimentelle Untersuchungen eingebunden. Das didaktische Muster der phänomenologisch verankerten Leitidee Daten und Zufall basiert paradigmatisch auf dem Begriff der Mathematical Literacy (Deutsches PISA-Konsortium, 2001) als Grundverständnis mathematischer Bildung. Dies führt direkt zur Leitidee Modellieren.

Modellieren als prozessbezogene Komponente

Da nahezu jede mathematische Modellierung (realer Situationen) mit der Analyse von Daten verbunden ist, lässt sich die Datenanalyse (fast idealtypisch) im Modellierungskreislauf beschreiben. Mittlerweile wurde dieser in verschiedener Form und verschiedenen Spezifikationen seit den Veröffentlichungen von TIMSS und PISA diskutiert.



Spezifiziert man den Modellierungskreislauf nach Förster (Eichler & Förster 2008) als stochastischen Modellierungskreislauf ergibt sich – egal, ob allgemein als Datenanalyse oder exemplifiziert am Galton-Brett als Wahrscheinlichkeitsanalyse (Eichler & Vogel 2009) betrachtet: Die Daten bilden die Informationen, die aus Beobachtung, Umfrage oder Experiment hervorgehen, als Kontextzahlen in einem Realmodell der Situation ab. Über Mathematisierungsprozesse des Visualisierens, Simulierens und Formalisierens wird ein mathematisches Modell erstellt, das die Grundlage für statistische Bewertungen oder wahrscheinlichkeitstheoretische Voraussagen bildet. Lösungen, die sich aus Berechnungen auf dieser mathematischen Modellgrundlage ergeben, bilden ein mathematisches Muster ab, das sich im Kontext der Realmodellebene (ggf. unter Hinzunahme neuer Daten) zu bewähren hat.

Charakterisierung von Aufgaben

Nimmt man den Anspruch des Modellierens als genuine prozessbezogene Komponente der Leitidee Daten und Zufall ernst, kann sich Stochastikunterricht keinesfalls in Hieb- und Stichaufgaben (Eichler & Vogel, 2009) der Wahrscheinlichkeitsrechnung erschöpfen. Dies ist z. B. bei der Berechnung einer Wahrscheinlichkeit der Fall, bei der aufgrund der gestellten Textaufgabe das enthaltene Modell der Binomialverteilung mitsamt der notwendigen Parameter geliefert wird, so dass die bloße Berechnung bleibt. Solche Rechenaufgaben sind notwendig, sie haben ihren Platz bei der innermathematischen Berechnung eines stochastischen Modells, allerdings erfüllen sie alleine nicht den inhaltlichen Anspruch, der sich mit der

Leitidee Daten und Zufall verbindet: Das Beantworten von echten Fragen der Schülerinnen und Schüler an die Realität. Dabei lassen sich drei Ebenen unterscheiden (vgl. Eichler & Vogel, 2009):

- Aufgaben zur „realen“ Realität. Hier geht es um die Beantwortung gesellschaftlich relevanter Fragen, wie z. B. „Ist der Ärzteprotest hinsichtlich des vermeintlich zu geringen Einkommens dieser Berufsgruppe gerechtfertigt?“
- Aufgaben zu konstruierten realen Situationen. Hier geht es um die Anwendung von stochastischen Methoden und Verfahrensweisen anhand leicht handhabbarer realer Fragestellungen, wie z. B. „Springen kleine Papierfrösche weiter als große Papierfrösche?“
- Aufgaben zu konstruierten Situationen. Hier geht es um das mathematische Verständnis stochastischer Begriffe und Verfahren, wie z. B. „Wie verändert sich der Median, wie das arithmetische Mittel bei Hinzunahme eines extrem großen Wertes?“

Bei allen Aufgaben geht es weniger um das Abarbeiten von Algorithmen, sondern um die Beantwortung von Schülerfragen mit den ihnen zur Verfügung stehenden elementarmathematischen Mitteln. Deren Reichweite soll geschöpft werden, um die Grundideen, auf denen nachfolgende stochastische Verfahren basieren, schon auf dieser Ebene heraustreten und im Sinne des Spiralprinzips (Bruner, 1973) bedeutsam werden zu lassen (z.B. *zählender Korrelationskoeffizient* (Eichler & Vogel, 2009) als Vorbereitung für den *Korrelationskoeffizient nach Pearson*).

Daten *und* Zufall

Mit der einfachen Schülerfrage „Ist das jetzt immer so?“ lässt sich die elementarstatistische Beurteilung aus einer vorausgehenden Datenanalyse in die prognostische Aussage eines mathematischen Modells wenden, das auf dem Wahrscheinlichkeitsbegriff basiert. So werden die Leitidee Daten und die Leitidee Zufall zu der *einen* Leitidee Daten und Zufall verknüpft. Dies lässt sich an einfachen Beispielen, wie der Frage nach der farbspezifischen Gleichbefüllung von Schokolinsen-Tüten, auch für die Schülerinnen und Schüler der Sekundarstufe I entdecken: Wenn nach der Datenanalyse eines Klassensatzes von Schokolinsen sich die Vermutung der Gleichbefüllung ergibt, so lässt sich dies am Inhalt einer Modelltüte mit einem durchschnittlichen Farbanteil an der durchschnittlichen Gesamtzahl an Schokolinsen festmachen. In diesem mathematischen Modell kann mit Hieb- und Stichaufgaben der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mit computergestützten Simulationen gearbeitet werden (z. B. die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln, höchstens 2 rote Linsen in einer Tüte zu erhalten). Übertragen auf die reale

Modellebene ergeben sich daraus Ansatzpunkte für die Fragen eines informellen Hypothesentests: Ab welcher Anzahl von roten Kugeln in einer Packung könnte/sollte man an dem Modell der Gleichbefüllung zweifeln? Welche Fehler könnte man begehen? So lassen sich bereits auf elementarmathematischer Ebene der Sekundarstufe I die Grundideen der Hypothesentests der gymnasialen Oberstufe veranschaulichen.

Aspekte statistischen Denkens

Didaktische Grundideen, die hinter der Leitidee Daten und Zufall stehen, kristallisieren sich in den fünf Aspekten statistischen Denkens nach Wild & Pfannkuch (1999), die bei Schülerinnen und Schülern auszubilden sind:

- Daten bilden die Grundlage eines „guten“, weil nicht ausschließlich subjektiven Erkenntnisgewinns (Voraussetzung sind gute Daten).
- Unterschiedliche Datendarstellungen eröffnen unterschiedliche Perspektiven.
- Einsicht in und Akzeptieren von statistischer Variabilität ist Gegenstand stochastischen Denkens.
- Datenanalyse besteht im Suchen, Identifizieren und Beschreiben von Mustern in den Daten. Sie folgt der Modellierungsgrundgleichung Daten = Trend + Zufall (Eichler & Vogel, 2009).
- Statistik und realer Kontext stehen in einem sich gegenseitig bedingenden Verhältnis: Ergebnisse stochastischer Verfahren legitimieren sich durch ihre Bewährung im realen Kontext, Fragen der Realität lassen sich mit Mitteln der Statistik objektiv(er) beantworten.

Literatur

Bruner, J. S. (1973). *Der Prozess der Erziehung.* Düsseldorf: Schwann.

Deutsches PISA-Konsortium (Hrsg.). (2001). *Pisa 2000 -Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich*. Opladen: Leske+Budrich.

Eichler, A. & Förster, F. (2008). Ein Märchenspiel – Stochastische Modellbildung bei einem merkwürdigen Brettspiel. In A. Eichler & F. Förster (Hrsg.), *Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht,* Bd. 12 (S. 107-140). Hildesheim: Franzbecker.

Eichler, A. & Vogel, M. (2009). *Leitidee Daten und Zufall*. Heidelberg: Vieweg.

KMK (2003). *Beschlüsse der Kultusministerkonferenz. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss.* Online erhältlich unter (Stand 28.03.2010): „http://www.kmk.org/bildung-schule/“.

Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review,* 67(3), 223-248.

Rose VOGEL, Frankfurt am Main

Erste Schritte von Kindern in die Welt der Daten

Im Bereich der Mathematik wird die Welt der Daten häufig in unmittelbarem Zusammenhang mit der Welt des Zufalls gesehen und zusammen mit der Kombinatorik zum mathematischen Bereich der Stochastik zusammengefasst (Kütting & Sauer 2008, S. 10). Die Welt der Daten ist meist geprägt durch empirische Befunde und damit bestimmt durch Messergebnisse, die man in der deskriptiven Statistik mittels unterschiedlicher Darstellungsformate in eine Ordnung zu bringen versucht. Diese wiederum gibt die Möglichkeit Muster zu erkennen und damit den durch die Messergebnisse repräsentierten Ausschnitt unserer Alltagswelt genauer zu beschreiben. In der Welt des Zufalls dominieren der Umgang mit Unsicherheit und Ungewissheit. Es wird versucht mit mathematischen Mitteln die Ungewissheit in ein kalkulierbares Maß der Unsicherheit zu verwandeln (vgl. Martignon & Wassner 2005, S. 203). Die Verknüpfung dieser beiden Welten in der Stochastik erlaubt eine Verschränkung eines empirischen Ansatzes mit einem auf „mathematischem Denken“ beruhenden. Häufig bildet die „einfache Kombinatorik das Rückgrad elementarer Wahrscheinlichkeitsrechnung“ und damit die Grundlage für diese Verschränkung (vgl. Kütting & Sauer 2008, S. 10 und 75).

Projekt „erStMaL“ (early Steps in Mathematics Learning)

Das Projekt „erStMaL“ ist wie weitere Forschungsprojekte dem Forschungszentrum IDeA (Individual Development and Adaptive Education of Children at Risk) zugeordnet. Finanziert durch die vom Land Hessen initiierte LOEWE-Initiative wurde dieses Zentrum in Kooperation des Deutschen Instituts für Internationale Pädagogische Forschung (DIPF), des Sigmund-Freud-Instituts (SFI) und der Goethe Universität Frankfurt/Main eingerichtet. IDeA hat das Ziel Bedingungen und Risiken kindlichen Lernens zu erforschen und darüber hinaus „auch Aufschluss zu geben, wie Lernumgebungen gestaltet sein müssen, um den Lernerfolg jedes einzelnen Kindes wahrscheinlicher zu machen.“ (Gold 2009, S. 64)

Ein übergeordnetes Ziel der Längsschnittstudie „erStMaL“ ist die Erforschung der mathematischen Denkentwicklung vom Kindergartenalter bis in die Schulzeit. Dabei ist von besonderem Interesse: Welche Entwicklungslinien lassen sich in den verschiedenen mathematischen Inhaltsbereichen aufzeigen und welche Wechselbeziehungen bestehen zwischen diesen? Es werden folgende mathematische Inhaltsbereiche in Blick genommen: „number and quantitative thinking“, „geometry and spatial thinking“, „(ge-

„(geometric) measurement“, „patterns and algebraic thinkin“ und „data analysis“ (Sarama & Clements 2007). Mittels eigens für das Projekt entwickelten mathematischen Spiel- und Erkundungssituationen, setzen sich die Kinder in ihrer gewohnten Umgebung mit mathematischen Fragestellungen aus den genannten mathematischen Bereichen auseinander. In 12 Kindertagesstätten wird mit ca. 120 Kindern in Tandems und Kleingruppen gearbeitet. Für die Beschreibung dieser wenig standardisierten Situationen werden vordefinierte Beschreibungsmuster (Didaktische Design Pattern; Vogel & Wippermann 2005) verwendet.

Theoretischer Hintergrund

Durch die Neuordnung des mathematischen Themenkanons in den mathematischen Bildungsstandards findet die Welt der Daten und des Zufalls Eingang in die Grundschule und zählt auch in der Elementarbildung zu den Basisbereichen. Im Kontext der Längsschnittstudie „erStMaL“ bietet sich nun die Möglichkeit, Verdichtungspunkte stochastischer und kombinatorischer Denkentwicklung zu beschreiben, die in dem von kognitiver Entwicklung, Interaktion, Materialität und Handlung aufgespannten Raum zu verorten sind (vgl. Beiträge von M. Reimann und M. Huth in diesem Tagungsband). Givry & Roth (2006) betonen die Bedeutung der Multimodalität für die Konstitution von mathematischen Konzepten und machen damit deutlich, dass auch für die Rekonstruktion mathematischer Konzepte unterschiedliche Zeichensysteme in ihrer Verschränkung berücksichtigt werden müssen. Zusätzlich bietet der theoretische Ansatz des Conceptual Change (Vosniadou 2007) Anknüpfungspunkte. Im Bereich der stochastischen Denkentwicklung gibt es viele Studien die der Orientierung dienen und Impulse für eine Weiterentwicklung liefern (vgl. Wollring 1993). Basierend auf dem Ansatz der Grounded Theory geben Analyseverfahren wie die Interaktionsanalyse und die qualitativen Inhaltsanalyse Anregungen für die Entwicklung eines geeigneten Analyseverfahrens, das erlaubt mathematische Konzeptentwicklungen zu beschreiben und nutzbar für die Entwicklung von Lehr-Lern-Arrangements zu machen.

Erste Analyseergebnisse an ausgewählten Fällen

Die beiden ausgewählten Fälle geben Einblick, welche stochastische bzw. kombinatorische Konzepte sich bei Kindern im Alter von ca. 4 Jahren rekonstruieren lassen.

Im ersten Fallbeispiel beschäftigen sich Ayse, Kai (4;6 und 4;10 Jahre zum Zeitpunkt der Erhebung) und die begleitende Person (B) mit der Frage, in welchen verschiedenen Anordnungen können drei Zirkustiere (Elefant, Tiger und Affe) über ein Podest gehen laufen. Aus der mathematischen Perspektive geht es hier um eine Permutation von n = 3 Elementen. Das hier dargestellt Transkript gibt eine Sequenz aus der Spiel- und Erkundungssituation wieder, in der die Kinder bereits zwei Permutationen gefunden haben (Tiger – Affe – Elefant und E – A – T, von links nach rechts).

0109			B	und finden wir **noch** ne Reihenfolge wie die drüber
0110		>		laufen können/ *schaut Kai und Ayse an*
0111		>	Ayse	*schaut B an und grinst*
0112				*laut* **ja**\+
0113		>	Kai	*stellt Elefant auf, nimmt Affen in die Hand*
0114			B	ich glaub ein Tier war noch gar nicht **vo**rne\
0115	04:08		Kai	ja *unverständlich* der Affe ganz vorne *nimmt den*
0116				*Affen und setzt ihn auf das linke Ende des*
0117				*Podests* der Aff und der Elefant in der Mitte *nimmt*
0118				*nimmt Elefanten stellt ihn in die Podestmitte*
0119	04:15			und der *unverständlich stellt den Tiger an das*
0120				*rechte Ende des Podests*

Die Hauptakteurin war im bisherigen Verlauf Ayse, Kai hat die Handlungen von Ayse meist ergänzt bzw. vollendet. Nun ergreift Kai die Initiative und stellt eine weitere Reihenfolge auf das Podest und begleitet seine Handlung mit für das Bilden einer Reihe adäquater Begriffe wie „Affe ganz vorne“ und „der Elefant in der Mitte“. Es werden Sprachwendungen von Kai aufgenommen, die bisher nur von der erwachsenen Person verwendet wurden. Auch verarbeitet er in seiner gewählten Kombination den Hinweis der begleitenden Person.

Im zweiten Fallbeispiel spielen Mia und Predrag (4;2 und 4;4 Jahre zum

0066			B	Meint ihr da gewinnt jemand anderes/
0067				*legt Drehscheibe auf die Halterung*
0068		<	Predrag	*nickt kaum sichtbar*
0069		<	Mia	Ich bin so *zeigt erneut vier Finger*
0070				dann kann ich
0071			B	*Wer könnte denn jetzt gewinnen/ legt Drehscheibe*
0072				*zwischen Predrag und Mia*
0073			Mia	*Hebt den rechten Zeigefinger, schaut B an* Ich
0074			Predrag	*Schaut auf Drehscheibe, hebt den rechten Zeigefinger*
0075				Ich

Zeitpunkt der Erhebung) „Goldschatz“. Mit welcher Spielfigur auf dem Spielfeld in Richtung Goldschatz um ein Feld vorgegangen werden darf, wird mit Hilfe einer sogenannten „Glücksscheibe“ festgelegt. Auf einer zweifarbig eingefärbten Scheibe kann ein Zeiger in Rotation gebracht werden. Dieser bleibt nach einigen Drehungen stehen und zeigt auf eine Farbe. Der Spieler, der gedreht hat, kann seine Spielfigur bewegen, wenn diese die Farbe hat, auf die der Zeiger zeigt. Das Transkript beschreibt den Moment, in dem die Scheibe ausgewechselt und damit die Farbverteilung sich verändert hat. Bis zu diesem Zeitpunkt war die Scheibe zu Dreiviertel rot eingefärbt. Nun wird eine Scheibe ins Spiel gebracht, auf der die Farbverteilung von rot und gelb gleich verteilt ist. Beide Kinder bringen zum Ausdruck, dass sie eine Gewinnchance haben, obwohl bis zu diesem Zeitpunkt nur Mia gewonnen hat. Sie hatte sich zu Beginn die rote Spielfigur ausgewählt. Mia begründet ihren Erfolg darin, dass sie schon vier Jahre alt ist und deshalb die Scheibe in besonderer Weise drehen kann. Sie argumentiert damit mit einer Wahrscheinlichkeitsvorstellung, die stark subjektiven bzw. intuitiven Charakter zeigt (vgl. Wollring 1993, S. 69).

Zusammenschau

Die Analysen verdeutlichen, dass bei den Kindern stochastische und kombinatorische Konzepte vor allem in ihren Handlungen am Material zu erkennen sind. Ein adäquater sprachlicher Ausdruck ist nur in Ansätzen feststellbar.

Die Erstellung dieses Beitrags wurde gefördert durch die LOEWE-Initiative der Hessischen Landesregierung.

Literatur

Clements, D. H. & Sarama¸ J. (2007). Early Childhood Mathematics Learning. In F. K. Lester, F.K.(Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learing.* (S. 461-555). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Givry, D. & Roth, W.-M. (2006). Toward a New Conception of Conceptions: Interplay of Talk, Gestures, and Structures in the Setting. *Journal of Research in Science Teaching*, 43 (10), 1086-1109.

Gold, A. (2009). Wie sich soziale und neurokognitive Risiken auf das Lernverhalten auswirken. *Maganzin Forschung Frankfurt* [online], 1, 64-66. Verfügbar unter: http://www.idea-frankfurt.eu/pdf/ueber-idea/beitrag-ueber-idea-im-magazin-forschung-frankfurt [14.2.2010].

Kütting, H. & Sauer, M.J. (2008). *Elementare Stochastik. Mathematische Grundlagen und didaktische Konzepte.* 2. Auflage. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Martignon, L. & Wassner, Ch. (2005). Schulung frühen stochastischen Denkens von Kindern. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft, 8. Jg., 2*, 202-222.

Vogel, R. & Wippermann, S. (2005). Transferstrategien im Projekt VIB – didaktische Design Patterns zur Dokumentation der Projektergebnisse. In Ch. Bescherer (Hrsg.), *Einfluss der neuen Medien auf die Fachdidaktiken* (S. 39-60). Baltmannsweiler: Schneider.

Vosniadou, S. (2007). The Cognitive-Situative Divide and the Problem of Conceptual Change. *Educational Psychologist*, 42 (1), 55-66.

Wollring, B. (1993). Spielinterviews zur Erkundung st ochastischer Vorstellungen bei Kindern im Vor- und Grundschulalter. In J.H. Lorzenz (Hrsg.), *Mathematik und Anschauung* (S. 67-91). Köln: Aulis Verlag.

Andreas VOHNS, Klagenfurt

Mathematik im Kontext – Bericht aus dem Projekt „Fächerkonzepte und Bildung“

Ein (Schul-)Fach zu verstehen bedeutet u.a., es in einen größeren Kontext zu stellen. Zum Beispiel in den Kontext des Fächerkanons der Sekundarstufe I. So können Gemeinsamkeiten mit, vor allem aber Unterschiede zu anderen Fächern betrachtet und der „Rationalitätsmodus“ eines Faches, seine Besonderheiten im Hinblick auf Menschen- und Weltbilder herausgearbeitet werden. Seit Herbst 2008 arbeiten über 20 Didaktiker(innen) verschiedener Fächer an dem Projekt „Fächerkonzepte und Bildung“, dass nach Formen der bildungspolitischen, -theoretischen und unterrichtspraktische Realisation eines solchen Verständnisses der Fächer sucht. Wir gehen dabei von folgenden gemeinsam geteilten Positionen aus:

- **Fächer sind unverzichtbare Elemente** von Bildung. Sie stellen Kristallisationspunkte von Wissen und Kompetenzen, aber auch von Modi der Weltbegegnung (Dressler 2007) dar.
- Gleichwohl bestehen **Zweifel**, ob die Fächer in ihrer gegenwärtigen schulbezogenen Verfasstheit ihre Bildungsaufgabe in wünschenswertem Ausmaß erfüllen. Dies betrifft die Frage, ob der **Welt- und Menschenbild** vermittelnde Kern der Fächer hinreichend deutlich wird, weiters die Frage, ob das **Verhältnis der Fächer** zueinander, die Differenzen und die Komplementaritäten in den Blick kommen. Schließlich kann auch bezweifelt werden, ob die Fächer ihre Aufgabe hinsichtlich Vorbereitung auf **Alltags-Lebensbewältigung** ausreichend erfüllen.
- Ziel des Projekts ist eine **Neuerfindung des Kern-Kanons der Schulfächer**, ausgehend von den bestehenden Fächern der Sekundarstufe I, aber unter Offenhalten des Ergebnisses dieser Neuerfindung. Jedenfalls scheint eine **Bündelung** zur Ermöglichung einer Gesamtsicht und zur Fokussierung von Differenzen angebracht. **Motor der Neuerfindung** sind der Anspruch, **Modi der Weltbetrachtung** in ihrer Spezifität und in ihrem Verhältnis zueinander explizit zu machen, und notwendiges **Alltagswissen** in die Fächerkonzepte aufzunehmen.
- Es geht nicht darum, eine konsensuelle Gesamtsicht zu entwickeln, sondern darum, die **Möglichkeit von Gesamtsicht zu erschließen,** zunächst für die Gruppe der am Projekt Beteiligten, in der Folge für Lehrer(innen), Schüler(innen) und alle daran Interessierten.

Zum Fachkonzept der Mathematik

Mit Blick auf Mathematik und Mathematikunterricht konkretisiert, geht es uns um die Frage, wie ein Reflexionsprozess angestoßen werden kann, der die individuelle und gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik, ihren Welt- und Menschenbild vermittelnden Kern und die Chancen und Grenzen des mathematischen Zugangs zur Welt versteh- und diskutierbar macht. Was die individuelle und gesellschaftliche Bedeutung von Mathematik anbelangt, haben wir es mit einer durchaus gegenläufigen Entwicklung zu tun. Zunehmende Teile unserer Gesellschaft sind durch und durch von Mathematik durchzogen, im wirtschaftlichen Bereich von der industriellen Fertigung über die betriebliche Planung bis zum Marketing. Im wissenschaftlichen Bereich angefangen mit traditionell mathematiknahen Gebieten wie der Physik oder allgemeiner den Naturwissenschaften, bedienen sich immer mehr auch Gesellschaftswissenschaften oder etwa Linguistik mathematischer und informationstechnischer Methoden. Nicht zuletzt sind nahezu alle unsere Lebensbereiche in zunehmendem Maße Gegenstand statistischer Erfassung. Sollten wir dann nicht zunehmend mehr Mathematik anwenden, sie verstehen oder uns jedenfalls mit ihr auseinandersetzen können? Im Sinne der Anforderungen der aktiven, operativen Beherrschung ist dies offenbar nicht der Fall. Es ist zwar richtig, dass Zahlen, Maße und geometrische Begriffe uns tagtäglich in unserem Alltag begegnen, vor allem dort, wo es gilt, Übersicht über zeitliche, räumliche und finanzielle Dinge zu erlangen. Jeder Einzelne von uns erfasst dabei seine Umwelt und plant seinen Alltag mithilfe zahlreicher mathematischer Kategorien. Wir sehen runde und eckige Tische, reden von parallelen Straßen und monieren schiefe Wände als Pfuscherei. Wir richten unsere Leben an der Uhr, am Kalender, am Stundenplan, am Kontostand und Preisvergleichen aus und bekommen Pensionen. Wir vergleichen unser Körpergewicht am Ideal des BMI und die Note bei der Schularbeit am Durchschnitt der Klasse, wir suchen Wohnungen mit ausreichender Wohnfläche, in guter Lage, zum angemessenen Preis. Dennoch bleibt die aktive Beschäftigung mit Mathematik individuell auf eine relativ elementare Ebene beschränkt: Das, was Menschen in ihrem Alltag nachweislich in nennenswerten Umfang mit Mathematik zu tun haben, hat vor allem mit Zahlen, Maßangaben und geometrischen Grundbegriffen zu tun, einige einfache Operationen (Vergleichen, Schätzen, Messen, Grundrechnungsarten) kommen hinzu (Vgl. Heymann 1996, S. 136f).

Es ist auch nicht zwangsläufig so, dass zunehmende Mathematisierung des gesellschaftlichen Lebens unmittelbar dazu führt, dass wir immer mehr Mathematik verstehen und anwenden können müssten. Anspruchsvolle

Mathematik wird zunehmend an Computer und aufwändig gestaltete Software ausgelagert, die den Benutzer(inn)en scheinbar problemlose Hilfsmittel zur Verfügung stellt, denen „von außen“ die in sie „investierte Mathematik nicht mehr anzusehen ist“(Heymann 1996, S. 137). Als Benutzer(in) muss man diese investierte Mathematik auch nicht „verstehen“ – zumindest ist ein anderes Verstehen nötig als dasjenige, welches zur „händischen“ Ausführung nötig wäre. Entscheidend scheint mit Blick auf diese eher indirekte Betroffenheit und die arbeitsteilige Organisation moderner Gesellschaften, dass alle Schüler(innen) einen Eindruck davon bekommen, wozu Mathematik grundsätzlich angewandt werden kann und welche Einschränkungen mit dem spezifischen Weltzugang der Mathematik verbunden sind. Zur Erörterung dieser Frage wurde diese Frage zu drei möglichen Reflexionsanlässen verdichtet:

- In welchen Bereichen unseres gesellschaftlichen Lebens gehört Mathematik besonders fest zum Inventar? Wieso haben wir uns eigentlich gerade dort besonders daran gewöhnt?
- Warum wird Mathematik (vor allem) zur Stützung von (Massen-) Kommunikation eingesetzt? Was leistet sie dort, was ohne sie nicht, nicht so gut, nicht so einfach zu leisten wäre?
- Was sind insbesondere die besonderen Erkenntnis- und Konstruktionsmittel der Mathematik und worin liegen Vor- und Nachteile, sich auf mathematische Erkenntnis- und Konstruktionsmittel einzulassen?

Im Vortrag wurde an mehren Beispielen erläutert, dass als Besonderheit des mathematischen Weltzugangs vor allem die Materialisierung von Abstrakta angesehen werden kann. Mathematik stellt symbolische Darstellung zur Beschreibung abstrakter Eigenschaften (vor allem: Beziehungen und Zusammenhänge) zur Verfügung. Sie gibt diesen Abstrakta materielle Gestalt (Rechensteine, Zahlzeichen, elektrische Impulse im Computer) und kann aus regelgeleiteter Manipulation ihrer Darstellungen im Anwendungskontext relevante Verdichtungen und Zuspitzungen leisten. Für die Verwendung von Mathematik in außermathematischen Entscheidungssituationen sind dabei wenigstens drei Momente zu bedenken, die gleichermaßen Stärke, wie Beschränktheit des mathematischen Zugangs zur Welt ausmachen.

Mathematik wirkt indirekt: Allein „die Tatsache, dass zwei mal zwei vier ist, oder dass der Pythagoräische Lehrsatz gilt, hat keine unmittelbaren Auswirkungen auf unser Handeln. Erst wenn sich herausstellt, dass mit einem Produkt kein Gewinn zu machen ist, oder wenn der Pythagoras zur Berechnung von Kräften bei eine Brückenbau gebraucht wird, hat die Mathematik einen Einfluss auf Entscheidungen“ (Fischer 2006, S. 78). Der „mathematische Blick“ kann dabei niemals helfen, die Relevanz der im konkreten Kontext betrachteten Zusammenhänge und Beziehungen selbst einzuschätzen. Überall dort, wo Mathematik genutzt wird, um Entscheidungen automatisiert ablaufen zu lassen, bestehen daher ernorme Missbrauchspotenziale.

Mathematik funktioniert: Mathematisches Operieren heißt in letzter Konsequenz, das Denken systematisch auszulagern und sich auf Routinen zu stützen, bei denen man sich gerade nicht in jedem Schritt fragt, warum die durchgeführte Handlung eigentlich zum gewünschten Ziel führt. Didaktisch ergibt sich das Dilemma, dass man zwar weitgehendes Verstehen auch der Grundlagen mathematischer Verfahren für wertvoll halten kann, es gesellschaftlich betrachtet aber keinen Sinn macht, dass jeder jede Mathematisierung vollständig verstehen muss, um von ihren Segnungen profitieren zu können (Ansonsten hätten wir weder Taschenrechner noch CD-Player).

Mathematik vergisst: Um überhaupt Mathematisieren zu können, muss die Komplexität der Realität stets vereinfacht werden. Das muss jede Wissenschaft, Mathematik fordert allerdings zu einer besonders strikten Festlegung auf das, was aus übergreifender Sicht als entscheidend angesehen werden und somit Gegenstand der Mathematisierung sein soll. Da die Entscheidung, was vergessen werden kann, nicht immer bewusst getroffen wird, stellt das Vergessen insbesondere dann eine Gefahr dar, wenn bereits die bloße Verwendung mathematischer Hilfsmittel als Kennzeichen größerer Objektivität angenommen wird.

Im Sinne reflektierter Entscheidungsfähigkeit scheint es wesentlich, dass man über die Reichweite mathematischer Argumente und Auswirkungen ihrer Anwendung auf zunehmende Bereiche gesellschaftlichen Lebens nachdenkt. Verstehen heißt ja nicht nur, sich zu vergewissern, wie und warum etwas funktioniert. Verstehen meint auch, den Dingen einen Sinn zu geben, zu ergründen, was mathematische Verfahren mit uns und den Dingen anstellen, welche Schüsse sie zulassen und welche nicht.

Literatur

Dressler, B. (2007). Modi der Weltbegegnung als Gegenstand fachdidaktischer Analysen, *Journal für Mathematik-Didaktik* (28) 2007, Heft 3-4, S. 249-262.

Fischer, R. (2006). *Materialisierung und Organisation – Zur kulturellen Bedeutung der Mathematik*. München/ Wien: Fokus.

Heymann, H.W. (1996). *Allgemeinbildung und Mathematik*. Weinheim/ Basel: Beltz.

Vohns, A. (2010). Mathematik im Kontext. In: Helmerich, M. & Lengnink, K. & Nickel, G. & Rathgeb, M. (Hrsg.), *Mathematik verstehen – Philosophische und didaktische Perspektiven*, Mühltal: Verlag Allgemeine Wissenschaft (Im Erscheinen).

Maike VOLLSTEDT, Kiel

Eine kulturelle Reflexion von Ähnlichkeiten und Unterschieden exemplarischer Sinnkonstruktionen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland und Hongkong

1. Fokus und Design der Studie

Welchen Sinn konstruieren Schülerinnen und Schüler im Kontext schulischen Mathematiklernens? Inwiefern lassen sich in verschiedenen Kulturen unterschiedliche Ausprägungen erkennen? Diese Fragen stehen im Fokus meines Dissertationsprojekts und werden im Rahmen einer qualitativ-empirischen Studie untersucht, die in Deutschland und Hongkong durchgeführt wurde. Datengrundlage sind insgesamt 34 leitfadengestützte Interviews. Sie wurden in beiden Ländern mit jeweils 17 freiwilligen Schülerinnen und Schülern aus drei Klassen der 9. bzw. 10. Klassenstufe durchgeführt. Die Interviews begannen mit einer ca. 5-min. Sequenz nachträglichen lauten Denkens (Gass & Mackey, 2000) basierend auf einer Videographie der jeweils letzten Mathematikstunde. Es folgten Fragen zu verschiedenen Gebieten, z.B. nach Assoziationen zu(m) Mathematik(unterricht), Gefühlen, die mit Mathematik(unterricht) verbunden werden, Lösungsstrategien bei der Bearbeitung von Aufgaben, oder zur Rolle von Mathematik für das eigene Leben. Die transkribierten Interviews wurden in Anlehnung an die Grounded Theory kodiert (Strauss & Corbin, 1996). Aus den dann rekonstruierten 17 Sinnkonstruktionen wurden schließlich sieben Sinnkonstruktionstypen gebildet (Kelle & Kluge, 1999). Um die Ergebnisse der Studie kulturell zu reflektieren, wurden die relativen Häufigkeiten der Sinnkonstruktionen länderweise explorativ untersucht und die Mittelwerte anhand von t-Tests miteinander verglichen. Die relativen Häufigkeiten beschreiben dabei den prozentualen Anteil einer Sinnkonstruktionsart (bzw. eines -typs) an allen Sinnkonstruktionsarten (bzw. -typen) einer Person. Auf diese Weise kann unabhängig von der Länge der Interviews eine individuelle Gewichtung der Sinnkonstruktionen berücksichtigt werden. Die so gefundenen Ergebnisse dienen als Grundlage für die Bildung kulturspezifischer Hypothesen zu Gemeinsamkeiten und Unterschieden.

2. Sinn und Sinnkonstruktion

Wie bereits an anderer Stelle dargelegt (Vollstedt & Vorhölter, 2008), verstehe ich Sinn als persönliche Relevanz, die einem (Lern-) Gegenstand oder einer Handlung beigemessen wird. Durch die Einbettung der Arbeit in den Kontext der Bildungsgangforschung ist die Perspektive der Lernenden von zentraler Bedeutung (Meyer, 2005, S. 18). Beim Lernen von bzw. bei der

Auseinandersetzung mit Mathematik kann sich der Sinn für die Schülerinnen und Schüler in Form von Bedeutung, Nutzen, Ziel, Zweck oder Wert eines mathematischen Gegenstandes bzw. einer Handlung ausgestalten.

Die Konstruktion von Sinn findet statt, wenn sich ein Individuum, also ein Schüler oder eine Schülerin, in einer Situation, z.B. bei der Auseinandersetzung mit fachlichen Inhalten im Mathematikunterricht, befindet. Das Individuum bringt verschiedene Voraussetzungen mit, da es von verschiedenen persönlichen Merkmalen (Überzeugungen, Ziele, Denkstil u.a.) sowie von Hintergrundmerkmalen (kultureller oder Migrationshintergrund, Alter, u.a.) geprägt ist. Diese Merkmale werden als relevant für die Konstruktion von Sinn angenommen. Die rekonstruierten Sinnkonstruktionen bewegen sich zwischen Pflichterfüllung, kognitiver Herausforderung und sozialer Eingebundenheit und weisen eine unterschiedliche Intensität an Individuumsbezogenheit und Mathematikbezogenheit auf.

In den folgenden Abschnitten werden nun Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den deutschen und den Hongkonger Ergebnissen aufgezeigt und mögliche Erklärungsansätze, die auf den kulturellen Hintergrund der Lernenden verweisen, aufgezeigt.

3. West vs. Ost: Kultureller Hintergrund und Mathematiklernen

Wie oben beschrieben, wurde die Studie in zwei Ländern durchgeführt. Deutschland fungiert dabei als Beispiel einer westlichen Kultur. Hongkong als Beispiel einer ostasiatischen Kultur ist Teil der *CHC* (*Confucian Heritage Culture*), also durch konfuzianische Wertvorstellung in Erziehung und Bildung geprägt.

Leung (2001) beschreibt verschiedene Eigenschaften von Mathematikunterricht und dem Lernen von Mathematik, die in ostasiatischen und westlichen Kulturen unterschiedlich ausgeprägt seien. Zur Kennzeichnung der Tendenzen verwendet er Dichotomien, nutzt also überzeichnete Idealtypen zur Markierung der Endpole der jeweiligen Kontinua. Zudem stellt er Verbindungen zwischen den Eigenschaften und zugrunde liegenden kulturell geprägten Werten her. Für das Lernen von Mathematik stellt Leung folgende Begriffspaare auf: *rote learning* vs. *meaningful learning* (Schemata (auswendig) lernen vs. sinnhaftes Lernen), *studying hard vs. pleasurable learning* (hartes Arbeiten vs. Lernen mit Freude) und *extrinsic* vs. *intrinsic motivation* (extrinsische vs. intrinsische Motivation). Lee (1996) charakterisiert den konfuzianisch geprägten Hintergrund von Lernenden darüber hinaus, indem er zentrale Aspekte für das Lernen in CHC-Ländern in Zusammenhang mit den Lehren von Konfuzius stellt: die hohe Wichtigkeit von Bildung für die eigene Person und das Gemeinwohl, die Rolle von hartem und ausdauerndem Üben für den Bildungserfolg sowie die historische Bedeutung von zentralen Examina.

4. Kulturelle Reflexion einiger exemplarischer Ergebnisse

Da bei der Typenbildung verschiedene Sinnkonstruktionsarten zu Typen zusammengefasst werden, verwischen die Unterschiede und Gemeinsamkeiten, die sich auf Ebene der Sinnkonstruktionsarten zwischen Deutschland und Hongkong finden lassen. Im Folgenden bleiben die Typen daher unberücksichtigt. Unterschiede bei Sinnkonstruktionsarten werden dann berichtet, wenn die Mittelwerte signifikant voneinander abweichen ($p < 0.05$). Ähnlichkeiten werden erwähnt, wenn der p-Wert möglichst groß ist ($p > 0.7$) und die Effektstärken sehr klein sind (Cohens $d < 0.2$).

Gemeinsamkeiten lassen sich beispielsweise bei der Sinnkonstruktion *Pflicht* finden ($p = 0.78$, $d = 0.10$), die sich auch in den zugrundliegenden Kodes der verschiedenen Kategorien weiter fortsetzen. Pflichterfüllung scheint dementsprechend in beiden Kulturen eine ähnliche Rolle zu spielen.

Die persönliche Relevanz der aktiven Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten liegt der Sinnkonstruktion *Aktives Betreiben von Mathematik* zugrunde. Bei dieser Sinnkonstruktion lassen sich Unterschiede zwischen den Ergebnissen aus Deutschland und Hongkong ($p < 0.00$, $d = -1.37$) dahingehend auffinden, dass das Betreiben von Mathematik insbesondere zur Prüfungsvorbereitung für die interviewten Hongkonger Schülerinnen und Schüler wichtiger ist als für die deutschen. Damit gehen auch Unterschiede bei der Sinnkonstruktion *Prüfungen*, die die Relevanz von Prüfungen für den weiteren Lebensweg charakterisiert, einher. Das *Hong Kong Certificate of Education Examination* (HKCEE, vergleichbar mit dem *General Certificate of Secondary Education* (GCSE) im britischen Schulsystem) hat eine zentrale Bedeutung für den weiteren Bildungsweg der Schülerinnen und Schüler, da von den Ergebnissen u.a. die weitere Fächerwahl und die Dauer des weiteren Schulbesuchs abhängt. Dementsprechend wird dem HKCEE eine besondere persönliche Relevanz von den Hongkonger Lernenden zugeschrieben, die im deutschen Datenmaterial etwa bezogen auf das Abitur oder andere Prüfungen so nicht zu finden ist ($p < 0.00$, $d = -1.36$).

Ein kulturell begründeter Erklärungsansatz dieser Unterschiede liegt einerseits im *belief* des *practice makes perfect* (Li, 2006), der in der CHC tief verwurzelt ist. Lernen ist dort mit hoher Anstrengung und Fleiß verbunden und weniger durch ein angeborenes Talent bestimmt (Lee, 1996). Der hohe Stellenwert von zentralen Prüfungen ist andererseits historischer Teil der CHC, da schon seit dem Jahr 597 n. Chr. selektive Prüfungen zur Vergabe hoher Offizierspositionen durchgeführt wurden. Durch das Bestehen dieser Prüfungen konnte selbst ein Kleinbauer in eine politische Führungsposition gelangen und sozial aufsteigen (Leung, 2008).

5. Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Beitrag beschreibt kurz den Zusammenhang zwischen Sinnkonstruktion und kulturellem Hintergrund der interviewten Schülerinnen und Schüler. Dabei zeigen sich auf Ebene der Sinnkonstruktionsarten für die exemplarisch diskutierten Beispiele sowohl Gemeinsamkeiten als auch Unterschiede. Für letztgenannte können Erklärungsansätze gefunden werden, die auf kulturelle Unterschiede zwischen Deutschland und Hongkong rekurrieren. Für weitere Forschung bleibt noch, die entwickelten Hypothesen auf breiterer Datengrundlage zu testen.

Literatur

Gass, S. M., & Mackey, A. (2000). *Stimulated Recall Methodology in Second Language Research. Second language acquisition research; Monographs on research methodology*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kelle, U., & Kluge, S. (1999). *Vom Einzelfall zum Typus: Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. Qualitative Sozialforschung: Vol. 4.* Opladen: Leske + Budrich.

Lee, W. O. (1996). The Cultural Context for Chinese Learners: Conceptions of Learning in the Confucian Tradition. In D. A. Watkins & J. B. Biggs (Eds.), *The Chinese Learner. Cultural, Psychological and Contextual Influences* (25–41). Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong; The Australian Council for Educational Research.

Leung, F. K. S. (2001). In Search of an East Asian Identity in Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 47*(1), 35–51.

Leung, F. K. S. (2008). In the books there are golden houses: Mathematics assessment in East Asia. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 40*(6), 983–992.

Li, S. (2006). Practice Makes Perfect: A Key Belief in China. In F. K. S. Leung, K.-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions. A Comparative Study of East Asia and the West. The 13th ICMI Study* (pp. 129–138). New York: Springer.

Meyer, M. A. (2005). Die Bildungsgangforschung als Rahmen für die Weiterentwicklung der allgemeinen Didaktik. In B. Schenk (Ed.), *Studien zur Bildungsgangforschung: Vol. 6. Bausteine einer Bildungsgangtheorie* (17–46). Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Strauss, A. L., & Corbin, J. (1996). *Grounded Theory: Grundlagen qualitativer Sozialforschung.* Weinheim: Beltz.

Vollstedt, M., & Vorhölter, K. (2008). Zum Konzept der Sinnkonstruktion am Beispiel von Mathematiklernen. In H.-C. Koller (Ed.), *Studien zur Bildungsgangforschung: Vol. 24. Sinnkonstruktion und Bildungsgang* (25–46). Opladen: Barbara Budrich.

Sieglinde WAASMAIER, Hauptschule Frontenhausen, Universität Passau

Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule – Entwicklung und Förderung fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen im Rahmen eines Unterrichtsprojektes in der 7. und 8. Jahrgangsstufe

1. Hintergrund der Untersuchung

Im Rahmen der schulischen Grundbildung nimmt das Fach Mathematik einen hohen Stellenwert ein. Auch für die Selektion im Hinblick auf die Wahl der Schulart bzw. des Schulzweiges sowie für die Berufswahl spielt es eine entscheidende Rolle. Diverse Studien machen Defizite der Lernenden bzw. Schulabgänger im Bereich der Mathematik deutlich. Mit Blick auf die Ausbildungsfähigkeit beklagt die Wirtschaft u. a. Defizite in Mathematik. Vielfach wird die Unterrichtssituation an Hauptschulen aus unterschiedlichsten Gründen als sehr schwierig charakterisiert. Obwohl den Lehrpersonen die konstruktivistische Auffassung von Lernen bekannt ist, neigen sie dazu, den Schülerinnen und Schülern in der noch verbleibenden Restschulzeit möglichst viel beibringen zu wollen und greifen deshalb auf eher traditionelle Formen der Unterweisung zurück.

2. Untersuchungsdesign

Die Untersuchung stützt sich auf ein Unterrichtsprojekt, das den regulären Mathematikunterricht in der 7. und 8. Jahrgangsstufe in einer Hauptschulklasse umfasste. Die Studie ist als Fallstudie konzipiert: Zum einen diente die von der Referentin als Klassenleiterin geführte Klasse als Fall, zum anderen wurden einzelne Schülerinnen und Schüler dieser Klasse in ihrer Kompetenzentwicklung untersucht. Als Datenmaterialien standen von der Lehrperson angefertigte Unterrichtsprotokolle sowie Schülerhefteinträge in Form von Lerntagebüchern zur Verfügung. Außerdem wurden von den Lernenden Aufsätze - beispielsweise zu Vorerfahrungen, zu Erfahrungen im Projekt oder zum Schreiben im Mathematikunterricht - verfasst. Ein Fragebogen zum Unterricht lieferte weitere Daten. Ergebnisse der in Bayern verpflichtend durchgeführten Jahrgangsstufenarbeiten sowie der zentralen Abschlussprüfungen am Ende der Hauptschulzeit konnten in der Untersuchung Verwendung finden. Sie ermöglichten einen Blick auf die Fachkompetenz der Versuchsklasse im landesweiten Vergleich. Für die Fallstudien einzelner Schülerinnen und Schüler standen Materialien, beispielsweise Auszüge aus den Schülerbögen, aus der gesamten Schulzeit zur Verfügung.

3. Charakterisierung des Unterrichts vor dem Projekt

Der Unterricht vor Beginn der Projektphase wurde folgendermaßen charakterisiert: Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten wenig aktiv-entdeckend, auch wurde wenig Anschauungsmaterial eingesetzt. Die Lernenden rechneten viel aus Schulbüchern und dachten wenig über Aufgaben nach. Der Umgang mit Fehlern war negativ geprägt, es herrschte ein negatives Selbstkonzept vor und Mathematik war überwiegend mit negativen Emotionen behaftet. Im Mathematikunterricht wurde wenig geschrieben. Ungefähr 40 Prozent der Lernenden hatten mangelhafte Leistungen in Mathematik, wobei die Schülerinnen und Schüler selbst von ihren schlechten Leistungen im Fach Mathematik berichteten. Bezüglich der Lehrperson beklagten die Lernenden die unzureichende Lehrererklärung, eine nicht so interessante Unterrichtsgestaltung, nicht genügend zur Verfügung gestellte Zeit, einen negativen Umgang mit Fehlern und eine unbefriedigende Arbeit mit Aufgaben.

4. Charakterisierung des Unterrichts im Projekt

Die im Projektzeitraum angefertigten Unterrichtsprotokolle gaben Aufschluss über die Konzeption des Unterrichts. Die Schülerinnen und Schüler bereiteten stets die auf das Grundwissen bezogene Kopfrechenphase vor und führten diese auch in der Klasse selbstständig durch. Anschließend erhielten die Lernenden Arbeitsaufträge, die sie selbstständig erledigten und auch weiterführten. Die Schülerinnen und Schüler gewannen dabei selbst Erkenntnisse und wandten diese bei weiterführenden Arbeitsaufträgen selbstständig an. Bei der Erledigung der Aufträge arbeiteten die Lernenden zunächst alleine, dann in Partnerarbeit oder in der Gruppe. Tempo, Lösungswege und Anspruchsniveau wurden individuell gewählt. Die selbst gewonnenen Erkenntnisse, Lösungsideen und Vorgehensweisen wurden im Heft festgehalten und in der Gruppe oder im Klassenverband präsentiert. Am Ende der Unterrichtsstunden schrieben die Schülerinnen und Schüler Reflexionen in ihr Schülerheft.

5. Wirkungen des Unterrichts im Projekt

Die Auswertung der Forschungsmaterialien ergab, dass die Lernenden ihre Leistungen in Mathematik beträchtlich steigern konnten. Die Entwicklung der Zeugnisnoten sowie Ergebnisse in Jahrgangsstufenarbeiten und in der besonderen Leistungsfeststellung zum Qualifizierenden Hauptschulabschluss bestätigen dies. Bezogen auf Kompetenzmodelle beispielsweise in den Bildungsstandards lässt sich ebenfalls eine Kompetenzsteigerung nachweisen. Neben der Fachkompetenz wurden auch Methoden-, Selbst- und Sozialkompetenz weiterentwickelt.

Die Lernenden konnten selbstständig mathematische Kenntnisse gewinnen, Fähigkeiten und Fertigkeiten weiterentwickeln, eigene Fehler und Strategien entdecken, mit verschiedenen Lösungswegen arbeiten und individuelle Lösungsideen entwickeln. Dadurch, dass sie Kriterien zur Leistungsbewertung erkannten, war es möglich, die Leistungsbewertung in den Lernprozess einzubeziehen.

Die vielfältigen Möglichkeiten handlungsorientierten Arbeitens ermöglichten einen selbstständigen Erkenntnisgewinn, höhere Motivation, ein besseres Verständnis und bessere Leistungen in Mathematik.

Anschaulichkeit des Unterrichts förderte die Begriffsbildung und das Erkennen von Zusammenhängen.

Soziales Lernen war mit hoher Motivation verbunden und ermöglichte das Lernen aus Fehlern. Gegenseitiges Erklären sowie das Bewusstwerden verschiedener Denk- und Arbeitsweisen der Mitschülerinnen und Mitschüler wirkten sich positiv auf den Lernprozess aus.

Außer in den Kopfrechenübungen wurde das Üben von den Lernenden kaum wahrgenommen bzw. nicht als negativ eingeschätzt. Die eingesetzten Übungsaufgaben entsprachen nicht der traditionellen Form des Übens, bei der viele gleichartige Aufgaben eher monoton aneinandergereiht werden.

Die Lernenden schrieben offen über ihre Fehler und Schwierigkeiten und thematisierten Fehler als Ansatzpunkte für das eigene Weiterlernen sowie für Hilfsmaßnahmen von Seiten der Lehrkraft.

Die Reflexion über das eigene Denken erkannten die Lernenden als positiv für den Lernprozess.

Über Mathematik zu schreiben war für die Schülerinnen und Schüler zunächst neu. Nach einer Einarbeitungszeit wurde das Schreiben von den Lernenden positiv bewertet, für den Lernprozess als sehr wichtig erkannt und für die eigene Leistungssteigerung mitverantwortlich gesehen.

Für die Bewertung der Leistungen waren vor allem die Sach- und Individualnorm bedeutsam, wobei die im Unterricht eingesetzten Maßnahmen von den Lernenden als wesentlich für den individuellen Lernerfolg erkannt und dargestellt wurden.

Gerne bearbeiteten die Lernenden anspruchsvolle, herausfordernde Aufgaben.

Ebenso konnte eine Entwicklung eines positiven Selbstkonzepts bezüglich mathematischer Inhalte, Tätigkeiten und Strategien festgestellt werden.

Fast ausschließlich positiv waren die Schüleraussagen zu Emotionen und Motivation in bzw. nach der Projektphase.

Für den Lernerfolg spielte aus Sicht der Schülerinnen und Schüler die Lehrperson durch das Schaffen einer angenehmen Lernatmosphäre und die interessante Unterrichtsgestaltung eine entscheidende Rolle. Bedeutsam war die Lehrererklärung, wobei diese sehr umfassend als die Gesamtheit der Art und Weise aller Tätigkeiten der Lehrperson gesehen wurde. Von Lernenden verfasste Texte dienten aus Schülersicht der Lehrkraft als Grundlage, individuelle Fehler und Schwierigkeiten zu erkennen, Maßnahmen für die weitere Unterrichtsgestaltung zu ergreifen sowie die Leistung der Lernenden zu beurteilen.

Besonders beeindruckend war festzustellen, dass die Lernenden im Laufe des Projektes eine sehr differenzierte Sichtweise auf ihr eigenes Lernen und den Unterricht entwickelten.

In Fallstudien einzelner Schülerinnen und Schüler konnten die durchwegs positiven Entwicklungstendenzen einzelner Lernender dargestellt werden.

6. Fazit

Häufig werden Hauptschülerinnen und Hauptschüler so eingeschätzt, dass sie nicht dazu in der Lage seien, im Mathematikunterricht aktiv-entdeckend und metakognitiv zu arbeiten und über ihre Kognitionen schriftlich zu berichten. Beide Einschätzungen konnten widerlegt werden. Die Untersuchung zeigt, dass Hauptschülerinnen und Hauptschüler fähig sind, aktiv-entdeckend zu arbeiten und dass diese Form des Unterrichtens nachweislich wirksam für die Weiterentwicklung mathematischer und fachübergreifender Kompetenzen ist.

Die Untersuchung zeigt außerdem, dass die am Projekt beteiligten Lernenden zum Teil sehr ausführliche Texte verfassten, dabei ihren eigenen Lernprozess sehr differenziert wahrnahmen, die eigene Leistungssteigerung und Positives für ihren Lernprozess erkannten und schriftlich festhielten.

Aus der Konzeption des Unterrichts in dem Projekt lassen sich Anregungen für die Veränderung der Unterrichtspraxis hin zu aktiv-entdeckendem, metakognitivem Lernen ableiten.

Literatur

Waasmaier, S. (2009). *Aktiv-entdeckendes, metakognitives Lernen im Mathematikunterricht der Hauptschule. Entwicklung und Förderung fachbezogener und fachübergreifender Kompetenzen im Rahmen eines Unterrichtsprojektes in der 7. und 8. Jahrgangsstufe*. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.

BEAT WÄLTI, FHNW, WERNER JUNDT, BERN

Mathematische Beurteilungsumgebungen

Lehrpersonen messen den Lernerfolg immer noch weitgehend am Ergebnis von Lernkontrollen, in denen Gelerntes – oft kurz zuvor Gelerntes – abgerufen wird. Zudem wird heute auch der Lehrerfolg, das Ergebnis von Unterricht, vermehrt mit Tests erhoben. Deshalb besteht die Gefahr, dass Unterricht - für Lehrende wie für Lernende – zur Testvorbereitung verkommt.

Lernkontrollen sind im Allgemeinen inhaltlich arm – geprägt von Kriterien wie „einfache Korrektur", „unbestreitbare Lösungen", „leichte Quantifizierbarkeit der Leistung". Damit stehen die Lernkontrollen im krassen Widerspruch zu allgemeinen Forderungen von Lehrplänen, wie „Problemlösefähigkeit in komplexen Situationen entwickeln", „breit anwendbares Wissen aufbauen".

Periodische Gesamtbeurteilungen, z.B. Semesterzeugnisse, werden – insbesondere auf der Sekundarstufe – fast ausschliesslich auf enge Lernkontrollen, eigentliche Tests eben, abgestützt. Obgleich seit langem die Erkenntnis und auch die Forderung besteht, dass in eine vertretbare Gesamtbeurteilung eine Palette von Kompetenznachweisen, gewonnen in vielfältigen Beurteilungssituationen, einfliessen soll („Beurteilungsmosaik").

Während sich die Unterrichtskultur aufgrund pädagogischer, lernpsychologischer und didaktischer Fortschritte in jüngerer Zeit insgesamt stark entwickelte, hat die Beurteilungskultur in unseren Schulen weitgehend stagniert oder sogar retardiert. Viele Lehrpersonen nutzen zwar eine Vielfalt heute vorhandener didaktischer Möglichkeiten für einen Unterricht, der auf die Entwicklung breiter Kompetenzen ausgerichtet ist. Im Moment der Lernsicherung werden aber oft veraltete, enge Schemas realisiert, die den eigenen positiven Lehr/Lernanlagen zuwider laufen und didaktische Innovationen zunichte machen.

In dieser divergenten Situation möchten die Mathematischen Beurteilungsumgebungen (MBU) einen Beitrag leisten zur Reaktivierung des Beurteilungsdiskurses, zur Weiterentwicklung persönlicher Unterrichtskonzepte und zu einer alternativen Beurteilungspraxis. Primär resultatorientierte Lernkontrollen werden auch weiterhin ihren Platz im Beurteilungsmosaik haben. Die MBU sollen sie nicht ersetzen, sondern ergänzen. Im Gegensatz zu konventionellen Lernkontrollen ermöglichen die MBU eine offenere und breitere Leistungsbeurteilung, die in den Lernprozess integriert ist. Lernende sollen in diesem Rahmen Beurteilung als Teil des Lernens erfahren, nicht als dem Lernen nachgeschaltete Veranstaltung. Die Arbeitsbedingungen sollen in der Beurteilungssituation die gleichen sein wie im „normalen“ Unterricht. Insbesondere soll die Lehrperson als Coach zur Verfügung stehen.

Natürlich können die vorliegenden Materialien auch einfach im Sinne eines differenzierenden Lernangebotes eingesetzt werden, ohne dass auf die Beurteilung fokussiert wird. Wird aber Differenzieren als Fördern individueller Kompetenzen verstanden, gehört Beurteilen zum Lernen. Dann sind Reflexion und Feedback integrierende und selbstverständliche Bestandteile des Lehr/Lernprozesses. Die MBU sollen diese Einbettung der Beurteilung in den normalen Unterricht ermöglichen. Zudem können die Schülerinnen und Schüler mit den bearbeiteten MBU ein Mathematik-Portfolio gestalten.

Inhaltlich lehnen sich die Mathematischen Beurteilungsumgebungen an die Lernumgebungen des mathbu.ch an. Sie sind jedoch unabhängig von diesem in jedem lehrplankonformen Unterricht sinnvoll einsetzbar. Bezüglich Lernziele orientieren sich die MBU am Kompetenzraster von HarmoS, aus dem auch der Kompetenzfächer des Lehrplan21 abgeleitet ist. Das Instrument erlaubt daher nebst einer Gesamtbeurteilung der mathematischen Leistungsfähigkeit Aussagen zu einzelnen Fachkompetenzen des LP21.

Kennzeichen von Mathematischen Beurteilungsumgebungen

- MBU können mit Klassen aller Leistungsniveaus der Sek1 durchgeführt werden.
- MBU fokussieren je auf den Kern eines für die Volksschulmathematik relevanten Themas.
- MBU orientieren sich an einer wesentlichen Problemsituation oder einer zentralen innermathematischen Struktur.
- MBU benötigen ein Zeitfenster von ca. 2 Lektionen; je nach Berücksichtigung und Umsetzung der Förderhinweise auch mehr.
- MBU lassen verschiedene Denkwege, Vorgehens- und Darstellungsweisen und oft auch verschiedene Ergebnisse zu.
- MBU explizieren in Form von Leistungskriterien Erwartungen auf verschiedenen Niveaus.
- MBU ermöglichen eine mehrstufige Beurteilung der Fachkompetenz (z.B. mit den Prädikaten ungenügend / genügend / gut / sehr gut).

Ausrichtung der Mathematischen Beurteilungsumgebungen

MBU sind im Vergleich zu konventionellen Lernkontrollen tendenziell stärker auf allgemeine Bildungsziele ausgerichtet.

Für Testsituationen typisch	Tendenz der MBU
Alleine arbeiten	Alleine und im Team arbeiten
Rat einholen ist nicht vorgesehen	Bei Bedarf Rat einholen oder Coach beiziehen
Unter Ausschluss von Hilfsmitteln arbeiten	Informationsquellen und Hilfsmittel nutzen
Zeit pro Aufgabe ist beschränkt	Lösungsprozesse können unterbrochen und wieder aufgenommen werden
Standardisierte, auf richtig/falsch reduzierbare Lösungen	Im Kontext sinnvolle, auch individuelle und diskutierbare Lösungen
Falsche Resultate im Test aufgrund von Musterlösungen verbessern	Aufgrund des Tests wenn nötig Vorstellungen und Konzepte überarbeiten

Zur Ausstattung und Inszenierung von Mathematischen Beurteilungsumgebungen

Beurteilungsumgebungen bestehen aus

- einem zweiseitigen Arbeitsblatt für die Lernenden, mit Aufgabenstellungen und Beurteilungskriterien. Diese werden bei der Einführung in die Arbeit mit der Klasse geklärt.
- einem dem Arbeitsblatt entsprechenden zweiseitigen Kommentarbogen für die Lehrpersonen mit Hinweisen zum Vorgehen bzw. zur Inszenierung, zu allfälligen Zusatzmaterialien Lösungen, Kompetenzorientierung und Förderhinweisen.

Die Aufgabenstellung wird mit den Lernenden besprochen und gegebenenfalls mit Beispielen illustriert. Unklarheiten sollen auch während der Arbeit diskutiert werden können.

Lernende, die die minimale Anzahl Kriterien nicht erfüllen (Prädikat „ungenügend“) erhalten Gelegenheit, ihre Arbeit – bei Bedarf auch mit Fremdhilfe - nachzubessern. Wer die fraglichen Kriterien mit der Nachbesserung (Abgabe eines verbesserten Dokuments, schriftliche Reflexion oder Fachgespräch mit der Lehrperson) erfüllt, erhält das Prädikat „genügend“.

Zur Beurteilung

Zu jeder Beurteilungsumgebung sind 5 Kriterien auf drei Niveaus formuliert:

A: Dieses Kriterium sollten alle Lernenden erfüllen. Es entspricht in der Regel einem gedanklichen Einstieg in die Problemstellung bzw. den Minimalanforderungen.

B1 und **B2**: Eher einfache Kriterien, die von vielen Lernenden erfüllt werden können.

C1 und **C2**: Anspruchsvolle Kriterien, die vorwiegend von leistungsstarken Lernenden erfüllt werden.

Die Kriterien B1 und B2 sind vom Anspruchsniveau her vergleichbar (1,2 ist eine Aufzählung, keine Abstufung! Dasselbe gilt für C1 und C2.)

Die 5 Kriterien beziehen sich in der Regel auf verschiedene Kompetenzaspekte. Eine aussagenkräftige Beurteilung ist darum erst aus der Synopse mehrerer MBU möglich. Einer solchen dient das im Folgenden dargestellte Sammelraster. Dieses ist fester Bestandteil des vorliegenden Instrumentariums.

Das Raster weist unter einander drei Kompetenzaspekte auf. Diese wurden als Cluster aus den 8 Aspekten des Kompetenzrasters von HarmoS gewonnen (vgl. weiter unten). Quer dazu sind die MBU aufgelistet, in drei inhaltliche Bereiche geordnet. In der Spalte jeder Beurteilungsumgebung ist ersichtlich, welcher Aspekt auf welcher Stufe beurteilt wird. Grün markiert sind Kompetenzen, die auf Stufe **A** beurteilt werden, gelb solche auf Stufe **B**, blau solche auf Stufe **C**.

Das Raster gibt einerseits einen Überblick über das Angebot. Die Lehrperson erkennt, welche Kompetenzen mit welchem Anspruchsniveau in einer bestimmten Beurteilungsumgebung geprüft werden können. Andererseits kann die Lehrperson die Beurteilungsergebnisse für jede Schülerin / jeden Schüler in einem entsprechenden Blatt verwalten. Für die erfüllten Kriterien werden die jeweiligen Felder gefärbt (z.B. mit einem Markerstift). Mit der Zeit ergibt sich ein Gesamtbild, welches Grundlagen für eine Gesamtbeurteilung liefert. Dabei lassen sich detaillierte Aussagen sowohl zu einzelnen Kompetenzaspekten, wie auch zu einzelnen inhaltlichen Bereichen ableiten.

Die Publikation der MBU ist im Schulverlag plus (Bern) ab 2011 geplant. Der Grundlagenartikel sowie eine Muster-MBU kann unter www.zahlenbu.ch runtergeladen werden.

Daniel WAGNER, Kiel

Entwicklung eines Modells zur Beschreibung mathematischer Kompetenz beim Übergang Schule-Hochschule

Übergänge im Bildungsverlauf stellen potenzielle Bruchstellen in der individuellen Lernbiographie von Jugendlichen dar. Insbesondere der Übergang von der Schule an die Hochschule bereitet jungen Studierenden durch die Veränderung des sozialen Umfeldes und der Lernkultur große Probleme. Nicht zuletzt in Studienfächern mit hohem Mathematikanteil haben die Studentinnen und Studenten zu Beginn ihres Studiums mit erheblichen Schwierigkeiten zu kämpfen. Belege hierfür sind einerseits hohe Studienabbruchquoten, andererseits häufige Beschwerden über mangelhafte Leistungen der Studentinnen und Studenten seitens der Dozentinnen und Dozenten sowie Beschwerden seitens der Studierenden selbst.

1. Stand der Forschung

Zum Stand der Forschung im Gebiet des Übergangs von der Schule in den Tertiärbereich gibt es unterschiedliche Forschungsperspektiven. Empirische Ergebnisse zu diesem Thema, vor allem zu den Ursachen für die genannten Probleme, sind nur in sehr geringem Maße vorhanden. Beispielsweise liegen Ergebnisse zum Studienabbruch vor (Schiefele, Streblow & Brinkmann, 2007), wobei die in diesem Zusammenhang betrachteten Determinanten nur sehr allgemein und nicht fachspezifisch für Studiengänge mit signifikantem Mathematikanteil untersucht wurden. Des Weiteren existieren Untersuchungen zur mathematischen Kompetenz Studierender: einerseits zur Permanenz mathematischer Basiskompetenzen bei Studentinnen und Studenten (Roppelt, 2009), andererseits zur mathematischen Kompetenz in gewissen Teilbereichen der höheren Mathematik, z.B. zum Begriffsverständnis in der Analysis (Tall, 1991) und zur Linearen Algebra (Fischer, 2006). Fischer (2006) legt in ihrer Studie den Probanden Aufgaben aus der Sekundarstufe I vor, die mit den Mitteln der Hochschulmathematik dargestellt und deshalb nicht wiedererkannt werden. Es treten also durch die veränderte Darstellung des im Prinzip bekannten Inhalts erhebliche Probleme beim Lösen dieser Aufgaben auf. Hier zeigt sich, dass beim Übergang ins Studium auftretende Probleme auch noch an anderer Stelle als auf inhaltlicher Ebene zu suchen sind.

2. Ziele

Die trotz vergleichbarer Inhalte (bezüglich der Sekundarstufe II) auftretenden Probleme im ersten Studiensemester sind Hinweise auf eine veränderte Art der Mathematik an der Hochschule. Dies manifestiert sich in einer formaleren Darstellung und in einem veränderten Charakter der Mathematik, weg von der beispiel- und kontextgeleiteten bzw. kalkülorientierten Schulmathematik, hin zu einer Wissenschaft, bei der zunächst der formal-axiomatische Aufbau einer Theorie im Mittelpunkt steht. Zur Identifizierung der Unterschiede in den Kompetenzanforderungen der Sekundarstufe II und des ersten Studiensemesters wird im Rahmen des vorliegenden Dissertationsprojektes ein Kompetenzmodell erstellt. Dieses soll die gemeinsamen Inhalte der Sekundarstufe II und des ersten Studiensemesters im Bereich der Analysis umfassen und wird in zwei Schritten erstellt: Zunächst erfolgt die theoretische Fundierung, welche auf der Kombination zweier verschiedener Ansätze, nämlich der entwicklungs- und kognitionspsychologischen Perspektive und der philosophisch-mathematikdidaktischen Perspektive, in die im Wesentlichen die Analyse verschiedener Theorien zum *Advanced Mathematical Thinking* einfließt, basiert. Der zweite Schritt ist die empirische Validierung an einer geeigneten Stichprobe von Schülerinnen und Schülern bzw. Studienanfängerinnen und Studienanfängern. In seiner Konzeption soll das Modell an die *Länderübergreifenden Bildungsstandards für den mittleren Schulabschluss* im Fach Mathematik (KMK, 2003) anschlussfähig sein.

3. Entwicklung des Kompetenzmodells

Das gemeinsame Kompetenzmodell für die Sekundarstufe II und das erste Studiensemester ist ein normatives Strukturmodell mit drei Dimensionen, der Inhalts-, Prozess-, und Anspruchsdimension.

Die Inhaltsdimension setzt sich aus vier für die Analysis charakteristischen Leitideen zusammen. Diese sind: „Zahl und Struktur", „Grenzwert und Approximation" „Funktionaler Zusammenhang" und „Messen".

Die Prozessdimension ist eng angelehnt an die Handlungsdimension der *Bildungsstandards* (KMK, 2003). Im vorliegenden Modell setzt sich die Prozessdimension aus den sechs allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Mathematisch argumentieren", „Probleme mathematisch lösen", „Mathematisch modellieren", „Mathematische Darstellungen verwenden", „mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen" und „Mathematisch kommunizieren" zusammen.

Zur Beschreibung und Einordnung der veränderten Art und Darstellung der Mathematik an der Universität wird ein zusätzliches Konstrukt benötigt, das man mit „Formalem Denken" umschreiben kann. Dieses „Formale Denken" stellt im vorliegenden Modell einen zusätzlichen Anforderungsbereich in der Anspruchsdimension dar, was im Einklang mit verschiedenen Theorien aus der Psychologie steht. Dort wird formales oder axiomatisches

Schließen stets als Endniveau einer hierarchisch angeordneten Stufenskala verstanden (z.B. Piaget, 1972; van Hiele, 1986).

Komponenten Formalen Denkens

Unter Zuhilfenahme verschiedener philosophisch-mathematikdidaktischer und entwicklungs- und kognitionspsychologischer Aspekte, lässt sich das Konstrukt „Formales Denken" genauer beschreiben. Die einzelnen Komponenten sind:

Deduktion, d.h. Erkenntnisgewinn auf rein logischem Wege: Aus gegebenen Prämissen werden die notwendigen Schlüsse gezogen (Johnson-Laird, 1983). In diesem Zusammenhang spielt auch das Arbeiten in einem Axiomensystem (van Hiele, 1986) eine wichtige Rolle.

Umgang mit mathematischer Sprache im Sinne von Tall (1991). Dazu gehören der Umgang mit den Bausteinen mathematischer Theorie (Definitionen und Sätze), der Umgang mit Quantoren und das Verwenden einer strengen Aussagenlogik.

Loslösung von der Anschauung (van Hiele, 1986), d.h. es wird beispielsweise in einem Beweis nicht mit der Anschauung (z.B. anhand eines Graphen), sondern mit den mathematischen Eigenschaften des Objektes argumentiert.

Generalisierung, worunter Tall (1991) einerseits Prozesse, in denen Begriffe und Konzepte in einem allgemeineren Kontext betrachtet werden, andererseits Schlussfolgerungen vom Speziellen zum Allgemeinen, versteht.

Die *Abstraktion* (Tall, 1991) beinhaltet u.a. die Konstruktion mentaler Strukturen aus mathematischen Strukturen sowie die Klassifizierung von Objekten bezüglich ihrer Eigenschaften und Beziehungen zueinander.

Einordnung Formalen Denkens in die Kompetenzstruktur

Bei der Konstruktion des Modells wird von der Annahme ausgegangen, dass der Hauptunterschied in den Kompetenzanforderungen zwischen Sekundarstufe II und erstem Studiensemester darin besteht, bestimmte allgemeine Kompetenzen auf einem höheren Niveau, dem „Formalen Denken", einzusetzen. Dies sind in erster Linie die Kompetenzen *Argumentieren, Problemlösen, Kommunizieren* und *mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen*. Insofern ist, wie oben bereits erwähnt, „Formales Denken" als zusätzlicher Anforderungsbereich aufzufassen. Damit besteht die Anspruchsdimension des Modells aus den drei klassischen Komponenten der Bildungsstandards (Reproduzieren, Zusammenhänge herstellen, Verallgemeinern und Reflektieren) sowie dem „Formalen Denken".

4. Methode und Design

Der zweite Schritt bei der Erstellung des Kompetenzmodells ist die empirische Validierung. Aufgrund des Umfangs der einzelnen Dimensionen ist es nicht möglich, das gesamte Modell zu validieren, sondern es wird lediglich eine Teilvalidierung vorgenommen (zu dieser Problematik vgl. auch Schecker & Parchmann, 2006). Diese Teilvalidierung des Modells beschränkt sich auf die Leitideen *Grenzwert* und *Funktionaler Zusammenhang* in den allgemeinen Kompetenzen *Argumentieren*, *Problemlösen*, *Kommunizieren* und *mit Mathematik symbolisch, technisch und formal umgehen*. Hierfür wurden insgesamt 30 Items entwickelt, die den zu validierenden Teil des Modells hinreichend gut abbilden. Dabei wird in der Anspruchsdimension lediglich unterschieden, ob ein Item Komponenten des „Formalen Denkens“ aufweist, oder nicht.

Die 30 Items werden als verschiedene, untereinander durch Ankeritems verlinkte, Testhefte an Schülerinnen und Schülern der 13. Jahrgangsstufe und an Studierenden des ersten oder zweiten Studiensemesters getestet.

Als Ergebnis wird vor allem erwartet, dass sich der Bereich „Formales Denken“ von den drei anderen Anforderungsbereichen der Anspruchsdimension trennen lässt.

Literatur

Fischer, A. (2006). *Vorstellungen zur linearen Algebra: Konstruktionsprozesse und –ergebnisse von Studierenden.* Dissertation. Dortmund: Universität Dortmund.

Johnson-Laird, P. (1983). *Mental Models.* Cambridge: University Press.

Kultusministerkonferenz (KMK) (2003). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.* Bonn: KMK.

Piaget, J. (1972). *Das mathematische Denken.* Stuttgart: Klett.

Roppelt, A. (2009). Mathematische Grundkompetenzen von Studierenden. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium – Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht.* (S. 235-244) Münster: Waxmann.

Schecker, H. & Parchmann, I. (2006). Modellierung naturwissenschaftlicher Kompetenz. *Zeitschrift für Didaktik der Naturwissenschaften*, *12*, 45-66.

Schiefele, U., Streblow, L. & Brinkmann, J. (2007). Aussteigen oder Durchhalten – Was unterscheidet Studienabbrecher von anderen Studierenden? *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, *39*, 127-140.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and Insight.* Orlando: Academic Press.

Conny WALZEBUG, Dortmund

Mathematische Problemlöseprozesse von 6. Klässlern. Eine Untersuchung zu Vorgehensweisen und Schwierigkeiten bei der Bearbeitung arithmetischer Probleme

Probleme zu lösen, stellt eine komplexe und anspruchsvolle Aufgabe im (Berufs-)Alltag als auch im Mathematikunterricht dar. Erstaunlich ist, dass bisher sehr wenig über die Vorgehensweisen und Schwierigkeiten beim mathematischen Problemlösen von Schülerinnen und Schüler zu Beginn der Sekundarstufe bekannt ist (vgl. Heinze 2007). So orientieren sich beispielsweise Tests (vgl. Prenzel 2004) immer noch vorrangig an idealtypischen (linearen) Modellen des Problemlösens, wie sie z.B. von Polya aufgestellt wurden. Nur wenige empirische Arbeiten analysieren die tatsächlich ablaufenden Problemlöseprozesse (vgl. Schoenfeld 1985; Heinrich 2004 u.a.).

Ein Vergleich von Schülerlösungsprozessen mit idealtypischen (linearen) Modellen kann jedoch dazu führen, das reichhaltige Potential, welches in den Lösungsprozessen der Schülerinnen und Schüler enthalten ist, nicht vollständig zu erfassen. Im Sinne eines modernen und zeitgemäßen Mathematikunterrichts sind insbesondere selbstgesteuerte und selbstentwickelte Lösungsideen und Teillösungen im Hinblick auf das entdeckende Lernen wertvolle Bausteine des Problemlösens. Daher ist es notwendig, das Verständnis über das Problemlösen im Mathematikunterricht zu überdenken und die individuellen Prozesse von Schülerinnen und Schülern stärker in den Blick zu nehmen mit dem Ziel die Qualität der Prozesse besser verstehen zu können. Das Hauptziel dieser Arbeit ist es daher, die Lösungsprozesse auf Basis aktueller psychologischer und mathematikdidaktischer Erkenntnisse und mit Hilfe eines entsprechend angepassten Modells zu untersuchen, sie zu rekonstruieren und auf diese Weise einen Beitrag zu einem kompetenzorientierten Verständnis über mathematischen Problemlöseprozesse zu leisten.

Bestehende Modelle zum Problemlösen und zum Problemlöseprozess

Polyas Phasen (Verstehen der Aufgabe, Ausdenken eines Planes, Ausführen eines Planes, Rückschau) geben einen linearen Verlauf eines erfolgreichen Problemlöseprozesses an (Vgl. Polya 1995). Sie sind idealtypisch zu verstehen und eignen sich nicht als empirisches Beschreibungs- oder Analyseinstrument. Insbesondere die Phasen Ausdenken und Ausführen eines Planes sind bei Schülerinnen und Schülern häufig eng und untrennbar miteinander verbunden. Anstelle eines Planes lassen sich nicht selten verschiedene, kleinere Pläne identifizieren, die zum Teil aufeinander aufbauen, sich ergänzen, durch (Zwischen-)Reflexionen unterbrochen oder gar gänzlich abgebrochen und neu begonnen werden. Schoenfeld (1985) stützt sich auf das Modell von Polya, differenziert die Problemlöseprozesse jedoch in zentrale Problemlösetätigkeiten (read, analyze, explore, plan, implement, verify) (vgl. Schoenfeld 1985). Als zentrales Ergebnis seiner Untersuchungen führt er u.a. die mangelhafte Selbststeuerung als Ursache für erfolgloses Problemlösen an. Beim Versuch, die sechs Tätigkeiten auf Lösungsprozesse von Schülerinnen und Schülern zu übertragen, stößt man auf einige Probleme. Insbesondere die Tätigkeiten „analyze", „explore" und „verify" weisen bei ihrer Operationalisierung keine trennscharfen Kriterien auf. Diese Problematik ist Schoenfeld bewusst, er vermeidet sie jedoch nicht (vgl. Schoenfeld 1985). Folgestudien von Rott (2010) bestätigen diese Schwierigkeit bei der Anwendung auf Lösungsprozesse von 5. Klässlern. Rott plädiert für die Hinzunahme weiterer Tätigkeiten für eine angemessenere und lückenlose Beschreibung der Problemlöseprozesse. Einen wichtigen Kernaspekt bei der Problemlösung hebt Schoenfeld am Ende seiner Arbeit hervor: „But what was the basis on which those executive decisions were made?" (Schoenfeld, 1985, Seite 315). Teilt man den Problemlöseprozess in kleinere Abschnitte, so ergibt sich die Frage, aus welchen Gründen sich einzelne Aktivitäten bzw. Tätigkeiten ergeben und wie diese miteinander zusammen hängen bzw. wirken? In den Blick zu nehmen sind dazu die aufwändig zu erfassenden metakognitiven Aktivitäten, die die ausführenden Tätigkeiten während der Problemlösung leiten und regulieren. Der Teilbereich des Steuerungsverhaltens wird von Schoenfeld sowie von Heinrich als zentrales Merkmal beim Problemlösen hervorgehoben (vgl. Heinrich 2004). Dazu untersucht Heinrich mit Hilfe von unterscheidbaren Lösungsanläufen das Steuerungsverhalten und die Wechselanlässe von Studierenden und Oberstufenschülerinnen und –schülern beim Lösen geometrischer Probleme. Er unterscheidet zwischen lösungsfördernden und lösungshemmenden Steuerungsverhalten und sieht darin ein wesentliches Merkmale für erfolgreiches und erfolgloses Problemlösen. In seinen Ergebnissen zeigt sich, dass neben der Steuerung auch Aktivitäten der Reflexion und der Kontrolle bedeutsam sind für das erfolgreiche Bewältigen oder Scheitern eines Lösungsanlaufes sind (vgl. Heinrich 2004, Seite 351f.). Stehen die Ursachen für exekutive Entscheidungen in und zwischen Lösungsanläufen im Fokus, erscheint eine Trennung der Aktivitäten Steuerung und Reflexion sinnvoll, um auch die Auswirkungen von Reflexionen auf die Steuerung erfassen zu können. Dies ist durch die Modellananahmen von Heinrich nicht möglich, da sie bei ihm derselben Kategorie zugehören. Empirisch zeigt sich in seinen jedoch die Bedeutung der Rückkopplung von Reflexionsphasen hinsichtlich des Weiterkommens im Lösungsprozess. Auf Grundlage der wesentlichen Erkenntnisse aus den Arbeiten von

Polya, Schoenfeld und Heinrich lässt sich nunmehr eine eigene Modellierung des Lösungsprozesses aufstellen, in der Lösungsanläufe als zielgerichtete, zeitlich bestimmbare Elemente den Prozess gliedern.

Herleitung eines eigenen Beschreibungsmodells

Innerhalb eines **Lösungsanlaufes** verfolgt der Problemlöser ein oder mehrere Ziele, die dadruch den Lösungsanlauf charakterisieren und kennzeichnen. Dabei kann sich ein Lösungsanlauf im Wesentlichen aus drei Aktivitäten zusammensetzen, die im Folgenden ausgeführt werden. **Ausführungen s**ind direkt beobachtbare Aktivitäten, die sich z.B. in strategischen Vorgehensweisen zeigen. Ebenso dazu gehören das Aufschreiben von Beispielen oder das Anfertigen von Skizzen. Die **Steuerung** wird als eine *vorwärts*gerichtete bewusste oder unbewusste metakognitive Aktivität aufgefasst, die z.B. durch das Setzen von Zielen, das Generieren von (eigenen) Fragen oder die (Neu-)Strukturierung von Informationen auftreten kann. Die **Reflexion** wird verstanden als *rückwärts*gerichtete metakognitive Aktivität, die z.B. durch: Ergebnisse kontrollieren, Lösungswege bewerten, Ergebnisse mit mit der Aufgabenstellung vergleichen, etc. deutlich werden kann. Die Steuerung und die Reflexion beinhalten nicht immer direkt beobachtbare Aktivitäten, so dass sich diese zum Teil erst aus der Handlung innerhalb eines Lösungsanlaufes oder durch zusätzliche Informationen vom Problemlöser aus dem entsprechend angelegten Untersuchungsdesign[1] erschließen lassen. Auf Grundlage dieser Modellierung ergeben sich die Forschungsfragen:

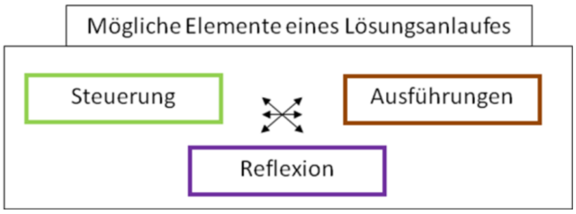


Abb. 1 Elemente eines Lösungsanlaufs

- Inwiefern können erfolgreiche als auch erfolglose mathematische Problemlöseprozesse von Schülern mit Hilfe des Modells beschrieben werden?
- Welche Wirkungszusammenhänge bestehen zwischen den drei Aktivitäten (Steuerung, Ausführung & Reflexion) während des gesamten Problemlöseprozesses?

Ein Fallbeispiel am Problem „Reihenfolgezahlen“ (in Kurzfassung)

Additionsaufgaben aus Reihenfolgezahlen sind Summen aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, bspw. 2+3, 14+15+16 und 3+4+5+6+7+8. Nicht jedoch: 2+5 oder 3+4+8 oder 12+12. Finde alle Additionsaufgaben aus Reihenfolgezahlen, deren Ergebnis nicht größer als 30 ist.

[1] Grobes Setting des Untersuchungsdesigns: 1. Sicherung des Aufgabenverständnisses; 2. Einzelbearbeitung des Problems; 3. Austausch mit Partner (Strategiekonferenz); 4. Videogestützter stimulated Recall.

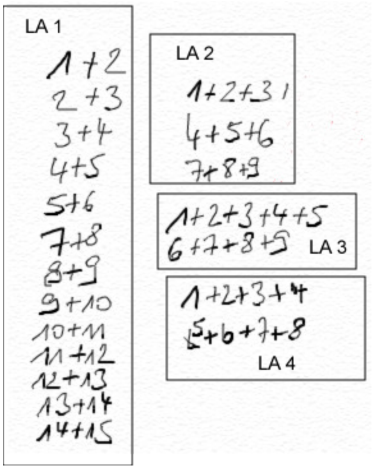


Abb. 2 Schülerlösung

Die Abb. 2 zeigt die gesamte Schülerlösung, die in 4 Lösungsanläufe (LA) unterteilt wird. Der erste Lösungsanlauf wird von der Idee geleitet (Steuerung), stets 2 Summanden auszuwählen, mit den kleinstmöglichen zu beginnen und die nachfolgende Aufgabe mit der letzten Zahl der Vorherigen zu beginnen. Dieses Vorgehen wird solange durchgeführt, bis die Kontrolle ergibt, dass das Ergebnis über 30 ist, dann beginnt LA 2 mit einer ähnlichen Steuerung. Der Schüler beginnt jedoch bei der neuen Aufgabe mit dem Nachfolger der letzten Zeile (Strategiewechsel). Die Dominanz dieser Steuerung führt dazu, dass ihm weitere Aufgaben mit 3 Summanden verborgen bleiben. LA 3 beginnt er mit 5 Summanden und mit derselben Steuerung wie in LA 2. Er beendet die zweite Aufgabe nach der Zahl 9, da er erkennt, dass er sonst über 30 kommt. Hier stoppt ihn seine kontinuierliche Kontrolle und führt ihn dazu im LA 4 zwei Aufgaben mit 4 Summanden aufzustellen.

Der Schüler zeigt insgesamt zwei tragfähige Strategien zum Finden von Additionsaufgaben. Seine Steuerung ist vielversprechend, die Dominanz der Idee „mit dem Nachfolger zu beginnen“ ab LA 2 und die fehlende Reflexion über seine Zeile „6+7+8+9“ verhindern jedoch, dass er zu einer vollständigen Lösung kommt. Erst in der anschließenden Strategiekonferenz mit einem Mitschüler wird er auf diese, ihm fehlende Reflexion aufmerksam. Anschließend ist er in der Lage weitere Aufgaben zu erzeugen. Problematisch bleibt die Erfassung aller möglichen Aufgaben. Anregungen zur Reflexion der Vollständigkeit seiner erweiterten Lösung durch den Interviewer im stimulated Recall führen nur noch zu der Aussage des Schülers, dass es sicherlich noch „mehr Aufgaben geben wird“, dazu müsste er aber noch einmal gründlich nachdenken.

Literatur

Heinrich, F. (2004): *Strategische Flexibilität beim Lösen mathematischer Probleme*. Hamburg: Kovac.

Heinze, A. (2007). *Problemlösen im mathematischen und außermathematischen Kontext*. JMD , Heft 1, 3-30.

Prenzel, M. (2004): *PISA 2003*. Münster: Waxmann.

Pólya, G. (1995): *Schule des Denkens*. Tübingen: Francke.

Rott, B. (2010): *Empirisch begründete Phasen in den Problemlöseprozessen von Fünftklässlern*. BzMU 2010. München.

Schoenfeld, A. H. (1985): *Mathematical problem solving*. San Diego: Academic Press.

SEBASTIAN WARTHA, Bielefeld

Aufbau von Grundvorstellungen: Ein Förderkonzept

„[Der] Modellierungskreislauf hat aber die Tücke, dass gerade der Prozess der Modellierung von der Sachebene auf die Ebene der Mathematik weiterhin unklar bleibt. Damit hat man aber didaktisch wenige Möglichkeiten, den „modellierenden Schülern“ Hilfestellungen zukommen zu lassen. […] Die Mathematikdidaktik belässt die kognitive Modellierung von Sachkontexten als Blackbox und unterstellt eine kognitive Fähigkeit des Modellierens. Die Funktionsweise, d.h. die Transformation und damit der Lösungsprozess bleiben unklar.“ (Lorenz, 2009, S. 289 f.)

1. Grundvorstellungen

Wenn Modellierungsprozesse analysiert werden sollen, ist eine allgemeine unspezifische „Modellierungskompetenz“ ein weder normativ noch deskriptiv in befriedigender Weise nutzbares Konstrukt. Es bietet sich hingegen an – dem Konzept der (sekundären) Grundvorstellungen nach vom Hofe (1995) und vom Hofe & Jordan (2009) folgend – diese Prozesse mit *bereichsspezifischen Übersetzungen* zu beschreiben. Diese können sowohl für sachanalytische Überlegungen (Welche Grundvorstellungen beschreiben einen mathematischen Inhalt und welche Übersetzungen werden hierüber ermöglicht bzw. gefordert?) als auch für die Dokumentation von individuellen Begriffskonstruktionen (Welche Grundvorstellung kann das Kind bei Übersetzungsaufgaben nutzen, welche Übersetzungsprozesse gelingen nicht?) herangezogen werden (vgl. Wartha, 2009).

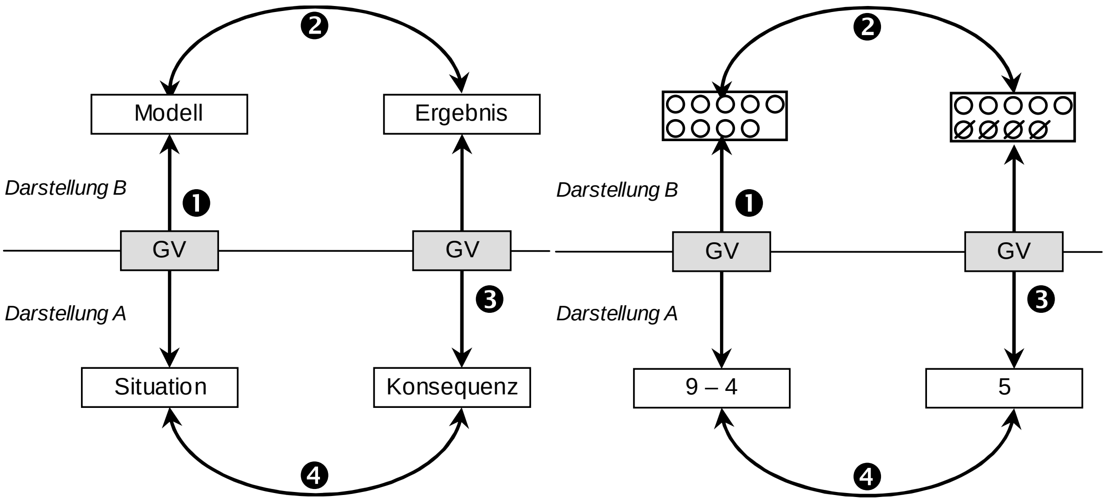


Abb. 1: Grundvorstellungskreislauf (links allgemein, rechts 9 − 4)

Da Grundvorstellungen nicht nur die Übersetzung zwischen „Realität und Mathematik“ ermöglichen, bietet es sich an, den klassischen Modellierungskreislauf zu verallgemeinern, indem die Übersetzung zwischen verschiedenen Darstellungen (symbolisch – ikonisch, algebraisch – geometrisch, …) näher betrachtet wird (Abb. 1). Häufig können Aufgaben, die beispielsweise auf symbolischer Ebene (9 − 4) gestellt werden, ohne Übersetzungsprozesse innerhalb einer Darstellung gelöst werden (Abruf auswendig verfügbaren Wissens ❹). Ein Verständnis des mathematischen Inhalts wird erst dann unterstellt, wenn eine Lösung auch über die Aktivierung von Grundvorstellungen in einer anderen Darstellung möglich ist. Im Falle der Aufgabe 9 − 4 bedeutet dies, dass eine Grundvorstellung zur Subtraktion (z. B. Wegnehmen) aktiviert wird (❶), anschließend auf ikonischer (oder enaktiver Ebene) von 9 Objekten 4 entfernt werden (❷) und über eine Grundvorstellung zur Kardinalzahl die verbleibende Menge als „5" auf die symbolische Ebene zurückübersetzt wird (❸). Während diese Beschreibung in Bezug auf die Aufgabe 9 − 4 vergleichsweise trivial erscheint, kann der entsprechende Prozess beispielsweise für die Berechung des Terms $\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ zur Untersuchung eines zu Grunde liegenden „Verständnisses" herangezogen werden. Obwohl die Berechnung vielen Lernenden auf rein symbolischer Ebene durch Regelanwendung gelingt, ist der Weg über die ikonische oder enaktive Darstellung über die Aktivierung von entsprechenden Grundvorstellungen (Bruch als Anteil, Finden einer gemeinsamen Unterteilung, Verfeinerung der Einteilung, Addieren als Zusammenfassen) vergleichsweise schwierig zu bewältigen.

In diesem Kontext werden Grundvorstellungen nicht nur zur Beschreibung von *Operationen* (Addieren als Hinzufügen oder Zusammenfassen, Dividieren als Auf- oder Verteilen) verstanden, sondern auch als mentale Modelle, die Übersetzungen zwischen symbolischer und nichtsymbolischer Ebene von *Zahlen* (Bruch als Anteil, natürliche Zahl als Menge) und *Strategien* (Schrittweise über den Zehner rechnen, finden einer gemeinsamen Unterteilung als „gemeinsamen Nenner bei Brüchen bilden").

Die Frage nach dem Vorhandensein, der Aktivierung und dem Aufbau mathematischer Grundvorstellungen kann daher zielführend für zentrale unterrichtliche Aktivitäten sein – auch für Planung und Umsetzung von Diagnose und Förderung bei problematischen Lernprozessen.

2. Aufbau von Grundvorstellungen

Der Aufbau von Grundvorstellungen soll über ein theoretisch abgesichertes und praktisch umsetzbares Konzept einfach kommunizierbar sein. In der gebotenen Kürze können hier die theoretischen Einflüsse nicht im Einzelnen diskutiert werden. Zentral sind Konzepte von Aebli (1980), die auf das Verinnerlichen von Handlungen abzielen. Im vorgestellten Modell soll dies nicht in Stufen geschehen, die generell beschritten werden, sondern in Phasen, die für jeden Lerninhalt gesondert durchlaufen werden. Der Sprache (Gal'perin und Leontjev) wird eine zentrale Rolle beim Aufbau von Wissen zugesprochen, ebenso der gezielten Auswahl von geeigneten Materialien (vgl. z. B. Lorenz (2009) und Schipper (2009)).

Der Aufbau von Grundvorstellungen wird über vier Phasen umgesetzt:

Phase (1): Das Kind handelt am geeigneten Material und versprachlicht diese Handlung – auch auf mathematischer Symbolebene.
Phase (2): Das Kind diktiert der Lehrkraft die Handlung am Material und kontrolliert, wie diese nach seinen Anweisungen durchgeführt wird.
Phase (3): Wie bei (2), nur dass die Handlung der Lehrkraft hinter einem Sichtschirm durchgeführt wird und das Kind gezwungen wird, sich nicht nur die Handlung vorzustellen, sondern diese auch so zu formulieren, dass sie tatsächlich durchgeführt werden kann.
Phase (4): Üben und Automatisieren auf symbolischer Ebene, ggf. Aktivierung der Handlung in der Vorstellung.

Diese vier Phasen werden in der Förderarbeit in Bezug auf verschiedene Grundvorstellungen durchlaufen. Der Prozess ist hierbei keineswegs stets linear von Phase (1) bis (4) zu verstehen. Auch wenn ein Kind Phase (4) bei einer Aufgabenstellung erreicht hat, so ist es häufig nötig, in anderen Situationen zum gleichen Inhalt noch einmal auf Phase (3) zurückzukommen. Es sollte jedoch keine Phase übersprungen werden – weder nach oben noch nach unten.

Die Leitfragen und Beobachtungsschwerpunkte in den Phasen bei der Förderarbeit sind:

Phase (1): Beobachtung und Bewertung der Schülerhandlung mit Hinblick auf die mentale Fortsetzbarkeit. Hierbei findet die Thematisierung und Erarbeitung eines gemeinsamen Vokabulars statt.

Phase (2): Nutzung des gemeinsamen Handlungsvokabulars und Thematisierung von Missverständnissen und Unklarheiten.

Phase (3): Aktivierung mentaler Handlungen durch ein gemeinsames Vokabular und eines „inneren Bildes" der Operationen. Dabei wird berücksichtigt, dass immer noch auf verschiedenen Darstellungsebenen operiert und die Handlungsebene nicht vorschnell verlassen wird, indem auf die hinter dem Sichtschirm tatsächlich durchgeführte Handlung fokussiert wird.

Phase (4): Es wird immer wieder der Rückbezug zu Phase (3) hergestellt, um eine Verselbstständigung der symbolischen Ebene zu vermeiden.

3. Ausblick

Das beschriebene Konzept wird nicht nur in universitären Lehrveranstaltungen und Schulpraktika vermittelt und umgesetzt, sondern auch in zahlreichen Fort- und Weiterbildungsmaßnahmen (Schul- und Schuladministrationsebene). Es zeigt sich, dass die Kommunikation über Lernprozesse durch die Verbindung des Vierphasenmodells und den Grundvorstellungen im Modellierungskreislauf erheblich erleichtert wird – sowohl um Lernumgebungen zu planen, als auch um individuelle Lernprozesse zu beschreiben und zu analysieren.

Es ist möglich, dass an Hand dieses Kernmodells weitere zentrale didaktische Fragen bzgl. der Förderarbeit diskutiert werden: Welche Grundvorstellungen – zu Zahlen, Operationen und Strategien – gilt es bezüglich eines mathematischen Inhalts aufzubauen? Welchen Kriterien muss Material genügen, um überhaupt „geeignet" zu sein? Schließlich: Wie sieht die Übersetzung durch die Grundvorstellung eines mathematischen Inhalts auf konkreter Ebene aus – wie kann beispielsweise die Division von Brüchen an einem geeigneten Modell enaktiv durchgeführt werden?

Es ist geplant, die Frage zu evaluieren, ob sich über dieses Modell der Ausbildungsgrad von Grundvorstellungen empirisch erfassen lässt. Eine weitere Zielsetzung bzw. Konsequenz ist die Analyse, ob Fördermaßnahmen hierüber erfasst und dokumentiert werden können – sowohl auf individueller als auch auf vergleichender Ebene. Dem voraus gehen muss freilich die Erörterung, ob dieses Modell überhaupt den theoretischen und praktischen Ansprüchen genügen kann. Hierzu soll im vorliegenden Beitrag ein erster Schritt gegangen werden.

Literatur

Aebli, H. (1980). *Denken – das Ordnen des Tuns*. Stuttgart: Klett.

Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum.

Hofe, R. vom & Jordan, A. (2009). Wissen vernetzen. *Mathematik lehren, 154,* 4 – 9.

Lorenz, J. H. (2009). Zur Relevanz des Repräsentationswechsels für das Zahlenverständnis und erfolgreiche Rechenleistungen. In A. Fritz, G. Ricken & S. Schmid (Hrsg.), *Handbuch Rechenschwäche* (S. 230 - 247). Weinheim: Beltz.

Schipper, W. (2009). *Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.* Hannover: Schroedel.

Wartha, S. (2009). Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.): *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium*. (S. 157 - 180) Münster: Waxmann.

Thomas WASSONG, Paderborn, Rolf BIEHLER, Paderborn

Statistik lehren online lernen – Ein Modell für Lehrerkompetenz als Basis einer Online-Lehrerfortbildung für Statistik in der Sekundarstufe I

Einführung

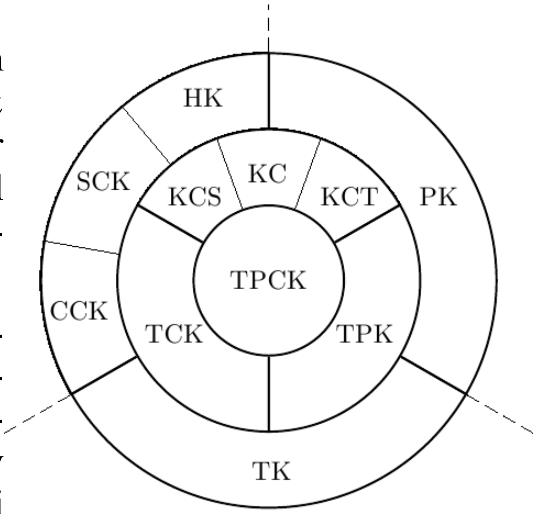
Im Folgenden wird von einem Promotionsprojekt berichtet, welches Online-Kurse für die Fortbildung von LehrerInnen der Sekundarstufe I im Bereich Statistik auf Basis eines Lehrerkompetenzmodells entwickelt. Wir werden zunächst das Projekt vorstellen und einordnen. Im zweiten Schritt beschreiben wir das entwickelte Kompetenzmodell und enden mit einem Ausblick auf das weitere Vorgehen.

Überblick über das Projekt

Das Projekt kennzeichnet sich dadurch, dass von vorhandenen Modellen für die Lehrerkompetenz (Shulman 1986, Ball et al 2008, 2009) und deren Erweiterung (Integration von Technologie nach Mishra & Koehler 2006) ausgegangen wird. Die Modelle werden für den Bereich des fachdidaktischen und des fachlichen Wissens in Statistik konkretisiert. Auf der Basis dieser Konzeptionalisierung der Lehrerkompetenz zum Bereich Statistik sollen die Lernumgebungen bewusst gestaltet werden, die dann in einem Blended-Learning Szenario implementiert werden. Das Vorgehen im Projekt sieht derzeit folgende 4 Schritte vor: Entwicklung eines allgemeinen Kompetenzmodells; Konkretisierung auf der Basis der Analyse aktueller Literatur zur Statistikdidaktik; Auswahl des Inhalts aufgrund der Analyse; Design und Evaluation des Online-Kurses. Wir werden im Folgenden die Ergebnisse des ersten Schrittes vorstellen.

Dieses Projekt gliedert sich in eine Reihe verschiedener Projekte in unserer Arbeitsgruppe ein, die sich mit dem Design und der Evaluation von Online-Kursen befassen. Das Dissertationsprojekt von Pascal R. Fischer konzentriert sich auf die Konzeption eines eLearning-Kurses für mathematische Brückenkurse an der Universität Kassel. Diese Dissertation lagert sich an das Projekt VEMA an, welches neben der Konzeption und Durchführung von Brückenkursen auch interaktives Material für die Brückenkurse entwickelt und evaluiert (vgl. Fischer & Biehler 2010). Im Dissertationsprojekt eFathom von Tobias Hofmann wurde ein Online-Kurs entwickelt, welcher der Kompetenzentwicklung im Umgang mit der Werkzeugsoftware Fathom dient. Die Gestaltung des Kurses beruht auf aktueller Forschung zur Gestaltung von Lernumgebungen für eigenverantwortliches Lernen, zur Gestaltung von multimedialem Lernmaterial und zu Schwierigkeiten von Studierenden beim Umgang mit Fathom (Hofmann 2010). Die Forschungsergebnisse werden wir für unser Projekt berücksichtigen und adaptieren.

Das Lehrerkompetenzmodell



Basierend auf den Ergebnissen von Shulmann (1986), Ball, Thames & Phelps (2008) sowie Mishra & Koehler (2006) haben wir ein Kompetenzmodell entwickelt, welches in der nebenstehenden Grafik visualisiert ist.

Bei der Entwicklung des Modells gingen wir von drei grundlegenden Anforderungskategorien aus: Content, Pedagogy und Technology[1]. Technology zählen wir aus den folgenden zwei Gründen zu den grundlegenden Anforderungskategorien:

1. Der Einsatz von Technologie ist aus der heutigen Zeit nicht mehr wegzudenken, egal ob Internet, Handy, Soziale Netzwerke oder mp3-Player. Technologie ist ein integraler Bestandteil unseres Lebens geworden, man kann (fast) nicht mehr ohne leben. Dies muss sich auch auf den Unterricht übertragen.

Technologie wird sowohl als Werkzeug in einer Domäne als auch als Vermittlungsmedium genutzt. Zudem müssen von LehrerInnen Kompetenzen erworben werden, die keiner dieser beiden Bereiche zugeordnet werden können: der sichere und verantwortungsbewusste Umgang, das Wissen über Risiken und Grenzen sowie das Reflektieren über den Umgang mit Technologie. Dies kann in keiner der beiden anderen Anforderungskategorien abgedeckt werden.

2. In der Statistik der Sekundarstufe, dem Thema unserer Fortbildung, wird in der Fachdidaktik der Einsatz von realen Daten gefordert. Dies zieht große, „unbequeme“ Datensätze mit sich, die nicht mehr per Hand bearbeitet werden können. Hier ist der Einsatz von Technologie unabdingbar. Zudem bieten aktuelle Programme umfangreiche didaktische Unterstützung, deren Nutzung erlernt werden muss.

1 Wir nutzen hier bewusst die englischen Begriffe und übersetzen diese nicht ins Deutsche. Wir möchten damit zum einen die Herkunft aus der amerikanischen Forschungsrichtung hervorheben, zudem gibt es keine adäquate Übersetzung dieser Begriffe ins Deutsche.

Die Kategorie Content lässt sich für den Fall der Mathematik nach Ball, Thames & Phelps in drei Unterkategorien aufteilen: *Common Content Knowledge (CCK)* beschreibt das Wissen, welches auch außerhalb des Schulkontextes seine Bedeutung hat, z. B. in universitären Fachveranstaltungen. Als Gegenpart dazu führen Ball und ihr Team das *Special Content Knowledge (SCK)* ein. Hierbei geht es um Fachkompetenzen, die ausschließlich zum Unterrichten notwendig sind. Das Team um Ball kommt aus der Grundschuldidaktik, wo diese Unterscheidung Sinn zu machen scheint, jedoch für die Statistik in der Sekundarstufe ist die Nützlichkeit dieser Unterscheidung offen. Wir konnten noch keine Fachkompetenzen identifizieren, die nicht auch Angewandte Statistiker beherrschen sollten. Als drittes geben Ball und ihr Team das *Horizon Knowledge (HK)* an (vgl. Ball & Bass 2009). Hierunter werden Kompetenzen subsumiert, die sich mit der Wiederaufnahme und Weiterentwicklung von Definitionen, Begründungen und Algorithmen im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichts befassen. Die Kompetenzen in dieser Kategorie zielen darauf ab, diese Verknüpfungen und Weiterentwicklungen angemessen vorzubereiten und in konkreten Unterrichtssituationen mögliche später hinderliche Fehlvorstellungen zu vermeiden.

Die drei Anforderungskategorien sind jedoch nicht isoliert voneinander zu betrachten. Es müssen auch deren Verknüpfungen als eigenständige Kompetenzkategorien behandelt werden. Diese werden in der Grafik im mittleren Ring visualisiert. So werden in *Technological Content Knowledge (TCK)* die Kompetenzen betrachtet, die sich mit der Anwendung von Technologie innerhalb des Faches beschäftigt. Dazu gehört bspw. die Anwendung von Technologie als Werkzeug in der Mathematik bzw. der Statistik und dem Wissen über deren Risiken und Grenzen. In der Kategorie *Technological Pedagogical Knowledge (TPK)* interessiert das Zusammenspiel von Technologie und Pädagogik bzw. Didaktik. So ist die Frage nach inhaltsunabhängigen Kriterien für den richtigen Medienmix sowie der konkrete Einsatz im Klassenraum von Bedeutung. Die dritte Kategorie ist hier das *Pedagogical Content Knowledge (PCK)*. Im Weitesten kann man diese Kategorie als das fachdidaktisches Wissen im deutschsprachigen Raum bezeichnen, betrachtet man jedoch die enthaltenen Kategorien etwas genauer, so zählt man zur Fachdidaktik ebenfalls die Unterkategorien SCK und HK. Ball und ihr Team haben PCK in drei Unterkategorien aufgespalten, so dass wir über diese einen genaueren Blick für PCK bekommen. Das *Knowledge for Content and Teaching (KCT)* beschäftigt sich mit der Frage, wie der Content am Besten für SchülerInnen aufbereitet werden kann, *Knowledge for Content and Students (KCS)* mit der Frage, welche Schwierigkeiten SchülerInnen beim Lernen mit dem Content haben können und wie diesen begegnet werden kann. In der dritte Kategorie, *Knowledge of Curriculum (KC)*, stehen die Kompetenzen im Raum, Unterrichtsmaterialien auf Ihre Eignung im eigenen Unterricht, also bzgl. der Lerngruppe und den Unterrichtszielen zu bewerten, deren Vor- und Nachteile zu erkennen und begründet auszuwählen. Im letzten Schritt der Verknüpfung zwischen den drei grundlegenden Anforderungskategorien liegt *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK)*. Hier geht es nun um das Zusammenspiel dieser drei Komponenten: Welche Auswirkungen hat die Auswahl einer bestimmten Software auf die fachlichen Inhalte und deren Vermittlung; Wie kann ein bestimmtes Thema sinnvoll mit der Unterstützung von Technologie eingeführt werden; Welche Probleme haben SchülerInnen bei der Nutzung einer bestimmten Software in Bezug auf das Fachwissen und wie muss der Unterricht gegenwirkend gestaltet werden?

Ausblick

In diesem Text haben wir beschrieben, welches Kompetenzmodell wir für unseren Fortbildungskurs zu Grunde legen. Dabei wurde der Aufbau sowie kurz die Bedeutung der einzelnen Kompetenzkategorien beschrieben (Schritt 1). In Wassong & Biehler (2010) werden die Kompetenzkategorien genauer beschrieben sowie die ersten Ergebnisse der Verifikation des Kompetenzmodells diskutiert.

Literatur

Ball, D. L. & Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Ball, D. L. & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009*.

Fischer, P. R. & Biehler, R. (2010). Ein individualisierter eVorkurs für 400 Studierende und mehr – ein Lösungsansatz für mathematische Brückenkurse mit hohen Teilnehmerzahlen. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*.

Hofmann, T. (2010). Entwicklung und Evaluation einer multimedialen Lernumgebung für einen selbstständigen Einstieg in eine Werkzeugsoftware. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010*.

Mishra, P. & Koehler, M.J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A Framework for Teacher Knowledge. *Teachers College Record, 108*(6), 1017-1054.

Shulmann, L.S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Wassong, T. & Biehler, R. (2010). A Model for Teacher knowledge as a Basis for Online Courses for Professional Development of Statistics Teachers. *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching of Statistics* (in press).

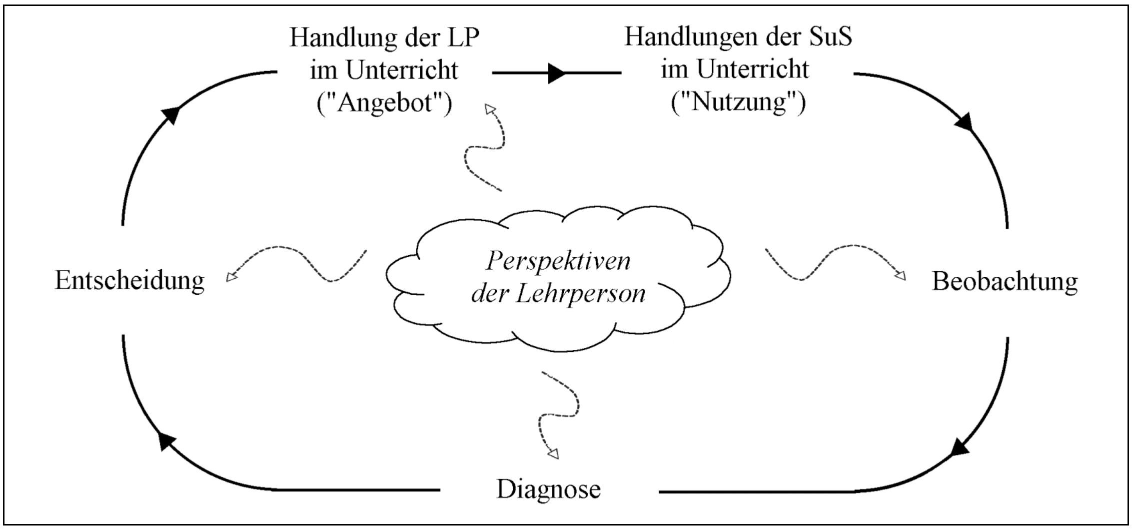
Christof WEBER, Basel & Christian RÜEDE, Zürich

Aufgabenbearbeitungen von Gymnasiastinnen und Gymnasiasten aus unterschiedlichen diagnostischen Perspektiven lesen

Unterricht kann – stark vereinfacht – als das Zusammenspiel von *Angebot* und *Nutzung* aufgefasst werden: Die Lehrperson macht Angebote, und die Schülerinnen und Schüler nutzen diese Angebote (Fend 1998). Nun erfährt der Unterricht eine entscheidende Erweiterung, wenn die Lehrperson die Nutzungsnachweise ihrer Klassen nicht nur kontrolliert und bewertet, sondern als neues Angebot an die Lehrperson auffasst. Schülerprodukte – und insbesondere Aufgabenbearbeitungen – können für den weiteren Unterricht genutzt werden, aus ihnen lassen sich neue Angebote an die Schülerinnen und Schüler entwickeln (Badr Goetz 2007, Ruf 2008).

1. Forschungsfrage

Für das Folgende wird der rückläufige Abschnitt des chronologischen Unterrichtskreislaufs – bei ihm nimmt die Lehrperson die Nutzerrolle ein –, in die Handlungen „Beobachtung“, „Diagnose“ und „Entscheidung“ ausdifferenziert (siehe Abbildung). Wie nun eine Lehrperson ihre Beobachtungen, Diagnosen und Entscheidungen ausgestaltet hängt von der jeweils eingenommenen *Perspektive* ab. Sie bestimmt, was man in Schülerprodukten beobachtet (und was nicht), worauf man beim Diagnostizieren schaut (und worauf nicht), und was die Schüler lernen sollen (und was nicht).



Damit stellt sich folgende Frage: Welche Perspektiven muss eine Lehrperson einnehmen, damit sie die Schülerprodukte zur Entwicklung eigener, neuer Angebote nutzen kann? Und etwas spezifischer: Unter welchen Perspektiven lassen sich Aufgabenbearbeitungen beim Diagnostizieren lesen?

2. Explorative Studie

Im Rahmen einer Lehrveranstaltung (Gymnasiallehrerausbildung an der Universität und ETH Zürich) legten wir unseren zwölf Studierenden Schülertexte vor. Alle Texte waren im Unterricht der SII bei der Bearbeitung offener Aufgaben entstanden (Rüede/Weber 2009b). Zu Beginn, in der Mitte und gegen Ende des Semesters sollten die Studierenden sechs bis sieben Aufgabenbearbeitungen lesen. Mit Hilfe von *repertory grids* waren Merkmale zu nennen, nach denen sie die Texte beurteilen. Damit wurde das Instrument wie schon anderswo zur Erhebung von Forschungsdaten eingesetzt (siehe etwa Bruder/Prediger/Lengnink 2003). Zusätzlich spielten wir die Daten nach jeder Erhebung wieder in die Lehrveranstaltung ein und ließen die Studierenden damit arbeiten. So wurden repertory grids bei uns auch zu einem Bestandteil und Instrument der Lehrer(aus)bildung.

Auf diese Weise kamen 300 Merkmale zusammen, die den Studierenden beim Lesen der Schülertexte „eingefallen“ waren. Aus diesen Daten haben wir induktiv sechs Kategorien gebildet, um die entsprechenden diagnostischen Perspektiven zu rekonstruieren. In einem weiteren Schritt wurden das Kategoriensystem verfeinert und Unterkategorien entwickelt. Zur Absicherung wurden die schriftlichen Begründungen herangezogen, die die Studierenden zur Wahl ihrer Merkmale abgegeben hatten.

3. Unterschiedliche diagnostische Perspektiven

In der Theorie lassen sich zwei Gruppen von diagnostischen Perspektiven erkennen: Zur ersten Gruppe gehören die formale, die inhaltliche und die erklärende Perspektive. All diese Perspektiven drücken aus, *worauf* sich die Aufmerksamkeit bei der Lektüre eines Schülertexts richtet. So kann es um die Darstellung (formal) oder um die innere Rationalität (inhaltlich) eines Texts gehen oder aber um den Denkstil, die Grundvorstellungen etc. des Autors (erklärend). Anders, wenn jemand sachliche Fakten über den Text zusammenträgt oder ihn an gewissen, auch impliziten Normen misst. Die beschreibende und die wertende Perspektive, aus der heraus das geschieht, bilden die zweite Gruppe. Hier geht es darum, *wie* ein Text gelesen wird.

In unserer kleinen Untersuchung konnten empirisch sechs unterschiedliche diagnostische Perspektiven rekonstruiert werden. Sie sind Kombinationen der theoretischen Konstrukte der beiden beschriebenen Gruppen (Rüede/Weber 2009a). Zwei Beispiele solcher Perspektiven:

- Eine Lehrperson nimmt eine *inhaltlich-wertende* Perspektive ein, wenn sie Muster der Aufgabenbearbeitung oder Muster in der Aufgabenbearbeitung nach ihrer Korrektheit, ihrer Angemessenheit oder ihrer Nutzung beurteilt. Typische Merkmale, die die Studierenden nannten, waren folgende: „Aufstellen von geometrisch nicht einsehbaren Hypothesen…“ (Unterkategorie Korrektheit), „Lösungsweg originell“ (Angemessenheit) und „Lösungsweg ausbaubar / verallgemeinerbar“ (Nutzung). Solche Merkmale lassen darauf schließen, dass ein vorliegender Schülertext an fachlich-mathematischen Normen gemessen wird.

· Nennt eine Lehrperson eine kognitive, affektive oder prozessuale Bedingung, unter der die Aufgabenbearbeitung zustande gekommen sein könnte, nimmt sie eine *erklärend-beschreibende* Perspektive ein. Typische Merkmale unserer Studierenden waren „hat Grundvorstellung: log ist die Länge der Zahl“ (Unterkategorie kognitive Bedingung), „Lösungsweg zeigt Selbstbewusstsein“ (affektive Bedingung) und „Reflexion des eigenen Vorgehens“ (prozessuale Bedingung).

Die folgende Tabelle gibt an, wie viele der erhobenen Merkmale in welche Unterkategorie fallen, und zwar zu Beginn (1. Kolonne), in der Mitte (2. Kolonne) und gegen Ende des Semesters (3. Kolonne).

	Beschreibend				**Wertend**			
Formales	· **Art der Darstellung**	15	10	4	· **Korrektheit**	8	6	1
	· **Dokumentation der Gedanken**	5	0	5	· **Angemessenheit der Gliederung**	12	4	0
					· **Angemessenheit der Verständlichkeit**	9	4	0
Inhaltliches	· **Muster in Bildern und Symbolen**	10	16	4	· **Korrektheit**	0	4	2
	· **aufgabenspezifische Muster**	21	16	15	· **Angemessenheit**	4	6	4
	· **aufgabenübergreifende Muster**	8	10	8	· **Nutzung**	0	2	2
Erklärendes	· **Kognitive Bedingungen**	4	8	16	· **Produktivität**	1	12	19
	· **Affektive Bedingungen**	2	4	4				
	· **Prozessuale Bedingungen**	5	2	8				

Offenbar haben unsere Studierenden die Aufgabenbearbeitungen während des ganzen Semesters unter allen sechs diagnostischen Perspektiven gelesen. Selbst wenn sie die Texte als erstes inhaltlich bewertet haben, konnten sie sie auch unter anderen, etwa der fomal-beschreibenden oder der erklärend-wertenden Perspektive lesen. So beträgt das Verhältnis zwischen beschreibenden und wertenden Merkmalen über das ganze Semester hinweg 2:1. Blickten sie anfangs Semester noch am ehesten aus formalen Perspektiven auf die Texte, nahmen die erklärenden Perspektiven immer mehr zu, bis sie gegen Ende des Semesters am häufigsten eingenommen wurden.

4. Interpretation

Unsere explorative Studie dokumentiert eindrucksvoll, dass Lehramtsstudierende und Lehrpersonen die unterschiedlichen Perspektiven, die in der Literatur zu finden sind und als Gütekriterium für diagnostische Kompetenz gelten, tatsächlich auch einnehmen. Insbesondere sind sie in der Lage, Schülertexte anders zu lesen als schriftliche Arbeiten, die formal und inhaltlich zu bewerten sind. Unter gewissen Umständen – bei uns vermutlich durch die Inhalte der Lehrveranstaltung und den Einsatz der repertory grids gegeben – fühlen sie sich ermutigt, ihren Blick zu weiten und einen *Perspektivenwechsel* vorzunehmen. Damit scheint die Entwicklung der diagnostischen Kompetenz mindestens so sehr ein Prozess des Bewusstwerdens wie ein Prozess des Kennenlernens unterschiedlicher Perspektiven zu sein.

Erstaunt hat uns, dass bloß vier der 300 Merkmale auf Erwägungen hinsichtlich der (wenigstens hypothetischen) Nutzung der Aufgabenbearbeitungen schließen lassen. Selbst die vier erfahrenen Lehrpersonen, die unsere Veranstaltung zur beruflichen Weiterbildung besuchten, schienen Schülertexte nur ausnahmsweise als Angebot zu verstehen. Lehrpersonen fällt es offenbar nicht leicht, Schülerprodukte für ihren eigenen Unterricht zu nutzen, selbst wenn sie sie aus unterschiedlichen diagnostischen Perspektiven lesen können.

Literatur

Badr Goetz, N. (2007): *Das Dialogische Lernmodell*. München: Meidenbauer.

Bruder, R. / Lengnink, K. / Prediger, S. (2003): Wie denken Lehramtsstudierende über Mathematikaufgaben? *Mathematica Didactica* 26 (1), 63–65.

Fend, H. (1998): *Qualität im Bildungswesen – Schulforschung zu Systembedingungen, Schulprofilen und Lehrerleistungen.* Weinheim / München: Juventa Verlag.

Rüede, Chr. / Weber, Chr. (2009a): Keine Diagnose ohne Auseinandersetzung mit Form, Inhalt und Hintergrund von Schülertexten. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*, Münster: Verlag für wissenschaftliche Texte und Medien, 819–822.

Rüede, Chr. / Weber, Chr. (2009b): *Unterscheidungsmerkmale generieren*. (erhältlich unter `http://www.igb.uzh.ch/institut/personen/lehrstuhlruf/christianrueede/RepertoryGrids.pdf`

Ruf, U. (2008): Das Dialogische Lernmodell vor dem Hintergrund wissenschaftlicher Theorien und Befunde. In: *Besser Lernen im Dialog*, Seelze: Kallmeyer, 233–270.

HANS-GEORG WEIGAND, EWALD BICHLER, Würzburg

Der Einsatz von Taschencomputern an bayerischen Gymnasien – Analyse eines langjährigen Unterrichtsversuchs

Der Modellversuch M³ wurde ab dem Jahr 2003 vom Bayerischen Staatsministerium für Unterricht und Kultus initiiert und von Texas Instruments finanziell unterstützt. Es ist ein langfristiges Projekt in einer authentischen Entwicklungsumgebung an bayerischen Gymnasien. Die zentrale Ausgangsfrage war und ist: „Welche Entwicklungen lassen sich beim langfristigen TC-Einsatz in einem realistischen Untersuchungsfeld beobachten und welche Faktoren beeinflussen diese Entwicklungen?“. Ausführlichere Darstellungen des Projekts findet sich in Weigand (2006, 2008) und Weigand u. Bichler (2009, 2010) und in der Dissertation von Ewald Bichler (2010). Viele Ergebnisse dieses Projekts zeigten sich in ähnlicher Weise auch in dem Projekt CaliMero (Ingelmann 2009). Im Folgenden wird ein Überblick über einige zentrale Ergebnisse des Projekts aus den Jahrgangsstufen 10 und 11 gegeben.

1. Ergebnisse bzgl. der Schüler

Erhalt von Rechenfertigkeiten

Bezüglich zentraler „händischer“ Fertigkeiten lassen sich keine signifikanten Unterschiede zwischen Schülern, welche mit einem TC unterrichtet werden und solchen, die ohne TC arbeiten, beobachten. Es lassen sich Hinweise darauf finden, dass die Tendenz besteht, dass Schüler in TC-Klassen beim Lösen von Gleichungen geringere „händische“ Fertigkeiten aufweisen, wohingegen sie bei Aufgabenstellungen, in denen argumentiert und begründet werden muss, tendenziell besser abschneiden als die Schüler aus den Klassen ohne TC.

Ergebnisse verschiedener Leistungsgruppen

In den ersten beiden Jahren des Projektes schien es, dass leistungsschwächere Schüler der Modellklassen gegenüber leistungsschwächeren Schülern der Kontrollklassen einen höheren Leistungszuwachs erreichten. Allerdings sind diese Steigerungen im dritten und vierten Jahr des M³-Projektes nicht sichtbar gewesen. Bei den mittleren Leistungsgruppen traten im M³-Projekt keine Unterschiede zu den Kontrollklassen auf – bei den leistungsstarken Gruppen trat in der Jahrgangsstufe 10 dagegen sogar eine geringere Leistungssteigerung als bei den entsprechenden Gruppen der Kontrollklassen auf. Insgesamt zeigt sich, dass es nicht – wie häufig befürchtet - zu einer Öffnung der Leistungsschere kommt.

Verwendung des TC beim Lösen von Aufgaben
Es zeigte sich, dass die Schüler eine relativ lange Zeit brauchen (etwa ein Schuljahr), bis sie mit dem TC als Hilfsmittel so vertraut sind, dass sie ihn bei der Bearbeitung von Aufgaben verstärkt und problemadäquat einsetzen. Gegen Ende des Schuljahres schnitten diejenigen Schüler, die den TC bei der Bearbeitung der Aufgaben eingesetzt haben, deutlich besser ab als diejenigen, die den TC nicht einsetzten.

Einsatzzeitpunkt und Lösungsstrategien
Setzen Schüler den TC beim Lösen von Aufgaben ein, dann geschieht dies verstärkt erst zum Ende des Schuljahres und dann überwiegend während des gesamten Lösungsprozesses. Dies zeigt erneut, dass es relativ lange dauert, bis der TC in die individuelle Problemlösestrategie integriert wird.

Verschiedene Darstellungsformen (graphisch, numerisch, symbolisch)
Unterscheidet man bei Lösungsstrategien nach symbolisch, numerisch und graphisch, so zeigt sich, dass der numerische Bereich eine untergeordnete Rolle spielt. Wurden die Lehrkräfte vor einem Klassentest nach ihrer Einschätzung hinsichtlich der Art und Weise des TC-Einsatzes der Schüler gefragt, so zeigte sich, dass die Schüler mit dem TC weitaus mehr symbolisch, aber weitaus weniger graphisch arbeiteten als die Lehrkräfte dies vermuteten.

Einordnung in ein „Drei-Säulen-Modell“
Der TC als Rechen-, Lehr- und Lernwerkzeug (Drei-Säulen-Modell) zeigt sich beim realen Unterrichtseinsatz im Klassenzimmer. Interessant ist es, dass die Schüler den TC stärker als „Lernwerkzeug“ und weit weniger als „Rechenwerkzeug“ empfinden.

Einstellungen der Schüler zum TC
Die Einstellungen der Schüler zum TC waren insgesamt positiv. Eine deutliche Mehrheit empfindet den Unterricht mit TC abwechslungsreich, gut die Hälfte empfindet ihn interessant. Eine in den anfänglichen Jahren beobachtete deutliche Polarisierung in eine Gruppe, die den TC annimmt und weiterhin mit ihm arbeiten möchte und in eine Gruppe, die ihn ablehnt, konnte langfristig nicht bestätigt werden.

2. Ergebnisse bzgl. der Lehrkräfte

TC als Katalysator für „moderne“ Unterrichtsformen
Die Auswertung der Stundenprotokolle der ersten beiden Phasen hat gezeigt, dass der TC überwiegend in „modernen“ Unterrichtsformen wie Partner-, Gruppen- oder Projektarbeit eingesetzt worden ist. In den Frage-

bögen der weiteren Phasen des Modellversuchs wurde dies bestätigt. Allerdings ist dies bei verschiedenen Klassen unterschiedlich.

Prüfungsformen mit TC

Der TC wurde von den meisten Lehrkräften in schriftlichen Prüfungen erlaubt, allerdings mit unterschiedlicher Gewichtung. Teilweise gab es bei den Klassenarbeiten hilfsmittelfreie Teile, teilweise wurden einzelne Klassenarbeiten ohne TC geschrieben. Bei mündlichen Prüfungen hat etwa die Hälfte der Lehrkräfte den TC eingesetzt.

Veränderung von Prüfungsaufgaben

Die Lehrkräfte haben ihre Prüfungsaufgaben (bezogen auf die schriftlichen Aufgabenstellungen in Klassenarbeiten) nicht übermäßig verändert. Sie hätten den überwiegenden Teil der Aufgaben auch gestellt, wenn sie keinen TC zur Verfügung gehabt hätten. Allerdings lässt sich erkennen, dass sich in manchen Aufgaben die Möglichkeit breiterer Lösungsstrategien wie numerische Näherungen oder graphisches Arbeiten widerspiegelt.

Einstellung der Lehrkräfte zum TC

Die Lehrkräfte sehen den Einsatz des TC mit großer Mehrheit positiv. Treten bei der Lehrkraft Akzeptanzprobleme im Zusammenhang mit dem TC auf, so ist dies auch bei den Schülern der Fall. Bezüglich der Einsatzhäufigkeit kommt es bei den Lehrkräften zur Bildung von zwei Polen. Eine Gruppe setzt den TC sehr häufig ein (überwiegend jede Stunde bzw. jede zweite Stunde), die andere Gruppe setzt den TC seltener als einmal pro Woche ein.

3. Ergebnisse bzgl. der Inhalte

Bei den Inhalten traten Schwerpunktverschiebungen dahingehend auf, dass es zur Behandlung einer höheren Zahl an Aufgabenstellungen gekommen ist bzw. zu einer Behandlung von komplexeren Aufgaben. Manche dieser komplexeren Aufgaben wurden nach Angaben der Lehrkräfte erst durch den TC ermöglicht. Hierzu gehören beispielsweise Aufgaben mit einem erhöhten Anwendungsbezug, Aufgaben, welche fächerverbindende Themen behandeln oder Aufgaben, welche neue (und mehr) Lösungsstrategien erlauben.

4. Ergebnisse bzgl. der unterstützenden Maßnahmen

Zusammenarbeit von Lehrkräften

Setzt eine Lehrkraft den TC ein, bleibt aber an der jeweiligen Schule ein „Einzelphänomen“, so kann dies dazu führen, dass sich die Verwendung eines TC an der Schule nicht etabliert. Eine Zusammenarbeit von Kolleginnen und Kollegen ist deshalb (fast) unterlässlich.

Materialien zum TC-Einsatz

Die Erfahrungen aus der Begleitung des Projektes und die Ergebnisse der Befragungen haben gezeigt, dass bei Materialien zum TC-Einsatz der mathematische und didaktische Inhalt nicht völlig vom Gerät getrennt werden kann. Unterrichtsbeispiele mit TC lassen sich zwar prinzipiell unabhängig vom konkret verwendeten TC beschreiben. Dies ist aber für Lehrkräfte, die erst beginnen mit einem TC zu unterrichten, nicht ausreichend, da Hinweise zur Bedienung fehlen. Im Rahmen des Projekts wurde das Format der „Minute Made Math“ (www.minute-made-math.com) entwickelt.

Dokumentation von Lösungen

Hat eine Lehrkraft noch keine Erfahrung im Unterrichten mit TC, so stellen die Bedienung des Geräts sowie die Fragen zum Prüfungseinsatz große Problemfelder dar. Diese müssen in Fortbildungen thematisiert werden. Im Projekt M³ konnte erreicht werden, dass auf Seiten der Schüler eine Tendenz erkennbar war, dass Schwierigkeiten mit der Bedienung des Geräts und mit der Dokumentation von Lösungen erfolgreich entgegengewirkt werden konnte.

5. Ausblick

Die Ergebnisse des Modellversuchs werfen zahlreiche Fragen für zukünftige Untersuchungen, etwa bzgl. Strategien für die Einführung des TC, Dokumentation von Lösungen, Vielfalt der Lösungsstrategien, Unterrichtsmaterialien, Selbstkontrolle der Schüler oder Komeptenzentwicklung der Schüler beim Einsatz des TC.

Literatur

Bichler, E. (2010). Explorative Studie zum langfristigen Taschencomputereinsatz im Mathematikunterricht. Dissertation an der Universität Würzburg, erscheint 2010

Ingelmann, M. (2009). Evaluation eines Unterrichtskonzeptes für einen CASgestützten Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I. Berlin : Logos, 2009.

Weigand, H.-G. (2006). Der Einsatz eines Taschencomputers in der 10. Jahrgangsstufe - Evaluation eines einjährigen Schulversuchs. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 89-112

Weigand, H.-G. (2008). Teaching with a Symbolic Calculator in 10th Grade - Evaluation of a One Year Project, *International Journal for Technology in Mathematics Education. Volume 15 (No 1)*, 19-32

Weigand, H.-G., Bichler, E. (2009). Der Modellversuch Medienintegration im Mathematikunterricht (M^3) an bayerischen Gymnasien. 100. Jahrestagung der MNU, Regensburg, Tagungsband auf CD

Weigand, H.-G., Bichler, E. (2010). Symbolic Calculators in Mathematics Education - The Case of Functions. Erscheint in: *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *17*

Ysette WEISS-PIDSTRYGACH, Köln; Rainer KAENDERS, Köln

Geometrisches Propädeutikum zur Begriffsbildung der Analysis

Im folgenden Beitrag stellen wir ein Projekt des Internetlabors math-il.de vor, welches sich mit der langfristigen, koninuierlichen Bildung grundlegender Begriffe der Analysis wie funktionaler Zusammenhang, Monotonie, Extremalverhalten und Stetigkeit befasst. Den Ausgangspunkt des Projektes bilden konktrete Beobachtungen aus der Unterrichtspraxis der beteiligten Lehrer und unser gemeinsames Interesse an einer langfristigen konzeptuell-orientierten und mit derzeitigen curricularen Veränderungen verträglichen Begriffsentwicklung im Analysisunterricht. Detailiertere Informationen zum Forschungsansatz und der Arbeitsweise des Internetlabors math-il.de werden in diesem Tagungsband bei Kanders (2010) vorgestellt, ein weiteres Projekt findet man bei Berendonk (2010)

1. Das math-il.de Projekt

Ausgangspunkt des Projekts sind von Gymnasiallehrern formulierte Probleme des derzeitigen Analysiscurriculums der Sek II. Nach ihrer Beobachtung zeigt sich, dass die sehr bildhaften, an den Graphen einer Funktion gebundenen Vorstellungen der Begriffe funktionaler Zusammenhang, Monotonie, Extremalverhalten und Stetigkeit kaum in abstraktere Kontexte übertragbar und der Entwicklung eines konzeptuelleren Verständnisses hinderlich sind.

Das Projekt befindet sich in der ersten Phase des Entwicklungszyklus des math-il.de-Konzepts, d.h. der Entwicklung eines Unterrichtsrohlings (Analyse und Diagnose der Problemstellung, im Schulsystem verortete Zielstellung, vorläufige Unterrichtsentwürfe mit Materialien und ein an der Problemstellung und den Entwürfen orientiertes Messinstrument).

Da es bei der Entwicklung der Begriffe der Analysis der SekII verschiedene Ansätze gibt und in anderen mathematischen Kulturen (zB in Osteuropa) langjährige starke Traditionen des Geometrieunterrichts und seiner Vernetzung mit Analysis existieren, schien es uns in diesem Fall sinnvoll, mit einer historischen und sozial-kulturellen Einordnung des aus der aktuellen deutschen Unterrichtspraxis stammenden Problems zu beginnen. Eine solche Einordnung setzt aber auch die Entscheidung für ein lerntheortisches Paradigma voraus, im Rahmen dessen sowohl die Einordnung, die vergleichenden Analysen und als auch die entsprechende

Diagnostik und Entwicklung des Messinstrumenets erfolgt. Die theoretische Grundlage für die Einordnung und Diagnose kommen aus der Tätigkeitstheorie, das Messinstruments basiert auf linguistischen Methoden und interpretiert Begriffsentwicklung als Entwicklung mathematischen Bewusstseins (Kanders & Kvasz, 2010).

Um die Problemstellung einzuordnen wurden folgende Staatsexamensthemen vergeben: „Bindung Funktionsbegriff an Graphen im Zeitraum Meraner Reform bis zum Beginn der Neuen Mathematik“, „Zuordnung, Programmierung und mengentheoretische Herangehens-weisen als Propädeutikum des Funktionsbegriffs in der Neuen Mathematik“, „Projektive und andere Geometrien als Propädeutikum des Funktionsbegriffs“, „Empirische Erkenntnisse zur Bindung Funktion-Graph in Schülervorstellungen“, „Bindung Funktion-Graph bei der Verwendung neuer Medien“, „Lehrbuchanalyse zur Bindung des Funktionsbegriff an den Graphen in der aktuellen Situation“.

2. Warum „geometrisches“ Propädeutikum?

Die Idee, funktionales Denken an geometrischen Problemstellungen zu entwickeln, findet man schon in den Ansätzen der neuen Geometrie und explizit im Meraner Lehrplan (Krüger, 2000). Die beschriebene aktuelle Ausgangssituation und unser Interesse an langfristiger, nach dem Spiralprinzip organisierter Begriffsentwicklung und konzeptuellem Begriffsverständnis rückt außerdem folgende Aspekte in den Vordergrund: Geometrische Phänomene erlauben frühzeitig eine intuitive, anschauliche, problemorientierte Motivation der genannten Begriffe, ohne dabei auf die Repräsentation des funktionalen Zusammenhangs als Funktionsterm, Wertetabelle oder Funktionsgraph angewiesen zu sein. Die Möglichkeiten dynamischer Visulisierung und experimenteller Hypthesenfindung vieler geometrischer Problemstellungen verdeutlichen ausserdem die Kontextbezogenheit von Koordinatisierungen und Variationsprinzipien und unterstützen dadurch ein konzeptuelles Verständnis dieser wichtigen Untersuchungsmethoden funktionaler Zusammenhänge. Im Unterschied zu kalkülorientierten Problemstellungen, deren Lösung in der Bestimmung konkreter Funktionen und deren Eigenschaften unter Verwendung der verschiedenen Darstellungsformen besteht, stehen bei geometrischen Fragestellungen oft Attribute funktionaler Zusammenhänge wie Symmetrie, Monotonie und Stetigkeit im Vordergrund. Der damit verbundene Sichtwechsel von der konkreten Funktion zu einer durch Attribute gekennzeichneten Menge von Funktionen entspricht dem

Wechsel zwischen lokaler und globaler Sichtweise. Der Sichtwechsel zwischen Lokalem und Globalem ist sowohl eine der wichtigsten elementaren Heuristiken der moderenen Analysis als auch ein wesentlicher Schritt bei der Formalisierung und Konzeptualisierung der mit den Attributen verbundenen Begriffe.

3. Hintergründe aus der Tätigkeitstheorie

Tätigkeitstheorie gilt oft (ähnlich wie Kategorientheorie in der Mathematik) als "abstract nonsens" in der Psychologie. Zusammenhänge zwischen Denken und Handeln werden nicht durch die Betrachtung einzelner Tätigkeiten untersucht, sondern durch die Untersuchung der Dynamik weniger universeller Prinzipien, denen nach axiomatischer Annahme alle Tätigkeiten genügen. Modelle der Tätigkeitstheorie bilden daher weniger einen Ansatz zur Konstruktion "guter Unterrichtsinhalte und -methoden", sie sind in erster Linie ein diagnostisches Instrument zur Überprüfung des Vorhandenseins wichtiger Entwicklungspotentiale.

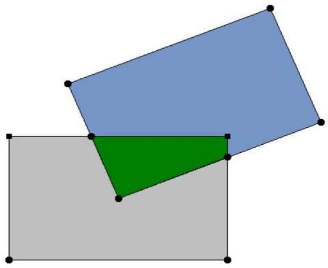
Eine der Annahmen der Tätigkeitstheorie (Vygotsky, 1934) ist, dass der Mensch niemals direkt mit seiner Umwelt agiert, sondern mittels Werkzeugen, wie etwa Worte, Instrumente, Algorithmen, Artefacte . Im Mathematikunterricht tritt ein mathematischer Begriff in zwei verschiedenen Rollen auf, er ist vermittelndes Werkzeug bei der Tätigkeit „Lösen mathematischer Probleme" und die durch ihn bezeichnete mathematische Struktur ist selbstständiger Untersuchungsgegenstand, also Ziel einer Tätigkeit. Die Entwicklung des Werkzeuges „Begriff" setzt eine Wechsel dieser Rollen voraus. Eine zweite wichtige Annahme ist die hierarchische Struktur von Tätigkeiten und eine Entwicklung als Resultat der dialektischen Interaktion der verschiedenen Ebenen (Kaptelinin ,1999) .

Tätigkeitstheoretische Ansätze zur Begriffsbildung erlauben es, Unterrichtsinhalte dahingehend zu analysieren, ob durch Automatisierung einer Handlung zur Routineoperation und der damit verbundenen starken Bindung der vermittelnden Werkzeuge an die Untersuchungsobjekte der Transfer der verinnerlichten Handlung in andere Kontexte erschwert oder sogar unmöglich wird.

Problemlösetätigkeiten, welche die Entwicklung eines konzeptuellen Verständnisses funktionaler Zusammenhänge zum Ziel haben, sind auch auf Operationalisierungen funktionaler Zusammenhänge durch Funktionen , im speziellen durch Graphen angewiesen. Die anschauliche und deshalb leichter zu automatisierende Verwendung von

Funktionsgraphen als vermittelndes Werkzeug ist deshalb begründet und ein wichtiges Element der Bildung des Begriffs funktionaler Zusammenhang und damit vernetzer Begriffe.

Ziel des hier beschriebenen Projektes ist es Ansätze in die Praxis zu bringen, die einer einseitigen Operationalisierung durch Funktionsgraphen entgegenwirken und den vorher beschriebenen Wechsel der Rolle mathematischer Begriffe und eine ausgeglichen Dynamik zwischen Operationalisieren und Konzeptualisieren der Begriffe anstreben. Es gibt mannigfaltige konkrete Beispiele für Problemstellungen, bei denen die Betrachtungfunktionaler Zusammenhänge oder Eigenschaften wie Symmetrie, Monotonie und Stetigkeit eine Lösungsmethode darstellen, die Verwendung von Funktionsgraphen jedoch nicht zweckmäßig ist. Ein einfaches Beispiel ist etwa die Betrachtung der möglichen Konfigurationen zweier kongruenter Rechtecke, bei denen der Eckpunkt des einen im Mittelpunkt des anderen liegt, und die Frage nach der dem größten Flächeninhalt des Durchschnitts.



Sobald die Analyse und Diagnose der oben beschriebenen Probleme bei der Begriffsbildung in der Analysis zur Erstellung eines Unterrichtsrohlings geführt hat, werden weitere LehrerInnen gewonnen, die gemeinsam mit Kollegen in ihrem eigenen Unterricht Beiträge zur Lösung dieser Problemen entwickeln wollen. Der so geformten Gruppe von fünf bis zehn MathematitiklehrerInnen wird dann das Messinstrument dazu dienen, zu erkennen, welche ihrer eigenen Bemühungen sie ihrem Ziele näher bringen.

Literatur

Berendonk, S. (2010). *Wie kann Topologie in der Schule sinnvoll unterrichtet werden?* Beiträge zum Mathematikunterricht, Münster: WTM Verlag.

Kaenders, R. & Kvasz, L. (2010). *Mathematisches Bewusstsein*. Eingereicht in: Lengnink, K. & Nickel, G. & Wille R. (Hrsg.) Mathematik verstehen – philosophische und didaktische Perspektiven, Siegen, 2010.

Kaptelinin, V., Nardi, B.A., Macaulay, C. (1999), *Methods and tools: the Activity Checklist: a tool for representing the space of context*, Interactions, Vol. Issue 6 pp.27-39.

Krüger, K.,(2000) *Erziehung zum funktionalen Denken*, Kap.7 ,Logos, Berlin, 2000.

Vygotsky, L.(1934) *Psychologie der Entwicklung des Menschen*, Kap.8, S.1026, (russisch), Smysl, Moskau, 2005.

Simon WEIXLER, München

Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I: eine Kennzeichnung von drei Schritten

Intuitionen bezeichnen im vorliegenden Zusammenhang eine spezifische Form unmittelbar verfügbaren Wissens: kognitive Komponenten intelligenten Verhaltens, die im aktiven Kontakt mit der Umwelt aufgebaut werden (vgl. Fischbein, 1975; Fischbein & Schnarch, 1997; Rasfeld, 2004). Intuitives Wissen ist subjektiv offensichtlich, das heißt völlig klar für den Betreffenden – es muss nicht hinterfragt und überprüft werden und ist in der Regel nicht explizit formuliert.

1. Theoretische Grundlage

Ausgangspunkt ist die Theorie des Conceptual Change, wie sie von Krüger (2007) beschrieben wird. Unter der spezifischen Perspektive dieser Theorie wurden zum intuitiven probabilistischen Denken Erkenntnisse und Befunde aus der Kognitions- und der Entwicklungspsychologie analysiert sowie zur Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I Ergebnisse einer detaillierten Neu-Analyse der Befunde fünf ausgewählter Studien – die Studie von Green (1982), in der die Vorstellungen von Wahrscheinlichkeit bei 3 000 Schülerinnen und Schülern im Alter von 11 bis 16 Jahren untersucht wurden, die Studie von Fischbein und Schnarch (1997), deren Untersuchungsgegenstand die Entwicklung von probabilistischen, auf Intuitionen basierenden Fehlvorstellungen mit zunehmendem Alter war, die Studie von Rasfeld (2004), in der untersucht wurde, ob sich intuitives stochastisches Denken durch den Stochastikunterricht verbessert, die Studie von Engel und Sedlmeier (2005), deren Untersuchungsgegenstand das Verständnis von Zufall und zufallsbedingter Variabilität in Daten bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I war, sowie die Studie von Amir und Williams (1999), in der kulturelle Einflüsse auf das probabilistische Denken von Kindern untersucht wurden – ausgewertet. Ausgehend von Elementen eines Prozess-Struktur-Modells von Scholz (1987) lag dabei der Schwerpunkt auf einfachen probabilistischen Heuristiken (“simple everyday heuristics”) und auf kognitiven Verzerrungen beim Anwenden dieser Heuristiken.

2. Modell der Entwicklungsschritte

Unter Einbeziehung von Kompetenz-Strukturen wurde eine Kennzeichnung von drei Schritten der Entwicklung des intuitiven probabilistischen

Denkens bei Schülerinnen und Schülern im Bereich der Sekundarstufe I konzipiert (Abb. 1).

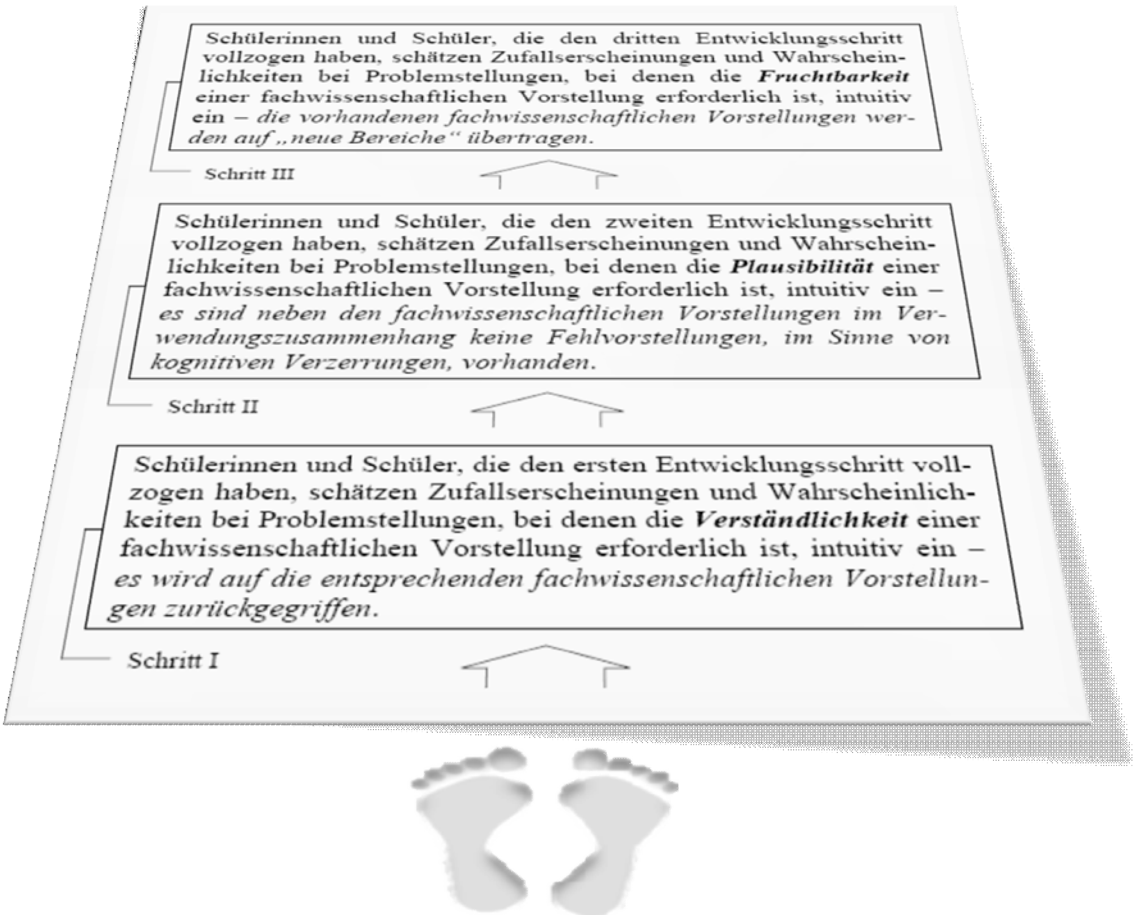


Abb. 1: Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens (vgl. Weixler, 2009)

Die drei Schritte der Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bauen aufeinander auf, denn ohne *Verständlichkeit* ist keine *Plausibilität* möglich und ohne *Verständlichkeit* und *Plausibilität* keine *Fruchtbarkeit* (vgl. Krüger, 2007). Schülerinnen und Schüler, die beim intuitiven Einschätzen von Zufallserscheinungen und Wahrscheinlichkeiten nicht auf fachwissenschaftliche Vorstellungen zurückgreifen, weil – im Sinne der Theorie des Conceptual Change – die *Verständlichkeit* dieser Vorstellungen nicht gegeben ist, sind einem „Null-Schritt" zuzuordnen.

Die drei Schritte sind so charakterisiert, dass eine Einordnung von Aufgaben nach zunehmendem Anspruch und zunehmender Komplexität möglich ist.

3. Empirische Studie

Das Modell der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens wurde im Zeitraum von Ende März bis Anfang April 2009 für drei als zentral angesehene Konzepte in einer empirischen Studie mit 521 Schülerinnen und Schülern der Jahrgangsstufe 10 verschiedener zufällig ausgewählter Realschulen in Bayern anhand von aufgabenbasierten Tests überprüft. Den Schülerinnen und Schülern wurde jeweils mitgeteilt, dass sie für eine „Untersuchung der Universität München“ ausgewählt worden waren und „verschiedene Alltagssituationen einschätzen“ sollten. Ein expliziter Bezug zum Fach Mathematik wurde vermieden.

Abb. 2 zeigt exemplarisch eine Aufgabe, die zur Überprüfung der *Verständlichkeit* des Konzepts Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit eingesetzt wurde.

Kreuze die korrekte Antwort an.

Aufgabe 2:

Dein Freund wirft eine Münze. Er bekommt Zahl.

Nun wirfst du die Münze.

Was ist wahrscheinlicher?

A: Du bekommst Adler.

B: Du bekommst Zahl.

- ❑ A ist wahrscheinlicher.
- ❑ B ist wahrscheinlicher.
- ❑ A und B sind gleich wahrscheinlich.
- ❑ Weiß ich nicht.

Abb. 2: Aufgabe „Zahl! Und nun?“ (Weixler, 2009)

Die Annahme einer schrittweisen Entwicklung wurde

- für das Konzept Modell der Laplace-Wahrscheinlichkeit bei 410 der 521 Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 78,7%),
- für das Konzept Prinzip der stochastischen Unabhängigkeit bei 460 der 521 Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 88,3%),
- für das Konzept Aussage des empirischen Gesetzes der großen Zahlen bei 455 der 521 Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 87,3%)

sowie

- über alle drei untersuchten Konzepte hinweg bei 319 der 521 Schülerinnen und Schüler (dies entspricht 61,2%)

bestätigt.

Aufgrund der Lehrplanstruktur ist davon auszugehen, dass bei den getesteten Schülerinnen und Schülern keine formale Unterweisung zu stochastischen Themenkreisen erfolgte.

4. Perspektive

In Bezug auf eine umfassendere empirische Bestätigung des Modells der Entwicklungsschritte des intuitiven probabilistischen Denkens werden Untersuchungen in „subjektiven Risikosituationen“ (vgl. Wollring, 1994) für Erfolg versprechend erachtet.

Literatur

Amir, G. S. & Williams, J. S. (1999). Cultural influences on children’s probabilistic thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 18, 85-107.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2005). On middle-school students’ comprehension of randomness and chance variability in data. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37, 168-177.

Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 96-105.

Green, D. R. (1982). A survey of probability concepts in 3 000 pupils aged 11-16 years. In D. R. Grey, P. Holmes, V. Barnett & G. M. Constable (Hrsg.), *Proceedings of the First International Conference on Teaching Statistics*, *Vol. 2* (S. 766-783). Sheffield, UK: University of Sheffield.

Krüger, D. (2007). Die Conceptual Change-Theorie. In D. Krüger & H. Vogt (Hrsg.), *Theorien in der biologiedidaktischen Forschung* (S. 81-92). Berlin u. a.: Springer.

Rasfeld, P. (2004). Verbessert der Stochastikunterricht intuitives stochastisches Denken? Ergebnisse aus einer empirischen Studie. *Journal für Didaktik der Mathematik*, 25, 33-61.

Scholz, R. W. (1987). *Cognitive Strategies in Stochastic Thinking*. Dordrecht: Reidel.

Weixler, S. (2009). *Die Entwicklung des intuitiven probabilistischen Denkens bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I unter dem Aspekt des Conceptual Change*. [Dissertation]. München: Universität München.

Wollring, B. (1994). Zur situativen Bedingtheit des Wahrscheinlichkeitsverständnisses. In K. P. Müller (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 1994* (S. 454-457). Hildesheim: Franzbecker.

Claudia WITTICH, Marcus NÜHRENBÖRGER, Dortmund, Elisabeth MOSER OPITZ, Zürich

Ablösung vom zählenden Rechnen – Eine Interventionsstudie für die Grund- und Förderschule

1. Zählendes Rechnen in der Grund- und Förderschule

Verfestigtes zählendes Rechnen beim Lösen von (Kopf)Rechenaufgaben gilt als ein zentrales Merkmal von Rechenschwäche und rechenschwache Lernende verwenden oft bis zur Oberstufe Abzählstrategien (Moser Opitz, 2007a; Geary, et al. 2004). Zählendes Rechnen verhindert die Einsicht in dezimale Strukturen unseres Zahlensystems und Zahlen werden nicht in größere Einheiten zusammengefasst. Häufig verstehen zählende Rechnerinnen und Rechner Zahlen ausschließlich ordinal und weniger kardinal. Anzahlen werden nicht strukturiert erfasst. Hinzu kommt, dass das zählende Rechnen als äußerst resistent gegenüber Veränderungen gilt (Schmassmann & Moser Opitz, 2008). Unterrichtliche Aspekte scheinen die Verwendung von Abzählstrategien zu beeinflussen. In einer Interventionsstudie mit Schulanfängerinnen und -anfängern in Sonderklassen wurde aufgezeigt, dass Kinder, bei denen der Schwerpunkt auf das Arbeiten mit strukturierten Mengenbildern und das Erarbeiten von Zahlbeziehungen gelegt wurde, weniger abzählten als Kinder, bei denen diese Intervention nicht oder nicht im selben Maße stattfand (Moser Opitz, 2008, 157ff.).

Auch wenn das zählende Rechnen für den Erwerb erster arithmetischer Fertigkeiten wichtig ist, muss im Mathematikunterricht verhindert werden, dass Kinder verfestigte Zählstrategien entwickeln.

Als wichtig für die Ablösung vom zählenden Rechnen bzw. zur Prävention werden Aspekte wie eine sichere Zählkompetenz, der Aufbau mentaler Vorstellungsbilder, das Erarbeiten der Beziehung Teil-Ganzes und Zahlbeziehungen sowie das Ausnutzen operativer Beziehungen erachtet (Gaidoschik, 2009; Moser Opitz, 2007b). Im gemeinsam mit Uta Häsel-Weide durchgeführten ZebrA-Projekt (Zusammenhänge erkennen und besprechen, rechnen ohne Abzählen) wird angestrebt, diese Hinweise in konkrete Unterrichtsbausteine umzusetzen, systematisch zu erproben und zu evaluieren.

2. Kooperativ-strukturierte Lernprozesse im Mathematikunterricht

Werden mathematische Lernprozesse aus sozialkonstruktivistischer und epistemologischer Perspektive betrachtet, bieten sich Ansätze für die Förderung rechenschwacher Schülerinnen und Schüler an, die insbesondere sozial-interaktive Lernprozesse aufgreifen. Damit wird berücksichtigt, dass das Mathematiklernen auf dem sozialen Austausch über strukturelle Deutungen und Lösungswege basiert. Das gemeinsame Konstruieren mathematischer Inhalte kann auch Kindern mit Lernschwierigkeiten die Möglichkeit eröffnen, neue Deutungen und Perspektiven über den Lerngegenstand zu erhalten (Nührenbörger & Brandt, 2009; Steinbring, 2005; Jenkins & O´Connor, 2003).

Metaanalysen im Grundschulbereich weisen nach, dass kooperativ-strukturierte Lernformen und peergestütztes Lernen stärkere Effekte bezüglich fachlicher Leistungen zeigen als traditionelle Unterrichtsformen (Rohrbeck et al., 2003). Die Effekte sind allerdings von der Zusammenstellung der Lerntandems abhängig, aber auch vom Strukturierungsgrad des kooperativen Lernsettings. Ausgehend von dieser Forschungslage interessiert, ob und in welcher Art und Weise sich kooperativ-strukturierte Lernformen effektiv in Unterrichtsbausteinen zur Ablösung vom zählenden Rechnen einsetzen lassen.

3. Fragestellung und Hypothesen

Im Rahmen des Forschungsprojektes wird u.a. die Wirksamkeit einer unterrichtsintegrierten Förderung zur Ablösung vom zählenden Rechnen überprüft. Dabei stellt sich erstens die Frage, ob bei Kindern mit schwachen Mathematikleistungen, die auch im 2. Schuljahr (Grundschule) bzw. im 3./4. Schuljahr (Förderschule Lernen) einfache Kopfrechenaufgaben abzählen, eine Ablösung vom zählenden Rechnen erreicht werden kann. Zweitens soll untersucht werden, inwieweit sich diese Zielsetzung auch durch kooperativ-strukturiertes Mathematiklernen erreichen lässt. Folgende Hypothesen werden überprüft:

- Zählende Rechnerinnen und Rechner, die eine unterrichtsintegrierte Förderung zur Ablösung vom zählenden Rechnen erhalten, machen größere Lernfortschritte im Fach Mathematik und lösen sich besser von Zählstrategien als Kinder, die keine Intervention erhalten.
- Zählende Rechnerinnen und Rechner, die eine unterrichtsintegrierte Förderung zur Ablösung vom zählenden Rechnen durch kooperativ-strukturiertes Mathematiklernen erhalten, erzielen mindestens vergleichbare Lernfortschritte wie Kinder, die eine individuell-strukturierte Förderung zum Ablösen vom zählenden Rechnen erhalten.

4. Vorgehen

Um diese Hypothesen zu prüfen wird eine Unterrichtsstudie mit folgendem quasi-experimentellen Pre-Posttest-Design durchgeführt (Bortz & Döring, 2006).

05/2010	09/2010		01/2011	05/2011
Vortest-phase	**Intervention**		**Nachtest-phase 1**	**Nachtest-phase 2**

Die Stichprobe setzt sich aus Schülerinnen und Schülern des 2. Schuljahres der Grundschule, des Gemeinsamen Unterrichts und des 3. oder 4. Schuljahres der Förderschule (Förderschwerpunkt Lernen) aus NRW zusammen. Die Interventionsgruppen mit N = ca. 44 zählenden Rechnerinnen und Rechnern pro Gruppe werden hinsichtlich der Merkmale Mathematikleistung, IQ, Alter und Geschlecht parallelisiert. Die Intervention soll in den Klassen der ausgewählten Kinder stattfinden, so dass in der Ausgangsstichprobe im Vortest ca. 600 Kindern aus über 40 Schulklassen teilnehmen.

Messinstrumente

Im Vortest wird die Mathematikleistung mit dem Deutschen Mathematiktest (DEMAT 1+) erfasst, die kognitive Grundfähigkeit mit dem CFT 1 (Kontrollvariable). Zusätzlich wird ein software-basierter Einzeltest zur Erfassung zählender Rechnerinnen und Rechner durchgeführt. Dieser besteht aus Items zur strukturierten Anzahlerfassung, die in bestimmten Zeitfenstern präsentiert werden, und Kopfrechenaufgaben. Parallel zum Lösen der Rechenaufgaben führen die Kinder nach dem Dual-Task-Verfahren eine Zweitaufgabe (Tapping) durch. Diese experimentelle Technik zur „artikulatorischen Unterdrückung“ innerer und offener Zählstrategien in Anlehnung an Grube (2006) ermöglicht eine zuverlässigere Beobachtung und Erfassung des zählenden Rechnens. Als erster Nachtest werden der DEMAT 1+ und als zweiter Nachtest der DEMAT 2+ sowie der software-basierte Einzeltest eingesetzt.

Intervention

Die Intervention wird in einem Zeitraum von ca. 10 Wochen (2x pro Woche 30 min) von den Lehrpersonen durchgeführt. Diese erhalten zwei Fortbildungen und werden in standardisierte Unterrichtsmaterialien und in das Lehrerhandbuch eingeführt. Zur Kontrolle der Intervention reichen die Lehrpersonen Protokolle ein, zudem wird eine Unterrichtsstunde videografiert.

Individuell-strukturiertes Mathematiklernen (Interventionsgruppe 1): Die Lehrpersonen regen die Kinder durch geeignete Aufgaben und Diskussionen in der Klasse an, durch individuelles, aktives und selbständiges Bearbeiten der Aufgaben neue mathematische Einsichten, Gedanken und Handlungen zu entwickeln.

Kooperativ-strukturiertes Mathematiklernen (Interventionsgruppe 2): Es werden dieselben Inhalte und Bausteine verwendet, wie in Gruppe 1, jedoch in Partnerarbeit. Im Mittelpunkt dieser Intervention stehen der gemeinsame Austausch und die soziale Konstruktion mathematischer Strukturen und Einsichten.

Kontrollgruppe: Keine spezifische Intervention.

Ziel des Projektes ist, substanzielle Unterrichtsbausteine zur Ablösung vom zählenden Rechnen zu erproben und zu evaluieren, Leistungsfortschritte der Kinder zu erfassen und Erkenntnisse darüber zu erlangen, inwieweit sich kooperativ-strukturierte Lernprozesse für rechenschwache Kinder eignen. Zeigen sich positive Effekte können Folgerungen für die Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts im Primarbereich und Förderschulen abgeleitet werden.

Literatur

Gaidoschik, M. (2009). Zählendes Rechnen? Ist doch viel zu mühsam! Strategie-Training kann Rechenschwäche vermeiden. *Praxis Grundschule, 2*, 7-12.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities 37*, 4-15.

Grube, D. (2006). *Entwicklung des Rechnens im Grundschulalter. Basale Fertigkeiten, Wissensabruf und Arbeitsgedächtniseinflüsse*. Münster: Waxmann.

Jenkins, J. R. & O´ Connor, R. E. (2003). Cooperative learning for students with learning disabilities: Evidence from experiments, observations, and interviews. In H. L. Swanson, K. R. Harris & S. Graham (Eds.), *Handbook of learning disabilities* (417-430). New York: Guilford Press.

Moser Opitz, E. (2008). *Zählen, Zahlbegriff, Rechnen: Theoretische Grundlagen und eine empirische Untersuchung zum mathematischen Erstunterricht in Sonderklassen* (3. Aufl.) Bern u.a: Haupt.

Moser Opitz, E. (2007a). *Rechenschwäche/Dyskalkulie: Theoretische Klärungen und empirische Studien an betroffenen Schülerinnen und Schülern* (Bd. 31). Bern: Haupt.

Moser Opitz, E. (2007b). Erstrechnen. In Heimlich, U., Wember, F. (Hrsg.). *Didaktik des Unterrichts im Förderschwerpunkt Lernen* (253-265). Stuttgart: Kohlhammer.

Nührenbörger, M. & Brandt, B. (2009). Kinder im Gespräch über Mathematik. *Die Grundschulzeitschrift, 222.223*, 28-33.

Rohrbeck, C. A., Ginsburg-Block, M. D., Fantuzzo, J. W. & Miller, T. R. (2003). Peer-assisted learning interventions with elementary school students: A meta-analytic review. *Journal of Educational Psychology, 95*, 240-257.

Schmassmann, M. & Moser Opitz, E. (2008). *Heilpädagogischer Kommentar zum Schweizer Zahlenbuch 2* (2. überarb. Aufl.). Zug: Klett & Balmer.

Steinbring, H. (2005). *The construction of new mathematical knowledge in classroom interaction – An epistemological perspective, mathematics education library* (Vol. 38). Berlin: Springer.

Jan WÖRLER, Würzburg

Konkrete Kunst im Mathematikunterricht: Modellierung und Simulation von Kunstwerken

Bei Modellierungsaufgaben wird häufig von einem Alltagsproblem ausgegangen und versucht, es mit mathematischen Mitteln zu beschreiben und zu lösen. Ihr Ziel ist es etwa, die »optimale« Verpackung zu finden oder die Menge von Fahrzeugen in einem Verkehrsstau sinnvoll abzuschätzen.

Fasst man den Begriff der *Modellierung* etwas allgemeiner, so geht es dabei um die Beschreibung von Systemen, wie etwa beim Aufstellen von Klima- oder Bevölkerungsmodellen. Systeme setzen sich aus Systemelementen und Relationen zwischen ihnen (Wirkungsverknüpfungen) zusammen (Bossel 1992). Ein wesentlicher Schritt des Modellierungsprozesses ist es, diese Größen zu identifizieren und dabei das betrachtete System von störenden Umgebungseinflüssen abzugrenzen.

Auf die Modellierung aufbauende *Simulationen* des Systemverhaltens können zunächst dazu dienen, die Gültigkeit eines gefundenen Modells zu überprüfen und das Modell ggf. zu verbessern. Dazu sucht man einen Satz von Parametern, für den die Simulation das modellierte System in Zustände versetzt, die mit denen des realen Systems übereinstimmen.

Simulationen bieten darüber hinaus aber auch die Möglichkeit des freien Veränderns einzelner Systemparameter oder Relationen. Es können Zustände erzeugt werden, die im Original gar nicht auftreten (können) oder noch nicht aufgetreten sind (etwa bei Bevölkerungs- oder Aktienkursentwicklungen). Lässt man die freie Variation ohne Einschränkungen zu, so kann auf diesem Wege statt des Originals das *Modell* in den Fokus näherer Untersuchungen gerückt werden. Bei der Modellierung von Alltagsproblemen mag dies nicht unbedingt sinnvoll erscheinen; wendet man sich aber anderen Bereichen unserer Welt zu, so können Modellierung und Simulation auch in Wertebereichen erfolgen, die durch den Realitätsbezug sonst stark eingeschränkt wären. Trotzdem kann damit – wie im Folgenden zu sehen sein wird – eine gute Lern- oder Übungsumgebung für die Modellierung von Realsituationen geschaffen werden.

Theorie: Kunst als Ausgangspunkt für Modellierung und Simulation

Beim hier vorgestellten Ansatz dienen Werke der Konkreten Kunst als Ausgangspunkte der Untersuchungen. Jedes ihrer streng geometrischen Bilder basiert auf einem exakten, vom Künstler vorgegebenen Konstruktionsschema, das sich – betrachtet man das Werk durch eine »mathematische Brille« – auch auffinden lässt. Das Suchen, Finden und Beschreiben solcher Regelmäßigkeiten erfordert ähnliche Fähigkeiten wie die, die beim Modellieren von Alltagsproblemen angesprochen werden. Das Herausarbeiten der bildbestimmenden Größen ist aber häufig einfacher, als die Modellierung von Realsituationen, da sie von den Künstlern fest vorgegeben und von der Umwelt isoliert sind. Da i. d. R. bereits ein inhaltlicher Bezug zur Mathematik besteht, gestalten sich Übersetzungsprozesse aus der realen in die mathematische Welt vergleichsweise leicht.

Im Unterricht kann sich an die Modellierung eine zweite Phase anschließen, in der die gefundenen Zusammenhänge mit mathematischen Mittel beschrieben und zur Grundlage einer Simulation gemacht werden (siehe »2-Phasen-Schema«, Wörler 2009). Bei der entsprechenden Parameterwahl liefert die Simulation zunächst ein (u. U. vereinfachtes) Abbild des Kunstwerkes. Der Bezug zum Ausgangsobjekt kann aber auch gänzlich fallen gelassen werden und eine freie Variation der Parameter und Wirkzusammenhänge erfolgen; Resultate lassen sich direkt am Bildschirm ablesen und untersuchen. Durch die Simulation einer Vielzahl von Systemzuständen werden die Eigenschaften des Modells und der relationalen Zusammenhänge im Modell aufgedeckt. Häufig können sie als Ausgangspunkte für weitergehende Fragen dienen.

Praxis: Wie arbeiten SchülerInnen mit Konkreter Kunst?

Im Rahmen der Projekttage 2009 an der Universität Würzburg wurden Schülerinnen und Schüler der gymnasialen Oberstufe mit Kunstwerken der Konkreten Kunst konfrontiert. Unter der Leitfrage »Was steckt an Mathematik in diesen Werken?« versuchten sie, den mathematischen Gehalt der Bilder herauszuarbeiten und zu beschreiben. Die Übertragung der gefundenen Zusammenhänge auf den Rechner und das Experimentieren an den Simulationen, führte zur Optimierung der Modelle und brachte tiefere Einblicke in die modellierten Zusammenhänge. Anhand zweier Werke aus verschiedenen Bereichen der Mathematik werden im Folgenden einige (Teil-) ergebnisse des Projekts beleuchtet.

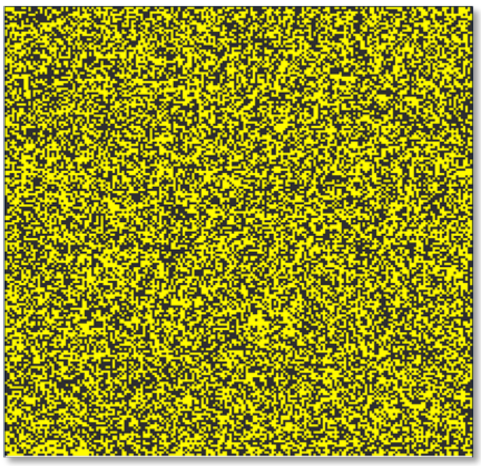
Stochastik: François Morellets Werk »*Zufällige Verteilung von 40.000 Quadraten, den graden und ungeraden Zahlen eines Telefonbuchs folgend, 50% grau, 50% gelb*« (1962) ist ein Rasterbild, bei dem 200 · 200 quadratische Kästchen teils gelb, teils grau gefärbt sind. Der Künstler gibt mit dem Werkstitel auch einen Hinweis auf die Methode an, nach der er die Verteilung der Kästchen festgelegt hat.

Doch wie hängen die Kästchen mit den Telefonnummern zusammen? Geht es um das Gerade- oder Ungeradesein bestimmter Ziffern der Telefonnummern? Darf man davon ausgehen, dass es gleichviele gerade wie unge-

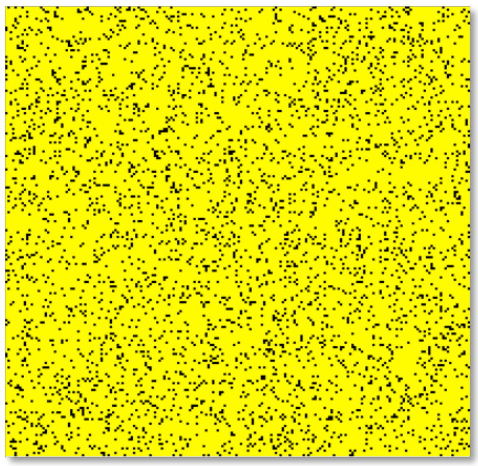
rade Ziffern in einem Telefonbuch gibt? Und wie nahe an das Verhältnis 50:50 kommt man, wenn 40.000 Zufallszahlen auf ihre Teilbarkeit durch 2 untersucht? Solche Fragen werden in der Projektgruppe diskutiert. Eine Teilgruppe nimmt ein echtes Telefonbuch zur Hand und wertet eine Stichprobe aus. Schnell wird klar: für ein ausgeglichenes Verhältnis müsste die Stichprobe sehr groß sein. *Ist 40.000 wirklich groß genug?* Während die einen weiterzählen, begeben sich die anderen an den Rechner und erzeugen mit Hilfe eines TKP eine entsprechende Menge Zufallszahlen; bedingte Formatierung der Zellen stellt dabei den Bezug zum Kunstwerk her. Eine Zählfunktion ermittelt den Anteil der gelben Kästchen. Das Ergebnis: Wiederholt man die Berechnung des Tabellenblattes häufig, so tritt in rund 5% der Fälle eine Abweichung auf, bei deren Größe die Aussage »50% gelb, 50%« grau falsch ist.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1
2	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1
3	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0
5	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1
6	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1
7	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	1
9	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0
10	0	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0
11	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1
12	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	0	1
13	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
14	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0
15	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1
16	1	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0
17	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0
18	0	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	1
19	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	1	1
20	1	1	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0

Durch die unterschiedliche Qualität der Farben Grau und Gelb und Domänenbildung entsteht zum Teil aber auch bei einem ausgeglichenen Verhältnis der Eindruck, der Anteil einer der Farben würde deutlich überwiegen. Die Projektgruppe erweitert ihr Programm daher um Schieberegler, über die sich festgelegt lässt, ab welcher Grenze ein Kästchen eine bestimmte Farbe erhält. *Und wie sieht denn eigentlich ein Verhältnis 90:10 aus?*

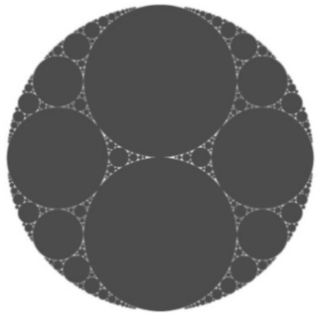


Verhältnis 50:50 (Simulation)

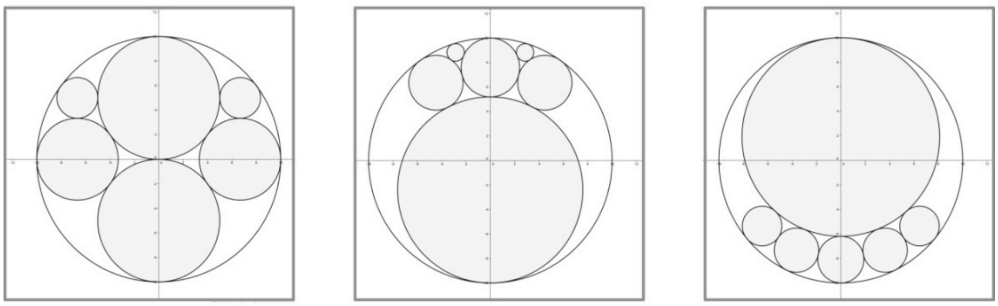


Verhältnis 90:10 (Simulation)

Geometrie: Der Künstler Karl Gerstner legt seinem Werk »*Farbfraktal aus der Serie Hommage an Benoît Mandelbrot*« (1989) eine spezielle inhomogene Kreispackung zu Grunde (Abb. rechts). Ihre mathematische Beschreibung ist im Detail hochkomplex; beschränkt man sich aber auf zunächst auf wesentliche Teile der Konstruktion, so ist sie mit Mitteln der Sek I bzw. Sek II möglich.



Die Projektgruppe wählt zunächst den Satz des Pythagoras als zentrales Hilfsmittel beim Auffinden der Kreisradien. Für die ersten Schritte des Konstruktionsverfahrens liefert er korrekte Werte. Als die SchülerInnen die Kreispackung aber am PC nachkonstruieren und dabei auch eine Variation der Ausgangkonfiguration zulassen, verschwinden die rechten Winkel und damit die Grundlage der Argumentation. Erst die Idee der Einführung von Koordinaten und des Aufstellens eines Gleichungssystems, führt über eine Verschränkung von CAS und DGS zu einem Ergebnis, bei dem die Konstruktion auch unter Variation ihre Gültigkeit behält.



Modellierung und Simulation als Einheit

Modelle können als Simulationsmodelle selber zum Gegenstand eingehender Untersuchungen gemacht werden. Die Analyse ihrer Zustandsspektren fördert das Verständnis relationaler Zusammenhänge in Modellen und zeigt die Leistungsfähigkeit und die Grenzen der Modellierung auf. Metawissen über Systeme und Modelle, das auf diesem Weg aufgebaut werden kann, kann die Modellierung von Alltagsproblemen vorbereiten und unterstützen. Konkrete Kunst ist dafür ein möglicher Ausgangspunkt.

Literatur

Bossel, H. (1992). *Modellbildung und Simulation*. Braunschweig: Vieweg.

Lauter, M; Weigand, H.-G. (Hrsg.) (2007). *Ausgerechnet… Mathematik und Konkrete Kunst.* Baunach: Spurbuchverlag.

Wörler, J. (2009). Konkrete Kunst. In M. Neubrand (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 955 - 958). Münster: Martin Stein Verlag.

Bernd WOLLRING, Kassel

EMBI-G Handlungsleitende Diagnostik zu Raum und Form – Ein interviewbasiertes Verfahren für die Grundschule

Raum und Form in den Bildungsstandards

Die Bildungsstandards Mathematik Grundschule (KMK 2004) beschreiben die im Mathematikunterricht der Grundschule zu erreichenden Kompetenzen in einem dreidimensionalen Modell, gekennzeichnet durch *Inhaltsbereiche*, *nicht inhaltsbezogene Kompetenzen* und *Anforderungsebenen.*

Die Inhaltsbereiche setzen in der Stofforganisation neue Akzente durch die übergeordnete Rolle des Inhaltsbereichs *Muster und Strukturen* und die gleichgewichtige Rolle des Inhaltsbereiches *Raum und Form* neben *Zahlen und Operationen*, *Größen und Messen* und *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten*. Die Bereiche *Größen und Messen* und *Daten, Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten* setzen Kompetenzen im Bereich *Raum und Form* voraus. Ferner greifen Lehrkräfte bei vielen Erklärungen zu *Zahlen und Operationen*, insbesondere solchen, die auf kardinalen Zahlauffassungen basieren, bewusst oder unbewusst auf angenommene Kompetenzen zu *Raum und Form* zurück. Die Bildungsstandards auf Bundesebene und die daraus abgeleiteten Standards der Länder setzen somit einen neuen Bedeutungsakzent für den Inhaltsbereich *Raum und Form*.

Ein aktuelles Positionspapier der Kultusministerkonferenz (KMK 2009) zur *Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung* verdeutlicht implizit, dass die Idee einer reinen Output-Steuerung als nicht realisierbar angesehen wird. Diese Idee ist wesentlich dadurch gekennzeichnet, dass Lehrkräfte *souveräne Entscheidungen* zur eigenen Unterrichtsorganisation, Stoffauswahl und Stoffanordnung treffen, um die geforderten Kompetenzen zu erreichen. Ausgehend von dem unausgesprochenen Einräumen der Tatsache, dass eine derart umfangreiche Souveränität bei Lehrkräften nicht darstellbar ist, werden zentrale Inhalte und daran zu erzielende Kompetenzen unter dem neu interpretierten Begriff des *„Kerncurriculums“* zusammengefasst. Eine solche Renaissance klassischer Lehrplankonzepte, nicht nur der offiziellen, sondern auch der inoffiziellen „heimlichen Lehrpläne“, kann die von den Bildungsstandards intendierte balancierte Gewichtung der Inhalte konterkarieren. Notwendig zum Unterstützen dieser Balance im Unterricht ist das *Stärken der fachlichen und fachdidaktischen Souveränität* von Lehrkräften in der Grundschule dahingehend, dass sie diese Balance und darin insbesondere eine angemessene Gewichtung des Inhaltsbereiches *Raum und Form* selbst realisieren können.

Unser Ansatz: Handlungsleitende Diagnostik

Im australischen *Early Numeracy Research Project ENRP* (Clarke 2002) wurden Grundschullehrkräfte u.a. dadurch mathematikdidaktisch fortgebildet, dass sie lernten Lehrer-Schüler-Interviews zu mathematischen Kompetenzen ihrer Schüler in den Klassen Prep, 1 und 2 zu führen. In einem Projekt der Universitäten Oldenburg und Kassel haben wir das auf dem australischen Konzept basierende *Elementarmathematische Basisinterview* zu arithmetischen Kompetenzen von Grundschulkindern vorgelegt (EMBI 2007). Ein wesentliches Element ist der zugrunde liegende Diagnostikbegriff. Wir unterscheiden v*erortende Diagnostik* und *handlungsleitende Diagnostik* (vgl. den Beitrag von Moser Opitz in diesem Band).

Verortende Diagnostik kennzeichnet Diagnoseinstrumente, die ein Individuum messend *in eine Grundgesamtheit einordnen*, die durch die Stichprobe einer Pilotuntersuchung gekennzeichnet ist. Konzeptionelle Leitprinzipien sind Reliabilität und Validität. Typisch sind der DEMAT für die Jahrgangsstufen 1 bis 4 (siehe etwa DEMAT1+, Krajewski et al. 2002) und Intelligenztests. Solche Verfahren sind in ihrer Durchführung hoch standardisiert: Texte, Bearbeitungszeiten und das Vorgehen sind differenziert beschrieben und festgelegt. Die verortenden Ergebnisse geben Lehrkräften in der Regel wenig Hinweise, wie sie erfolgreiches Lernen dieser Probanden unterstützen können, insbesondere dann, wenn diese starke Leistungsdefizite aufweisen oder wenn der Unterricht, vielleicht ohne dass die Lehrkräfte dies direkt wahrnehmen, konzeptionelle Defizite aufweist, welche die genannten Defizite bei den Kindern nach sich ziehen.

Handlungsleitende Diagnostik nennen wir kontrastierend dazu ein von Lehrkräften selbst durchgeführtes diagnostisches Vorgehen mit dem Ziel ihre Unterrichtsorganisation gezielt zu unterstützen: *linking assessment and teaching*. Dies erfordert z. T. anderes Vorgehen als verortende Verfahren. Handlungsleitende Diagnostik ist u.a. dadurch gekennzeichnet, dass neben schriftlichen Äußerungen des Kindes auf Ergebnisse in einem persönlichen Gespräch zwischen Lehrkraft und Schüler zurückgegriffen wird. Dies erscheint uns trotz logistischer Probleme als ein wesentlicher Weg, um individuelle Förderung diagnostisch zu basieren.

Eine vierte Kompetenzdimension: Artikulation

Grundschulkinder können nur einen Teil ihrer Kompetenzen schriftlich darstellen, meist zeigen sie höhere Kompetenzen im Sprechen und im Handeln. Wir regen daher an, das o. g. dreidimensionale Kompetenzmodell durch eine vierte Dimension zu ergänzen, die *Artikulation*, deren Achse wir ordinal durch Handeln, Sprechen, Schreiben kennzeichnen. Im persönlichen Interview, das eine Lehrkraft mit einem Kind führt („1-1-Interview") wird diese Kompetenzdifferenzierung für Lehrkräfte unmittelbar deutlich.

Ein Problem: Entwicklungsstufen zu geometrischen Kompetenzen

Der Inhaltsbereich *Raum und Form* unterscheidet sich deutlich vom Inhaltsbereich *Zahlen und Operationen*: Zu *Zahlen und Operationen* gibt es weltweit ähnliche Unterrichtskonzepte. Dies mag einer der Gründe dafür sein, weshalb man in diesem Bereich *Modelle der Kompetenzentwicklung* beschreiben kann. Unabhängig davon, ob solche Entwicklungen naturwüchsig verlaufen oder Zivilisationseffekte sind, kann man darin *Entwicklungsstufen* unterscheiden. Im australischen ENRP werden diese Entwicklungsstufen als *growth points* gekennzeichnet, beim EMBI nennen wir sie *Ausprägungsgrade*.

Im Bereich *Raum und Form* ist global kein im selben Sinne kohärenter Lehrgang in der Grundschule zu identifizieren wie im Bereich *Zahlen und Operationen*. Das Identifizieren von Kompetenzmodellen ist schwieriger, da nur zu Teilbereichen Entwicklungskonzepte bekannt sind. Nicht nur aus diesem Grund haben wir die entsprechenden Konstrukte und Items zu *Raum und Form* aus dem ENRP nicht in die Konzeption des EMBI für *Raum und Form* übernommen, sondern die Interviewdomains zu *Raum und Form* auf die Bildungsstandards bezogen, wohl wissend, dass dies eine normative Setzung und kein empirischer Befund ist.

Wir halten es für angemessen, Lehrkräften in Deutschland ein mit den Bildungsstandards kohärentes Diagnoseinstrument an die Hand zu geben, das sie beim Erreichen der darin gekennzeichneten Kompetenzen gezielt unterstützt. Die Auffaltung der Inhalte im Bereich *Raum und Form* in Verbindung mit der Unterscheidung der Objekte nach 2D und 3D erfordert zur Darstellung differenzierter Ausprägungsgrade eigentlich ein Interview, das in der Regel deutlich länger dauert als eine halbe Stunde. Für eine realistische Durchführungszeit war daher eine Auswahl zu treffen.

Organisatorisch gleicht das Interview dem EMBI Arithmetik: Im 1-1-Interview äußert sich das Kind Fragen handelnd in Gesten oder mit gegebenem Material, es kann zeichnen, rechnen und schreiben. Die Fragen bilden Staffeln zu den Domains, die bis zur ersten negativen Antwort aufsteigend durchlaufen werden. Bei negativen Antworten verweisen *Abbruchbedingungen* an neue Startpunkte in der folgenden Staffel. Die Kompetenzen werden nach Domains differenziert mit *Ausprägungsgraden* beschrieben, die in bis zu sechs Stufen differenzieren. Eine Sonderrolle spielt der Teilbereich *Muster und Strukturen*, seine Items sind in diesem Interview auf den Bereich *Raum und Form* bezogen. Darüber hinaus hebt das 1-1-Interview

Informationen zur Gesamtdisposition des Kindes und seiner Situation im Unterricht und bietet Lehrkräften Reflexionsanlässe zur Konzeption des eigenen Unterrichtes, insbesondere in Bezug auf die Bildungsstandards.

Förderbasierung

Elementare Hinweise zur Förderung sind zu gewinnen, indem man die jeweils erreichten Ausprägungsgrade des Kindes identifiziert, sie mit den darauf folgenden vergleicht und Maßnahmen unternimmt, mit denen diese jeweils folgenden angestrebt werden. Die Ausprägungsgrade sind operationalisiert formuliert und enthalten Hinweise auf solche Maßnahmen. *Differenzierte Hinweise zur Förderung* basieren auf differenzierten Ergebnissen des Interviews: dem *detaillierten Protokoll des Interviews, den subjektiv aufgenommenen Informationen* der interviewenden Lehrkraft und den Äußerungen der Kinder in *„Sur-plus-Antworten"*, die Tatsachen und Vorgehensweisen beschreiben, nach denen nicht gezielt gefragt war.

Perspektiven

Handlungsleitende Diagnostik gehört in die mathematikdidaktische Ausbildung von Grundschullehrkräften, sie sollten ein Interview zum Inhaltsbereich *Raum und Form* kompetent führen, auswerten und daraus Förderkonzepte ableiten können. Sie ist auch wesentlicher Teil einer *fachdidaktischen Kollegialausbildung* mit der Kompetenz, fachliche und fachdidaktische Inhalte und Konzepte an Kollegen so weitergeben zu können, dass diese sie als bedeutsam einschätzen und in ihre Entscheidungen einzubinden bereit sind. Wenngleich das notwendige *life long learning* für Lehrkräfte nicht allein auf diese Art zu realisieren ist, so sehen wir handlungsleitende Diagnostik als einen dazu wesentlichen Beitrag.

Literatur

Clarke, Doug et al. (2002) *Early Numeracy Research Project. Final Report.* Australian Catholic University and Monash University Melbourne.

KMK (2004). *Bildungsstandards Mathematik für den Primarbereich.* www.kmk-org.de

KMK (2009). *Konzeption der Kultusministerkonferenz zur Nutzung der Bildungsstandards für die Unterrichtsentwicklung.* www.kmk-org.de

Krajewski, K. et al. (2002) *Deutscher Mathematiktest für erste Klassen (DEMAT 1+).* Göttingen: Beltz Test

Moser-Opitz, E. (2010). *Diagnose und Förderung: Aufgaben und Herausforderungen für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung.* GDM-Hauptvortrag 2010. In diesem Band.

Peter-Koop, A., Wollring, B., Spindeler, B. & Grüßing, M. (2007) *Elementarmathematisches Basisinterview*. Offenburg: Mildenberger.

Matthias ZELLER, Freiburg, Bärbel BARZEL, Freiburg

Die Rolle von Computeralgebra beim Lernen elementarer Algebra

Der Einfluss von Computeralgebrasystemen (CAS) auf das Lehren und Lernen von Mathematik wurde in den vergangenen Jahren bereits in verschiedenen Studien untersucht. Viele Ergebnisse deuten auf einen Mehrwert besonders in höheren Schulstufen hin. Weniger Beachtung fand bisher jedoch der Einsatz in der Sekundarstufe I. Im Projekt CAYEN (CAS in elementary algebra – YES or No) werden in einem Vergleichsdesign zum einen grafikfähige Taschenrechner (TI-nspire-Non-CAS) welche Tabellenkalkulation und Graphenplotter bereitstellen und zum anderen Computeralgebrarechner, die zudem noch mit algebraischen Ausdrücken umgehen können, eingesetzt. In drei 7. Gymnasialklassen wurden in einer explorativen, qualitativen Erhebung erste Daten gesammelt und ausgewertet sowie Hypothesen zur weiteren Untersuchung aufgestellt.

1. Theoretischer Rahmen und Forschungsfragen

Algebra Lernen: Der Umgang mit algebraischen Objekten erfordert ein breites Feld verschiedener Kompetenzen, das sich gliedern lässt in ‚syntactical skills' und ‚symbol sense' basierend auf der in der Psychologie üblichen Unterscheidung zwischen ‚conceptual und procedural knowledge' (Hiebert 1986).

Syntactical skills als procedural knowledge beziehen sich zum einen auf das regelgeleitete, zielgerichtete Umformen von Termen und Gleichungen und zum anderen auf das Wissen über die formale Notation der algebraischen Sprache (Siebel 2005; Hefendehl-Hebeker 2008).

Unter Symbol sense (Arcavi 1994) als conceptual knowledge fasst man Vorstellungen von algebraischen Objekten sowie von Algebra selbst. Es geht um das Verstehen algebraischer Objekte als Basis für einen flexiblen Umgang mit ihnen. Grundlage dieses Verstehens ist das Bewusstsein über die verschiedenen Funktionen, die algebraische Objekte spielen können und die damit verbunden Grundvorstellungen. So können Variablen als Unbekannte oder nicht näher bestimmte Zahlen (Gegenstandsaspekt); als Platzhalter (Einsetzungsaspekt) oder als Zeichen, mit denen man nach Regeln operieren darf (Kalkülaspekt) genutzt werden (Malle 1993). Diese Aspekte können noch um weitere ergänzt werden, so stellt Drijvers (2003) Variablen als ‚generalisierte Zahlen' und als ‚veränderliche Größe' als zentral heraus. Im Bereich symbol sense sind auch die Vorstellungen zur Algebra insgesamt bedeutsam, welche ein Bewusstsein über die Möglichkeiten und Grenzen von Algebra beinhalten. Davon hängt die Motivation ab, Algebra zu verwenden und sie im Vergleich zu anderen Repräsentationen zu bewerten.

Medien als Werkzeuge: Die beiden in der Vergleichsstudie eingesetzten Geräte (TI-nspire in beiden Versionen) werden im Sinne von ‚general purpose tools' verwendet (Noss und Hoyles 1996; Barzel et. al 2005), wobei Lernende die Möglichkeit haben zu entscheiden, bei welchen Tätigkeiten sie welches Medium auf welche Weise einsetzen. Die Integration solcher Werkzeuge wird im Modell der ‚instrumental genesis' beschrieben (Drijvers und Trouche 2008). Das Medium erscheint zunächst als Artefakt, ohne Bezug zur Aufgabe. Je nach Art der Aufgabe und der individuellen mentalen Schemata werden Bezüge zwischen Aufgabe und Medium hergestellt und das Medium integriert. Durch diese individuelle instrumentale Genese wird das Artefakt zum Werkzeug. Aus didaktischer Sicht ist es bedeutsam wie diese Genese von statten geht, durch was sie beeinflusst wird und welche Lernprozesse von ihr beeinflusst werden.

Forschungsfragen: Im Zentrum des Projektes steht die Frage, welchen Einfluss CAS auf das Lernen elementarer Algebra und hier insbesondere auf die Entwicklung von symbol sense hat.

- Welchen Einfluss haben beide Technologien beim Einsatz als Werkzeug auf die Entwicklung von Vorstellungen algebraischer Objekte und der Algebra selbst?
- Welche Rolle spielen beide Technologien beim Einsatz als Werkzeug bei der Wahl von und beim Wechsel zwischen Repräsentationen?

2. Design der Untersuchung

Nach der Entwicklung und Pilotierung von Unterrichtsmaterialien und Erhebungsinstrumenten wurde eine explorative, qualitative Erhebung durchgeführt, aus der die hier dargestellten Befunde stammen. Eine Non-CAS-Klasse (n=26) und zwei CAS-Klassen (n=24+27) mit rechnererfahrenen Lehrern wurden über 8 Wochen im Unterricht von zwei Personen beobachtet und mehrere Gruppenarbeitssequenzen gefilmt sowie die Bildschirme der Taschenrechner digital aufgezeichnet. Zudem wurden Interviews geführt und Schülerdokumente gesichtet. Die Datenfülle wurde nach grounded theory (Strauss/ Corbin 1996) reduziert und ausgewertet.

Im Zentrum des Unterrichtsmaterials stehen offene, kontextbezogene Aufgaben, die unter Einbezug verschiedener Repräsentationen (Graph, Tabelle, Term / Gleichung) bearbeitet werden können. Das Lösen von Gleichungen tritt dabei im Rahmen von funktionalem Denken auf, wodurch sich viele Einsatzmöglichkeiten der verschiedenen Rechnerprogramme ergeben.

3. Vorläufige Befunde und Hypothesen

Die Ergebnisse der qualitativen Untersuchung geben Hinweise zu den folgenden drei Hypothesen.

1. CAS unterstützt den Schritt von Arithmetik zu Algebra: Im Unterricht konnte immer wieder beobachtet werden, dass Non-CAS-Schülerinnen und Schüler algebraische Ausdrücke in ihren Rechner eingeben. Eine Eingabe ist zwar möglich, aber nicht die weitere Bearbeitung. Für die weitere Bearbeitung der Aufgabe muss also zu einer anderen Repräsentation oder zu Papier und Stift gewechselt werden. Bei manchen Lernenden zeigte sich die folgende Irritation: Algebra erhielt für sie eine Sonderrolle gegenüber den anderen Repräsentationen, die im Rechner problemlos verwendet werden können. Einzelne sprachen sogar von einem Unterschied zwischen den zugrunde liegenden Rechengesetzen der Arithmetik und der Algebra. Für diese Lernenden war es schwer vorstellbar, dass der Rechner bei gleichen Rechenregeln nicht mit Algebra arbeiten kann. In der CAS-Gruppe hingegen zeigte sich, dass das zunächst sehr unübersichtliche Feld algebraischer Umformungen mithilfe der Auflistung im CAS strukturiert wurde. Die vielfältigen Möglichkeiten algebraische Terme zu manipulieren, was tatsächlich ein neuer Aspekt der Algebra ist, wurden von manchen CAS-Schülerinnen und Schülern hierdurch schnell in ihre Vorstellungen von Algebra integriert. Ein weiterer neuer Aspekt der Algebra ist, dass Terme und Gleichungen an Wert gewinnen, sie können ein Ergebnis mit starker Aussagekraft darstellen (Objekt- / Beziehungsaspekt von Gleichungen). CAS gibt algebraische Ausdrücke als Ergebnis einer Umformung aus, was bei manchen Schülern zu mehr Akzeptanz dieses Aspektes führte.

2. CAS regt dazu an, die Bedeutung und Struktur algebraischer Ausdrücken zu betrachten: Beim Lösen von Gleichungen sind zwei kognitive Aktivitäten relevant: Welche Struktur soll die nächste Zeile haben? Mit welcher Operation kann diese Struktur erzeugt werden? CAS-Schüler machten diese Aktivitäten explizit, da sie sie bewusst im Gespräch reflektierten. Dies zeigte sich in den Videos und in den Hefteinträgen, bei denen sie die CAS-Befehle (z.B. ‚factor') auch bei der Arbeit ohne Rechner aufschrieben. Insgesamt konnte beim Umgang mit Problemen ein ‚mutigerer' Einsatz von Variablen bei CAS- Schülern beobachtet werden. An Stellen, an denen der Einsatz von Variablen nicht zwingend nötig war, verwendeten CAS-Schüler Variablen, meist als Wort-Variablen (z.B. m für Miete).

3. CAS-Schülerinnen und Schüler bewerten Algebra objektiver und sehen ihren Wert klarer: In einer Reflexionsphase wurden die verschiedenen Repräsentationen von den Lernenden miteinander verglichen und nach selbst entwickelten Kriterien bewertet. Algebra ist genau, gut geeignet für den Umgang mit vielen und großen Zahlen und oft ist es schwer einen Ansatz zu finden. Darin waren sich beide Gruppen einig. Während die CAS-Gruppe oft die Schnelligkeit und die Einfachheit der Ergebniskontrolle herausstellten, betonte die non-CAS-Gruppe häufiger die Undurchsichtigkeiten und Schwierigkeiten im Umgang mit Algebra. Die Folgen hiervon konnten in den Daten wiedergefunden werden: In mehreren Gruppenarbeiten brachen non-CAS-Schüler den Einsatz von Algebra ab und wechselten zu einer anderen Repräsentation, um den Rechner einsetzen zu können.

4. Ausblick

Ziel der nächsten Phase des Projektes ist es, die dargestellten Hypothesen auf Gültigkeit zu prüfen (z.B: quantitativ mit pre- und posttests). Weiter ist geplant rechnerfreie Gruppen in den Vergleich zu integrieren, um die Bedeutung der Grafikfähigkeit und Tabellenkalkulation näher zu beleuchten.

Literatur

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Barzel, B., Drijvers, P., Maschietto, M., Trouche, L. (2005). Tools and technologies in mathematical didactics. Bosch, M. (ed.). *Proceedings of CERME 4*. February 2005.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment.* Utrecht: CD ß Press.

Drijvers, P., Trouche, L. (2008). From artifacts to instruments: A theoretical framework behind the orchestra metaphor. In G. W. Blume & M. K. Heid (Eds.), *Research on technology and the teaching and learning of mathematics*: Vol. 2. (pp. 363 392). Charlotte, NC: Information Age.

Hiebert, J. (1986). *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum.

Hefendehl-Hebecker, L. (2008). Wege zur Formelsprache – Entwicklung algebraischen Denkens als didaktische Aufgabe. In: *Unikate, 33*, (pp. 66-71).

Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra.* Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg.

Noss, R., Hoyles, C. (1996). *Windows in mathematical meaning: learning cultures and computers.* London: Kluwer.

Siebel, F. (2005). *Elementare Algebra und ihre Fachsprache.* Mühltal: Allgemeine Wissenschaft.

Vollrath, H.-J. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. Mannheim: Wissenschaftsverlag.

Strauss, A., Corbin, J. (1996). *Grounded theory - Grundlagen qualitativer Sozialforschung*. Weinheim: Beltz, Psychologie Verlags Union.

Marc ZIMMERMANN, Ludwigsburg; Daniel HERDING, Aachen

Entwicklung einer computergestützten Lernumgebung für bidirektionale Umformungen in der Mengenalgebra

1. Motivation

Durch den Einzug des Computers in die Hochschullehre entstehen immer mehr Anwendungen für den Lehr- und Lernbetrieb. Lernumgebungen werden verstärkt auch für das außerhochschulische Lernen und den Übungsbetrieb eingesetzt. Zwar wird der Computer von Studierenden als nützlich für die Vermittlung mancher Lerninhalte gesehen, außer in Fächern mit technischem Schwerpunkt (z.B. Informatik, Medizin oder Ingenieurwissenschaften) findet der Einsatz dieser Medien jedoch kaum Akzeptanz bei den Studierenden (vgl. Middendorff S.47ff).

In diesem Artikel sollen einige Probleme von eLearning-Anwendungen diskutiert werden, welche die Lernenden hindern, diese Programme zu nutzen. Anschließend soll anhand des Tools „SetSails!“ zur Übung von mengenalgebraischen Termumformungen eine Möglichkeit aufgezeigt werden, wie eLearning-Programme aussehen können, damit sie bei den Studierenden eine höhere Akzeptanz finden können.

2. Mathematisches Problemlösen und eLearning

Betrachtet man Programme im Bereich eLearning, so lässt sich immer wieder feststellen, dass diese nur wenig mit dem mathematischen Problemlösen zu tun haben. Im Folgendem sollen nun drei Probleme kurz dargstellt werden, die Lernende eher dazu bewegen, Aufgaben lieber mit Stift und Papier zu lösen, anstatt die Hilfe eines Computerprogramms zu nutzen.

Der Prozess des (mathematischen) Problemlösens ist gekennzeichnet von verschiedenen Phasen (vgl. z. B. Polya 1967, Oser und Baeriswyl 2001). In der ersten Phase muss zunächst das Problem, z. B. mit Hilfe von Beispielen, greifbar gemacht werden. Dabei werden schon erste Ideen gewonnen und die Problembarrieren sichtbar. Das Lösen des Problems ist dann meistens „unlogisch und ungeordnet (und manchmal höchst merkwürdig)“ (Malle 1978, S. 46). Anwendungen hingegen haben im Hintergrund meistens nur einen korrekten Lösungsweg. Diesen starren Weg muss der Lerner „ablaufen“ oder er wird dementsprechend gelenkt. Eigene Ideen oder neue Lösungsansätze sind nicht zugelassen, da das Programm diese dann nicht mehr überprüfen kann.

Ein häufiges Problem für Lerner ist, dass diese kein Feedback zu ihrem Lösungsprozess erhalten. Zwar machen die meisten eLearning-Programme die

Benutzer aufmerksam, wenn sie ein falsches (Teil-)Ergebnis haben. Kommt der Lerner allerdings an einer Stelle nicht weiter, kann das Programm keine individuelle Rückmeldung geben. Stattdessen gibt die Anwendung als Tipp dann den nächsten Schritt der Lösung komplett vor. Fox (1991) stellte jedoch fest, dass es vermieden werden sollte, dass auftretende Probleme sofort und vollständig von Tutoren behoben werden sollten.

Das Zeigen der Äquivalenz von Termen oder das Führen von (direkten oder indirekten) Beweisen lässt sich beim Bearbeiten am Computer meist nur in eine Richtung ausführen. Es kann zum Beispiel nur ein Term einer Gleichung umgeformt oder vereinfacht werden, bis er dem der anderen Seite entspricht. Beim Lösen derselben Aufgabe per Hand wird sehr häufig die heuristische Strategie des Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten angewandt (vgl. Fischer und Malle 1989). Diese Möglichkeit der Bearbeitung ist aber noch kaum in Programmen implementiert.

Während die ersten beiden Schwierigkeiten bereits unter dem Stichwort des *Intelligent Assessment* intensiv in der wissenschaftlichen Community diskutiert und bearbeitet werden (vgl. Müller et al. 2006), findet man kaum Anwendungen, die heuristische Prinzipien des Aufgabenlösens berücksichtigen. Entwickelt man eine eLearning-Anwendugen für die Lehre, sollte aber die Möglichkeit auf Benutzung dieser Strategien implementiert werden. Es macht ansonsten wenig Sinn, diese in der Lehre einzusetzen, da Lernende immer auf die „traditionelle“ Form mit Stift und Papier zurückgreifen werden.

3. Konzeption einer Lernumgebung für die Mengenalgebra

Mengenlehre an sich wird in der Mathematik nur noch selten gelehrt. Es soll an dieser Stelle nicht das Wiederaufleben der Mengenlehre gefordert werden, ein Grundverständnis von Mengenoperationen ist aber für das mathematische Verständnis grundlegend. Sie findet sich nicht nur in der Funktionsanalysis (z. B. Definitions- und Wertemenge). Auch in für die Lehramtsausbildung relevanten Bereichen der Mathematik wie der Arithmetik (Vielfach- und Teilermengen), der Algebra (Zahlbereiche und deren Verhältnisse zueinander) oder auch der Stochastik (Ergebnismengen mehrerer Ereignisse) spielt der Mengenbegriff eine Rolle.

SetSails! ist eine eLearning-Anwendung, mit der Studierende lernen und üben, Terme in der Mengenalgebra geschickt umzuformen. Die Aufgabe ist es, mittels algebraischer Gesetze und Regeln die Korrektheit einer Äquivalenz, z. B. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B$, zu zeigen. Für jede Umformung muss zunächst das anzuwendende Gesetz (z. B. Assoziativgesetz, De Morgan'sche Regel) ausgewählt werden. Anschließend muss aus einer Auswahl von angebotenen Umformungen entschieden werden, welcher Term sich durch Anwendung dieser Regel ergeben soll.

Bei den auszuwählenden Umformungen werden zusätzlich auch falsche Umformungsmöglichkeiten angeboten (sogen. Distraktoren). Dabei werden entweder Operatoren ($A \setminus B$ wird zu $A^c \cap B$) oder oft verwechselte Gesetzte miteinander vertauscht (es wird eine Umformung nach dem Kommutativgesetz angeboten, obwohl das Assoziativgesetz ausgewählt wurde). Es kann den Benutzern also passieren, dass sie dieselben Fehler machen, die sie auch bei der Bearbeitung auf dem Papier machen würden.

Im Gegensatz zu anderen Umformungsprogrammen hat der Anwender bei SetSails! immer die Möglichkeit verschiedene, individuelle Lösungsstrategien zu verfolgen. So ist es z.B. möglich, Umformungen auch beidseitig, nach der Vorwärts und Rückwärtsstrategie, vorzunehmen. Der linke Term der Gleichung ist bei Beginn der Aufgabe immer oben, der rechte Term immer unten im Bearbeitungsfeld zu sehen (vgl. Abb. 1). Der Anwender kann die Äquivalenz zeigen, indem er „top-down“ oder „bottom-up“ vorgeht. Steht in der oberen und unteren Tabelle der identische Term, so können beide Beweisstränge miteinander verbunden werden.

Es stehen dem Lernenden jederzeit verschiedene Möglichkeiten des Feedbacks bei fehlerhaften Umformungen oder zu ihrem Lösungsprozess zur

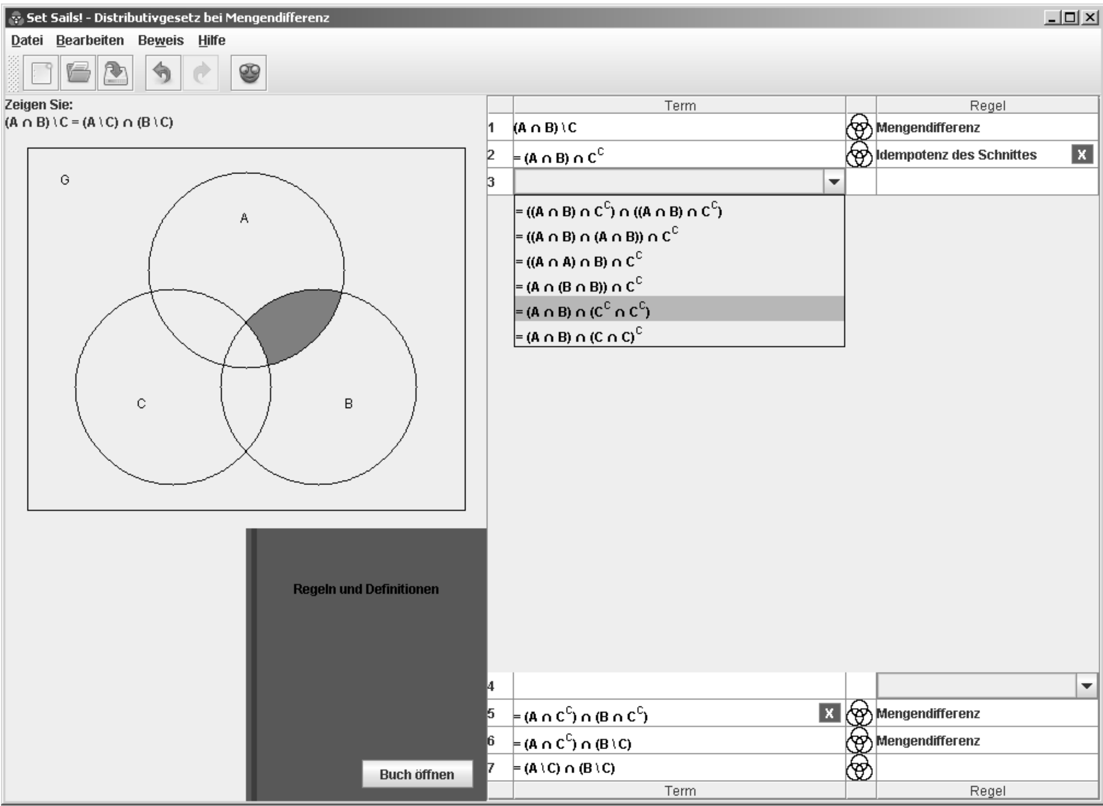


Abb. 1: Die Benutzeroberfläche von SetSails!

Verfügung. Er kann zum Beispiel in einem virtuellen Buch die Regeln und Definitionen– der Mengenalgebra nachschlagen (vgl. Abb. 1). Zudem finden sich neben jeder Umformung ein Icon, mit dem man sich das Mengendiagramm der Umformung anzeigen lassen kann. Dies kann mit der Aufgabenstellung verglichen werden. Automatisches Feedback zu seinen Umformungen und Tipps bei Schwierigkeiten können über das Smiley-Icon in der Kopfzeile eingeholt werden.

4. Einsatz in der Praxis

Die Lernumgebung SetSails! wurde in einer Betaversion erstmals im Wintersemester 2009/10 an der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg eingesetzt. In dieser waren einige der Feedbackmöglichkeiten noch nicht implementiert. Diese Lernumgebung wird im Wintersemester 2010/11 nochmals eingesetzt und hinsichtlich ihrer Effekte auf die Lernmotivation und Akzeptanz der Studierenden evaluiert.

5. Anmerkungen

Die Arbeit, die in diesem Artikel beschrieben werde, entstanden in dem Projekt SAiL-M[1].

Literatur

Fischer, R., Malle, G. (1989): *Mensch und Mathematik - eine Einführung in didaktisches Denken und Handeln.* Mannheim: B.I. – Wissenschaftsverlag.

Fox, B. A. (1991): Cognitive and interactional aspects of correction in tutoring. In P. Goodyear, (Hrsg.): *Teaching Knowledge and intelligent tutoring* (S. 149 – 172). Norwood, NJ: Ablex.

Malle, G. (1978): Problemlöseprozesse im Mathematikunterricht. *Didaktikheft Nr. 3 (Klagenfurt Leoben 1978-79)*, S. 45 – 60.

Müller, W.; Bescherer, C.; Kortenkamp, U.; Spannagel, C. (2006): *Intelligent Computer-aided Assessment in Math Classrooms: State-of-the-Art and Perspectives*. IFIP WG 3 Conference on Imagining the future for ICT and Education, Alesund, Norway.

Oser, F. & Baeriswyl, F. (2001): Choreographies of Teaching: Bridging Instruction to Learning. In: V. Richardson (Hrsg.), *Handbook of Research on Teaching*. 4. Ausgabe, S. 1031-1065. Washington: American Educational Research Association.

Polya, G. (1995): *Schule des Denkens. Vom Lösen mathematischer Probleme*, 4. Auflage, Tübingen und Basel: Francke.

Middendorff, E. (2002): Computernutzung und Neue Medien im Studium. Technical report, Bundesministerium für Bildung und Forschung. http://www.studentenwerke.de/se/2001/computernutzung.pdf.

[1] SAiL-M: Semi-automatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik; gefördert vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF); www.sail-m.de

ASTRID BRINKMANN, Münster; MICHAEL BÜRKER, Freiburg

AK Vernetzungen im Mathematikunterricht

1. Berichte und Informationen durch die Sprecher des Arbeitskreises

- Begrüßung und Vorstellung der Teilnehmer der AK-Sitzung
- Vorstellung der Ziele und Inhalte des Arbeitskreises
- Bericht über den Stand des ersten Bandes der Schriftenreihe „Materialien für einen vernetzenden Mathematikunterricht" (HerausgeberInnen: Brinkmann, Astrid; Maaß, Jürgen und Siller, Stefan).

  Themen u. a.:

  - Einführender Artikel zur Thematik der Vernetzungen im Mathematikunterricht (Astrid Brinkmann, Jürgen Maaß, Günther Ossimitz)
  - Innermathematische Vernetzungen, z. B. zwischen Geometrie und Analysis (Michael Bürker), Beschreibungen als innermathematische Vernetzungen (Reinhard Oldenburg), Vernetzung mathematischer Inhalte und Beweistechniken (Christoph Ableitinger)
  - Graphische Darstellungen von Vernetzungen als Unterrichtsmittel: Mind Maps, Concept Maps und hiervon abgewandelte graphische Netzwerkdarstellungen zum Lehren und Lernen von Mathematikvernetzungen (Astrid Brinkmann), Lernlandkarten zur Selbsteinschätzung von SuS (Michael Wildt), Advanced Organizer (Ulrike Limke)
  - Kapitelübergreifende Rückschau als Unterrichtsmethode (Swetlana Nordheimer)
  - System Dynamics (Willi van Lück; Astrid Kubicek; Jürgen Maaß und Stefan Siller; Günther Ossimitz)
- Information über die laufenden Planungen der 2. Tagung des Arbeitskreises in Linz vom 30. April bis 1. Mai 2010 (Organisation Jürgen Maaß, nähere Informationen zur Tagung unter www.math-edu.de).
- Die 3. Tagung des Arbeitskreises wird im Frühjahr 2011 in Berlin stattfinden (Organisation Swetlana Nordheimer, Andreas Filler). Details werden auf der Seite www.math-edu.de veröffentlicht. Interessierte sind herzlich willkommen!

- Hinweise auf die Vorträge zum Thema „Vernetzungen im Mathematikunterricht“ auf der GDM-Tagung 2010:
  - Brinkmann, Astrid & Bürker, Michael: Vernetzen im Mathematikunterricht – Beispiele für beziehungsreiches Lehren und Lernen.
  - Maaß, Jürgen: Bologna – für oder gegen die LehrerInnenbildung in Österreich?
  - Borys, Thomas: Welche Vernetzungsmöglichkeiten bietet die Kryptologie?
  - Müller, Winfried: Konvex – Noch immer (k)ein Thema.
  - Klembalski, Katharina: Primzahltests als innermathematische Vernetzung von Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung.
  - Nordheimer, Swetlana: „Einkleidungen“ als Modellvernetzungen im Mathematikunterricht.
  - Engel, Joachim: Von Daten zur Funktion: Vernetzungen zwischen Modellierungskompetenzen und Statistical Literacy

2. **Warm-up-Vortrag von Winfried Müller zur Vernetzung der Unterrichtsfächer Mathematik und Informatik mit anschließender Diskussion:**

- Es gibt Symbole, die im Unterricht beider Fächer verwendet werden, allerdings mit unterschiedlicher Bedeutung. Hieraus ergeben sich kognitive „Fehlvernetzungen“ bei SuS, die es zu vermeiden gilt.
- Es gibt Kompetenzen, die typisch sind sowohl für Informatik als auch für Mathematik, die auf das jeweils andere Fach übertragen werden können, z. B. die Fähigkeit, aus einem Anwendungskontext ein strukturiertes Modell und daraus ein Programm zu erstellen. Dabei sollte auf Konsistenz geachtet werden, um Erlerntes aus einem Fach in dem anderen Fach gewinnbringend aufgreifen und nutzen zu können.

3. **Die Webseite www.math-edu.de bietet Einblicke zu den Aktivitäten des Arbeitskreises. Interessierte sind als neue Mitglieder herzlich willkommen!**

Katja EILERTS, Kassel, Christine BESCHERER, Ludwigsburg, Cornelia NIEDERDRENK-FELGNER, Nürtingen-Geislingen

Arbeitskreis ´Hochschulmathematikdidaktik´

Am 20. und 21.11.2009 fand an der Pädagogischen Hochschule in Ludwigsburg ein Symposium zur Verbesserung der Hochschullehre in Mathematik und Informatik[1] statt. Das Symposium wurde in Form eines *Open Space* durchgeführt. Dabei entscheiden die Teilnehmerinnen und Teilnehmern selbst, über welche Themen diskutiert wird. Diese Themen waren u.a. „Vorlesung neu gedacht", „Change Management", „Blended Learning" und „Hochschuldidaktische Forschung".

Im Rahmen dieses Symposiums wurde der neue GDM-Arbeitskreis[2] \`Hochschulmathematikdidaktik\` gegründet. Durch seine drei gewählten Sprecherinnen sind verschiedene Hochschulformen vertreten: Prof. Dr. Christine Bescherer (Pädagogische Hochschule Ludwigsburg), Dr. Katja Eilerts (Universität Kassel) und Prof. Dr. Cornelia Niederdrenk-Felgner (Hochschule für Wirtschaft und Umwelt Nürtingen-Geislingen).

Gute Hochschullehre zeichnet sich dadurch aus, dass sie nicht nur an den Fachinhalten orientiert ist, sondern vor allem den Lernprozess der Studierenden im Blick hat. Für die Hochschullehre in Mathematik ergibt sich hier eine besondere Herausforderung, da das Fach für viele Studierende ein - oft wenig geliebter - Pflichtteil ihres Grundstudiums ist und zudem noch den Ruf hat, zum „Aussieben" benutzt zu werden. In der Schule werden zunehmend didaktisch-methodische Konzepte im Mathematikunterricht verwirklicht, die sich erheblich vom traditionellen Vorgehen unterscheiden. Auch wenn die Umsetzung effektiver didaktisch-methodischer Konzepte in der Hochschule oft durch die große Teilnehmerzahl in den Lehrveranstaltungen erschwert wird, stellt sich die Frage, wie neue Lehr-Lern-Szenarien der Zukunft aussehen können. Individuelle Förderung ist kaum bzw. nur mit großem Personalaufwand oder mit dem zeitaufwändigen Einsatz von E-Learning-Systemen möglich. Viele Mathematikdozentinnen und -dozenten haben über die Jahre *Best Practices* zur Vorlesungsgestaltung, der Aktivierung von Studierenden und der Nutzung digitaler Medien entwickelt. In diesem Arbeitskreis soll diese *Best Practices* ausgetauscht, wirkungsvolle Konzeptionen abgeleitet und eine nachhaltige *Community of Practice* zur Verbesserung der Hochschullehre etablieret werden. Ebenso wichtig wie die Bewältigung des Alltags in der Hochschullehre im Bereich Mathematik ist auch das Etablieren und Voran-

[1] http://www.sail-m.de/sail-m/Symposium [Stand: 28.03.2010]
[2] http://www.hochschulmathematikdidaktik.de [Stand: 28.03.2010]

treiben von Forschungsaktivitäten in der Hochschulmathematikdidaktik. In diesem Themenfeld gibt es bisher vor allem einzelne Arbeiten in Form von Doktorarbeiten, aber noch wenige groß angelegte Forschungsprojekte.

Der Arbeitskreis verfolgt zwei Zielrichtungen:

- Austausch von Ideen und Erfahrungen zu innovativen Lehr-/ Lern-konzepten aus der Praxis der Hochschulveranstaltungen in Mathematik
- Vernetzung von Personen und Entwicklung einer fachdidaktischen Forschungscommunity, die sich mit Fragen, Untersuchungen und Projekten zum Mathematiklernen an der Hochschule befasst.

Die erste Sitzung des Arbeitskreises fand am Montag 08.03.2010 auf der DMV/GDM-Tagung in München statt. Im Mittelpunkt dieser konstituierenden Sitzung mit ca. 40 Teilnehmerinnen und Teilnehmer standen die Hintergründe und die Ziele des neuen Arbeitskreises verbunden mit Kurzvorträgen zur Verbesserung der Hochschuldidaktik aus der Perspektive der verschiedenen Hochschularten. Weiter wurde eine Herbst-tagung zur Hochschulmathematikdidaktik vereinbart.

Aus der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg wurde das **BMBF-Projekt SAiL-M**[3] ("Semiautomatische Analyse individueller Lernprozesse in der Mathematik") vorgestellt. SAiL-M ist ein Kooperationsprojekt der Pädagogischen Hochschulen Ludwigsburg, Schwäbisch Gmünd und Wein-garten und der RWTH Aachen, in dem Modelle entwickelt werden, welche die Qualität der Mathematikausbildung zum Studienbeginn erhöhen. Es werden:

- didaktische Beschreibungsmuster für aktivierende, kompetenz-orientierte Umgebungen zum Mathematiklernen in der Hochschule formuliert, implementiert und für andere nutzbar gemacht,
- Werkzeuge für das semi-automatische Assessment von Lern-prozessen – d.h. Werkzeuge für deren Dokumentation und Messinstrumente für deren Analyse – adaptiert und in diesen Lern-kontexten bereitgestellt und
- die Wirksamkeit der entwickelten Modelle zu Lehr-/Lernszenarien und der Nutzen prozessbezogener Rückmeldungen mit ver-schiedenen Diagnosemethoden evaluiert.

[3] http://www.sail-m.de [Stand: 28.03.2010]

Ein weiteres Projekt im Rahmen der „Zukunftswerkstatt Hochschullehre" ist das **BMBF-Projekt LIMA**[4] (Lehrinnovation in der Studieneingangsphase „Mathematik im Lehramtsstudium" – Hochschuldidaktische Grundlagen, Implementierung und Evaluation), ein Gemeinschaftsprojekt der Universitäten Paderborn und Kassel. Das Projekt setzt an der Schnittstelle zwischen Schule und Hochschule an. In interdisziplinärer Zusammenarbeit von Fachwissenschaft, Fachdidaktik und Pädagogischer Psychologie wird eine curriculare Aufarbeitung des Fachwissens Mathematik in Hinblick auf den Lehrerberuf durchgeführt und in Verbindung mit einer hochschuldidaktischen Innovation des Lehr-Lernbetriebs implementiert und evaluiert. Das Vorhaben verfolgt das Ziel, wissenschaftliche Grundlagen für die Hochschullehre zur universitären Ausbildung von Mathematiklehrern zu entwickeln, exemplarische Lehrinnovationen zu implementieren und wissenschaftlich zu evaluieren. Die Lehrinnovationen sollen spezifisch auf fehlende Wissensvoraussetzungen, lernstrategische Defizite und motivational-volitionale Startschwierigkeiten eingehen. Sie umfassen curriculare Veränderungen, Mentorien, E-Learning-Module und optimierte Tutorien.

Aus der Perspektive der **Hochschule für Wirtschaft und Umwelt in Nürtingen-Geislingen** wurde von der didaktischen Herausforderung berichtet, die mit der Vermittlung von Mathematik als „Servicefach" z.B. in betriebswirtschaftlichen Studiengängen verbunden ist. Hier stellt sich zum einen das Problem, dass man Studierende mit sehr heterogenem Vorwissen zu unterrichten hat, die zum andern in der Regel wenig Interesse und Motivation für das Fach mitbringen. Die zu vermittelnden Inhalte sind zwar aus mathematischer Sicht nicht sehr anspruchsvoll. Aber zur korrekten Anwendung der quantitativen Methoden in der Betriebswirtschaft und insbesondere in der Finanzwirtschaft ist das Verständnis der mathematischen Zusammenhänge unabdingbar. Es stellt sich also ganz konkret die Frage, wie in der Praxis der Hochschullehre die Studierenden zu diesem Verständnis gebracht werden können.

Drei zentrale Fragestellungen seien hier exemplarisch genannt, die aus dieser Sicht in den Arbeitskreis eingebracht werden:

- Wie kann auf die unterschiedlichen Vorkenntnisse eingegangen und wie kann die Motivation geweckt bzw. gefördert werden?
- Welche Kompetenzen sollen von den Studierenden erlangt werden und wie müssen die Inhalte auf die Studierenden ausgerichtet werden?

[4] http://www.lima-pb-ks.de/ [Stand: 28.03.2010]

- Wie muss die Lehr-Lern-Umgebung gestaltet sein, um aktives Lernen zu ermöglichen und zu fördern? Welche aktivierenden Methoden können eingesetzt werden?

Weiter wurde noch das von der Stiftung Mercator und der Volkswagenstiftung geförderte **Kompetenzzentrum**[5] **„Hochschuldidaktik Mathematik"** an den Universitäten Kassel und Paderborn kurz vorgestellt. Das Kompetenzzentrum widmet sich dem Problem, dass in vielen Studiengängen, die zu erbringenden Leistungen in Mathematik zu hohen Abbrecherquoten führen. Es strebt neben Interdisziplinarität vor allem einen engen Bezug zu den Lehrenden in den verschiedenen mathematikhaltigen Studiengängen an.

Abschließend wurden neben der Gewinnung neuer Teilnehmerinnen und Teilnehmern mögliche Ideen für die Weiterarbeit des Arbeitskreises im Rahmen einer Herbsttagung besprochen. Themen könnten sein:

- Qualifizierungsprogramme für Mathematiktutorinnen und -tutoren
- Hochschuldidaktische Angebote für Mathematik-Lehrenden
- Nutzung von E-Learning
- Vorlesungsstrukturen neu denken
- Schnittstelle Schule-Hochschule, Vorkurse
- Überlegungen zur Konzeption von Veranstaltungen zur Mathematikdidaktik
- …

Anfragen bezüglich des Arbeitskreises und Interesse bzgl. Teilnahme an der Herbsttagung 2010 können an die Sprecherinnen direkt oder an die folgende Adresse gerichtet werden:

E-Mail-Adresse: didaktik@hochschulmathematik.de

Weitere Informationen auf der Homepage:

http://www.hochschulmathematikdidaktik.de

[5] http://www.khdm.de/ [Stand: 30.3.2010]

Silke LADEL, Schwäbisch Gmünd, Christof SCHREIBER, Frankfurt

Arbeitsgruppe „Neue Technologien im Mathematikunterricht der Grundschule“ – neu: „Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien[1] im Mathematikunterricht der Primarstufe“

Tagesordnungspunkte:

1. Rückblick auf das letzte Treffen der Arbeitsgruppe am 19.02.2010 an der Pädagogischen Hochschule in Schwäbisch Gmünd

2. Planung des nächsten Treffens am 05./06.-08.11.2010 im Rahmen des Arbeitskreises „Grundschule“ in Tabarz

3. Sonstiges

1. Rückblick 19.02.2010 Schwäbisch Gmünd

Am 19.02.2010 fand ein Treffen der Arbeitsgruppe an der PH in Schwäbisch Gmünd statt, an dem grundlegende Inhalte der Arbeitsgruppe besprochen wurden. Dabei wurde zunächst über einen geeigneten Namen diskutiert, da der seitherige Titel „Neue Technologien im Mathematikunterricht der Grundschule“ nicht umfangreich genug erschien. Man einigte sich auf „Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe“. Wichtig erschien dabei, dass die verschiedenen Personengruppen alle Beachtung finden:

das Lernen der *Schüler* mit Neuen Medien wie Lernsoftware, mit dem Internet und mit neuen Arbeitsmitteln, die das Lernen unterstützen können,

vom *Lehrer* für *Schüler* erzeugte oder für den Schüler besonders ausgewählte Lernumgebungen, die auf den Neuen Medien basieren oder diese integrieren,

der durch den *Lehrer* durch Neue Medien wie z.B. Smart- oder Interactive-Whiteboard oder besondere Software veränderte Unterricht,

aber auch neue Möglichkeiten im Bereich der Unterrichtsforschung, bei denen der *Forscher* Neue Medien einsetzt, um Lehr- und /oder Lernprozessen zu untersuchen.

[1] Unter dem Begriff „Neue Medien“ verstehen wir alle Arten digitaler Informations- und Kommunikationstechnologie (IKT).

Diese 3 Personengruppen spiegeln sich auch in der, in Schwäbisch Gmünd formulierten, Leitidee wieder:

Leitidee:
Es gibt didaktische Szenarien, in denen Neue Medien einen offensichtlichen Mehrwert für Schüler, Lehrer und Forschung haben.

Das Ziel der Arbeitsgruppe wurde wie folgt definiert:

Ziel der Arbeitsgruppe ist die Entwicklung, Evaluation und Bereitstellung didaktischer Szenarien, um einen didaktisch sinnvollen Einsatz Neuer Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe zu erreichen.

Dabei soll der Einsatz Neuer Medien aus zwei Perspektiven betrachtet werden:

- Zum einen aus der Perspektive der Didaktik mit der Fragestellung *„Welche didaktischen Problemstellungen können mit Hilfe der Technik angegangen werden?“*
- Zum andern aber auch aus der Perspektive der Neuen Medien: *„Welche Möglichkeiten sind überhaupt gegeben und können genutzt werden?“*

Gerade das Ausloten didaktischer Möglichkeiten mit Neuen Medien ist notwendig, um eine verengte Sichtweise zu vermeiden und möglicherweise dadurch erst einen Mehrwert zu entdecken.

Als weitere Ziele, die ergänzungsfähig sind, wurden u.a. festgehalten:

- Initiierung und Durchführung von Projekten im Bereich der Forschung
- Weiterentwicklung der fachdidaktischen Forschung in der Grundschule durch Neue Medien
- Fortentwicklung der Methodologie und der Methoden
- Einen kritischen Blick auf Medien werfen
- Als Forscher und Entwickler selbst kritische Rückmeldung von Experten erhalten
- Effektiveres Arbeiten - Vermeidung von Dopplungen an unterschiedlichen Hochschulen

- Bewusstseinsbildung für den Einsatz Neuer Medien

Die nächsten Meilensteine des Arbeitsprogramms sind:

- Schaffen einer Community, zum Austausch über gutes Lernen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe
- Regelmäßige Publikation von Sammelbänden mit Beiträgen mit Review (angedacht ist ein Zeitraum von 2 Jahren)
- Dynamisches Portal für evaluierte Lernumgebungen für Nutzer sowie eines Forschungsportals – hierbei zunächst Nutzung von Madipedia
- Entwicklung von Unterrichtsszenarien für einen didaktisch sinnvollen Einsatz Neuer Medien

Organisatorisch bleibt die Arbeitsgruppe im Arbeitskreis der Grundschule verortet wird sich aber auch im Arbeitskreis Mathematik und Informatik (AKMUI) präsentieren.

Es werden jährlich zwei Arbeitstreffen stattfinden. Eines wird jeweils im Frühjahr (Februar/März) an einem Freitag und Samstag an wechselnden Orten stattfinden. Hierfür sind jeweils 1-2 Vorträge geplant sowie eine Diskussion über potentielle Beiträge für einen Sammelband. Entwürfe hierfür sind vorab an alle Teilnehmer der Arbeitsgruppe zu versenden (Deadline wird bekannt gegeben). Das zweite Treffen wird mit der Tagung des Arbeitskreises „Grundschule" verbunden, welche jährlich im Herbst von Freitag bis Sonntag in Tabarz stattfindet. Bei einer Anreise am Donnerstag werden wir uns am Freitagvormittag treffen. Dieses Treffen gestaltet sich in diesem Jahr durch 10-minütige Projektvorstellungen der Teilnehmer. Beim 75-minütigen Treffen der Arbeitsgruppe am Samstag soll für das kommende Treffen ein „Markt" über die verschiedenen Möglichkeiten eines didaktisch sinnvollen Einsatzes Neuer Medien informieren und größeres Interesse bei den Teilnehmern der Tagung wecken.

2. Planung 05./06.-08.11.2010 in Tabarz

Das nächste Treffen der Arbeitsgruppe findet im Rahmen des Arbeitskreises „Grundschule" in Tabarz statt. Dieser geht vom 06.-08.11.2010, wobei den verschiedenen Arbeitsgruppen am 07.11.2010 jeweils 75 Minuten eingeräumt werden. Für die Planung und Organisation dieses Treffens haben sich Christof Schreiber und Silke Ladel bereit erklärt.

Die Arbeitsgruppe „Lernen, Lehren und Forschen mit Neuen Medien im Mathematikunterricht der Primarstufe“ wird sich bereits am Freitag, 06.11.2010, treffen. Somit sollte eine Anreise bereits am 05.11.2010 stattfinden. Hierfür ist eine separate Anmeldung über Silke Ladel (silke.ladel@ph-gmuend.de) erforderlich, sodass die Zimmer entsprechend gebucht werden können. Die Abrechnung erfolgt wie gehabt direkt über das Hotel.

Um mehr Teilnehmer der Tagung für die Arbeitsgruppe zu interessieren, wird außerdem ein Flyer erstellt, der die verschiedenen „Marktstände“ und die Arbeitsgruppe kurz vorstellt.

Der Ort sowie der Zeitpunkt des Treffens in Tabarz sind für manche Teilnehmer sehr ungünstig. Dennoch wird daran festgehalten, um im Arbeitskreis Grundschule verortet zu bleiben. Es wird jedoch darauf geachtet, dass das Frühjahrstreffen örtlich sowie zeitlich für alle geschickter liegt. Eine Anbindung des Frühjahrstreffens an die GDM erscheint aufgrund des jeweils sehr vollen Programms der GDM nicht geeignet. Ein Treffen der Arbeitsgruppe auf der GDM ist jedoch wieder vorgesehen.

3. Sonstiges

- Planung des Treffens im Frühjahr 2011 an der PH Karlsruhe:

  Da die GDM 2011 im Februar stattfindet, wird das Frühjahrstreffen der Arbeitsgruppe im März 2011 an der PH in Karlsruhe sein. Um einen geeigneten Termin zu finden, ist eine Umfrage über doodle bereits eingerichtet (http://www.doodle.com/2eavdw94me5x2tu2) und wird in Kürze an alle Interessenten versandt.

- Ulrich Kortenkamp hat auf Madipedia eine Seite für die Arbeitsgruppe errichtet. Alle Teilnehmer werden gebeten, sich aktiv an der Gestaltung dieser Seite zu beteiligen (u.a. auch Einstellen von Publikationen etc.). Felix Krawehl hat sich dazu bereit erklärt, die Seite zu betreuen und auf deren Gestaltung sowie Inhalt zu achten.

- Wer Interesse hat an der Arbeitsgruppe teilzunehmen sollte sich bitte direkt mit Silke Ladel in Verbindung setzen (silke.ladel@ph-gmuend.de), um in den Verteiler aufgenommen zu werden.

JÜRGEN MAASZ, Linz

Kurzbericht zum GDM Arbeitskreis „Mathematik in der Weiterbildung“

Wie seit vielen Jahren üblich trifft sich dieser Arbeitskreis während der Jahrestagung des GDM als Anlaufstelle und Möglichkeit zur Basisinformation. Die eigentliche wissenschaftliche Kommunikation findet im Rahmen der Jahrestagung der internationalen Fachvereinigung „ALM“ wie Adults Learning Mathematics statt. Zur ALM Tagung 2010 Ende Juni in Oslo (Norwegen) lade ich hiermit ausdrücklich ein (siehe www.alm-online.org).

1. Angebot und reale Nachfrage an mathematischer und mathematikhaltiger Weiterbildung in Oberösterreich – Resultate eines EU-Forschungsprojektes

Als Ausgangspunkt der inhaltlichen Diskussion diente ein Bericht über ausgewählte Resultate eines im Rahmen des von der EU finanzierten Projektes EMMA (http://www.statvoks.no/emma/). Einige Studierende der Universität Linz haben viel Zeit und Mühe investiert, um aus dem Internet bzw. durch direkte Besuche bei den entsprechenden Institutionen eine umfassende Liste aller öffentlich angebotenen Kurse eines Jahres zur mathematischen und mathematikhaltigen Weiterbildung in Oberösterreich zu erstellen und nach bestimmten Kriterien auszuwerten. Den Begriff „mathematikhaltige Weiterbildung“ habe ich im Zuge früherer Forschungen zum Thema für jene Weiterbildungsangebote geprägt, in denen Mathematik integriert in Sachunterricht gelehrt wird, also z.B. Geometrie in CAD-Kursen für technische ZeichnerInnen, Zinsrechnungen in der Unternehmens- oder Investitionsrechnung oder Statistik für die Qualitätssicherung.

Wer bietet öffentlich zugängliche (also nicht z.B. betriebsinterne) Kurse zur Erwachsenbildung an? Wirtschaftsförderungsinstitut (WIFI), Berufsförderungsinstitut (BFI) und Volkshochschulen sind die „Big Player“. AMS (Arbeitsmarktservice) finanziert viele Kurse, die z.T. von anderen Erwachsenenbildungseinrichtungen durchgeführt werden. Zusätzlich wurde noch der größte private Fernlernanbieter (Humboldt) erfasst:

AMS OÖ: 3051, davon 629 mit Mathematik (20,6 %)

BFI OÖ: 6977, 1447 mit Mathematik (20,7 %)

Humboldt: Fernlehre: 167, davon 55 mit Mathematik (31,8 %)

VHS OÖ: 6103, 116 mit Mathematik (0,2 %)

WIFI OÖ: 5943, 1905 mit Mathematik (32 %)

Insgesamt wurden 22748 Kurse erfasst, davon sind 4152 mathematikhaltig, also ca. 18,25 %

Die Volkshochschulen bieten wenig Mathematik, weil sie im Programm keine berufliche Weiterbildung und nur wenige Kurse zum Nachholen formaler Bildungsabschlüsse haben, etwa für die Hauptschule. Der Anteil mathematikhaltiger Kurse der anderen Anbieter ist erstaunlich hoch. Die oft betonte rasche Entwicklung von Naturwissenschaft und Technik, die sich bekanntlich auch in immer neuen Computern und Programmen zeigt, führt tatsächlich zu vielen entsprechenden Kursangeboten. Insgesamt wurden 22784 Kurse angeboten, 173 von Humboldt, 3051 vom AMS, 6103 von den Volkshochschulen, 6977 vom BFI und 6480 vom WIFI.

Drei große Gruppen von Kursangeboten innerhalb der Gruppe der mathematikhaltigen Kurse wurden unterschieden, technisch orientierte (1321) oder wirtschaftlich orientierte (1503) und allgemeinbildende (1323). 5 Kurse beinhalten gemischte Angebote.

Wie ist das mathematische Niveau der angebotenen Kurse? Recht anspruchsvollem Niveau. Etwa ¾ ist im Bereich Oberstufe (3136 Kurse), ¼ Unterstufe (992 Kurse) und nur einige Kurse (24) sind mit Volksschulmathematik besuchbar.

Das Kursangebot entspricht mit einer gewissen Unschärfe der Nachfrage. Keine Erwachsenenbildungseinrichtung kann und will es sich leisten, auf Dauer Kurse zu organisieren und anzubieten, die wegen eines Mangels an TeilnehmerInnen nicht zustande kommen. Als Zwischenfazit kann ich also festhalten, dass eine erstaunlich große Anzahl an Kursen mit mathematischen Inhalten auf recht hohem Niveau angeboten wird.

2. Angebot und „objektive“ Nachfrage an mathematischer und mathematikhaltiger Weiterbildung in Oberösterreich

Wenn es eine „objektive“ Nachfrage an mathematischer Weiterbildung gibt, kann sie einerseits aus theoretischen Überlegungen zum Bedarf und andererseits an empirischen Messungen zu vorhandenen Kenntnissen und Einstellungen begründet werden. Wenn sich der Bedarf aus dem ableiten lässt, was in Lehrplänen ablesen lässt, dann zeigen die vorhandenen empirischen Daten über die geringen Mathematikkenntnisse Erwachsener und ihre oft recht negative Einstellung zur Mathematik einen erheblichen objektiven Nachholbedarf, der durch das vorfindliche Angebot offenbar nicht abgedeckt wird. Derzeit gibt es keine repräsentative Studie zu vorhandenen Mathematikkenntnisse Erwachsener und ihren Einstellungen zur Mathematik, wohl aber verschiedene Einzelstudien. Jüngstes Beispiel ist eine Diplomarbeit von Mag. W. Lehner, der ca. 1000 Tests ausgewertet hat, die das oberösterreichische AMS (=Arbeitsmarktservice) mit Langzeitarbeitslosen durchgeführt hat, um geeignete Weiterbildungs- bzw. Fortbildungskurs-empfehlungen geben zu können. Ein fixer Bestandteil solcher Tests sind Mathematikaufgaben.

Wie in vergleichbaren internationalen Untersuchungen waren die durchschnittlichen Mathematikkenntnisse gering, obwohl das Spektrum der formalen Bildungsabschlüsse der getesteten Personen bis hin zu Studienabschlüssen reicht. Dazu ein Beispiel, eine Zusammenfassung von Ergebnissen zu einfachen Grundrechenaufgaben. Von 20 gestellten Aufgaben wurden durchschnittlich 5,5 richtig gelöst. Je eine Person lösten als "beste" TeilnehmerInnen 15 und 14 Aufgaben. Frauen haben etwas mehr Aufgaben richtig gelöst als Männer und ältere Personen waren erfolgreicher als jüngere – Taschenrechner duften nicht benutzt werden. Bei Textaufgaben war die Erfolgsquote noch geringer. Bessere Schulbildung erhoben durch den höchsten erreichten Bildungsabschluss zeigt sich in besseren Testergebnissen. Spezifische berufliche Erfahrung führt zu besseren Ergebnissen in berufsrelevantem Wissen: Eine Tischlerin kann in der Regel deutlich mehr Geometrie als der Durchschnitt. Das ist nicht überraschend: Wer nach dem Abitur nie wieder Latein oder Altgriechisch verwendet, wird bei einem Sprachtest einige Jahre nach dem Abitur ziemlich große Mängel in der Sprachbeherrschung feststellen.

Die Frage, welche Mathematikkenntnisse ein Erwachsener unabhängig von der beruflichen Tätigkeit auf jeden Fall braucht, um als KonsumentIn oder als BürgerIn nicht betrogen oder mit einer einfachen Statistik manipuliert zu werden, kann hier nicht hinreichend ausführlich erörtert werden. Einige Hinweise liefert eine kleine Umschau im Alltag: Finanzfragen sind offenbar wichtig, etwas Geometrie für Heimwerker, etwas Systemdynamik für vernetztes Denken, etwas Statistik und insbesondere viel Wissen über Modellbildung etc. Jedenfalls scheint mir die Frage nicht einfach mit einem Abschreiben der Summe alle Stoffkataloge aus den Lehrplänen hinreichend beantwortbar zu sein. Auch der oben der Kürze halber formulierte Blick auf die Lehrpläne insgesamt reicht nicht, um den realen Bedarf an Mathematik im Alltag von Erwachsen zu erkennen. Hier ist noch viel Forschungsarbeit zu leisten! Wie viel und welche Mathematik braucht ein Mensch nach der Schule? Selbst die scheinbar viel einfachere Frage, wie viel und welche Mathematik an einem bestimmten Arbeitsplatz gebracht wird, ist kaum untersucht und durchaus schwer zu beantworten, wie einzelne Studien zeigen, über die etwa im ALM Journal berichtet wird.

(http://www.alm-online.net/index.php?option=com_content&view=article &id = 49 &Itemid=142).

Solange nicht klar ist, wie die Praxis ist oder sein soll, an der sich Kurse orientieren sollen, ist natürlich auch nicht klar, wie diese oft gehörte und am Markt besonders wichtige Forderung konkret interpretiert werden soll. Auch eine andere wesentliche Frage bleibt damit unbeantwortbar: Soll die Praxis so wie sie empirisch vorfindlich ist, durch entsprechende Ausbildungs- oder Weiterbildungsangebote gestützt werden? Oder ist sie - aufgrund welcher Wünsche, Theorien oder Anforderungen auch immer - nicht als optimal, sondern als veränderungswürdig einzustufen? Soll in diesem Fall eine "zukunftsorientierte" Aus- und Weiterbildung auch ein Mittel sein, durch veränderte Inhalte und Methoden die vorherrschende Praxis zu ändern? Praxisbezug ohne empirische Basis, also Forschung zur tatsächlichen Praxis in Beruf und Alltag bleibt Metapher für "einfach" oder "nicht so theoretisch" - das heißt dann oft eigentlich: Bitte nicht so mathematisch!

3. Fazit

Im internationalen Vergleich scheinen in solchen Ländern am ehesten Angebote für die mathematische Basisbildung Erwachsener verstärkt vorhanden zu sein, wo Erwachsenenbildung als staatliche Aufgabe gesehen wird, Schulen für Erwachsene existieren und sogar eine eigene Lehrerausbildung für solche Schulen. Der Weg dahin ist weit und teuer; mit anderen Worten scheint es also eher unwahrscheinlich, dass in einer Zeit, in der im Bildungsbereich konsequent gespart wird, ein ganzer neuer öffentlicher Bildungsbereich entwickelt und finanziert wird.

Für die deutschsprachige Didaktik der Mathematik ist dies bedauerlich, da im derzeitigen System der marktorientierten mathematischen Erwachsenenbildung fast ausschließlich nebenberufliche Lehrkräfte im Einsatz sind, die noch weit weniger als die hauptberuflichen LehrerInnen an öffentlichen Schulen zu mathematikdidaktischer Forschung bereit und in der Lage sind. Auch ein mathematikdidaktisches Konzept der Ausbildung hauptberuflicher MathematiklehrerInnen für Erwachsene wäre eine sehr wichtige und interessante Aufgabe der Mathematikdidaktik, wenn sie stattfinden würde. Nicht zuletzt ist die Erforschung der Art, wie Erwachsene Mathematik lernen, ein hoch interessantes Aufgabenfeld für die Mathematikdidaktik.

SEBASTIAN REZAT, Gießen

Mathematikbuch und Schüler – Ergebnisse einer Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen und Implikationen für die Schulbuchkonzeption

Trotz des Einzugs der neuen Technologien in die Klassenzimmer gelten Mathematikschulbücher nach wie vor als die zentralen Hilfsmittel schulischen Lehrens und Lernens von Mathematik. Gründe für diese Stellung der Schulbücher sind u. a. die vielfältigen Funktionen, die Schulbücher im Rahmen schulischer Lehr- und Lernprozesse einnehmen. Für Lehrer vermitteln sie zwischen curricularen Vorgaben und konkretem Unterricht: In Schulbüchern werden abstrakte curriculare Vorgaben so konkretisiert, dass Lehrer sie im Unterricht verwenden können (vgl. Valverde *et al.* 2002).

Schulbücher sind jedoch nicht nur Werkzeuge für Lehrer zur Implementierung des Curriculums. Sie werden offiziell als ‚Schülerbücher' bezeichnet und in Deutschland in Klassensätzen angeschafft, um sie Schülern zur Verfügung zu stellen. Damit ist das Schulbuch für Schüler vielfach die zentrale zur Verfügung stehende Fachliteratur und unverzichtbares Hilfsmittel selbstregulierten Lernens.

Umso mehr verwundert es, dass die Nutzung der Mathematikschulbücher im Gegensatz zur Nutzung neuer Technologien wenig wissenschaftliches Interesse erregt hat. Ob Mathematikbücher von Schülern im Rahmen des Lernens von Mathematik verwendet werden und wie diese Verwendung aussieht, ist bislang ebenso wenig untersucht wie die Frage, was es heißt, dass Schulbücher tatsächlich schülergerecht gestaltet sind.

Die traditionelle wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Schulbüchern besteht im Wesentlichen in der inhaltlichen Analyse. Die alleinige Auseinandersetzung mit dem Buch an sich – unabhängig von seiner Nutzung – steht jedoch im Widerspruch zu einer konstruktivistischen Auffassung vom Lernen, die heute Grundlage der Forschung und Theoriebildung in Pädagogik, Psychologie und den Fachdidaktiken ist. Auf das Verstehen und Aneignen von Inhalten im Schulbuch bezogen besagt die zentrale These des Konstruktivismus, dass Textverstehen kein passives Aufnehmen eines Textinhalts ist, sondern eine aktive, konstruktive Tätigkeit. Demnach enthalten Texte genau besehen keinen Sinn in der Weise, dass dieser durch Handlungen wie ‚Verstehen' oder ‚Interpretieren' ans Tageslicht gefördert werden kann. Vielmehr ist der Akt der Sinnstiftung ein Prozess, der als Interaktion zwischen dem Text und dem Leser modelliert werden kann. Demnach kann die wissenschaftliche Auseinandersetzung mit Schulbüchern, die i. d. R. auch mit der Diskussion um die Optimierung der Schulbücher verbunden ist, nicht allein auf der Optimierung der Inhalte der Bücher beruhen, sondern muss die Interaktion zwischen dem Text und dem Leser berücksichtigen. Eine zentrale Rolle in der Interaktion zwischen Text und Leser kommt der Struktur der Bücher zu. Insbesondere Mathematikschulbücher sind durch eine ausgesprochen spezifische Struktur gekennzeichnet. Die Lerneinheiten der Bücher sind aus verschiedenen Strukturelementen bausteinartig zusammengesetzt (vgl. Rezat 2008). Typische Strukturbausteine sind *Einstiegsaufgaben, Kästen mit Merkwissen, Musterbeispiele, Übungsaufgaben*. Jedem dieser Strukturbausteine werden bestimmte Funktionen im Rahmen des Lernprozesses zugeschrieben. Durch eine unterschiedliche typographische Gestaltung werden die Strukturelemente visuell voneinander abgegrenzt. Damit einher geht die Möglichkeit, gezielt auf bestimmte Strukturelemente mit bestimmten Funktionen und Eigenschaften zugreifen zu können. In diesem Sinne kann die Struktur der Bücher als Schnittstelle zwischen dem Leser und dem Text betrachtet werden, die es dem Leser ermöglicht, bestimmte Abschnitte aus dem Buch entsprechend der eigenen Ziele auszuwählen.

Der Struktur der Bücher als Schnittstelle zwischen dem Nutzer und dem Buch wird wissenschaftlich wenig Beachtung geschenkt. Insbesondere wurde bislang nicht untersucht, ob die Struktur so gestaltet ist, dass sie Schülern eine effektive Nutzung des Mathematikbuches gestattet. Diese Überlegung bildet den Ausgangspunkt der Untersuchung.

Das zentrale Anliegen der Untersuchung bestand darin, empirische Erkenntnisse darüber zu gewinnen, wie Schüler ihre Mathematikbücher als Instrumente zum Lernen von Mathematik verwenden. Die Annäherung an diese Frage erfolgte von zwei Seiten: Einerseits wurde die Schnittstelle zwischen Leser und Buch – die Struktur von Mathematikbüchern – eingehend analysiert (vgl. Rezat 2008). Andererseits wurde auf dieser Grundlage die tatsächliche Nutzung und damit die Interaktion von Schülern der Sekundarstufen I und II mit ihrem Mathematikbuch auf der Ebene der Schnittstelle empirisch untersucht. Leitend für die Untersuchung waren im Einzelnen Fragen wie: Wozu nutzen Schüler ihr Mathematikbuch? Wie wählen sie Inhalte im Buch aus? Welche Strukturbausteine nutzen Schüler in bestimmten Situationen? Lassen sich typische Verwendungsweisen in bestimmten Situationen feststellen?

Antworten auf diese Fragen wurden im Rahmen eines qualitativen Forschungsansatzes gesucht, der grundsätzlich den Prinzipien der Grounded Theory (vgl. Strauss & Corbin 1996) verpflichtet ist. Auf der Grundlage einer innovativen Methodik, bei der die Schüler darum gebeten wurden, die genutzten Ausschnitte im Buch zu markieren und in einem Heft den Grund ihrer Nutzung zu kommentieren, wurden Daten von insgesamt 74 Schülern der Jahrgangsstufen 6 und 12 am Gymnasium erhoben. Parallel wurde im Zeitraum der Datenerhebung der Unterricht beobachtet. Den Beobachtungsschwerpunkt bildete die Schulbuchnutzung durch den Lehrer sowie die Schüler im Klassenzimmer. Im Anschluss an die Dokumentation der Schulbuchnutzung wurden Interviews mit ausgewählten Schülern zu spezifischen Nutzungen im Sinne des Stimulated Recall durchgeführt. Die Auswertung der Daten erfolgte anhand der Kodierverfahren der Grounded Theory. Konzepte wurden im Hinblick auf den instrumentellen Ansatz der kognitiven Ergonomie (vgl. Rabardel 2002) entwickelt. Um bei der Analyse nicht auf der Ebene des Individuellen und Einzigartigen zu verbleiben, wurden auf der Grundlage der empirisch begründeten Typenbildung (Kluge 1999) typische Verwendungsweisen des Buches analysiert. Ausgewählte Ergebnisse der empirischen Untersuchung der Nutzung von Mathematikbüchern durch Schüler werden im Folgenden kurz dargestellt.[1]

1. Ergebnisse zur Nutzung von Mathematikbüchern durch Schüler

Schüler nutzen ihre Mathematikschulbücher selbständig, d. h. über die vom Lehrer initiierten Nutzungen des Buches hinaus, zum Lernen von Mathematik. Dies ist ein wesentliches Ergebnis der vorliegenden Untersuchung. Die Bücher nehmen also tatsächlich die Rolle eines Hilfsmittels im Zusammenhang mit dem selbstregulierten Lernen ein.

Erstens konnten vier Nutzungszusammenhänge unterschieden werden: Schüler nutzen das Mathematikbuch selbständig, 1. um Hilfen für das Bearbeiten von Aufgaben zu erhalten, 2. um Inhalte des Unterrichts zu wiederholen und zu üben, 3. um sich selbständig Wissen anzueignen, das noch nicht Gegenstand des Unterrichts war, sowie 4. interessemotiviert.

Zweitens konnte der Auswahlprozess von Schulbuchinhalten auf der Grundlage empirischer Daten modelliert werden. Dabei zeigt sich, dass Schüler zunächst einen relevanten Bereich bestimmen, in dem sie anschließend gezielt einzelne Inhalte auswählen. Die Auswahl eines relevanten Bereichs kann 1. auf die Nutzung des Buches im Unterricht durch den Lehrer zurückzuführen sein, kann 2. mit Hilfe des Inhalts- oder Stichwortverzeichnisses erfolgen oder 3. einfach durch Blättern im Buch. Innerhalb des relevanten Bereichs wählen Schüler nicht nur – wie von der Struktur der Bücher nahegelegt – bestimmte Strukturbausteine aus. Die Studie zeigt, dass Schüler Inhalte in Mathematikbüchern auch aufgrund ihrer spezifischen Lage auswählen. Typisch ist hier die Auswahl von Aufgaben, die benachbart zu Aufgaben sind, die im Unterricht bearbeitet wurden bzw. die

[1] Eine ausführliche Darstellung der Methode und der Ergebnisse findet sich in Rezat (2009a).

Auswahl von Inhalten am Anfang der Lerneinheit unmittelbar unterhalb der Überschrift. Die Daten zeigen, dass Schüler aufgrund der Lage auf spezifische Eigenschaften des Strukturelements schließen, z. B. ‚benachbarte Aufgaben sind sich ähnlich' bzw. ‚am Anfang einer Lerneinheit befinden sich die wichtigen Informationen zum Thema'. Darüber hinaus wählen Schüler auch auf rein äußerlicher Ebene Ausschnitte im Buch aus, die ‚ins Auge springen' bzw. auf den ersten Blick bestimmte Eigenschaften mit der gesuchten Information gemeinsam haben.

Drittens konnten empirisch typische Nutzungsweisen der Schüler rekonstruiert werden, die Grundlage für eine Nutzertypologie des Mathematikbuches darstellen. In der Nutzertypologie werden die Schüler hinsichtlich ihrer typischen Verwendungsweise des Mathematikbuches kategorisiert. Insgesamt konnten sieben Nutzertypen unterschieden werden:

1. der *unselbständige Nutzer*, der keine eigenständige Nutzung des Buches zeigt. Alle Nutzungen sind nur auf den Lehrer zurückzuführen.
2. der *interessemotivierte Lerner*, der nur aus Interesse in das Buch schaut. Vielfach schaut sich dieser Nutzertyp nur Bilder im Buch an, so dass ein Zusammenhang zum Lernen von Mathematik fraglich ist.
3. der *Festigungstyp*, der das Buch ausschließlich zum Wiederholen und Üben nutzt;
4. der *Regellerner*, der nur die Kästen mit den Regeln verwendet, um sich die Regeln einzuprägen;
5. der *Nachschlager*, der im Zusammenhang mit dem Bearbeiten von Aufgaben bestimmte Begriffe oder Regeln im Buch nachschlägt;
6. der *Aufgabenbearbeiter*, der das Buch ausschließlich zum Bearbeiten von Aufgaben verwendet und unterschiedliche Nutzungsweisen in diesem Zusammenhang aufweist;
7. der *Experte*, der das Buch im Rahmen unterschiedlicher Nutzungszusammenhänge gebraucht und ein Repertoire an verschiedenen Nutzungsweisen zeigt.

Diese Ergebnisse betreffen die faktische Nutzung von derzeit auf dem deutschen Markt befindlichen Mathematikschulbüchern. Die im Rahmen dieser Arbeit entwickelten theoretischen und methodischen Ansätze sind für die mathematikdidaktische Forschung im Speziellen und die Schulbuchnutzungsforschung im Allgemeinen von Bedeutung. Darüber hinaus haben die im Rahmen dieser Arbeit gewonnen Erkenntnisse wesentliche Implikationen für Lehrer, Schulbuchautoren und –verleger sowie für die Schuladministration. Auf die Implikationen für Lehrer und die Lehrerausbildung wurde bereits in den Beiträgen zum Mathematikunterricht 2009 eingegangen (Rezat 2009b). In diesem Beitrag sollen einige Implikationen für Schulbuchautoren und –verleger erörtert werden.

2. Implikationen für Schulbuchautoren und –verleger

Für Schulbuchautoren und –verleger ist ein zentrales Ergebnis der Studie, dass Schüler ihre Mathematikbücher selbständig zum Lernen von Mathematik verwenden. Schüler sollten daher bei der Entwicklung von Mathematikbüchern maßgeblich als Zielgruppe berücksichtigt werden und nicht hinter Lehrer als Zielgruppe zurücktreten.

Grundsätzlich ist vor dem Hintergrund der Ergebnisse dieser Studie zu fragen, ob die Bücher tatsächlich den Umgang mit Mathematik fördern, der im heutigen Mathematikunterricht angestrebt wird. Wenn die Nutzung des Buches als Interaktion zwischen dem Leser und dem Buch aufzufassen ist, dann ist nicht nur die Frage zu stellen, wie das Buch genutzt wird, sondern auch, welche Auswirkungen die spezifische Gestaltung von Mathematikbüchern auf den Nutzer hat. Jedes Werkzeug bietet seinem Nutzer durch seine spezifische Gestaltung einerseits bestimmte Nutzungsweisen an, andererseits ist es für bestimmte Zwecke aufgrund der spezifischen Gestaltung ungeeignet. Dies lässt sich am Beispiel eines Hammers, aber auch an modernen ‚Werkzeugen' wie einem iPhone einsehen. Ein Hammer bietet sich aufgrund seines Gewichtes, seiner Härte und seiner Form dazu an, in die Hand genommen und auf etwas geschlagen zu werden. Aufgrund seiner rechtwinkligen Form und der Länge seines Stiels bietet er sich eventuell auch an, als Hebel zu fungieren. Er bietet sich aber sicherlich nicht dazu an, eine Schraube in die Wand zu drehen, da ihm die spezifischen Eigenschaften fehlen, die eine Schraube erfordert. Ein iPhone bietet seinem Nutzer zunächst wenige Verwendungsweisen an. Es besitzt keine Tasten, auf die der Nutzer drücken könnte und keine sonstigen markanten Eigenschaften, die eine Verwendung zu einem bestimmten Zweck nahelegen. Durch die Abbildung von Tasten auf dem Display wird dem Nutzer jedoch nahegelegt, auf das Display zu fassen und auf diese Weise das iPhone zu bedienen. Auf diese Weise erhält der Nutzer Zugang zu einer Vielfalt von Einsatzmöglichkeiten, die die eines gewöhnlichen Telefons weit überschreiten. Darüber hinaus zeigt sich, dass dieses Display nicht nur Tasten imitieren kann, sondern auf die vielfältigsten Berührungen sehr unterschiedliche Funktionen erfüllen kann: Es kann vergrößern, verkleinern, scrollen und vieles mehr.

Am Beispiel des iPhones wird deutlich, dass die Frage, welche Verwendungsweisen dem Nutzer nahegelegt werden, eine Frage der spezifischen

Gestaltung des Displays – also der Schnittstelle zwischen Nutzer und ‚Werkzeug' ist. In Bezug auf die Schnittstelle von Mathematikschulbüchern lässt sich analog die Frage stellen, ob sie durch ihre spezifische Gestaltung bestimmte Nutzungsweisen nahelegt bzw. einschränkt. In diesem Zusammenhang ist – wie weiter oben dargestellt – die Struktur von Mathematikschulbüchern von besonderem Interesse. Welche Auswirkungen hat die Struktur von Mathematikschulbüchern auf den Nutzer und die Nutzung der Bücher? Diese Frage zu thematisieren, ist gerade vor dem Hintergrund des Ergebnisses der Schulbuchanalyse, dass die Strukturen der verschiedenen Mathematikschulbücher sehr ähnlich sind (vgl. Rezat 2008), in Verbindung mit dem Phänomen, dass die Nutzerfreundlichkeit bzw. Ergonomie dieser Struktur nicht anhand von Nutzerstudien erforscht wird, lohnend. Weiterhin ist darüber nachzudenken, ob die nahegelegten Nutzungsweisen dem Umgang mit Mathematik entsprechen, der im heutigen Mathematikunterricht angestrebt wird.

Welche Nutzungsweisen legt die Struktur des Mathematikbuchs nahe? Wird die Struktur von Mathematikbüchern unter diesem Aspekt betrachtet, dann deuten insbesondere die Kästen und Musterbeispiele darauf hin, dass hinter der Struktur von Mathematikbüchern eine Idee vom Lernen von Mathematik steht, die Howson (1995, S. 19) pointiert beschreibt: „this is how it is done, now go and do it for yourself". Dies spiegelt sich in der Nutzungsweise der Schüler. Sie nutzen bevorzugt Strukturbausteine, wie z. B. Kästen und Musterbeispiele, die ihnen konkrete Information dazu geben, wie mit einem bestimmten mathematischen Problem umzugehen ist. Der Kommentar einer Schülerin ist in diesem Zusammenhang kennzeichnend: Während der selbstentdeckenden Erarbeitung einer Regel auf der Grundlage von bereits vorhandenen Kenntnissen schaut sie in das Buch mit der Begründung, dass sie es „schon einmal vorher wissen wollte".

In diesem Sinne lässt sich ein Widerspruch feststellen zwischen dem Bild vom Lernen von Mathematik, das der Struktur von Mathematikschulbüchern implizit ist, und dem Verständnis vom Lernen von Mathematik, das im heutigen Mathematikunterricht angestrebt wird. In einigen neueren Büchern wird versucht diesem Bild von Mathematik durch ein wachsendes Angebot an Aktivitäten entgegenzuwirken, die Schülern ermöglichen, mathematische Konzepte selbst zu erarbeiten und zu entdecken, um sie damit für sich bedeutsam zu machen und mit Sinn zu erfüllen. Im Anschluss daran finden sich jedoch genau die Strukturbausteine, die ‚zeigen, wie es gemacht wird'. Die Bemühungen, den Schülern Mathematik als lebendige Wissenschaft zu vermitteln, müssen scheitern, wenn auf das Erkunden und Entdecken von Mathematik das Zeigen, wie es ‚richtig' geht, folgt.

Die Studie belegt darüber hinaus, dass selbstentdeckende und -erkundende Einstiege in den Büchern von Schülern nicht im intendierten Sinne genutzt werden. Die Nutzung von Einstiegsaufgaben zur Aktivierung und Hinführung ließ sich nicht in den Daten feststellen. Zudem zeigt sie, dass auch die Platzierung dieser Einstiegsaufgaben am Anfang einer Lerneinheit gegenläufig zu den Verwendungsweisen von Schülern steht. Schüler erwarten am Anfang der Lerneinheit keine hinführenden Aktivitäten, sondern wesentliche Informationen zum Thema. Ihre Vorstellung vom Aufbau einer Lerneinheit entspricht damit nicht der Idee des gefrorenen Unterrichts, die sich in der Abfolge der einzelnen Strukturbausteine spiegelt (vgl. Rezat 2008), sondern eher der Konzeption eines Fachbuches, bei der die Inhalte unterhalb der entsprechenden Überschrift zunächst dargestellt werden. Der im Zusammenhang mit vielen Büchern gültige Schluss von der Lage des Schulbuchinhalts „Anfang der Lerneinheit" auf dessen Funktion „wesentliche Informationen zum Thema" ist im Zusammenhang mit der Struktur von Mathematikschulbüchern nicht gültig, denn die Struktur orientiert sich am Verlauf des Unterrichts bzw. des Lernprozesses.

Die vorangehenden Überlegungen beantworten bereits teilweise die zweite Frage in diesem Zusammenhang: Welche Nutzungsweisen werden durch die Struktur der Mathematikschulbücher eingeschränkt? Zunächst ist es erfreulich, dass Schüler das Mathematikbuch interessemotiviert nutzen. Nutzungen in diesem Zusammenhang deuten darauf hin, dass Schüler versuchen, Mathematik für sich selbst bedeutsam zu machen, indem sie nach Anknüpfungspunkten für eigene Interessen Ausschau halten. Ein Schüler betrachtet das Bild eines Basketballspielers, da er „selber Basketball spielt". Eine Schülerin betrachtet ein Kochrezept mit der Begründung „ich koche und backe gerne". Eine genauere Untersuchung der interessemotivierten Nutzungen zeigt jedoch, dass dieses Interesse offenbar nicht lange anhält. Selbst wenn etwas Interesse erweckt, wird in der Regel der Kontext, in dem es steht, und damit die Mathematik, die mit dem jeweiligen Interesse verbunden ist, nicht weiter zur Kenntnis genommen. Die Bücher sind offenbar nicht so gestaltet, dass das Interesse aufrecht erhalten wird.

Neben der Frage, welche Einflüsse die Struktur auf die Nutzung der Bücher durch Schüler hat, verweist die vorliegende Untersuchung auf die hervorragende Rolle von Bildern im Zusammenhang mit der Auswahl von Inhalten im Schulbuch. Die Rekonstruktion der Auswahlprozesse von Schülern lässt darauf schließen, dass Bilder eine maßgebliche Orientierungsfunktion beim Auffinden relevanter Inhalte im Schulbuch haben. Bilder visualisieren prototypsich bestimmte mathematische Inhalte und erhalten damit die Funktion eines Zeichens, das auf einen bestimmten mathematischen Inhalt verweist. Mit Hilfe dieser Zeichen orientieren sich die Schüler im Buch. In der einschlägigen Literatur lassen sich weder Anhaltspunkte dafür finden, dass diese Rolle von Bildern Gegenstand wissenschaftlicher Untersuchungen ist, noch, dass sie im Rahmen der Entwicklung von Schulbüchern berücksichtigt wird. Dass Bilder eine maßgebliche Bedeutung bei der Auswahl von Schulbuchinhalten haben, ist daher als wichtiges Ergebnis der Arbeit anzusehen.

Fazit

Die vorliegende Studie konzentrierte sich auf die Untersuchung der Nutzung des Mathematikbuches durch Schüler. Damit ist nur ein kleiner Teil der schulischen Wirklichkeit von Schülern erfasst. Sie setzt jedoch ein Zeichen, das für die Forschung und Entwicklung im Zusammenhang mit sämtlichen Lernmaterialien in allen Fächern gilt: Die Konzentration auf die Schülerperspektive. Diese wird nach wie vor bei der Entwicklung von Lernmaterialien unzureichend berücksichtigt. Theorie und Methode der vorliegenden Untersuchung haben zur Gewinnung wesentlicher Einsicht in die Lerntätigkeiten von Schülern beigetragen und sind von einer Allgemeinheit, dass sie in anderen fachlichen Kontexten zur Erforschung der Nutzung von verschiedenen Lernmaterialien eingesetzt werden können.

Literatur

Howson, G. [1995]: Mathematics Textbooks: A Comparative Study of Grade 8 Texts. Vancouver: Pacific Educational Press.

Kluge, S. [1999]: Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung. Opladen: Leske + Budrich.

Rabardel, P. [2002]: People and Technology: a cognitive approach to contemporary instruments. Abgerufen am 02.01.2008 von http://ergoserv.psy.univ-paris8.fr/Site/default.asp?Act_group=1.

Rezat, S. [2008]: Die Struktur von Mathematikschulbüchern. In: Journal für Mathematikdidaktik, 29(2008)1, 46-67.

Rezat, S. [2009a]: Das Mathematikbuch als Instrument des Schülers. Eine Studie zur Schulbuchnutzung in den Sekundarstufen. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Rezat, S. [2009b]: Das Mathematikbuch im Unterricht - Wohl oder Übel? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2009. Vorträge auf der 43. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 02.03. bis 06.03.2008 in Oldenburg. Münster: WTM, S. 811-814.

Strauss, A. & Corbin, J. [1996]: Grounded Theory: Grundlagen Qualitativer Sozialforschung. Weinheim: Beltz, Psychologische Verlags Union.

Valverde, G. A.; Bianchi, L. J.; Wolfe, R. G.; Schmidt, W. H. & Houang, R. T. [2002]: According to the Book - Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks. Dordrecht: Kluwer.