

# Nicht-Existenz und Konstruktion extremaler Gitter

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades  
rerum naturalium

vorgelegt von  
Dipl.-Math. Michael Jürgens

an der  
Fakultät für Mathematik  
der

 technische universität  
dortmund

März 2015

Michael Jürgens

Fakultät für Mathematik

Technische Universität Dortmund

Dortmund, Deutschland

Dissertation Technische Universität Dortmund, 2015

Tag der Disputation: 12. Juni 2015

Erstgutachter: Prof. Dr. Rudolf Scharlau

Zweitgutachter: Prof. Dr. Rainer Schulze-Pillot

Endgültige Version vom Juli 2015





# Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Kapitel 1. Grundlegendes	7
1.1. Gitter	7
1.1.1. Grundlegende Definitionen	7
1.1.2. Die Stufe eines Gitters und $\ell$ -modulare Gitter	8
1.2. Die extremale Modulform und extremale Gitter	12
1.2.1. Grundlegendes zu Modulformen	12
1.2.2. Extremale Modulform und extremale Gitter	13
1.2.3. Nicht-Negativität der Koeffizienten der extremalen Modulform	18
1.3. Kugelpackungen aus extremalen Gittern	21
1.4. Konstruktion ganzzahliger Obergitter	23
Kapitel 2. Vektorkonfigurationen und Nicht-Existenz extremaler Gitter	25
2.1. Zonale harmonische Polynome	25
2.2. Thetareihen mit sphärischen Koeffizienten	28
2.3. Berechnung der Konfigurationsanzahlen	31
2.4. Nicht-Existenz extremaler Gitter	36
2.5. Berechnung der Thetareihe eines Nachbarn aus den Konfigurationsanzahlen	39
2.6. Erzeugung durch Minimalvektoren	41
Kapitel 3. Hermitesche Strukturen von Gittern quadratfreier Stufe	43
3.1. Gitter über Zahlkörpern und Transferkonstruktion	43
3.1.1. Grundlegende Definitionen	43
3.1.2. Hermitesche Gitter	45
3.1.3. Spurkonstruktion	46
3.2. Ideal-Gitter	50
3.2.1. Bestimmung von Ideal-Gittern	50
3.2.2. Ideal-Gitter über Kreisteilungskörpern	54
3.3. Allgemeines zu Geschlechtern und Maßformel	61
3.3.1. Hermitesche Geschlechter	62
3.3.2. Maßformel und Standardmaß	68
3.3.3. Exakte Berechnung des Standardmaßes	74
3.4. Die Nachbarmethode über CM-Körpern	77
3.5. Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern	81
3.5.1. Der Fall $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$	81
3.5.2. Tensorprodukte über imaginär-quadratischen Zahlkörpern	90
3.5.3. Einige Beispiele im Fall $\text{ggT}(\ell, d_E) > 1$	93
3.6. Gitter über Kreisteilungskörpern	95

3.6.1. Zusammenhang zu Automorphismen	95
3.6.2. Der Fall $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$	97
3.6.3. Einige Beispiele im Fall $\text{ggT}(\ell, d_E) > 1$	106
3.7. Unimodulare Gitter	108
3.7.1. Unimodulare Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern	109
3.7.2. Unimodulare Gitter über Quaternionenalgebren	114
Kapitel 4. Automorphismenordnungen extremaler Gitter	119
4.1. Primärzerlegung eines Gitters	119
4.1.1. Das induzierte Teilgitter eines Automorphismus	120
4.1.2. Der Typ eines Automorphismus	123
4.1.3. Die Geschlechter von $L_1$ und $L_\zeta$	125
4.1.4. Weitere Bedingungen an $L_1$ und $L_\zeta$	127
4.2. Anwendung auf die Quebbemannschen Geschlechter	130
4.2.1. Das Geschlecht $\text{II}_{14}(11^{-7})$	130
4.2.2. Das Geschlecht $\text{II}_{22}(7^{+11})$	131
4.2.3. Das Geschlecht $\text{II}_{36}(3^{+18})$	132
4.2.4. Das Geschlecht $\text{II}_{32}(2^{+16})$	134
4.2.5. Das Geschlecht $\text{II}_{24}(3^{+12})$	135
4.2.6. Das Geschlecht $\text{II}_{20}(7^{+10})$	136
4.2.7. Das Geschlecht $\text{II}_{20}(5^{-10})$	137
4.2.8. Das Geschlecht $\text{II}_{24}(5^{+12})$	138
Fazit & Ausblick	139
Literaturverzeichnis	143
Anhang A. Dichte Kugelpackungen und obere Schranken	147
Anhang B. Symbolverzeichnis	149
Anhang C. Beschreibung einiger MAGMA-Funktionen	153







## Einleitung

Eine wichtige Motivation, sich mit Gittern zu beschäftigen, ist das Kugelpackungsproblem. Dabei geht es darum, den  $n$ -dimensionalen euklidischen Raum  $\mathbb{R}^n$  mit Kugeln gleichen Radius ohne Überlappung möglichst dicht zu bepacken. In Dimension 1 ist dieses Problem trivial und die optimale Packung überdeckt den 1-dimensionalen Raum vollständig. In Dimension 2 ist die optimale Packung die sogenannte hexagonale Packung (siehe Abb. 0.1 links). Dies konnte 1940 von F. Thoth gezeigt werden. Die hexagonale Packung überdeckt circa 90% des 2-dimensionalen Raumes. In Dimension 3 war lange Zeit offen, ob die sogenannte Kepler-Packung (siehe Abb. 0.1 rechts) die optimale Packung ist. Diese von J. Kepler bereits zu Beginn des 17. Jahrhunderts geäußerte Vermutung konnte erst 1998 von T. Hales mit intensivem Computereinsatz bewiesen werden. Diese Packung überdeckt immerhin noch circa 74% des 3-dimensionalen Raumes. Für Dimensionen  $n \geq 4$  ist das Kugelpackungsproblem weiterhin ein offenes Problem.

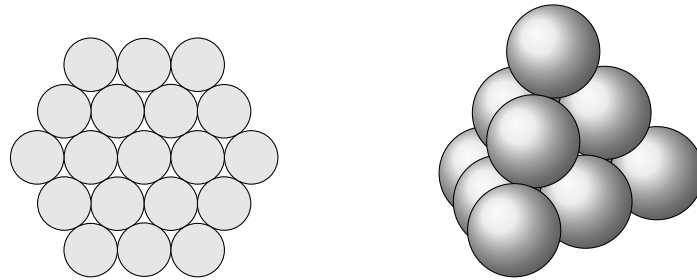


ABBILDUNG 0.1. Hexagonale Packung (links) und Kepler-Packung (rechts)

Allen drei oben beschriebenen Packungen ist gemeinsam, dass es sich bei diesen um Gitterpackungen handelt, d.h. die Mittelpunkte der Kugeln bilden ein Gitter, also die Menge ganzzahliger Linearkombinationen gewisser Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ . Im Fall der hexagonalen Packung handelt es sich dabei um das hexagonale Gitter  $\mathbb{A}_2$ , im Fall der Kepler-Packung um das Gitter  $\mathbb{A}_3$ . Die Tatsache, dass das Gitter  $\mathbb{A}_2$  das dichteste Gitter in Dimension 2 ist, konnte von J.L. Lagrange bereits im Jahr 1773 gezeigt werden, das entsprechende Resultat in Dimension 3 für das Gitter  $\mathbb{A}_3$  von C.F. Gauß im Jahr 1831. Darüber hinaus ist das Kugelpackungsproblem für Gitterpackungen noch in einigen weiteren Dimensionen gelöst: In Dimension 4 und 5 konnte von A. Korkine und G. Zolotareff in den 1870er Jahren gezeigt werden, dass die Gitter  $\mathbb{D}_4$  und  $\mathbb{D}_5$  die dichtesten Gitter sind, und für die Dimensionen 6 bis 8 sind die Gitter  $\mathbb{E}_6$ ,  $\mathbb{E}_7$  und  $\mathbb{E}_8$  die jeweils dichtesten, wie von H.F. Blichfeldt in den 1930er Jahren bewiesen wurde. Des Weiteren ist nach einem Resultat von H. Cohn und A. Kumar aus dem Jahr 2009 von dem in vielerlei Hinsicht außergewöhnlichen Leech-Gitter  $\mathbb{A}_{24}$  bekannt, dass dieses die dichteste Gitterpackung in Dimension 24 liefert (vgl. [CK09]).

Für alle anderen Dimensionen  $n \notin \{1, \dots, 8\} \cup \{24\}$  ist auch das Kugelpackungsproblem für Gitterpackungen ein offenes Problem. Es sind bislang nur „dichte“ Gitter bekannt, von denen teilweise

vermutet wird, optimal zu sein, deren Dichte jedoch die heutigen oberen Schranken nicht erreicht. Prominente Vertreter sind beispielsweise das Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  in Dimension 16 und das Coxeter-Todd Gitter  $CT_{12}$  in Dimension 12.

Eine besondere Eigenschaft dieser Gitter sowie auch des Leech-Gitters  $\Lambda_{24}$  ist die, dass sie jeweils als einziges Gitter in ihrem Geschlecht das Minimum 4 besitzen und diese Gitter somit zumindest in ihren Geschlechtern die Packungsdichte maximieren. Die Koeffizienten der entsprechenden Thetareihen sind somit also 1 gefolgt von einer 0, während jeweils für alle übrigen Gitter der zweite Koeffizient von 0 verschieden ist.

Dies motiviert die Definition eines extremalen Gitters (vgl. [MOS75]): zunächst zeigt man, dass der Raum  $\mathcal{M}_{n/2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}))$  eine eindeutig bestimmte Modulform der Gestalt  $1 + O(q^d)$  enthält, wobei  $d$  die Dimension dieses Raumes ist. Diese nennt man die extremale Modulform. Ein gerades unimodulares Gitter heißt dann extremal, wenn die Thetareihe des Gitters die extremale Modulform ist. Wichtige Beispiele sind etwa das Gitter  $\mathbb{E}_8$ , das Leech-Gitter  $\Lambda_{24}$  oder auch das erst kürzlich gefundene Gitter  $\Gamma_{72}$  (vgl. [Neb12]).

Mitte der 1990er Jahre wurde diese Definition auch auf Gitter anderer Stufen  $\ell > 1$  ausgeweitet. Dabei erweist sich der komplette Raum  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_0(\ell), \chi_{n/2})$  gewissermaßen als „zu groß“. Eine weitere besondere Eigenschaft einiger dichter Gitter wie  $CT_{12}$  oder  $BW_{16}$  ist die, modular, d.h. ähnlich zu ihren Dualgittern zu sein. Diese Eigenschaft hat unter anderem zur Konsequenz, dass die Thetareihe eines solchen Gitters in einem gewissen Unterraum  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2})$  liegt. Im Wesentlichen unter der Bedingung, dass die Summe der Teiler von  $\ell$  ein Teiler von 24 ist, konnte von H.G. Quebbemann gezeigt werden, dass dieser Raum ebenfalls eine eindeutig bestimmte Modulform der Gestalt  $1 + O(q^d)$  enthält, wobei hier nun  $d$  die Dimension dieses Unterraumes ist (vgl. [Que95],[Que97]). Genau wie zuvor heißt diese die extremale Modulform und ein Gitter extremal, wenn die Thetareihe mit der extremalen Modulform übereinstimmt. In diesem Sinne sind beispielsweise die Gitter  $\mathbb{A}_2$ ,  $\mathbb{D}_4$ ,  $\mathbb{E}_8$ ,  $K_{12}$ ,  $BW_{16}$  sowie  $\Lambda_{24}$  extremal.

Da das Minimum eines extremalen Gitters durch die extremale Modulform bereits festgelegt ist, ist die Packungsdichte eines solchen Gitters bereits a priori und ohne das Gitter zu kennen berechenbar. Für einige Geschlechter ist die Frage nach der Existenz eines extremalen Gitters von besonderem Interesse; nämlich dann, wenn ein extremales Gitter den bestehenden Packungsdichte-Rekord brechen würde. Ein Beispiel eines solchen ist das Geschlecht  $\mathrm{II}_{36}(3^{+18})$ : Ein extremales Gitter in diesem Geschlecht hätte eine um den Faktor 3 höhere Packungsdichte als das bislang dichteste bekannte Gitter. Zudem stellt sich für solche Geschlechter, in denen bereits extremale Gitter bekannt sind und diese die dichteste Kugelpackung liefern, die Frage, ob es weitere extremale Gitter gibt. Ein Beispiel für ein solches Geschlecht ist  $\mathrm{II}_{32}(2^{+16})$ , in dem bislang sechs extremale Gitter bekannt sind.

Auch losgelöst vom Kugelpackungsproblem stellt sich das Problem der Klassifikation der extremalen Gitter. Beschränkt man sich auf die Stufen  $\ell$ , deren Teilersumme ein Teiler von 24 ist, konkret also  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ , so wurde von R. Scharlau und R. Schulze-Pillot gezeigt, dass es sich bei der Bestimmung aller extremalen Gitter im Prinzip um ein endliches Klassifikationsproblem handelt, da ab einer gewissen Dimension anhängig von der Stufe  $\ell$  die extremale Modulform stets einen negativen Koeffizienten besitzt und somit nicht die Thetareihe eines Gitters sein kann (vgl. [SSP99]). In kleineren Dimensionen ist die Klassifikation aller extremalen Gitter durch vollständige Enumeration

des jeweiligen Geschlechts möglich, etwa mit Hilfe der Kneserschen Nachbarmethode. Auf diese Weise sind (mit Hilfe des C-Programms TWONEIGHBOURS) von B. Hemkemeier und R. Scharlau einige Resultate erzielt worden (vgl. z.B. [SH98], [Sch13]). In größeren Dimensionen ist dieses Vorgehen nicht mehr praktikabel, da die Maße der entsprechenden Geschlechter und damit auch die Klassenzahlen zu groß sind. Beispielsweise ist das Maß des Geschlechts  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  größer als  $10^{100}$  und damit gibt es in diesem Geschlecht weit mehr Gitter als Atome im Universum, sodass eine Klassifikation des gesamten Geschlechts heute und auch in Zukunft nicht machbar ist.

Viele extremale Gitter in größeren Dimensionen wie beispielsweise 16 oder 24 sind von G. Nebe und W. Plesken als Nebenprodukt der Klassifikation rationaler Matrixgruppen (vgl. z.B. [NP95], [Neb96]) konstruiert worden. Einige weitere extremale Gitter, insbesondere der Stufe 2 und 3 in Dimensionen 32 und größer, sind von C. Bachoc durch entsprechende Konstruktionen aus Codes gewonnen worden (vgl. [Bac97]). Des Weiteren sind in dem bereits genannten Übersichtsartikel von R. Scharlau und R. Schulze-Pillot (vgl. [SSP99]) viele weitere Konstruktionen extremaler Gitter beschrieben, insbesondere auch Konstruktionen mittels algebraischen Zahlkörpern. Sämtliche bekannten extremalen Gitter sind in Form von Gram-Matrizen in der von G. Nebe und N.J.A. Sloane verwalteten Gitterdatenbank (vgl. [LatDB]) zu finden und können direkt in das Computeralgebrasystem MAGMA (vgl. [BCP97]) geladen werden. Auf der anderen Seite konnte von C. Bachoc, G. Nebe und B. Venkov mit Hilfe der Theorie der Modulformen in einigen Fällen die Nicht-Existenz extremaler Gitter in einigen Geschlechtern gezeigt werden (vgl. [NV96],[BV01]).

In dieser Arbeit werden extremale Gitter zu den Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  bis Dimension 48 untersucht. Die Arbeit gliedert sich dabei wie folgt in vier Kapitel:

Im ersten Kapitel werden zunächst in 1.1 die grundlegenden Definitionen zu Gittern wiederholt und einige Notationen festgelegt. Insbesondere wird festgehalten, was im Folgenden unter den Quebbemannschen Geschlechtern verstanden wird. Es folgen in 1.2 die Definition einer extremalen Modulform sowie eines extremalen Gitters, welche in der gesamten Arbeit stets auf den Fall des Unterraumes  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2})$  angewendet werden wird. Für einige Geschlechter wird gezeigt, dass ein Gitter mit „großem“ Minimum bereits ein extremales Gitter im Sinne der zuvor gegebenen Definition ist, was die Wahl dieses Unterraumes plausibel macht. Beispielsweise ist ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  mit Minimum  $\geq 8$  notwendig extremal. Es folgt ein Verfahren, mit dem man in einigen Fällen von der extremalen Modulform zeigen kann, dass diese nicht-negative Koeffizienten besitzt und damit eine erste notwendige Bedingung dafür erfüllt, überhaupt die Thetareihe eines Gitters sein zu können. Als Ergebnis erhält man unter anderem, dass die extremale Modulform in  $\mathcal{M}_{12}(\Gamma_*(7), \chi_{12})$  oder auch in  $\mathcal{M}_{18}(\Gamma_*(3), \chi_{18})$  nicht-negative Koeffizienten besitzt.

In Abschnitt 1.3 werden die Kugelpackungs- und die Zentrumsdichte eines Gitters definiert und einige Beispiele dichter extremaler Gitter gegeben. Auch im Hinblick auf das Kapitel 4 wird im Anschluss in 1.4 kurz erklärt, wie man Obergitter eines gegebenen Gitters konstruiert. Als Resultat werden alle Obergitter vom Index 3 des bislang dichtesten Gitters  $KP_{36}$  in Dimension 36 bestimmt und es wird gezeigt, dass auf diese Weise ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  nicht zu erhalten ist.

Im zweiten Kapitel geht es um Konfigurationsanzahlen und deren Berechnung. Als Anwendung ergibt sich ein Nicht-Existenz-Kriterium für extremale Gitter. Die Ideen folgen weitestgehend den Ausführungen in [BV01].

Zu Beginn werden in Abschnitt 2.1 alle homogenen Polynome  $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  bestimmt, welche zugleich harmonisch und zonal bzgl. eines Vektors  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  sind. Man erhält die bekannte Tatsache,

dass es zu jedem Polynomgrad  $d \in \mathbb{N}$  im Wesentlichen genau ein solches Polynom gibt, das sogenannte Gegenbauer-Polynom  $P_d^\alpha$ . Anschließend werden in 2.2 einige Fakten zu Thetareihen mit sphärischen Koeffizienten zusammengetragen. Es folgen in 2.3 die Definition der Konfigurationsanzahlen eines Gitters bzgl. eines Vektors  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  und eine Beschreibung, wie diese für extremale Gitter nur mit Hilfe der bekannten Thetareihe durch ein lineares Gleichungssystem berechnet werden können. Mit Hilfe einer Implementierung dieser Methode in MAGMA ergibt sich in 2.4 als Resultat die Nicht-Existenz eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$ .

Im Anschluss daran wird in 2.5 gezeigt, dass es nur mit Hilfe der Konfigurationsanzahlen bzgl.  $\alpha$  möglich ist, die Thetareihe des Nachbarn  $L(\alpha)$  zu berechnen. Für den interessanten Fall eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  wird dadurch zwar die Liste der möglichen Konfigurationsanzahlen für einen kürzesten Vektor verkleinert, trotzdem ergeben sich jedoch keine entscheidenden Einsichten. Mit ähnlichen Mitteln wird abschließend in 2.6 die (durchaus erwartbare) Eigenschaft eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  gezeigt, von seinen kürzesten Vektoren erzeugt zu sein.

Das Thema des dritten Kapitels ist die Konstruktion von (extremalen) Gittern mittels hermitescher Gitter über CM-Körpern durch die sogenannte Spurkonstruktion. Nachdem zunächst in 3.1 einige grundlegende Eigenschaften dieser Spurgitter bewiesen werden, werden anschließend in 3.2 als Spezialfall Spurgitter 1-dimensionaler hermitescher Gitter, sogenannte Ideal-Gitter betrachtet. Insbesondere werden alle extremalen Gitter in den Quebbemannschen Geschlechtern mit einer Struktur als Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper bis Dimension  $< 48$  bestimmt.

Weiter werden in 3.3 hermitesche Gitter der Dimension  $N \geq 2$  betrachtet, welche mittels Spurkonstruktion ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter zu vorgegebener Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$  ergeben. Dabei werden ausschließlich quadratfreie  $\ell$  zugelassen und zudem wird vorausgesetzt, dass  $\ell$  teilerfremd zu der Diskriminante  $d_E$  des Zahlkörpers  $E$  ist. Unter diesen Voraussetzungen werden mit Hilfe der lokalen Theorie hermitescher Gitter aus [Jac62] und [Ger70] sämtliche mögliche hermitesche Geschlechter dieser Gitter bestimmt. Im folgenden Abschnitt werden dann explizite Formeln für die Darstellungsdichten dieser hermiteschen Geschlechter unter Verwendung von Ergebnissen aus [GY00] und [Cho12] hergeleitet und im Anschluss daran gezeigt, wie die Braunsche Maßformel mit Hilfe von Dirichletschen L-Reihen und verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen exakt ausgewertet werden kann.

Es folgt mit 3.4 ein kurzer Abschnitt zur Nachbarmethode über beliebigen CM-Körpern, welche im Rahmen dieser Arbeit in MAGMA implementiert wurde. Die wesentlichen Ideen hierzu stammen aus [Sch98].

In den folgenden Abschnitten 3.5 und 3.6 werden die Resultate aus 3.3 sowie die MAGMA-Implementierung der Nachbarmethode angewendet, um diejenigen Geschlechter, welche mittels Spurkonstruktion  $\mathbb{Z}$ -Gitter in den Quebbemannschen Geschlechtern ergeben, über imaginär-quadratischen Zahlkörpern und Kreisteilungskörpern soweit möglich zu klassifizieren.

Unter anderem werden alle Strukturen der Gitter  $CT_{12}$  und  $BW_{16}$  über imaginär-quadratischen Zahlkörpern  $E$  mit  $|d_E| \leq 11$  bestimmt. Ähnlich wie in [CN13] wird versucht, mit Hilfe des Tensorprodukts dieser Strukturen, insbesondere derjenigen über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ , mit gewissen unzerlegbaren unimodularen Gittern neue (extremale) Gitter zu erhalten. Als Resultat findet man auf diese Weise einige bislang nicht bekannte extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{48}(2^{+24})$ .

Außerdem werden beispielsweise alle extremalen geraden unimodularen Gitter in Dimension 32 mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$  bestimmt. Ebenso wird gezeigt, dass außer den bekannten extremalen Gittern  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$  keine weiteren extremalen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$  existieren.

Abschließend werden in Abschnitt 3.7 unimodulare Gitter über gewissen imaginär-quadratischen Zahlkörpern und Quaternionenalgebren betrachtet. Die Spurgitter dieser besitzen die Eigenschaft, beweisbar modular zu sein. Es wird beispielsweise gezeigt, dass kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{+10})$  eine Struktur über der Quaternionenalgebra  $\mathbb{Q}_{5,\infty}$  besitzt.

Im vierten Kapitel dieser Arbeit werden grob gesprochen Gitter mit einem Automorphismus von Primzahlordnung und einem „großen“ Minimum klassifiziert. Ist  $L$  ein Gitter und  $\sigma$  ein Automorphismus der Ordnung  $p > 2$ , so wird in 4.1 ähnlich wie in [Neb13] zunächst ein gewisses orthogonal zerlegtes Teilgitter  $L_1 \perp L_\zeta$  von  $L$  betrachtet. Weiter werden der Typ eines Automorphismus definiert und einige Einschränkungen an einen solchen Typ angegeben. Zudem wird gezeigt, dass das  $\mathbb{Z}$ -Geschlecht von  $L_1$  und das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  bereits durch den Typ von  $\sigma$  im Wesentlichen eindeutig festgelegt sind.

Sollen nun umgekehrt alle Gitter in einem Geschlecht mit einem Automorphismus der Ordnung  $p$  und einem „großen“ Minimum klassifiziert werden, so sind zunächst alle möglichen Typen eines solchen Automorphismus zu bestimmen. Als Teilgitter von  $L$  müssen dabei die Minima von  $L_1$  und  $L_\zeta$  mindestens so groß wie das von  $L$  sein. Aus diesem Grund scheiden bereits viele mögliche Typen aus, da die Dichte dieser Gitter, welche sich ebenfalls allein aus dem Typ von  $\sigma$  berechnen lässt, häufig oberen Schranken an die Packungsdichte widerspricht. Für alle verbleibenden Fälle kann anschließend versucht werden, alle möglichen Kandidaten für  $L_1$  und  $L_\zeta$  zu bestimmen. Die gesuchten Gitter  $L$  ergeben sich dann (gegebenenfalls) als Obergitter von  $L_1 \perp L_\zeta$  von entsprechendem Index.

In Abschnitt 4.2 wird dieses Vorgehen angewendet auf die Klassifikation extremaler Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung  $p > 2$ . Als Resultat werden zum Beispiel alle extremalen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 7 bestimmt und gezeigt, dass es genau ein solches bislang unbekanntes Gitter gibt.

An dieser Stelle möchte ich mich besonders bei Prof. Dr. Rudolf Scharlau für die Ermöglichung der Promotion, die Betreuung dieser Arbeit und die Möglichkeit zur freien Ausgestaltung des Themas bedanken. Weiter danke ich Frau Prof. Dr. Gabriele Nebe für ihre Ideen und Anmerkungen sowie für die Bereitstellung von thematisch relevanten Ergebnissen vor deren Veröffentlichung. Zudem bedanke ich mich bei Frau Dr. Christine Bachoc für die Überlassung eines PARI/GP-Programms zur Berechnung von Konfigurationsanzahlen mittels des in Kapitel 2 beschriebenen Ansatzes.

Für die positive Atmosphäre mit vielen konstruktiven Gesprächen bedanke ich mich bei meinen Kollegen am Lehrstuhl II. Insbesondere sind dabei Stefan Höppner und Marc Christian Zimmermann für die zahlreichen hilfreichen Diskussionen sowie Dr. Andreas Henn für seine Anregungen im Zusammenhang mit Gittern über Quaternionenalgebren und Gilles Bellot für die Unterstützung bei der Konzeption und Durchführung einiger MAGMA-Rechnungen hervorzuheben.

Im Rahmen ihrer Diplomarbeiten wurden mit Thorsten Helle und Rafael Preuß einige Aspekte der Theorie aus Kapitel 2 erörtert und in MAGMA umgesetzt, wofür ich mich ebenfalls herzlich bei ihnen bedanken möchte.



## Grundlegendes

### 1.1. Gitter

**1.1.1. Grundlegende Definitionen.** Sei  $(V, b)$  ein euklidischer Vektorraum der Dimension  $n < \infty$ . Ein *Gitter* (genauer ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter) in  $V$  ist eine Menge  $L \subset V$  der Gestalt  $L = \mathbb{Z}x_1 + \dots + \mathbb{Z}x_s$ , wobei  $x_1, \dots, x_s$  linear unabhängige Vektoren in  $V$  sind. Die Vektoren  $x_1, \dots, x_s$  sind in diesem Fall eine Basis des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $L$  und die Zahl  $s$  nennt man die *Dimension* von  $L$ . Ist  $s = n$  oder äquivalent  $\mathbb{R}L = V$ , so wird  $L$  auch als ein Gitter *auf*  $V$  bezeichnet. Ist  $L$  ein Gitter auf  $(V, b)$ , so bezeichnet  ${}^\alpha L$  das Gitter  $L$  aufgefasst als Gitter auf  $(V, \alpha b)$ .

Unter der *Gram-Matrix* eines Gitters  $L$  auf  $V$  bezüglich der Basis  $x_1, \dots, x_n$  von  $L$  versteht man die Matrix  $G = (g_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mit  $g_{ij} := b(x_i, x_j)$ . Die *Determinante* von  $L$  ist definiert als  $\det(L) := \det(x_1, \dots, x_n)$ , wobei  $\det(x_1, \dots, x_n)$  die Determinante der Gram-Matrix bzgl. der Basis  $x_1, \dots, x_n$  bezeichnet. Für ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter hängt die Determinante nicht von der gewählten Basis ab.

Zwei Gitter  $L$  und  $K$  auf  $V$  heißen *isometrisch*, wenn ein  $\sigma \in O(V, b)$  existiert mit  $\sigma(L) = K$  - in Zeichen  $L \cong K$ . Die Isometrie von Gittern ist eine Äquivalenzrelation, die zugehörigen Äquivalenzklassen heißen auch *Isometrieklassen*. Ist ein Gitter  $L$  isometrisch zu einem Gitter  $K$  mit Gram-Matrix  $G$ , so schreibt man auch  $L \cong G$  statt  $L \cong K$ . Ist darüber hinaus  $G = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$  eine Diagonalmatrix, so schreibt man auch kurz  $L \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

Eine Isometrie  $\sigma \in O(V, b)$  heißt *Automorphismus* eines Gitters  $L$  auf  $V$ , wenn  $\sigma(L) = L$  ist. Die Menge aller Automorphismen von  $L$  ist eine endliche Untergruppe von  $O(V, b)$ , die sogenannte *Automorphismengruppe*  $O(L)$ .

Ein Gitter  $L$  heißt *ganzzahlig*, wenn  $b(x, y) \in \mathbb{Z}$  ist für alle  $x, y \in L$ . Es heißt *gerade*, wenn  $b(x, x) \in 2\mathbb{Z}$  für alle  $x \in L$  gilt. Mit Hilfe der Polarisationsformel  $b(x, y) = \frac{1}{2}(b(x+y, x+y) - b(x, x) - b(y, y))$  sieht man leicht ein, dass ein gerades Gitter auch ganzzahlig ist. Weiter definiert man zu einem Gitter  $L$  das *duale Gitter* wie folgt:

$$L^\# := \{y \in \mathbb{R}L \mid b(y, L) \subseteq \mathbb{Z}\}$$

Offenbar ist das Gitter  $L$  genau dann ganzzahlig, wenn  $L \subseteq L^\#$  gilt. Für ein ganzzahliges Gitter  $L$  ist die Gruppe  $T(L) := L^\# / L$  die sogenannte *Diskriminantengruppe*. Es ist  $\varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n = |T(L)| = \det(L)$ , wobei  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{N}$  die Elementarteiler von  $L$  in  $L^\#$  bezeichnen. Ein Gitter  $L \neq \{0\}$  heißt *unimodular*, wenn  $L^\# = L$  gilt und allgemeiner *a-modular*, wenn  $aL^\# = L$  ist.

Die Zahl  $\min(L) := \min\{b(x, x) \mid x \in L \setminus \{0\}\}$  heißt das *Minimum* von  $L$ .  $\text{Min}(L)$  bezeichne die Menge der kürzesten Vektoren von  $L$  und allgemeiner  $L_m$  die Menge der Vektoren  $x \in L$  mit  $b(x, x) = m$ .

In der vorliegenden Arbeit werden ausschließlich ganzzahlige Gitter betrachtet. In diesem Fall kann man  $L$  auch (durch Einschränkung der Skalarmultiplikation) als ein Gitter auf dem quadratischen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $(V, b)$  auffassen. Die  $p$ -adischen Zahlen werden im Folgenden mit  $\mathbb{Q}_p$  bezeichnet, die ganzen  $p$ -adischen Zahlen mit  $\mathbb{Z}_p$ . Für eine Primzahl  $p$  ist die *Komplettierung* von  $V$  an der Stelle  $p$  definiert als  $V_p := V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ . Die Bilinearform  $b$  kann fortgesetzt werden zu einer Bilinearform auf  $V_p$ , welche ebenfalls mit  $b$  bezeichnet wird. Dann ist die Menge  $L_p := \mathbb{Z}_p L$  ein  $\mathbb{Z}_p$ -Gitter auf

$V_p$ . Die Definitionen der Gram-Matrix, der Isometrie von Gittern und des dualen Gitters sowie die Eigenschaften ganzzahlig, gerade und (uni-)modular können in offensichtlicher Weise auf  $\mathbb{Z}_p$ -Gitter verallgemeinert werden. Die Determinante  $dL_p$  ist dann ähnlich wie bei quadratischen Räumen ein Element in  $\{0\} \cup \mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^{*2}$ . Eine weitere Invariante eines Gitters  $L$  (genauer des zugrunde liegenden quadratischen Raumes  $\mathbb{Q}_p L$ ) an der Stelle  $p$  ist die sogenannte *Hasse-Invariante*

$$s_p(L) := \prod_{i < j} (a_i, a_j)_p \in \{\pm 1\},$$

wobei hier  $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$  eine Diagonalisierung von  $L$  über  $\mathbb{Q}_p$  ist und  $(a, b)_p$  für  $a, b \in \mathbb{Q}_p^*$  das Hilbert-Symbol an der Stelle  $p$  bezeichnet.

Zwei Gitter  $L$  und  $N$  auf  $V$  liegen nach Definition *im selben Geschlecht*, wenn  $L_p \cong N_p$  für jede Primzahl  $p$  gilt. Folglich umfasst ein Geschlecht also volle Isometrieklassen von Gittern. Oftmals bezeichnet man mit *Geschlecht* auch die Menge der Isometrieklassen von Gittern im selben Geschlecht und die Anzahl dieser Isometrieklassen heißt die *Klassenzahl*.

Jedes  $\mathbb{Z}_p$ -Gitter  $\Lambda$  besitzt eine sogenannte *Jordan-Zerlegung*, d.h. eine Zerlegung  $\Lambda \cong \perp_{i=0}^t p^i J_i$ , wobei  $J_i$  entweder unimodular ist oder  $J_i = \{0\}$  gilt. Sind alle Gitter  $J_i$  gerade, so nennt man ein solches Gitter auch *total gerade*. In diesem Fall ist eine Jordan-Zerlegung eindeutig in dem Sinne, dass jede andere Jordan-Zerlegung komponentenweise isometrisch zu der gegebenen ist. Ein Symbol, welches die Informationen einer Jordan-Zerlegung codiert und damit ein Geschlecht eindeutig beschreibt, ist das sogenannte *Geschlechtssymbol*. Für eine Definition sowie weitere Details siehe [CS93] Ch. 15 §7.

**1.1.2. Die Stufe eines Gitters und  $\ell$ -modulare Gitter.** Die *Stufe* des Gitters  $L$  ist definiert als kleinste Zahl  $\ell \in \mathbb{N}$ , für die  $\sqrt{\ell}L^\#$  oder äquivalent  ${}^\ell L^\#$  ein gerades Gitter ist. Ist  $\ell$  die Stufe von  $L$ , so wird das Gitter  $L^\natural := \sqrt{\ell}L^\#$  auch als das *reskalierte Dualgitter* von  $L$  bezeichnet. Die Stufe eines Gitters ist eng verwandt mit dem *Exponenten*  $\varepsilon$  der Diskriminantengruppe  $T(L)$ , d.h. der kleinsten Zahl  $a \in \mathbb{N}$  mit  $aL^\# \subseteq L$ . Das folgende Lemma klärt dies präzise:

LEMMA 1.1.1. *Sei  $L \subset V$  ein gerades Gitter. Weiter seien  $\ell$  die Stufe von  $L$  und  $\varepsilon$  der Exponent der Diskriminantengruppe  $T(L)$ .*

- a)  $\varepsilon$  ist die kleinste Zahl  $a \in \mathbb{N}$ , für die  ${}^a L^\#$  ein ganzzahliges Gitter ist. Jede weitere Zahl mit dieser Eigenschaft ist ein Vielfaches von  $\varepsilon$ .
- b)  $\ell$  ist die kleinste Zahl  $a \in \mathbb{N}$ , für die  ${}^a L^\#$  ein gerades Gitter ist. Jede weitere Zahl mit dieser Eigenschaft ist ein Vielfaches von  $\ell$ .
- c) Es ist  $\ell \in \{\varepsilon, 2\varepsilon\}$  und es gilt  $\ell L^\# \subseteq L$ .
- d) Ist  $L_p \cong \perp_{i=0}^t p^i J_i$  eine Jordan-Zerlegung von  $L$  an der Stelle  $p$  und  $J_t \neq \{0\}$ , so gilt

$$t = \nu_p(\varepsilon).$$

- e) Sei  $L_2 \cong \perp_{i=0}^t p^i J_i$  eine Jordan-Zerlegung von  $L$  an der Stelle 2 und sei  $J_t \neq \{0\}$ . Dann gilt:

$$\ell = \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad J_t \text{ ist gerade}$$

*Insbesondere gilt  $\ell = \varepsilon$ , wenn  $\det(L)$  ungerade oder  $L$  total gerade ist.*

- f) Die Zahlen  $\varepsilon$ ,  $\ell$  und  $\det(L)$  besitzen exakt dieselben Primteiler. Insbesondere gilt  $\ell = \varepsilon$ , wenn  $\ell$  quadratfrei ist.

BEWEIS. a) Sind  $x, y \in L^\#$ , so ist  $\varepsilon x \in L$  und damit  $\varepsilon b(x, y) = b(\varepsilon x, y) \in \mathbb{Z}$ . Also ist  ${}^\varepsilon L^\#$  ein ganzzahliges Gitter. Sei umgekehrt für ein  $a \in \mathbb{N}$  das Gitter  ${}^a L^\#$  ganzzahlig. Für  $x \in L^\#$  gilt dann



$b(ax, y) = ab(x, y) \in \mathbb{Z}$  für beliebiges  $y \in L^\#$ . Also ist  $ax \in (L^\#)^\# = L$  und damit  $aL^\# \subseteq L$ . Nach Definition des Exponenten ist  $\varepsilon \leq a$ . Zudem ist die Menge  $\{a \in \mathbb{Z} \mid {}^aL^\# \text{ ist ganzzahlig}\}$  ein Ideal in  $\mathbb{Z}$  mit Erzeuger  $\varepsilon$ .

b) Die erste Aussage ist exakt die Definition der Stufe. Auch hier ist die Menge  $\{a \in \mathbb{Z} \mid {}^aL^\# \text{ ist gerade}\}$  ein Ideal in  $\mathbb{Z}$  mit Erzeuger  $\ell$ .

c) Das Gitter  ${}^\ell L^\#$  ist gerade und damit insbesondere ganzzahlig. Nach a) ist  $\varepsilon$  ein Teiler von  $\ell$ . Andererseits ist  ${}^{2\varepsilon}L^\#$  ein gerades Gitter. Nach b) ist damit  $\ell$  ein Teiler von  $2\varepsilon$ . Insgesamt folgt also  $\ell \in \{\varepsilon, 2\varepsilon\}$ . Die Aussage  $\ell L^\# \subseteq L$  ist damit offensichtlich.

d) Das Gitter  ${}^\varepsilon L^\#$  ist ganzzahlig genau dann, wenn das Gitter  ${}^\varepsilon L_p^\#$  an jeder Stelle  $p$  ganzzahlig ist. Ist  $L_p \cong \perp_{i=0}^t p^i J_i$  eine Jordan-Zerlegung von  $L$  an der Stelle  $p$ , so gilt:

$$L_p^\# \cong \perp_{i=0}^t p^{-i} J_i$$

Demnach ist  $p^t L_p^\#$  ein ganzzahliges Gitter, während  $p^i L_p^\#$  für  $i < t$  nicht ganzzahlig ist. Damit folgt  $\nu_p(\varepsilon) = t$ .

e) Bekanntlich ist  ${}^\varepsilon L^\#$  gerade genau dann, wenn  ${}^\varepsilon L_2^\#$  gerade ist. Ist  $L_2 \cong J_0 \perp^2 J_1 \dots \perp^{2^t} J_t$ , so ist  ${}^\varepsilon L_2^\# \cong J_t \perp \dots \perp^{2^t} J_0$ . Dieses ganzzahlige Gitter ist gerade (also  $\ell = \varepsilon$ ) genau dann, wenn  $J_t$  gerade ist.

f) Im Wesentlichen aus dem Satz von Cauchy folgt, dass  $\det(L)$  als Ordnung der Gruppe  $T(L)$  und  $\varepsilon$  als Exponent dieser Gruppe dieselben Primteiler besitzen. Ist  $\det(L)$  gerade, so folgt wegen  $\ell \in \{\varepsilon, 2\varepsilon\}$  die Aussage, im Fall  $\det(L)$  ungerade folgt diese wegen  $\ell = \varepsilon$ .  $\square$

Wenn nicht anders gesagt, sollen alle Gitter in dieser Arbeit **gerade** sein und **quadratfreie Stufe**  $\ell \in \mathbb{N}$  besitzen. In diesem Fall stimmt also die Stufe eines solchen Gitters  $L$  mit dem Exponenten der Gruppe  $T(L)$  überein und für jede Stelle  $p$  ist das Gitter  $L$  *lokal  $p$ -elementar*, d.h. eine Jordan-Zerlegung an der Stelle  $p$  ist von der Gestalt  $L_p \cong J_0 \perp {}^p J_1$ . Des Weiteren folgt, dass das Gitter  $J_1$  gerade und damit  $L$  total gerade ist. Im Folgenden wird als Notation für die Stelle  $p = 2$  im Geschlechtssymbol statt  $\text{II}_n(2^{\pm k} \dots)$  die Notation  $\text{II}_n(2^{\pm k} \dots)$  verwendet.

Unter der zusätzlichen Annahme, dass  $\det(L) = \ell^k$  eine Potenz von  $\ell$  ist, sind alle Elementarteiler von  $L$  in  $L^\#$  entweder 1 oder  $\ell$  und es ist  $T(L) \cong (\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z})^k$ . Solche Gitter heißen  *$\ell$ -elementar*. Umgekehrt besitzt jedoch nicht jedes gerade  $\ell$ -elementare Gitter quadratfreie Stufe, wie etwa das Beispiel  $\mathbb{E}_8 \perp^2 \mathbb{I}_8$  (mit Stufe 4) zeigt.

Ein gerades Gitter  $L$  auf  $V$  heißt  *$\ell$ -modular* (nach H.-G. Quebbemann), wenn es eine Ähnlichkeit  $\sigma : V \rightarrow V$  zum Faktor  $\ell \in \mathbb{N}$  gibt mit  $\sigma(L^\#) = L$  oder äquivalent, wenn die Gitter  $L$  und  $L^\natural = \sqrt{\ell}L^\#$  isometrisch sind. Ist  $\ell$  quadratfrei, so besitzt ein  $\ell$ -modulares Gitter die Stufe  $\ell$ . Die Determinante eines  $\ell$ -modularen Gitters der Dimension  $n$  ist gleich  $\ell^{\frac{n}{2}}$ , denn es gilt  $\det(L) = \det(\sqrt{\ell}L^\#) = \ell^n \frac{1}{\det(L)}$ . Ein  $\ell$ -modulares Gitter ist also stets  $\ell$ -elementar.

#### BEMERKUNGEN 1.1.2.

- (i) Der hier definierte Begriff eines  $\ell$ -modularen Gitters ist nicht zu verwechseln mit dem Begriff  *$a$ -modular* im Sinne von  $aL^\# = L$ , wie er etwa im Zusammenhang mit einer Jordan-Zerlegung verwendet wird. Allein für gerade unimodulare bzw. 1-modulare Gitter fallen diese beiden Definitionen zusammen.
- (ii) Der Begriff  $\ell$ -modular kann auch allgemeiner für ganzzahlige, nicht notwendig gerade Gitter definiert werden. Hierzu siehe zum Beispiel [RS98].  $\blacksquare$

Im Folgenden sind insbesondere diejenigen Geschlechter von Interesse, welche  $n$ -dimensionale gerade Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$  enthalten. Da ein ganzzahliges Gitter eine ganzzahlige

Determinante besitzt, muss also  $n$  gerade sein, wenn  $L$  ein solches  $n$ -dimensionales Gitter der Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$  ist. Darüber hinaus gilt:

LEMMA 1.1.3. *Sei  $n$  gerade und sei  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $n$ , Stufe  $\ell$  (quadratfrei) und Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$ . Ist  $n \equiv_4 2$ , so ist  $\ell \equiv_4 3$ .*

BEWEIS. Zunächst gilt für ein gerades, unimodulares Gitter über  $\mathbb{Z}_2$ , dass dieses stets gerade Dimension hat und weiter isometrisch ist zu

$$(1) \quad \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H} \perp \Lambda_0,$$

wobei  $\mathbb{H} \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\Lambda_0 \in \{\mathbb{H}, \mathbb{A}\}$  und  $\mathbb{A} \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  ist (vgl. [Ger08] 8.9).

Da  $L$  total gerade ist, sind sowohl  $J_0$  als auch  $J_1$  in einer Jordan-Zerlegung  $L_2 \cong J_0 \perp^2 J_1$  gerade unimodular und damit jeweils gerade-dimensional. Es folgt  $n \equiv_4 0$ , falls  $\ell \equiv_4 0, 2$  gilt.

Ist nun  $\ell$  ungerade, so ist  $L_2$  gerade unimodular und mit einer Zerlegung wie in (1) berechnet man leicht, dass  $dL_2$  folglich gleich  $(-1)^{\frac{n}{2}} \mathbb{Z}_2^{*2}$  oder  $(-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 5\mathbb{Z}_2^{*2}$  ist. Da nach Voraussetzung  $n \equiv_4 2$  ist, ist  $\frac{n}{2}$  ungerade und somit ist  $\ell^{\frac{n}{2}} \equiv_8 -1$  oder  $-5$  bzw. vereinfacht also  $\ell \equiv_4 3$ . Somit muss also auch im Fall  $\ell \equiv_4 1$  notwendig  $n \equiv_4 0$  gelten.  $\square$

BEMERKUNG 1.1.4. Für den Fall, dass  $\ell$  eine Primzahl ist, ist bekannt, dass es zu gegebener Dimension  $n$  und Determinante  $\ell^k$  höchstens ein Geschlecht gerader Gitter der Stufe  $\ell$  gibt. Für den Fall  $\ell > 2$  siehe etwa [CS93] Ch. 15, Theorem 13 und für den Fall  $\ell = 2$  folgt dies auf ähnliche Weise zusammen mit Lemma 1.1.1 e). Insbesondere gibt es für eine Primzahl  $\ell$  also höchstens ein  $\ell$ -modulares Geschlecht.  $\blacksquare$

Um zu zeigen, dass für jede Primzahl  $\ell$  unter Beachtung der notwendigen Bedingungen an die Dimension gemäß Lemma 1.1.3 auch immer ein  $\ell$ -modulares Gitter in diesen Geschlechtern existiert, reicht es offenbar, ein solches  $\ell$ -modulares Gitter  $L_0$  in kleinstmöglicher Dimension 2 bzw. 4 anzugeben, denn in höheren Dimensionen erhält man entsprechende Gitter durch Bilden orthogonaler Summen:

- Im Fall  $\ell \equiv_4 3$  sei  $E := \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell})$  und  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-\ell}}{2}]$  der Ganzheitsring von  $E$ . Dann ist  $L_0 := \mathfrak{D}$  ein 2-dimensionales  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf dem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $V = E$  mit der Bilinearform  $b(x, y) := x\bar{y} + \bar{x}y$ . Die Determinante von  $L_0$  ist  $\ell$  und die Multiplikation mit  $\sqrt{-\ell}$  liefert eine Ähnlichkeit, welche  $L^\#$  auf  $L$  abbildet (für Details siehe Abschnitt 3.7.1).
- Im Fall  $\ell \not\equiv_4 3$  sei  $Q := \mathbb{Q}_{\ell, \infty}$  die Quaternionenalgebra, welche genau an den Stellen  $\ell$  und  $\infty$  verzweigt ist. Sei  $\mathfrak{M}$  eine geeignet gewählte Maximalordnung von  $Q$ . Dann ist  $L_0 := \mathfrak{M}$  ein 4-dimensionales  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf dem  $\mathbb{Q}$ -Linksmodul  $Q$  mit der Bilinearform  $b(x, y) := x\bar{y} + \bar{x}y$ . Die Determinante von  $L_0$  ist  $\ell^2$  und die Multiplikation mit  $\sqrt{-\ell}$  liefert wie im anderen Fall eine Ähnlichkeit, welche  $L^\#$  auf  $L$  abbildet (für Details siehe Abschnitt 3.7.2).

Damit ist bewiesen:

PROPOSITION 1.1.5. (vgl. [Que95] Theorem 2) *Sei  $\ell$  eine Primzahl und  $n \equiv_4 2$ , falls  $\ell \equiv_4 3$  und  $n \equiv_4 0$  sonst. Dann gibt es genau ein Geschlecht, welches gerade Gitter der Dimension  $n$ , Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$  enthält. In diesem existiert mindestens ein  $\ell$ -modulares Gitter.*  $\square$

Ist die Zahl  $\ell$  nicht prim, so gibt es im Allgemeinen mehr als ein Geschlecht gerader  $n$ -dimensionaler Gitter der Stufe  $\ell$  und gegebener Determinante. Aus Gründen, die im nächsten Abschnitt deutlich werden, sind im Folgenden die zusammengesetzten Stufen  $\ell \in \{6, 14, 15\}$  von Interesse. In Dimension 4 gibt es hier jeweils zwei Geschlechter gerader Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^2$ .

Der Begriff „modular“ kann für solche zusammengesetzten Stufen noch etwas verfeinert werden. Dazu

benötigt man die folgende Definition eines *partiellen Dualgitters*. Für ein Gitter  $L \subset V$  der Stufe  $\ell$  und einem Teiler  $p$  von  $\ell$  ist dieses definiert als

$$L^{\#,p} := \frac{1}{p}L \cap L^\#.$$

Man sieht leicht, dass für ein ganzzahliges Gitter der Stufe  $\ell$  das partielle Dualgitter zu  $p = 1$  gerade das Gitter  $L$  selbst und im Fall  $p = \ell$  gerade  $L^\#$  ist.

Besitzt  $L$  die Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$ , so ist für beliebiges  $p \mid \ell$  das *reskalierte partielle Dualgitter*  $L^{\natural,p} := \sqrt{p}L^{\#,p}$  ebenfalls ein Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$ . Ist  $L$  gerade, so ist auch  $L^{\natural,p}$  für jedes  $p \mid \ell$  gerade. Anders als im Fall einer Primzahl  $\ell$  müssen die Gitter  $L^{\natural,p}$  jedoch nicht im selben Geschlecht wie  $L$  liegen, wie das folgende Beispiel zeigt:

**BEISPIEL 1.1.6.** Betrachtet man die beiden 15-modularen Gitter  $L_1 \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$  im Geschlecht  $\text{II}_2(3^{+1}5^{+1})$  und  $L_2 \cong \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$  im Geschlecht  $\text{II}_2(3^{-1}5^{-1})$  jeweils der Stufe  $\ell = 15$ , so vertauschen sich diese beiden Gitter durch Bilden der reskalierten partiellen Duale, d.h.  $L_1^{\natural,3} \cong L_2$ ,  $L_1^{\natural,5} \cong L_2$  und folglich  $L_2^{\natural,3} \cong L_1$  sowie  $L_2^{\natural,5} \cong L_1$ . Somit liegen also die partiellen Duale nicht im selben Geschlecht wie diese Gitter selbst. ■

Liegen alle reskalierten partiellen Dualgitter in ein und demselben Geschlecht von geraden Gittern der Stufe  $\ell$ , so nennt man ein solches auch ein  *$\ell$ -modulares Geschlecht*.

Ein gerades Gitter  $L$  der Stufe  $\ell$  heißt *stark  $\ell$ -modular*, wenn  $L^{\natural,p} \cong L$  gilt für jeden Teiler  $p$  von  $\ell$ . Insbesondere ist ein stark  $\ell$ -modulares Gitter also auch  $\ell$ -modular.

Nach Lemma 1.1.3 gibt es damit für  $\ell \in \{6, 14\}$  keine stark  $\ell$ -modularen Gitter in Dimension 2. Im Fall  $\ell = 15$  zeigt das obige Beispiel, dass es in Dimension 2 auch hier keine stark 15-modularen Gitter gibt, denn die beiden angegebenen Gitter sind jeweils die einzige Isometrieklasse in dem jeweiligen Geschlecht. Somit ist 4 die kleinste Dimension, in der für  $\ell \in \{6, 14, 15\}$  stark  $\ell$ -modulare Gitter existieren können.

**BEISPIEL 1.1.7.** (vgl. [Que97] Ex. 1 und 2)

- a) Sei  $\ell = pq$ , wobei  $p \equiv_4 3$  und  $q$  Primzahlen sind. Sei  $L$  ein  $p$ -modulares Gitter der Dimension 2. Dann ist  $L_0 := L \perp \sqrt{q}L$  ein stark  $\ell$ -modulares Gitter der Dimension 4. Konkret erhält man so stark  $\ell$ -modulare Gitter für die Stufen 6, 14 und 15 in den Geschlechtern  $\text{II}_4(2^{-2}3^{-2})$ ,  $\text{II}_4(2^{+2}7^{+2})$  und  $\text{II}_4(3^{-2}5^{-2})$ .
- b) Das Geschlecht  $\text{II}_4(2^{+2}3^{+2})$  ist einklassig. Sei  $L_0$  dieses Gitter. Da die partiellen Duale von  $L_0$  auch wieder in diesem Geschlecht liegen, ist das Gitter stark 6-modular. Die Geschlechter  $\text{II}_4(2^{-2}7^{-2})$  und  $\text{II}_4(3^{+2}5^{+2})$  hingegen enthalten jeweils zwei Klassen und man kann nachrechnen, dass die partiellen Duale der Gitter das jeweils andere Gitter im Geschlecht ergeben. Also gibt es in diesen Geschlechtern kein stark modulares Gitter. ■

Man kann also festhalten, dass für Primzahlen  $\ell$  die Dimensionen 2 ( $\ell \equiv_4 3$ ) bzw. 4 ( $\ell \not\equiv_4 3$ ) die kleinsten Dimensionen sind, in denen ein Geschlecht existiert, welches ein  $\ell$ -modulares Gitter  $L_0$  enthält. Dieses ist eindeutig bestimmt. Für die Zahlen  $\ell \in \{6, 14, 15\}$  ist jeweils 4 die kleinste Dimension, in der ein stark  $\ell$ -modulares Gitter  $L_0$  existiert. Dieses Geschlecht ist im Fall  $\ell \in \{14, 15\}$  eindeutig bestimmt. Im Fall  $\ell = 6$  gibt es zwei solche Geschlechter. Zudem sei bemerkt, dass für  $\ell = 1$  bekanntermaßen 8 die kleinste Dimension ist, für die ein gerades unimodulares Gitter  $L_0$  (das Gitter  $\mathbb{E}_8$ ) existiert. Das zugehörige Geschlecht ist ebenfalls eindeutig bestimmt.

Im Folgenden sind die Geschlechter  $\text{gen}(L_0 \perp \dots \perp L_0)$  für die oben beschriebenen Gitter  $L_0$  von besonderer Bedeutung. Für  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 14, 15, 23\}$  ist dieses bereits durch die Dimension  $n$  und die Stufe  $\ell$  eindeutig bestimmt. Im Fall  $\ell = 6$  und  $n \equiv_8 4$  sind dies die beiden Geschlechter  $\Pi_{8r-4}(2^{+(4r-2)}3^{+(4r-2)})$  und  $\Pi_{8r-4}(2^{-(4r-2)}3^{-(4r-2)})$ , welche zur Unterscheidung als Fall „6a“ und „6b“ bezeichnet werden.

Alle diese Geschlechter werden im Folgenden als die *Quebbemannschen Geschlechter* bezeichnet. Die zugehörigen Geschlechtssymbole sind in Tabelle 1.1 aufgeführt. Die entsprechenden Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  heißen auch die *Quebbemannschen Stufen*.

Bez.	Geschlechtssymbol (für $r \in \mathbb{N}$ )
1	$\Pi_{8r}$
2	$\Pi_{4r}(2^{(-1)^r 2r})$
3	$\Pi_{2r}(3^{(-1)^r r})$
5	$\Pi_{4r}(5^{(-1)^r 2r})$
6	$\Pi_{8r}(2^{+4r}3^{+4r})$
6a	$\Pi_{8r-4}(2^{+(4r-2)}3^{+(4r-2)})$
6b	$\Pi_{8r-4}(2^{-(4r-2)}3^{-(4r-2)})$
7	$\Pi_{2r}(7^{+r})$
11	$\Pi_{2r}(11^{(-1)^r r})$
14	$\Pi_{4r}(2^{+2r}7^{+2r})$
15	$\Pi_{4r}(3^{(-1)^r 2r}5^{(-1)^r 2r})$
23	$\Pi_{2r}(23^{+r})$

TABELLE 1.1. Die Quebbemannschen Geschlechter

## 1.2. Die extremale Modulform und extremale Gitter

**1.2.1. Grundlegendes zu Modulformen.** Es bezeichne  $\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$  die komplexe obere Halbebene. Man definiert eine Operation der Gruppe  $\text{SL}_2(\mathbb{R})$  auf dem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum der meromorphen Funktionen  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  durch den sogenannten *Strichoperator*  $|_k$  wie folgt: Ist  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$ , so sei

$$(f |_k A)(z) := (cz + d)^{-k} f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Diese Operation ist multiplikativ in dem Sinne, dass  $(f |_k A) \cdot (g |_m A) = (f \cdot g) |_{k+m} A$  gilt.

DEFINITION. Seien  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{R})$  eine Untergruppe derart, dass  $\Gamma \cap \text{SL}_2(\mathbb{Z})$  endlichen Index sowohl in  $\Gamma$ , als auch in  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$  besitzt und  $\chi : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}^*$  ein Charakter. Eine holomorphe Funktion  $f : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Modulform* vom Gewicht  $k$ , zur Gruppe  $\Gamma$  und zum Charakter  $\chi$ , falls gilt:

$$(M1) \quad f |_k A = \chi(A) \cdot f \text{ für alle } A \in \Gamma,$$

$$(M2) \quad f |_k A \text{ ist holomorph an der Stelle } \infty \text{ für alle } A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}), \text{ d.h. } \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow \infty} f |_k A(z) < \infty.$$

$f$  heißt eine *Spitzenform*, wenn zusätzlich gilt:

$$(M3) \quad \lim_{\text{Im}(z) \rightarrow \infty} f |_k A(z) = 0 \text{ für alle } A \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

Der  $\mathbb{C}$ -Vektorraum aller Modulformen vom Gewicht  $k$ , zur Gruppe  $\Gamma$  und zum Charakter  $\chi$  wird mit  $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$  bezeichnet, der Unterraum von  $\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$  aller Spitzenformen mit  $\mathcal{S}_k(\Gamma, \chi)$ .

Die im Zusammenhang mit Gittern relevante Gruppe  $\Gamma \subseteq \text{SL}_2(\mathbb{R})$  ist die sogenannte *Kongruenzuntergruppe*  $\Gamma_0(\ell)$  von  $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ , welche wie folgt definiert ist:

$$\Gamma_0(\ell) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv_\ell 0 \right\}$$

Die Gruppe  $\Gamma_0(\ell)$  enthält offenbar das Element  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$ . Ist weiter  $\chi : \Gamma_0(\ell) \rightarrow \mathbb{C}^*$  ein Charakter mit  $\chi\left(\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}\right) = 1$ , so folgt aus Bedingung (M1), dass ein  $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\ell), \chi)$  dann 1-periodisch ist, d.h.  $f(z) = f(z+1)$  für alle  $z \in \mathcal{H}$  gilt. Somit ist die Funktion  $\hat{f} : \mathcal{D}^* \rightarrow \mathbb{C}, q \mapsto f\left(\frac{\log(q)}{2\pi i}\right)$  auf  $\mathcal{D}^* := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$  wohldefiniert und holomorph.

Die Bedingung (M2) der obigen Definition sagt nun aus, dass die Funktion  $\hat{f}$  bei 0 holomorph fortsetzbar ist. Damit lässt sich  $\hat{f}$  dann als Potenzreihe um den Punkt 0 entwickeln und  $f$  kann dann mit  $q : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}^*, z \mapsto e^{2\pi iz}$  wie folgt als sogenannte *Fourier-Reihe* geschrieben werden

$$f(z) = \hat{f}(q(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot q(z)^m,$$

bzw. in Kurzform einfach  $f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m$ . Im Folgenden werden die vorkommenden Modulformen in diesen sogenannten *q-Entwicklungen* angegeben. Die Koeffizienten  $a_m$  einer solchen *q-Entwicklung* sind durch  $f$  eindeutig bestimmt und heißen *Fourier-Koeffizienten* von  $f$ .

Der Zusammenhang von Modulformen und Gittern entsteht über die sogenannte Thetareihe eines Gitters:

DEFINITION. Sei  $L$  ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter. Dann ist die *Thetareihe* von  $L$  definiert als

$$\theta_L := \sum_{x \in L} q^{\frac{1}{2}b(x,x)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m(L) q^m,$$

wobei hier  $q = e^{2\pi iz}$  und  $a_m(L) := |L_{2m}|$  ist.

Man kann zeigen, dass für ein gerades Gitter  $L$  in einem Geschlecht gerader Gitter der Dimension  $n = 2k$ , Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$  die Thetareihe  $\theta_L$  eine Modulform zur Gruppe  $\Gamma_0(\ell)$  vom Gewicht  $k$  und zum Charakter  $\chi_{k,\mathcal{G}}$  ist (vgl. [Ebe02] Theorem 3.2), wobei der Charakter  $\chi_{k,\mathcal{G}} : \Gamma_0(\ell) \rightarrow \mathbb{C}^*$  wie folgt definiert ist:

$$\chi_{k,\mathcal{G}}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) := \left(\frac{(-1)^k d_0}{d}\right) \in \{\pm 1\}$$

Dieser Charakter hängt also nur von der (Quadratklasse der) Determinante der Gitter im Geschlecht  $\mathcal{G}$  ab. Ist  $\mathcal{G}$  ein  $\ell$ -modulares Geschlecht (mit  $d_0 = \ell^{n/2}$ ), so wird der Charakter im Folgenden abkürzend auch mit  $\chi_k := \chi_{k,\mathcal{G}}$  bezeichnet.

Weiter lässt sich zeigen, dass die Differenz der Thetareihen von zwei Gittern  $L$  und  $M$  aus einem Geschlecht  $\mathcal{G}$  stets eine Spitzenform ist, d.h.  $\theta_L - \theta_M \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  gilt (vgl. [Sie35] S. 577).

**1.2.2. Extremale Modulform und extremale Gitter.** Historisch wurde die Definition eines extremalen Gitters zunächst nur für unimodulare Gitter eingeführt (vgl. [MOS75]): Man kann zeigen, dass in dem Raum  $\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), 1)$  für  $k \in 4\mathbb{N}$  ein eindeutig bestimmtes Element existiert, dessen *q-Entwicklung* von der Form  $1 + O(q^d)$  ist, wobei  $d := \dim(\mathcal{M}_k(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), 1))$  ist. Ein unimodulares Gitter  $L$  heißt dann *extremal*, wenn  $\theta_L = 1 + O(q^d)$  ist. Bekannte extremale Gitter sind beispielsweise das Wurzelgitter  $\mathbb{E}_8$ , das Leech-Gitter  $\Lambda_{24}$  und das erst kürzlich entdeckte Gitter  $\Gamma_{72}$  (vgl. [Neb12]). Die folgende Definition verallgemeinert den Begriff eines extremalen Gitters:

DEFINITION. Sei  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  ein Unterraum der Dimension  $d$ .

- a) Der Raum  $\mathcal{M}$  besitzt die *Weierstraß-Eigenschaft*, wenn die Projektion  $\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{C}^d$  auf die ersten  $d$  Koeffizienten einer *q-Entwicklung*, d.h. also die Abbildung

$$f = \sum_{m=0}^{\infty} a_m q^m \mapsto (a_0, \dots, a_{d-1})$$

bijektiv ist.

- b) Besitzt der Raum  $\mathcal{M}$  die Weierstraß-Eigenschaft, so nennt man das (eindeutig bestimmte) Element  $f \in \mathcal{M}$  mit  $q$ -Entwicklung  $1 + O(q^d)$  die *extremale Modulform*, bezeichnet mit  $f_{\mathcal{M}}$ .
- c) Besitzt  $\mathcal{M}$  die Weierstraß-Eigenschaft und ist  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $n = 2k$  und Stufe  $\ell$  mit  $\theta_L = f_{\mathcal{M}}$ , so heißt das Gitter  $L$  *extremal* (bzgl.  $\mathcal{M}$ ).

Ist  $\ell > 1$ , so ist es oftmals wenig sinnvoll, Extremalität bzgl. des gesamten Raumes  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  zu definieren. Zwar besitzt dieser oftmals die Weierstraß-Eigenschaft, jedoch tritt entweder in der extremalen Modulform sehr häufig ein negativer Koeffizient auf, sodass diese sicherlich nicht die Thetareihe eines Gitters ist, oder bei der extremalen Modulform handelt es sich um die Thetareihe eines skalierten unimodularen Gitters, sodass man sich auf diesen Fall beschränken kann.

BEISPIEL 1.2.1. Die beiden Räume  $\mathcal{M}_8(\Gamma_0(2), \chi_8)$  und  $\mathcal{M}_8(\Gamma_0(3), \chi_8)$  besitzen die Weierstraß-Eigenschaft und die extremalen Modulformen lauten:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{M}_8(\Gamma_0(2), \chi_8)} &= 1 - 7680q^3 + 4320q^4 + O(q^5) \\ f_{\mathcal{M}_8(\Gamma_0(3), \chi_8)} &= 1 + 480q^3 + 61920q^6 + O(q^7) \end{aligned}$$

Die erste Modulform kann offenbar keine Thetareihe sein, da negative Koeffizienten auftreten und die zweite Modulform ist die Thetareihe der Gitter  ${}^3(\mathbb{E}_8 \perp \mathbb{E}_8)$  bzw.  ${}^3\mathbb{D}_{16}^+$ . ■

Der gesamte Raum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  ist also für die Betrachtung extremaler Gitter in gewissem Sinne „zu groß“. Motiviert zum Beispiel durch die in vielerlei Hinsicht besonderen Gitter  $BW_{16}$  und  $CT_{12}$  soll im Folgenden ein Unterraum von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  definiert werden, für den anschließend die Definition von Extremalität angewendet werden soll.

Ein Hilfsmittel bei der Wahl dieses Unterraums ist die folgende sogenannte *Theta-Transformationsformel* (vgl. [Ebe02] Prop. 2.1), welche im Wesentlichen aus der Poissonschen Summationsformel folgt:

$$\theta_L(-\frac{1}{z}) = (-iz)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det(L)}} \theta_{L^\#}(z)$$

Daraus folgt mit der Substitution  $z = \ell w$  und  $\theta_{L^\#}(\ell w) = \theta_{\sqrt{\ell}L}(w) = \theta_{L^\natural}(w)$  unmittelbar:

KOROLLAR 1.2.2. Sei  $L$  ein gerades Gitter der Dimension  $n$ , Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{\frac{n}{2}}$ . Weiter sei  $k := \frac{n}{2}$ . Dann gilt:

$$\theta_L \upharpoonright_k \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\ell}} \\ -\sqrt{\ell} & 0 \end{pmatrix} = i^k \theta_{L^\natural}$$

□

Man kann zeigen, dass die Matrix  $W_\ell := \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{\ell}} \\ -\sqrt{\ell} & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ein Element des Normalisators  $\Gamma_*(\ell)$  von  $\Gamma_0(\ell)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  ist. Ist  $\ell$  eine Primzahl, so gilt sogar  $\Gamma_*(\ell) = \Gamma_0(\ell) \cup W_\ell \cdot \Gamma_0(\ell)$  und damit  $\Gamma_*(\ell)/\Gamma_0(\ell) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Das Element  $W_\ell$  heißt in diesem Fall die *Fricke-Involution* (wegen  $W_\ell^2 = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  ist  $W_\ell$  eine Involution in  $PSL_2(\mathbb{R})$ ). Erweitert man die Definition des Charakters  $\chi_k$  durch die multiplikative Fortsetzung von  $\chi_k(W_\ell) = i^k$  auf die Gruppe  $\Gamma_*(\ell)$ , so ist also beispielsweise die Thetareihe eines modularen Gitters nach Korollar 1.2.2 in dem Raum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$ .

Etwas allgemeiner kann man auch für beliebige (quadratfreie) Stufe  $\ell$  die Gruppe  $\Gamma_*(\ell)$  als Normalisator von  $\Gamma_0(\ell)$  in  $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$  definieren. Auch hier ist dann  $\Gamma_*(\ell)/\Gamma_0(\ell)$  eine 2-elementare Gruppe, welche erzeugt wird von gewissen Elementen  $W_p \cdot \Gamma_0(\ell)$  für jeden echten Teiler  $p$  von  $\ell$ . Für die explizite Gestalt gewisser Vertreter  $W_p$ , den sogenannten *Atkin-Lehner-Involutionen*, siehe [AL70]. Dann liegt die Thetareihe  $\theta_L$  eines stark  $\ell$ -modularen Gitters im Raum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k, \mathcal{G}})$  für einen Charakter, der zusätzlich vom Geschlecht  $\mathcal{G}$  von  $L$  abhängt (vgl. [Que97]).

BEISPIEL 1.2.3. Für eine Definition der Charaktere  $\chi_{k,\mathcal{G}}$  mit Hilfe von Gaußschen Summen siehe [Que97]. Konkret erhält man für die Quebbemannschen Geschlechter zu den Stufen  $\ell \in \{6, 14, 15\}$  die folgenden Charaktere  $\chi_{k,\mathcal{G}} : \Gamma_*(\ell) \rightarrow \mathbb{C}^*$ :

$$\begin{aligned} 6a: & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_2) = 1 & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_3) &= (-1)^{\frac{k}{2}} \\ 6b: & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_2) = (-1)^{\frac{k}{2}} & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_3) &= 1 \\ 14: & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_2) = 1 & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_7) &= (-1)^{\frac{k}{2}} \\ 15: & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_3) = 1 & \chi_{k,\mathcal{G}}(W_5) &= (-1)^{\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

Die Charaktere im Fall  $\ell = 6$  hängen also nicht nur von der Determinante, sondern vom genauen Geschlecht  $\mathcal{G}$  ab. ■

Im Folgenden soll die Definition eines extremalen Gitters auf den Fall  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  angewendet werden. Unter den folgenden Voraussetzungen an  $\mathcal{M}$  kann man zeigen, dass  $\mathcal{M}$  dann stets die Weierstraß-Eigenschaft besitzt:

- (W1) Die Summe  $\sigma_1(\ell)$  der (positiven) Teiler von  $\ell$  ist ein Teiler von 24. Konkret erfüllen dies die Zahlen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$ .
- (W2) Es gilt  $\mathcal{G} = \text{gen}(L_0 \perp \dots \perp L_0)$ , wobei  $L_0$  ein stark  $\ell$ -modulares Gitter kleinstmöglicher Dimension mit  $\theta_{L_0} \in \mathcal{M}_{k_0}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k_0,\mathcal{G}})$  bezeichnet. Insbesondere ist das Gewicht  $k$  ein Vielfaches von  $k_0$ , dem Gewicht von  $\theta_{L_0}$ .

Die Räume von Modulformen  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$ , welche die Thetareihen modularer Gitter in den Quebbemannschen Geschlechtern enthalten, erfüllen also gerade diese Eigenschaften (W1) und (W2).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so kann explizit eine Basis von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  bestimmt werden, welche zeigt, dass dieser Raum die Weierstraß-Eigenschaft besitzt.

Sei dazu  $\theta_{k_0} := \theta_{L_0}$  die Thetareihe des stark  $\ell$ -modularen Gitters  $L_0$  kleinstmöglicher Dimension  $2k_0 > 0$  und

$$(2) \quad \Delta_{k_1}(z) := \prod_{p|\ell} \eta(pz)^{\frac{24}{\sigma_1(\ell)}} = q \cdot \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{p|\ell} (1 - q^{pm})^{\frac{24}{\sigma_1(\ell)}}$$

ein sogenanntes *Eta-Produkt*. Dabei ist

$$\eta(z) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$$

die *Dedekindsche Etafunktion*. Aufgrund der Voraussetzungen (W1) und (W2) ist  $\theta_{k_0}$  eine Modulform vom Gewicht  $k_0$ , zur Gruppe  $\Gamma_*(\ell)$  und zum Charakter  $\chi_{k_0,\mathcal{G}}$  und  $\Delta_{k_1}$  eine (nicht-triviale) Spitzenform vom Gewicht  $k_1 := \frac{12\sigma_0(\ell)}{\sigma_1(\ell)}$ , zur Gruppe  $\Gamma_*(\ell)$  und zum Charakter  $\chi_{k_1,\mathcal{G}}$  (vgl. [Kö11] 2.2 und 2.3), wobei  $\sigma_0(\ell)$  die Anzahl der (positiven) Teiler von  $\ell$  angibt. Die Werte  $k_0$  und  $k_1$  sind in folgender Tabelle zusammengefasst:

$\ell$	1	2	3	5	6	7	11	14	15	23
$k_0$	4	2	1	2	2	1	1	2	2	1
$k_1$	12	8	6	4	4	3	2	2	2	1

Sind  $i, j \in \mathbb{N}_0$  mit  $k = k_1 i + k_0 j$ , so ist  $\Delta_{k_1}^i \cdot \theta_{k_0}^j \in \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$ . Mit Hilfe der Modulformen  $\theta_{k_0}$  und  $\Delta_{k_1}$  kann nun die Basis angegeben werden. Dabei sei bemerkt, dass der Beweis in [Que95] bzw.

[Que97] Dimensionsformeln für die Räume  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  benutzt um zu zeigen, dass die unten definierte Menge  $\mathcal{B}$  ein Erzeugendensystem und damit eine Basis von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  ist.

SATZ 1.2.4. (vgl. [Que95], [Que97]) Sei  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  ein Raum von Modulformen, der die Bedingungen (W1) und (W2) erfüllt. Dann gilt:

a) Eine Basis  $\mathcal{B}$  von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  ist gegeben durch

$$\mathcal{B} := \{\Delta_{k_1}^i \cdot \theta_{k_0}^j \mid i, j \geq 0, k_1 i + k_0 j = k\}.$$

Insbesondere ist  $\dim \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}}) = 1 + \lfloor \frac{k}{k_1} \rfloor$ .

b) Eine Basis des Unterraums  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  der Spitzenformen ist gegeben durch  $\mathcal{B} \setminus \{\theta_{k_0}^{\frac{k}{k_0}}\}$  und dementsprechend ist  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}}) = \lfloor \frac{k}{k_1} \rfloor$ .  $\square$

Da die  $q$ -Entwicklung von  $\theta_{k_0}$  mit 1 und die von  $\Delta_{k_1}$  mit  $q$  beginnt, startet die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_{k_1}^i \cdot \theta_{k_0}^j$  mit  $q^i$ . Somit besitzt die Basis  $\mathcal{B}$  die folgende obere Dreiecksgestalt:

$$\begin{array}{cccccc} 1+ & * & * & \dots & * & +O(q^d) \\ & q+ & * & \dots & * & +O(q^d) \\ & & q^2+ & \dots & * & +O(q^d) \\ & & & \ddots & & \\ & & & & q^{d-1} & +O(q^d) \end{array}$$

BEMERKUNG 1.2.5. Als Thetareihe eines Gitters besitzt eine  $q$ -Entwicklung von  $\theta_{k_0}$  ganzzahlige Koeffizienten. Ist  $\sigma_1(\ell)$  ein Teiler von 24, so folgt aus der Darstellung in (2), dass auch die  $q$ -Entwicklung von  $\Delta_{k_1}$  ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten besitzt. Folglich besitzen sämtliche Elemente von  $\mathcal{B}$   $q$ -Entwicklungen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Die Teilmenge  $\mathcal{M}_k^{\mathbb{Z}}$  von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  derjenigen Modulformen, deren  $q$ -Entwicklungen ausschließlich ganzzahlige Koeffizienten besitzen, ist offenbar ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul von  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$ . Da die Elemente in  $\mathcal{B}$  linear unabhängig (insbesondere) über  $\mathbb{Z}$  sind und zudem, wie an der Darstellung oben zu erkennen, ein Erzeugendensystem von  $\mathcal{M}_k^{\mathbb{Z}}$ , ist  $\mathcal{B}$  auch eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathcal{M}_k^{\mathbb{Z}}$ . Alle für diese Arbeit relevanten Modulformen sind ganzzahlige Linearkombinationen der Elemente aus  $\mathcal{B}$  und damit Elemente von  $\mathcal{M}_k^{\mathbb{Z}}$ .  $\blacksquare$

Wegen der oberen Dreiecksgestalt der Basis  $\mathcal{B}$  aus Satz 1.2.4 folgt leicht:

KOROLLAR 1.2.6. Sei  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  ein Raum von Modulformen, der die Bedingungen (W1) und (W2) erfüllt. Dann besitzt der Raum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  die Weierstraß-Eigenschaft.  $\square$

Ist im Folgenden von einem extremalen Gitter die Rede, so bezieht sich Extremalität stets auf diesen Unterraum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$ . Für das Minimum eines extremalen Gitters  $L$  gilt also  $\min(L) \geq 2 \dim \mathcal{M} = 2(1 + \lfloor \frac{k}{k_1} \rfloor)$ .

Vielfache der Zahl  $2k_1$  werden auch *Sprungdimension* genannt, denn offenbar „springt“ für diese Dimensionen das Minimum eines extremalen Gitters gerade um 2 nach oben. Gitter in solchen Dimensionen sind daher besonders von Interesse.

BEMERKUNG 1.2.7. Die Bedingungen (W1) und (W2) sind nur hinreichende Bedingungen dafür, dass ein Raum  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,\mathcal{G}})$  die Weierstraß-Eigenschaft erfüllt. Oftmals ist dies auch für andere Räume gegeben. Für diverse Beispiele siehe [SSP99] Kapitel 4.



In diesen Fällen ist jedoch eine direkte Verallgemeinerung von Korollar 1.2.6 durch Angabe einer Basis mit entsprechenden Eigenschaften nicht möglich. Insbesondere gibt es in diesen Fällen keine entsprechende Verallgemeinerung der Spitzenform  $\Delta_{k_1}$ . ■

Natürlich stellt sich die Frage, ob man durch die Betrachtung gerade dieses Unterraumes  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k,g})$  nicht Thetareihen von (nicht modularen) Gittern ausschließt, deren Minimum genau so groß oder gar noch größer als das eines extremalen Gitters wäre.

Im Folgenden wird am Beispiel des Geschlechts  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  gezeigt, dass ein Gitter in diesem Geschlecht mit Minimum  $\geq 8$  bereits extremal im obigen Sinne ist und die Thetareihe somit die extremale Modulform bezüglich des Raumes  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{18}(\Gamma_*(3), \chi_{18})$  sein muss.

BEISPIEL 1.2.8. Bezeichnet  $f_{\mathcal{M}}$  die extremale Modulform, so liegen zunächst die Thetareihen sämtlicher Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  in dem affinen Unterraum  $S := f_{\mathcal{M}} + \mathcal{S}_{18}(\Gamma_0(3), \chi_{18})$ . Beispielsweise mit MAGMA lässt sich eine Basis  $\{f_1, \dots, f_5\}$  von  $\mathcal{S}_{18}(\Gamma_0(3), \chi_{18})$  bestimmen:

$$\begin{aligned} f_1 &:= q && +1088q^6 & +O(q^7) \\ f_2 &:= q^2 && +951q^6 & +O(q^7) \\ f_3 &:= q^3 && -528q^6 & +O(q^7) \\ f_4 &:= q^4 && +45q^6 & +O(q^7) \\ f_5 &:= q^5 && +6q^6 & +O(q^7) \end{aligned}$$

Somit muss also für jedes Gitter  $L$  im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  mit Minimum  $\geq 8$  die Thetareihe  $\theta_L$  ein Element von  $f_{\mathcal{M}} + \mathbb{Z}f_4 + \mathbb{Z}f_5$  sein, etwa  $f_{\mathcal{M}} + \lambda f_4 + \mu f_5$  für gewisse  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ .

Aufgrund von Korollar 1.2.2 muss die Modulform  $-\theta_L|_{18} W_3$  ebenfalls eine Thetareihe - nämlich die des Gitters  $L^\natural = \sqrt{3}L^\#$  - sein und damit insbesondere nicht-negative Koeffizienten besitzen. Das heißt, dass man die Koeffizienten  $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$  nur so wählen darf, dass  $f_{\mathcal{M}} - \lambda f_4|_{18} W_3 - \mu f_5|_{18} W_3$  nicht-negative Koeffizienten besitzt. Ebenfalls mit MAGMA berechnet man

$$\begin{aligned} -f_4|_{18} W_3 &= \frac{2}{177147}q + \frac{53}{59049}q^2 - \frac{628}{19683}q^3 + \frac{78911}{177147}q^4 - \frac{206810}{59049}q^5 + O(q^6), \\ -f_5|_{18} W_3 &= \frac{1}{531441}q - \frac{14}{177147}q^2 + \frac{91}{59049}q^3 - \frac{9752}{531441}q^4 + \frac{26033}{177147}q^5 + O(q^6) \end{aligned}$$

Dies führt auf das folgende Ungleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{177147} & \frac{1}{531441} \\ \frac{53}{59049} & -\frac{14}{177147} \\ -\frac{628}{19683} & \frac{91}{59049} \\ \frac{78911}{177147} & -\frac{9752}{531441} \\ -\frac{206810}{59049} & \frac{26033}{177147} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \geq 0$$

Dieses besitzt nur die Lösung  $(\lambda, \mu) = (0, 0)$ , wie man leicht zum Beispiel auch mit MAGMA nachrechnen kann. Das bedeutet also, dass die Thetareihe  $\theta_L$  eines jeden Gitters in  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  mit Minimum  $\geq 8$  gleich  $f_{\mathcal{M}}$ , also der extremalen Modulform sein muss. ■

Völlig analog kann man die anderen Aussagen des folgenden Satzes zeigen:

SATZ 1.2.9.

a) Ist  $L$  ein Gitter aus dem Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  mit  $\min(L) \geq 8$ , so gilt

$$\theta_L = \theta_{L^\natural} = 1 + 646380q^4 + 24820992q^5 + O(q^6).$$

b) Ist  $L$  ein Gitter aus dem Geschlecht  $\Pi_{32}(2^{+16})$  mit  $\min(L) \geq 6$ , so gilt

$$\theta_L = \theta_{L^\natural} = 1 + 261120q^4 + 18947520q^5 + O(q^6).$$

c) Ist  $L$  ein Gitter im Geschlecht  $\Pi_{24}(7^{+12})$  mit  $\text{Minimum} \geq 10$ , so ist

$$\theta_L = \theta_{L^\natural} = 1 + 84672q^5 + 91728q^6 + O(q^7).$$

□

**BEMERKUNG 1.2.10.** Unter den Quebbemannschen Geschlechtern gibt es solche, in denen nicht-extremale Gitter existieren, deren Minimum gleich oder sogar größer dem Minimum eines extremalen Gitters ist. Beispiele solcher Geschlechter sind  $\Pi_{24}(2^{+12})$  oder auch  $\Pi_{18}(3^{+9})$ . Dieses Phänomen scheint jedoch hauptsächlich dann aufzutreten, wenn die Dimension „weit“ von der nächstkleineren Sprungdimension entfernt ist. ■

**1.2.3. Nicht-Negativität der Koeffizienten der extremalen Modulform.** Eine notwendige Bedingung dafür, dass es ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  geben kann, welches als Thetareihe die extremale Modulform  $f_{\mathcal{M}}$  besitzt, ist offenbar, dass die Koeffizienten einer  $q$ -Entwicklung von  $f_{\mathcal{M}}$  nicht-negativ sind. Im Fall unimodularer Gitter konnte gezeigt werden, dass die Fourier-Entwicklung der extremalen Modulform  $f_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M}_k(SL_2(\mathbb{Z}), 1)$  ab einem gewissen Index positive Koeffizienten besitzt, sodass negative Koeffizienten nur in einem bestimmten Intervall liegen können (vgl. [JR11] Theorem 2). In konkreten Fällen ergibt also die Überprüfung dieser endlich vielen Koeffizienten in diesem Intervall ein Kriterium für die Nicht-Negativität. Vergleichbare Resultate für Gitter der Stufe  $\ell > 1$  sind bislang jedoch nicht bekannt.

Hier soll nun eine Methode gezeigt werden, welche in einigen Fällen auch für Gitter der Stufe  $\ell > 1$  einen Beweis ergibt, dass tatsächlich alle Koeffizienten nicht-negativ sind. Die Vorgehensweise soll an einem „trivialen“ Beispiel erläutert werden.

**BEISPIEL 1.2.11.** Sei  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_6(\Gamma_*(3), \chi_6)$ . Die extremale Modulform  $f_{\mathcal{M}}$  lautet

$$f_{\mathcal{M}} = 1 + 756q^2 + 4032q^3 + 20412q^4 + O(q^5).$$

Betrachtet man nun die Geschlechter 3-elementarer Gitter in Dimension 12, so sind die Klassenzahlen wie folgt:

	$3^2$	$3^4$	$3^6$	$3^8$	$3^{10}$
$h$	3	6	12	6	3
$h_2$	3	6	11	5	2
$h_4$	0	0	1	1	1

Sei  $L := {}^3(\mathbb{E}_6^\# \perp \mathbb{E}_6^\#)$  das Gitter der Determinante  $3^{10}$  und Minimum 4. Dieses besitzt als (ein) Obergitter das Gitter  $M$  der Determinante  $3^8$  und Minimum 4. Die Thetareihen dieser beiden Gitter sind Elemente von  $\mathcal{M}_6(\Gamma_0(3), \chi_6)$  und lauten

$$\theta_L = 1 + 270q^2 + 1116q^3 + 7290q^4 + O(q^5),$$

$$\theta_M = 1 + 108q^2 + 144q^3 + 2916q^4 + O(q^5).$$

Diese Modulformen besitzen nicht-negative Koeffizienten, da sie Thetareihen von Gittern sind. Offenbar wäre jede konische Kombination dieser beiden Reihen, welche die extremale Modulform ergibt, bereits eine Konvexkombination. Der Koeffizient 756 von  $q^2$  der extremalen Modulform lässt sich jedoch nicht aus 270 und 108 konvex kombinieren. Daher darf man sich nicht ausschließlich auf eine

konische Kombinationen von Thetareihen beschränken, sondern benötigt weitere Modulformen mit beweisbar nicht-negativen Koeffizienten.

Da  $L \subset M$  gilt, ist die Differenz  $\theta_M - \theta_L = 162q^2 + 972q^3 + 4374q^4 + O(q^5) \in \mathcal{M}_6(\Gamma_0(3), \chi_6)$  eine solche Modulform mit nicht-negativen Koeffizienten, denn die Menge der Vektoren einer jeden Länge  $m$  von  $L$  ist eine Teilmenge der entsprechenden Vektoren von  $M$ . Des Weiteren gilt

$$\theta_M + 3(\theta_M - \theta_L) = 1 + 756q^2 + 4032q^3 + 20412q^4 + O(q^5).$$

Da der Raum  $\mathcal{M}_6(\Gamma_0(3), \chi_6)$  die Weierstraß-Eigenschaft besitzt, genügt es bereits, dass nur die ersten  $3 = \dim(\mathcal{M}_6(\Gamma_0(3), \chi_6))$  Koeffizienten dieser Reihe mit denjenigen der extremalen Modulform übereinstimmen, um folgern zu können, dass  $f_{\mathcal{M}} = \theta_M + 3(\theta_M - \theta_L)$  gilt. Somit ist gezeigt, dass  $f_{\mathcal{M}}$  nur nicht-negative Koeffizienten besitzt. ■

Dieses am Beispiel erläuterte Vorgehen kann allgemeiner wie folgt als sogenannter *Las-Vegas-Algorithmus* formuliert werden, d.h. einem Algorithmus, der das korrekte Ergebnis ausgibt, vorausgesetzt er terminiert. Dabei kann man sich auf solche Gitter beschränken, deren Minimum nicht kleiner

---

**Algorithmus 1** Nicht-Negativität der extremalen Modulform.

---

**Eingabe:** Die extremale Modulform  $f_{\mathcal{M}} \in \mathcal{M} = \mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi)$ .

**Ausgabe:** Eine Liste von Modulformen  $f_i$  mit nicht-negativen Koeffizienten zusammen mit Zahlen  $\lambda_i \geq 0$  mit  $f_{\mathcal{M}} = \sum_i \lambda_i f_i$  (falls der Algorithmus terminiert).

Wähle geeignetes Startgitter  $L$  der Dimension  $n$  und Stufe  $\ell$ .

$\mathcal{F}_{\geq 0} := \{\theta_L\}$ .

**while**  $f_{\mathcal{M}} \notin \text{Cone}(\mathcal{F}_{\geq 0})$  **do**

    Bilde (zufällig) ein gerades Obergitter  $M$  von  $L$ .

    Setze  $\mathcal{F}_{\geq 0} := \mathcal{F}_{\geq 0} \cup \{\theta_M - \theta_L\}$ .

    Ersetze  $L$  durch ein (zufälliges) anderes Gitter der Dimension  $n$  und Stufe  $\ell$ .

    Setze  $\mathcal{F}_{\geq 0} := \mathcal{F}_{\geq 0} \cup \{\theta_L\}$ .

**end while**

Finde  $f_i \in \mathcal{F}_{\geq 0}$  und  $\lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  mit  $f_{\mathcal{M}} = \sum_i \lambda_i f_i$ .

Gib  $(\lambda_1, f_1), \dots, (\lambda_r, f_r)$  aus.

---

ist, als die extremale Modulform  $f_{\mathcal{M}}$  vorgibt. Das Ersetzen von  $L$  im Algorithmus durch ein anderes Gitter der Dimension  $n$  und Stufe  $\ell$  kann beispielsweise durch ein Obergitter (z.B.  $M$ ) oder einen Nachbarn von  $L$  geschehen. Es genügt wie üblich, mit hinreichend vielen Koeffizienten zu rechnen, welche die Modulformen jeweils eindeutig bestimmen. Besitzt der Raum  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi)$  beispielsweise die Weierstraß-Eigenschaft, so genügen  $d$  Koeffizienten, wenn  $d$  die Dimension von  $\mathcal{M}$  ist.

Auf diese Weise erhält man zum Beispiel die folgenden Resultate:

**SATZ 1.2.12.** *Die folgenden extremalen Modulformen der entsprechenden Räume besitzen nicht-negative Koeffizienten:*

a)  $1 + 646380q^4 + 24820992q^5 + O(q^6) \in \mathcal{M}_{18}(\Gamma_*(3), \chi_{18})$

b)  $1 + 490770q^4 + 25510464q^5 + O(q^6) \in \mathcal{M}_{19}(\Gamma_*(3), \chi_{19})$

c)  $1 + 4906q^4 + 35904q^5 + O(q^6) \in \mathcal{M}_{11}(\Gamma_*(7), \chi_{11})$

d)  $1 + 84672q^5 + 91728q^6 + O(q^7) \in \mathcal{M}_{12}(\Gamma_*(7), \chi_{12})$  □

Es gibt also zumindest in den oben genannten Fällen keinen offensichtlichen Grund, der die Existenz extremaler Gitter in den entsprechenden Geschlechtern ausschließt. Unter anderem in diesen Fällen stellt sich also die Frage nach der Existenz extremaler Gitter. Darüber hinaus stellt sich auch in den Fällen, in denen bereits extremale Gitter bekannt sind, die Frage, ob es weitere extremale Gitter

$n \setminus \ell$	2	3	5	6a	6b	7	11	14	15	23
2		1				1	1			<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>
4	1	1	1	1	1	1	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>
6		1				<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	1			–
8	1	2	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>		<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	1	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">2</span>	–
10		3				4	2			–
12	3	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	4	6	4	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">0</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 1</math></span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 2</math></span>	–
14		1				1	?			–
16	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>	6	<span style="border: 1px solid blue; padding: 2px;">1</span>		<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 5</math></span>	$\geq 1$	–	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 1</math></span>	–
18		37				<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">0</span>	?			–
20	3	$\geq 1$	?	?	$\geq 1$	$\geq 1$	–	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	–
22		$\geq 1$				?	?			–
24	$\geq 1$	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 1</math></span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 1</math></span>		<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 2</math></span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	–	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	–
26		$\geq 1$				?	–			–
28	$\geq 1$	$\geq 1$	$\geq 1$	?	?	?	–	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	–
30		$\geq 1$				–	–			–
32	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 6</math></span>	$\geq 1$	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>		<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	?	–	–	–	–
34		$\geq 1$				?	–			–
36	$\geq 1$	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	?	?	?	–	–	–	–	–
38		?				?	–			–
40	$\geq 1$	$\geq 1$	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>		<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	?	–	–	–	–
42		?				–	–			–
44	$\geq 1$	?	?	?	?	–	–	–	–	–
46		?				?	–			–
48	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;"><math>\geq 1</math></span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>		<span style="border: 1px solid red; padding: 2px;">?</span>	–	–	–	–	–

TABELLE 1.2. Anzahlen extremaler Gitter soweit bekannt. In blau: klassifizierte Geschlechter. In rot: Geschlechter mit Maß  $\geq 500.000$ , d.h. mit Klassenzahl  $h \geq 1.000.000$ . Der Eintrag „–“ bedeutet, dass die entsprechende extremale Modulform einen negativen Koeffizienten besitzt. Die umrandeten Einträge kennzeichnen die Sprungdimensionen.

Eine aktualisierte Tabelle mit allen Ergebnissen dieser Arbeit ist zu finden unter: <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~mjuergen>

gibt. Die Betrachtung beschränkt sich in dieser Arbeit auf Geschlechter bis einschließlich Dimension 48. Die bisherigen Ergebnisse sind in Tabelle 1.2 zusammengefasst.

In einigen Fällen wäre die Konstruktion eines extremalen Gitters besonders interessant, da dieses eine dichtere als die bislang bekannte Kugelpackung liefert. Dies soll im folgenden Abschnitt etwas genauer erläutert werden.

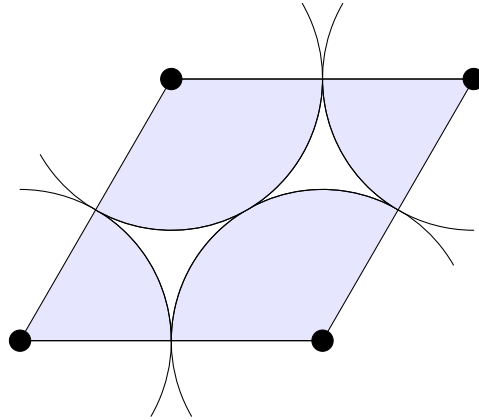


ABBILDUNG 1.1. Ein Fundamentaltetraeder (des Gitters  $\mathbb{A}_2$ ).

### 1.3. Kugelpackungen aus extremalen Gittern

Sei  $L$  ein Gitter auf dem euklidischen Vektorraum  $(V, b)$ . Unter der zu  $L$  gehörigen Kugelpackung  $\mathcal{P}$  versteht man die Vereinigung von Kugeln  $B(x) := \{y \in V \mid \|x - y\|_2 \leq \rho\}$  vom Radius  $\rho := \frac{\sqrt{\min(L)}}{2}$  um jeden Gitterpunkt  $x \in L$ , also

$$\mathcal{P} := \bigcup_{x \in L} B(x).$$

Der Radius  $\rho$  ist also gerade so gewählt, dass sich die Kugeln höchstens auf dem Rand schneiden. Die Kugelpackungsdichte  $\Delta(L)$  des Gitters  $L$  soll nun den Anteil des Volumens von  $V$  messen, welcher durch die Packung  $\mathcal{P}$  überdeckt ist. Offenbar genügt dabei die Betrachtung eines Fundamentaltetraeders des Gitters. Das Volumen eines solchen ist gerade  $\sqrt{\det(L)}$  und das überdeckte Volumen gerade das einer Kugel, also  $\rho^n V_n$ , wenn dabei  $V_n$  das Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel mit Radius 1 bezeichnet. Dies motiviert die folgende Definition der *Kugelpackungsdichte* für ein Gitter  $L$

$$\Delta(L) := \frac{\rho^n V_n}{\sqrt{\det(L)}}.$$

Oftmals betrachtet man statt der Kugelpackungsdichte die von dem Volumen der  $n$ -dimensionalen Kugel unabhängige *Zentrumsdichte*

$$\delta(L) := \frac{\Delta(L)}{V_n} = \frac{\rho^n}{\sqrt{\det(L)}}.$$

Neben bereits in der Einleitung erwähnten extremalen Gittern  $\mathbb{A}_2$ ,  $\mathbb{D}_4$  und  $\mathbb{E}_8$ , welche in entsprechender Dimension die optimale gitterförmige Kugelpackung liefern, hier einige Beispiele in höheren Dimensionen:

BEISPIELE 1.3.1. Die folgenden elementaren Gitter liefern die bislang dichtesten bekannten Kugelpackungen in entsprechenden Dimensionen:

- a) Das Coxeter-Todd Gitter  $CT_{12}$  in Dimension 12 besitzt eine Zentrumsdichte von  $0.\overline{037}$ . Dieses Gitter ist das einzige Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{12}(3^{+6})$  mit Minimum 4. Es ist 3-modular und extremal. Es wird vermutet, dass dieses Gitter die optimale Kugelpackung in Dimension 12 liefert.
- b) Das Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  in Dimension 16 besitzt eine Zentrumsdichte von 0.0625. Auch dieses Gitter besitzt als einziges im Geschlecht  $\text{II}_{16}(2^{+8})$  das Minimum 4. Es ist 2-modular und extremal und es wird ebenfalls vermutet, dass dieses Gitter die optimale Kugelpackung in Dimension 16 liefert.

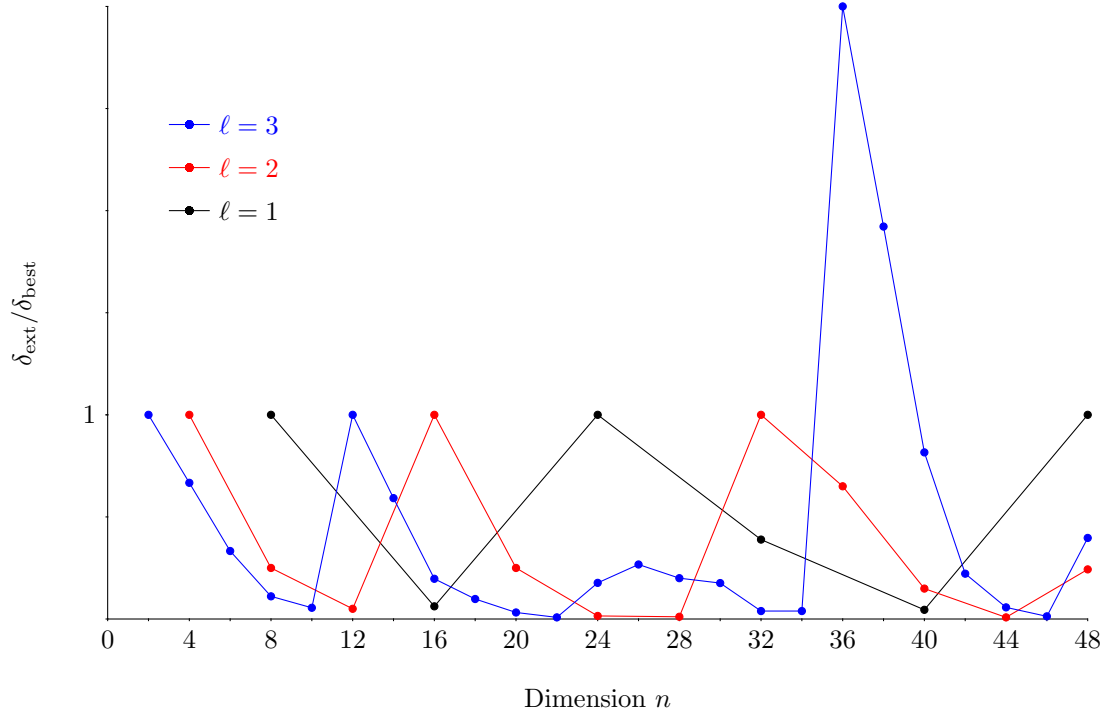


ABBILDUNG 1.2. Quotient aus Zentrumsdichte  $\delta_{\text{ext}}$  (hypothetischer) extremaler Gitter der Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  und Zentrumsdichte  $\delta_{\text{best}}$  des bislang dichtesten bekannten Gitters in entsprechender Dimension  $n$

- c) Das Leech-Gitter  $\Lambda_{24}$  in Dimension 24 besitzt eine Zentrumsdichte von 1. Bekanntermaßen ist das Leech-Gitter ebenfalls das einzige gerade unimodulare Gitter in Dimension 24 mit Minimum 4. Es konnte gezeigt werden (vgl. [CK09]), dass das Leech-Gitter die optimale gitterförmige Kugelpackung in Dimension 24 liefert und es ist davon auszugehen, dass dies auch unter allen Kugelpackungen der Fall ist.
- d) In Dimension 32 liefert jedes extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  eine dichteste, bislang bekannte Kugelpackung mit Zentrumsdichte  $\approx 2.565$ . Bislang sind sechs solcher Gitter bekannt:  $Q_{32}$  (vgl. [Que87]),  $Q'_{32}$  (vgl. [Que84]),  $Bhurw_8$  (vgl. [Bac95]),  $CQ_{32}$  (vgl. [Neb98]) und ein nicht 2-modulares Gitter  $MW_{32}$  sowie das zugehörige reskalierte Dualgitter  $MW'_{32}$  (vgl. [Elk94]).
- e) In Dimension 36 ist das Gitter  $KP_{36}$  (vgl. [KP92]) im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{-20})$  das bislang dichteste bekannte Gitter mit einer Zentrumsdichte von  $\approx 4.439$ . Es besitzt Stufe 3 und Determinante  $3^{20}$ .
- f) Jedes extremale unimodulare Gitter in Dimension 48 liefert eine dichteste, bislang bekannte Kugelpackung mit Zentrumsdichte  $\approx 16834.112$ . Es sind vier solche Gitter bekannt:  $P_{48p}$ ,  $P_{48q}$ ,  $P_{48n}$  und  $P_{48m}$  (vgl. [Neb14]). ■

Da die Dimension, die Determinante und das Minimum eines extremalen Gitters durch die extreme Modulform bekannt sind, ist die Zentrumsdichte eines solchen Gitters a priori ohne das Gitter explizit zu kennen, berechenbar. In Abbildung 1.2 sind die Zentrumsdichten extremaler Gitter für die Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3\}$  bis einschließlich Dimension 48 jeweils in Relation zu der Zentrumsdichte eines dichtesten bekannten Gitters angegeben.

Während in den Dimensionen 2, 4, 8, 12, 16 und 24 jeweils genau ein extremales Gitter (entsprechender Stufe) existiert, stellt sich in Dimension 32 die Frage, ob es weitere extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  gibt, welche dann ebenfalls eine dichteste bekannte Kugelpackung realisieren. Besonders interessant wäre außerdem die Antwort auf die Frage, ob ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  existiert. Ein solches Gitter besäße eine um den Faktor 3 größere Zentrumsdichte als das bislang dichteste bekannte Gitter  $KP_{36}$ . Da das letztgenannte ein 3-elementares Gitter der Determinante  $3^{20}$  ist, liegt es nahe, zunächst alle Obergitter von  $KP_{36}$  zu bestimmen, um möglicherweise auf diese Art ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  zu finden. Da auch im letzten Kapitel dieser Arbeit Obergitter gebildet werden müssen, sollen im Folgenden kurz einige Details zur Konstruktion von Obergittern erläutert werden.

#### 1.4. Konstruktion ganzzahliger Obergitter

Sei  $L$  ein ganzzahliges Gitter auf dem euklidischen Vektorraum  $(V, b)$  und  $T(L) = L^\# / L$  die Diskriminantengruppe von  $L$ . Auf  $T(L)$  kann die *Diskriminantenform* wie folgt definiert werden:

$$\begin{aligned} \bar{b} : T(L) \times T(L) &\longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ (x + L, y + L) &\longmapsto b(x, y) + \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ein ganzzahliges Obergitter  $M \supseteq L$  muss notwendig in  $L^\#$  enthalten sein, d.h.  $L \subseteq M \subseteq L^\#$ . Somit entspricht ein solches  $M$  gerade einer Untergruppe  $\bar{M}$  von  $T(L)$ . Ist  $m = |\bar{M}|$ , so ist  $M$  ein Obergitter von  $L$  vom Index  $[M : L] = m$ .  $M$  ist ganzzahlig genau dann, wenn  $\bar{M}$  total isotrop bzgl. der Diskriminantenform ist, d.h. wenn  $\bar{b}(\bar{M}, \bar{M}) = \bar{0}$ . Zusammengenommen erhält man:

**PROPOSITION 1.4.1.** *Sei  $L$  ein ganzzahliges Gitter auf  $(V, b)$ . Dann gibt es eine bijektive Korrespondenz zwischen den (bzgl.  $b$ ) ganzzahligen Obergittern  $M$  von  $L$  vom Index  $m = [M : L]$  und den (bzgl.  $\bar{b}$ ) total isotropen Untergruppen  $\bar{M}$  von  $T(L) = L^\# / L$  der Mächtigkeit  $m = |\bar{M}|$ .  $\square$*

**BEMERKUNG 1.4.2.** Ist  $m$  ungerade und  $M$  ein ganzzahliges Obergitter vom Index  $m$  eines geraden Gitters  $L$ , so ist auch  $M$  gerade. Denn nach dem Elementarteilersatz gibt es eine Basis  $x_1, \dots, x_n$  von  $M$  und Elementarteiler  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \mathbb{N}$  so, dass  $\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_n x_n$  eine Basis von  $L$  ist. Wegen  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_n = [M : L] = m$  sind alle Elementarteiler ungerade und wegen  $\varepsilon_i^2 b(x_i, x_i) = b(\varepsilon_i x_i, \varepsilon_i x_i) \in 2\mathbb{Z}$  ist auch  $b(x_i, x_i) \in 2\mathbb{Z}$  für  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Demnach ist auch  $M$  ein gerades Gitter.

Insbesondere ist ein ganzzahliges Obergitter vom Index  $p^s$  für eine Primzahl  $p > 2$  eines geraden Gitters stets gerade. Ein ganzzahliges Obergitter eines geraden Gitters von geradem Index hingegen muss nicht gerade sein, wie etwa das Beispiel des ungeraden Gitters  $\mathbb{I}_4$  als Obergitter vom Index 2 des geraden Gitters  $\mathbb{D}_4$  zeigt.  $\blacksquare$

Wie jede endliche abelsche Gruppe ist auch die Diskriminantengruppe  $T(L)$  das direkte Produkt ihrer  $p$ -primären Komponenten  $T_p(L) := \{y + L \mid \exists k \in \mathbb{N}_0 : p^k y \in L\}$ , also

$$T(L) = \bigoplus_{p \text{ prim}} T_p(L).$$

Soll ein Obergitter von  $L$  vom Index  $m = p^s$  für einen Primteiler  $p$  von  $\det(L)$  berechnet werden, so ist die entsprechende Untergruppe von  $T(L)$  eine Untergruppe der  $p$ -primären Komponente  $T_p(L)$  von  $T(L)$ . Ist die Stufe  $\ell$  von  $L$  quadratfrei, so ist die  $p$ -primäre Komponente  $T_p(L)$  eine  $p$ -elementare Gruppe und entspricht gerade der Untergruppe  $L^{\#,p} / L$  von  $T(L)$ . Somit lässt sich  $L^{\#,p} / L$  als  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum der Dimension  $\nu_p(\det(L))$  auffassen.

Da sowohl  $L^{\#,p} \subseteq \frac{1}{p}L$  als auch  $L^{\#,p} \subseteq L^\#$  gilt, folgt  $b(L^{\#,p}, L^{\#,p}) \subseteq \frac{1}{p}b(L, L^\#) = \frac{1}{p}\mathbb{Z}$ . Nach Skalieren

mit  $p$  nimmt die Diskriminantenform  $p\bar{b}$  auf  $T_p(L)$  also Werte in  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p$  an, sodass  $T_p(L)$  zusammen mit der Bilinearform  $p\bar{b}$  einen quadratischen  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum bildet.

Insbesondere entsprechen also ganzzahligen Obergittern vom Index  $p$  gerade 1-dimensionale total isotrope Unterräume in  $(T_p(L), p\bar{b})$ . Die Anzahl dieser lässt sich berechnen als  $\frac{1}{p-1} \cdot (a(0) - 1)$ , wobei hier  $a(0)$  die Anzahl der isotropen Vektoren in  $(T_p(L), p\bar{b})$  angibt. Diese Anzahl  $a(0)$  lautet (vgl. [Kne02] (13.6)):

$$a(0) = \begin{cases} p^{2m-1} + p^m - p^{m-1} & \nu_p(\det(L)) = 2m, (L^{\# \cdot p}/L, \bar{b}) \cong \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{H} \\ p^{2m-1} - p^m + p^{m-1} & \nu_p(\det(L)) = 2m, (L^{\# \cdot p}/L, \bar{b}) \cong \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{A} \\ p^{2m} & \nu_p(\det(L)) = 2m + 1 \end{cases}$$

Interessant ist nun das Minimum des Gitters  $M = L + \mathbb{Z}y$ . Dieses kann für beliebiges  $y$  an der sogenannten *Längenfunktion*  $l$  des Gitters  $L$  abgelesen werden:

$$\begin{aligned} l : T_p(L) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ y + L &\longmapsto \min(L + \mathbb{Z}y) \end{aligned}$$

Diese Information lässt sich codieren in dem ganzzahligen *Längenzählerpolynom*:

$$P_{L,p}(X) := \frac{1}{p-1} \left( \sum_{\substack{y+L \in T_p(L) \\ b(y,y) \in \mathbb{Z}}} X^{l(y)} - X^{\min(L)} \right) \in \mathbb{Z}[X]$$

Der Koeffizient von  $X^m$  gibt also an, wie viele (evtl. isometrische) Obergitter  $L$  besitzt, die das Minimum  $m$  haben.

Mit MAGMA erhält man beispielsweise folgendes Resultat:

SATZ 1.4.3. *Das ganzzahlige Längenzählerpolynom für  $L = KP_{36}$  lautet:*

$$P_{L,3}(X) = 2808X^2 + 460962810X^4 + 120145432X^6$$

*Insbesondere besitzt das Gitter  $KP_{36}$  kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  als Obergitter vom Index 3.*  $\square$

Daraus ergibt sich leicht:

KOROLLAR 1.4.4. *Ist das Gitter  $KP_{36}$  das (bis auf Isometrie) einzige Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+20})$  mit Minimum  $\geq 8$ , so gibt es kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$ .*

BEWEIS. Wäre  $L$  ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  (mit Minimum 8), so wäre jedes Teilgitter von  $L$  der Stufe 3 und Determinante  $3^{20}$  ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+20})$  mit Minimum  $\geq 8$ . Ein solches existiert stets, denn Teilgitter von  $L$  vom Index 3 und der Stufe 3 korrespondieren gerade zu den reskalierten Dualen der Obergitter vom Index 3 von  $L^{\natural} = \sqrt{3}L^{\#}$ . Diese wiederum korrespondieren zu den 1-dimensionalen total isotropen Unterräumen von  $T(L^{\natural})$ , wovon es wie oben gesehen genau  $\frac{1}{2}(3^{17} - 3^9 + 3^8 - 1) = 193703683$  gibt.

Somit gibt es bis auf Isometrie also zumindest ein solches Obergitter von  $L^{\natural}$  im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+16})$ , welches also zu einem Teilgitter von  $L$  im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+20})$  mit Minimum  $\geq 8$  korrespondiert. Nach Voraussetzung ist dieses Gitter isometrisch zu dem Gitter  $KP_{36}$ , welches aber nach Satz 1.4.3 kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  als Obergitter vom Index 3 besitzt.  $\square$



## Vektorkonfigurationen und Nicht-Existenz extremaler Gitter

In diesem Kapitel sei  $L$  wie zuvor ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  auf dem euklidischen Vektorraum  $(V, b)$  der Dimension  $n \geq 2$ . Nach Wahl einer Orthogonalbasis  $v_1, \dots, v_n$  lässt sich  $V$  mit  $\mathbb{R}^n$  identifizieren. Die Bilinearform entspricht dann gerade dem Standardskalarprodukt  $(x, y) := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$ . Das Gitter  $L$  wird in diesem Kapitel stets als **Gitter auf**  $(\mathbb{R}^n, (\cdot, \cdot))$  aufgefasst.

Die Abschnitte 2.1 bis 2.4 fassen die wesentlichen Ideen aus [Ven01] und insbesondere [BV01] zusammen. Für weitere Literatur zu zonalen harmonischen Polynomen siehe [DGS77] oder auch [Vil93].

### 2.1. Zonale harmonische Polynome

Im Folgenden bezeichne  $\mathcal{F}_{n,d} \subseteq \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  den  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad  $d \in \mathbb{N}_0$  in  $n$  Veränderlichen. Abkürzend sei  $X := (X_1, \dots, X_n)^t$ . Ein Multiindex  $i$  ist ein Element  $(i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ . Es sei  $|i| := i_1 + \dots + i_n$ . Eine Basis von  $\mathcal{F}_{n,d}$  sind die Monome  $X^i := X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$  mit  $|i| = d$ . Demnach ist die Dimension von  $\mathcal{F}_{n,d}$  gleich  $\binom{n+d-1}{n-1}$  und jedes Polynom  $P \in \mathcal{F}_{n,d}$  lässt sich in der Form  $P(X) = \sum_{|i|=d} \frac{d!}{i_1! \dots i_n!} p_i X^i$  mit  $p_i \in \mathbb{R}$  schreiben.

Sind  $P(X) = \sum_{|i|=d} \frac{d!}{i_1! \dots i_n!} p_i X^i$  und  $Q(X) = \sum_{|i|=d} \frac{d!}{i_1! \dots i_n!} q_i X^i$  zwei Polynome in  $\mathcal{F}_{n,d}$ , so wird auf dem Raum  $\mathcal{F}_{n,d}$  durch

$$(3) \quad [P, Q] := \sum_{|i|=d} \frac{d!}{i_1! \dots i_n!} p_i q_i$$

eine symmetrische Bilinearform definiert. Berechnet man deren Gram-Matrix in der Monombasis  $X^i$ , so erhält man:

$$[X^i, X^j] = \begin{cases} \frac{i_1! \dots i_n!}{d!} & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Somit ist  $[\cdot, \cdot]$  offenbar positiv definit und damit ein Skalarprodukt auf  $\mathcal{F}_{n,d}$ .

Im Folgenden bezeichne  $\nabla$  den formalen Vektor  $(\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n})^t$ .

LEMMA 2.1.1. Für zwei Polynome  $P, Q \in \mathcal{F}_{n,d}$  gilt:

- a)  $[P, (X, \alpha)^d] = P(\alpha)$ .
- b)  $d! [P, Q] = P(\nabla)Q$ .

BEWEIS. a) kann elementar nachgerechnet werden (vgl. [Ven01] Prop. 1.1). b) kann durch Testen auf der Monombasis  $\{X^i \mid |i| = d\}$  ebenfalls leicht nachgerechnet werden (vgl. [Ven01] Prop. 1.2).  $\square$

Weiter sei  $\Delta := (\nabla, \nabla) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial^2 X_i}$  der Laplace-Operator. Dieser lässt sich auffassen als lineare Abbildung  $\Delta : \mathcal{F}_{n,d} \rightarrow \mathcal{F}_{n,d-2}$ . Ein Polynom  $P \in \mathcal{F}_{n,d}$  heißt *harmonisch*, wenn  $\Delta P = 0$  gilt. Der Unterraum von  $\mathcal{F}_{n,d}$  aller harmonischen Polynome wird im Folgenden mit  $\text{Harm}_{n,d}$  bezeichnet. Harmonische Polynome werden im hier beschriebenen Kontext oft auch als *sphärische* Polynome bezeichnet.

PROPOSITION 2.1.2. Sind  $P \in \text{Harm}_{n,d}$  und  $Q \in \mathcal{F}_{n,d-2}$ , so gilt

$$[Q \cdot (X, X), P] = 0.$$

Insbesondere ist ein harmonisches Polynom  $P \in \text{Harm}_{n,d}$ , welches durch  $(X, X)$  teilbar ist, gleich 0.

BEWEIS. Nach Lemma 2.1.1 gilt  $d! [Q \cdot (X, X), P] = Q(\nabla)(\nabla, \nabla)P = Q(\nabla)\Delta P = 0$ .  $\square$

Die Gruppe  $O(\mathbb{R}^n) = \{\sigma \in GL(\mathbb{R}^n) \mid (\sigma(x), \sigma(y)) = (x, y) \text{ für alle } x, y \in \mathbb{R}^n\}$  operiert zunächst in natürlicher Weise auf  $\mathbb{R}^n$ . Zu einem Vektor  $\alpha \in \mathbb{R}^n$  bezeichne  $\text{Stab}(\alpha) = \{\sigma \in O(\mathbb{R}^n) \mid \sigma(\alpha) = \alpha\}$  den Stabilisator von  $\alpha$  in  $O(\mathbb{R}^n)$ . Des Weiteren operiert  $O(\mathbb{R}^n)$  auch auf  $\mathcal{F}_{n,d}$  vermöge  $\sigma.P = P \circ \sigma^{-1}$ .

DEFINITION. Sei  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  fest gewählt. Ein Polynom  $P \in \mathcal{F}_{n,d}$  heißt *zonal* bzgl.  $\alpha$ , wenn für alle  $\sigma \in \text{Stab}(\alpha)$  gilt  $\sigma.P = P$ .

PROPOSITION 2.1.3. Ein Polynom  $P \in \mathcal{F}_{n,d}$  ist genau dann zonal bzgl.  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  mit  $(x, x) = (y, y)$  und  $(x, \alpha) = (y, \alpha)$  gilt  $P(x) = P(y)$ .

BEWEIS. Sei  $P$  zonal und seien  $x, y \in V$  mit  $(x, x) = (y, y)$  und  $(x, \alpha) = (y, \alpha)$ . Bekanntlich ist die Sphäre  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, x) = 1\}$  ein 2-homogener Raum, d.h. zu zwei Paaren von Punkten  $x_1, x_2$  und  $y_1, y_2$  mit  $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$  gibt es ein Element  $\sigma \in O(\mathbb{R}^n)$  mit  $y_1 = \sigma(x_1)$  und  $y_2 = \sigma(x_2)$ . Bezeichnen  $\tilde{x} := \frac{x}{\sqrt{(x,x)}}$ ,  $\tilde{y} := \frac{y}{\sqrt{(y,y)}}$ ,  $\tilde{\alpha} := \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha,\alpha)}} \in S^{n-1}$ , so gibt es also ein  $\sigma \in O(\mathbb{R}^n)$  mit  $\sigma(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}$  und  $\sigma(\tilde{x}) = \tilde{y}$ . Es folgt  $\sigma(\alpha) = \alpha$ , also  $\sigma \in \text{Stab}(\alpha)$  und weiter folgt  $P(x) = \sqrt{(x,x)}^d P(\tilde{x}) = \sqrt{(y,y)}^d P(\sigma^{-1}(\tilde{y})) = (\sigma.P)(y) = P(y)$ .

Umgekehrt seien  $\sigma \in \text{Stab}(\alpha)$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mit  $y := \sigma^{-1}(x)$  gilt dann  $(x, x) = (y, y)$  und  $(x, \alpha) = (y, \alpha)$ . Es folgt  $P(x) = P(y) = P(\sigma^{-1}(x)) = \sigma.P(x)$ , also  $\sigma.P = P$ .  $\square$

Für  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  bezeichne  $\text{Zon}_{n,d}^\alpha$  im Folgenden den Unterraum von  $\mathcal{F}_{n,d}$  der bzgl.  $\alpha$  zonalen Polynome. Nach Prop. 2.1.3 ist klar, dass für jedes  $s \in \{0, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$  das Polynom  $(X, \alpha)^{d-2s}(X, X)^s$  ein Element von  $\text{Zon}_{n,d}^\alpha$  ist.

PROPOSITION 2.1.4. Seien  $d \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Die Elemente  $(X, \alpha)^{d-2s}(X, X)^s$  für  $s \in \{0, \dots, \lfloor d/2 \rfloor\}$  bilden eine Basis von  $\text{Zon}_{n,d}^\alpha$ . Insbesondere besitzt  $\text{Zon}_{n,d}^\alpha$  die Dimension  $1 + \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ .

BEWEIS. Wie im Beweis von [Ven01] Theorem 2.1 folgt, dass man jedes bzgl.  $\alpha$  zonale Polynom als Linearkombination der Elemente  $(X, \alpha)^{d-2s}(X, X)^s$  schreiben kann.

Es bleibt also die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Dies wird im Folgenden mittels Induktion über  $d$  bewiesen. Für  $d = 0$  ist die Aussage offenbar erfüllt. Seien also  $d \geq 1$  und  $\lambda_0, \dots, \lambda_{\lfloor d/2 \rfloor} \in \mathbb{R}$  mit

$$\lambda_0(X, \alpha)^d + \lambda_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots = 0.$$

Ist  $d$  ungerade, so gilt demnach:

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_0(X, \alpha)^d + \lambda_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots + \lambda_{\frac{d-1}{2}}(X, \alpha)(X, X)^{\frac{d-1}{2}} \\ &= (X, \alpha) \cdot \underbrace{\left( \lambda_0(X, \alpha)^{d-1} + \lambda_1(X, \alpha)^{d-3}(X, X) + \dots + \lambda_{\frac{d-1}{2}}(X, X)^{\frac{d-1}{2}} \right)}_{=: Q(X)} \end{aligned}$$

Da  $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  ein nullteilerfreier Ring ist und für  $\alpha \neq 0$  auch  $(X, \alpha) \neq 0$ , muss also  $Q = 0$  sein. Per Induktionsvoraussetzung folgt nun  $\lambda_0 = \dots = \lambda_{\frac{d-1}{2}}$ .

Im Fall  $d$  gerade sei nun

$$0 = \lambda_0(X, \alpha)^d + \lambda_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots + \lambda_{\frac{d}{2}-1}(X, \alpha)^2(X, X)^{\frac{d}{2}-1} + \lambda_{\frac{d}{2}}(X, X)^{\frac{d}{2}}.$$

Sei  $0 \neq \beta \in \mathbb{R}^n$  ein beliebiges Element in  $\alpha^\perp$ . Dann folgt leicht durch Einsetzen von  $\beta$ , dass gilt  $\lambda_{\frac{d}{2}} = 0$ . Bei dem verbleibenden Ausdruck lässt sich nun wieder ein Faktor  $(X, \alpha)$  ausklammern und somit erhält man ähnlich wie oben per Induktionsvoraussetzung, dass  $\lambda_0 = \dots = \lambda_{\frac{d}{2}-1} = 0$ .  $\square$

Auf einen Ausdruck der Form  $(X, \alpha)^r (X, X)^s$  kann man den Laplace-Operator anwenden. Ist  $r \leq 1$  oder  $s = 0$ , so ist  $\Delta(X, \alpha)^r (X, X)^s = 0$ . Ist anderenfalls  $r \geq 2$  und  $s \geq 1$ , so erhält man

$$(4) \quad \Delta(X, \alpha)^r (X, X)^s = 2s(2s + 2r + n - 2) \cdot (X, \alpha)^r (X, X)^{s-1} + r(r-1)(\alpha, \alpha) \cdot (X, \alpha)^{r-2} (X, X)^s$$

Die folgende Proposition gibt nun Auskunft darüber, welche Polynome sowohl zonal bzgl. eines Vektors  $\alpha$  als auch harmonisch sind.

**PROPOSITION 2.1.5.** *Seien  $d \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{\alpha\}$ . Der Raum  $\text{Harm}_{n,d} \cap \text{Zon}_{n,d}^\alpha$  ist 1-dimensional. Mit anderen Worten gibt es in  $\mathcal{F}_{n,d}$  (bis auf skalare Vielfache) genau ein harmonisches und zonales Polynom bzgl.  $\alpha$ .*

**BEWEIS.** Jedes Polynom  $P \in \mathcal{F}_{n,d}$ , welches harmonisch und zonal bzgl.  $\alpha$  ist, besitzt nach Prop. 2.1.4 eine Darstellung mit  $a_0, \dots, a_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} \in \mathbb{R}$  als

$$(5) \quad P(X) = a_0(X, \alpha)^d + a_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots$$

Durch Anwenden des Laplace-Operators auf  $P$  erhält man ein Element von  $\text{Zon}_{n,d-2}^\alpha$ . Aus der Bedingung  $\Delta P = 0$  erhält man also ein homogenes lineares Gleichungssystem in den  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$  Variablen  $a_0, \dots, a_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$  mit  $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  Gleichungen, welches folglich eine nicht-triviale Lösung besitzt. Durch Einsetzen dieser Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}$  erhält man ein harmonisches und bzgl.  $\alpha$  zonales Polynom  $P \neq 0$ .

Sind  $P$  und  $\tilde{P}$  zwei harmonische und bzgl.  $\alpha$  zonale Polynome  $\neq 0$ , so ist nach Prop. 2.1.2 in einer Darstellung wie in (5) jeweils  $a_0 \neq 0$ . Durch Skalieren bekommt man folgende Darstellung

$$\begin{aligned} P(X) &= (X, \alpha)^d + a_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots \\ \tilde{P}(X) &= (X, \alpha)^d + \tilde{a}_1(X, \alpha)^{d-2}(X, X) + \dots \end{aligned}$$

Dann ist jedoch  $P - \tilde{P}$  ein harmonisches Polynom, welches durch  $(X, X)$  teilbar ist und somit  $P - \tilde{P} = 0$ .  $\square$

**DEFINITION.** Seien  $d \in \mathbb{N}_0$  und  $\alpha \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Das bis auf skalare Vielfache eindeutig bestimmte harmonische und bzgl.  $\alpha$  zonale Polynom in  $\mathcal{F}_{n,d}$  wird als *Gegenbauerpolynom*  $P_d^\alpha$  bezeichnet.

**BEISPIELE 2.1.6.** Mit Hilfe des im Beweis von 2.1.5 beschriebenen Gleichungssystems lassen sich die Gegenbauerpolynome  $P_d^\alpha$  explizit bestimmen. Für die Grade  $d = 1, \dots, 4$  lauten diese beispielsweise:

$$\begin{aligned} P_1^\alpha(X) &= (X, \alpha) \\ P_2^\alpha(X) &= (X, \alpha)^2 - \frac{1}{n}(\alpha, \alpha)(X, X) \\ P_3^\alpha(X) &= (X, \alpha)^3 - \frac{1}{n+2}(\alpha, \alpha)(X, \alpha)(X, X) \\ P_4^\alpha(X) &= (X, \alpha)^4 - \frac{6}{n+4}(\alpha, \alpha)(X, \alpha)^2(X, X) + \frac{3}{(n+2)(n+4)}(\alpha, \alpha)^2(X, X)^2 \end{aligned}$$

■

**BEMERKUNGEN 2.1.7.**

- (i) Es gibt für  $n > 2$  den folgenden Zusammenhang zwischen den Gegenbauerpolynomen  $P_d^\alpha$  und den gewöhnlichen Gegenbauerpolynomen  $G_d^{(p)}$  vom Grad  $d$  und zum Parameter  $p$  in

einer Veränderlichen

$$P_d^\alpha(X) = \sqrt{(X, X)(\alpha, \alpha)}^d \cdot G_d^{(n/2-1)} \left( \frac{(X, \alpha)}{\sqrt{(X, X)(\alpha, \alpha)}} \right)$$

Dabei können die Gegenbauerpolynome  $G_d^{(p)}$  rekursiv beschrieben werden durch  $G_0^{(p)}(t) = 1$ ,  $G_1^{(p)}(t) = 2pt$  und für  $d \geq 2$

$$G_d^{(p)}(t) = \frac{2(d+p-1)}{d} t G_{d-1}^{(p)}(t) - \frac{d+2p-2}{d} G_{d-2}^{(p)}(t).$$

- (ii) Eine genauere Betrachtung des im Beweis zu Prop. 2.1.5 beschriebenen Gleichungssystems ergibt, dass Koeffizienten  $a_0, \dots, a_{\lfloor d/2 \rfloor}$  der Darstellung in (5) in  $\mathbb{Q}((\alpha, \alpha))$  liegen.

Somit folgt zum einen, dass der Polynomwert  $P_d^\alpha(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^n$  nur in Abhängigkeit der Skalarprodukte  $(x, x)$ ,  $(\alpha, \alpha)$  und  $(x, \alpha)$  berechenbar ist (vgl. auch die Darstellung in (i)).

Ist  $L$  ein ganzzahliges Gitter und  $\alpha \in L$ , so folgt zum anderen, dass der Wert  $P_d^\alpha(x)$  für jedes  $x \in L$  eine rationale Zahl ist. Ist darüber hinaus  $d$  gerade, so kommt in dem Polynom  $P_d^\alpha$  der Term  $(X, \alpha)$  stets mit geradem Exponenten vor. Folglich ist auch der Wert  $P_d^\alpha(y)$  für jedes  $y \in L^\natural = \sqrt{\ell}L$  rational, da  $(y, \alpha) \in \sqrt{\ell}\mathbb{Z}$ . ■

## 2.2. Thetareihen mit sphärischen Koeffizienten

DEFINITION. Zu einem harmonischen Polynom  $P \in \text{Harm}_{n,d}$  und einem geraden Gitter  $L \subset \mathbb{R}^n$  kann man die Thetareihe zum Polynom  $P$ , genannt *Thetareihe mit sphärischen Koeffizienten*, wie folgt definieren:

$$\theta_{L,P} := \sum_{x \in L} P(x) q^{\frac{(x,x)}{2}}$$

PROPOSITION 2.2.1. (vgl. [Miy89] Cor. 4.9.5) Sei  $P \in \text{Harm}_{n,d}$  ein harmonisches Polynom und  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  im Geschlecht  $\mathcal{G}$ . Dann ist  $\theta_{L,P}$  eine Modulform vom Gewicht  $k = \frac{n}{2} + d$  zur Gruppe  $\Gamma_0(\ell)$  und zum Charakter  $\chi_{n/2, \mathcal{G}}$ . Ist  $d > 0$ , so ist  $\theta_{L,P}$  eine Spitzenform. □

Ist  $d$  ungerade, so ist  $P(-x) = -P(x)$  und somit  $\theta_{L,P} = 0$ . Daher sind in der Folge die Aussagen für ungerades  $d \in \mathbb{N}$  zumeist trivialerweise erfüllt und deshalb hauptsächlich für gerades  $d \in \mathbb{N}$  von Interesse. Abkürzend bezeichne für das Folgende stets  $k := \frac{n}{2} + d$  und weiter sei  $\ell$  für den Rest des Kapitels als **Primzahl** vorausgesetzt. Es wird nun die Wirkung der Fricke-Involution auf  $\theta_{L,P}$  beschrieben:

LEMMA 2.2.2. (vgl. [Miy89] Cor. 4.9.5) Ist  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$ , so gilt

$$\theta_{L,P} \mid_k W_\ell = i^{n/2} \frac{\ell^{n/4}}{\sqrt{\det(L)}} \theta_{L^\natural, P}.$$

Insbesondere gilt für ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  die Gleichheit  $\theta_{L,P} \mid_k W_\ell = \chi_{n/2}(W_\ell) \cdot \theta_{L^\natural, P}$ . □

KOROLLAR 2.2.3. Ist  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  und  $P$  ein harmonisches Polynom vom Grad  $d > 0$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \theta_{L,P} + \theta_{L^\natural, P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2}) \\ \theta_{L,P} - \theta_{L^\natural, P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2+2}) \end{aligned}$$

BEWEIS. Zunächst gilt  $(\theta_{L,P} \pm \theta_{L^{\natural},P}) \mid_k A = \chi_{n/2}(A)(\theta_{L,P} \pm \theta_{L^{\natural},P})$  und  $\chi_{n/2}(A) = \chi_{n/2+2}(A)$  für alle  $A \in \Gamma_0(\ell)$ . Mithilfe von Lemma 2.2.2 erhält man weiter

$$\begin{aligned} (\theta_{L,P} + \theta_{L^{\natural},P}) \mid_k W_\ell &= i^{n/2} \cdot (\theta_{L^{\natural},P} + \theta_{L,P}) = \chi_{n/2}(W_\ell) \cdot (\theta_{L,P} + \theta_{L^{\natural},P}) \\ (\theta_{L,P} - \theta_{L^{\natural},P}) \mid_k W_\ell &= i^{n/2} \cdot (\theta_{L^{\natural},P} - \theta_{L,P}) = i^{n/2+2} \cdot (\theta_{L,P} - \theta_{L^{\natural},P}) \\ &= \chi_{n/2+2}(W_\ell) \cdot (\theta_{L,P} - \theta_{L^{\natural},P}) \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $d > 0$  ist, sind wie bereits oben erwähnt sowohl  $\theta_{L,P}$  als auch  $\theta_{L^{\natural},P}$  Spitzenformen und damit auch deren Summe bzw. Differenz  $\theta_{L,P} \pm \theta_{L^{\natural},P}$ .  $\square$

Da  $\chi_k = \chi_{k \bmod 4}$  gilt, erhält man also zusammenfassend für ein sphärisches Polynom  $P$  vom Grad  $d \equiv_4 0$

$$\begin{aligned} \theta_{L,P} + \theta_{L^{\natural},P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) \\ \theta_{L,P} - \theta_{L^{\natural},P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}), \end{aligned}$$

während für ein sphärisches Polynom  $P$  vom Grad  $d \equiv_4 2$  gilt

$$\begin{aligned} \theta_{L,P} - \theta_{L^{\natural},P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) \\ \theta_{L,P} + \theta_{L^{\natural},P} &\in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}). \end{aligned}$$

Eine Basis des Raumes  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$  wurde in Satz 1.2.4 bestimmt. Es stellt sich also die Frage nach einer expliziten Beschreibung des Raumes  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$ .

LEMMA 2.2.4. (vgl. [BV01] Proposition 3.2)

a) Es gilt die folgende direkte Summenzerlegung

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) = \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) \oplus \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$$

und damit insbesondere

$$\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) - \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k).$$

b) Für alle  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$  gibt es eine Zahl  $k_2 \in \mathbb{N}$  und eine Modulform  $\Phi_{k_2}$  vom Gewicht  $k_2$ , sodass im Fall von  $\ell \in \{3, 7, 11, 23\}$  für alle Gewichte  $k \in \mathbb{N}$  und im Fall von  $\ell \in \{2, 5\}$  für  $k \in 2\mathbb{N}$  gilt

$$\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = \Phi_{k_2} \cdot \mathcal{M}_{k-k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k-k_2})$$

Insbesondere gilt für die Dimension  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = 1 + \lfloor \frac{k-k_2}{k_1} \rfloor$  für  $k \geq k_2$  und 0 sonst.

BEWEIS. a) Sei  $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  beliebig. Dann gilt

$$f = \frac{1}{2} \underbrace{(f + i^{-k} \cdot f \mid_k W_\ell)}_{=: f_1} + \frac{1}{2} \underbrace{(f - i^{-k} \cdot f \mid_k W_\ell)}_{=: f_2}$$

Dann ist  $f_1$  in  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} f_1 \mid_k W_\ell &= (f + i^{-k} \cdot f \mid_k W_\ell) \mid_k W_\ell = f \mid_k W_\ell + i^{-k} \cdot f \mid_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= f \mid_k W_\ell + i^{-k} (-1)^k \cdot f = i^k \cdot (i^{-k} f \mid_k W_\ell + f) = \chi_k(W_\ell) \cdot f_1 \end{aligned}$$

Ähnlich zeigt man, dass  $f_2 \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$ , denn:

$$\begin{aligned} f_2 |_k W_\ell &= (f - i^{-k} \cdot f |_k W_\ell) |_k W_\ell = f |_k W_\ell - i^{-k} \cdot f |_k \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= f |_k W_\ell - i^{-k}(-1)^k \cdot f = -i^k \cdot (-i^{-k} f |_k W_\ell + f) = \chi_{k+2}(W_\ell) \cdot f_2 \end{aligned}$$

Folglich ist  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) + \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$ . Sei nun  $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) \cap \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$ . Dann folgt

$$i^k \cdot f = \chi_k(W_\ell) \cdot f = f |_k W_\ell = \chi_{k+2}(W_\ell) \cdot f = -i^k \cdot f$$

Also ist  $f = 0$  und damit  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) \cap \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = \{0\}$ . Es folgt somit die Behauptung.

b) Die Funktion  $\Phi_{k_2}$  sei wie in der folgenden Tabelle angegeben:

$\ell$	$L$	$\Phi_{k_2}$	$k_2$	normierte $q$ -Entwicklung von $\Phi$
2	$\mathbb{D}_4 \perp \mathbb{D}_4$	$\theta_{L, P_8} - \theta_{L^\flat, P_8}$	12	$q - 88q^2 + 252q^3 + 64q^4 + O(q^5)$
3	$\mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2$	$\theta_{L, P_6} + \theta_{L^\flat, P_6}$	9	$q - 42q^2 + 171q^3 - 248q^4 + O(q^5)$
5	$L_0$	$\theta_{L, P_6} + \theta_{L^\flat, P_6}$	8	$q - 14q^2 - 48q^3 + 68q^4 + O(q^5)$
7	$L_0 \perp L_0$	$\theta_{L, P_4} - \theta_{L^\flat, P_4}$	6	$q - 10q^2 - 14q^3 + 68q^4 + O(q^5)$
11	$L_0 \perp \tilde{L}$	$\theta_{L, P_2} + \theta_{L^\flat, P_2}$	5	$q - 6q^2 - 3q^3 - 14q^4 + O(q^5)$
23	$L_0^{(1)} \perp L_0^{(2)}$	$\theta_{L, P_2} + \theta_{L^\flat, P_2}$	4	$q - 2q^2 - 5q^3 - 4q^4 + O(q^5)$

Dabei bezeichne  $L_0$  das jeweils eindeutig bestimmte Gitter im Geschlecht  $\text{II}_4(5^{-2})$ ,  $\text{II}_2(7^{+1})$  bzw.  $\text{II}_2(11^{+1})$ . Weiter seien  $L_0^{(1)}$  und  $L_0^{(2)}$  die beiden Gitter im Geschlecht  $\text{II}_2(23^{+1})$  und  $\tilde{L}$  das eindeutig bestimmte extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_4(11^{+2})$ .

$P_d$  bezeichne das sphärische Polynom vom Grad  $d$  bzgl. eines beliebigen kürzesten Vektors  $\alpha$  aus dem jeweiligen Gitter  $L$  (die Funktion  $\Phi_{k_2}$  hängt in allen Fällen nicht von der Wahl von  $\alpha$  ab).

Nach Korollar 2.2.3 liegt also die Funktion  $\Phi_{k_2}$  in  $\mathcal{S}_{k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k_2+2})$ . Offenbar ist dann das Produkt  $\Phi_{k_2} \cdot f$  für beliebiges  $f \in \mathcal{M}_{k-k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k-k_2})$  in  $\mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$ , denn

$$\begin{aligned} (\Phi_{k_2} \cdot f) |_k W_\ell &= (\Phi_{k_2} |_{k_2} W_\ell) \cdot (f |_{k-k_2} W_\ell) = (\chi_{k_2+2}(W_\ell) \cdot \Phi_{k_2}) \cdot (\chi_{k-k_2}(W_\ell) \cdot f) \\ &= \chi_{k+2}(W_\ell) \cdot (\Phi_{k_2} \cdot f) \end{aligned}$$

Dies zeigt die Inklusion  $\Phi_{k_2} \cdot \mathcal{M}_{k-k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k-k_2}) \subseteq \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$ . Die behauptete Gleichheit würde somit aus der Gleichheit der Dimensionen folgen. Nach a) bleibt also zu zeigen:

$$(6) \quad \dim \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2}) = \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) - \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$$

Wie bereits in Satz 1.2.4 gesehen gilt

$$\dim \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = \begin{cases} 1 + \lfloor \frac{k}{k_1} \rfloor & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases}$$

und  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = \dim \mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) - 1$  für  $k \geq 0$  und 0 sonst.

Die Dimensionsformeln für den Raum  $\mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k)$  für alle Gewichte  $k \in \mathbb{N}$  im Fall von  $\ell \in \{3, 7, 11, 23\}$  und für  $k \in 2\mathbb{N}$  im Fall von  $\ell \in \{2, 5\}$  lauten wie folgt (vgl. [Ste10] §6):

$\ell$	2	3	5	7	11	23
$k = 1$	-	0	-	0	0	1
$k = 2$	0	0	0	0	1	2
$k \geq 3$ ungerade	-	$\lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$	-	$2 \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$	$k - 2$	$2k - 3$
$k \geq 4$ gerade	$\lfloor \frac{k}{4} \rfloor - 1$	$\lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$	$2 \lfloor \frac{k}{4} \rfloor - 1$	$2 \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$	$k - 2$	$2k - 3$

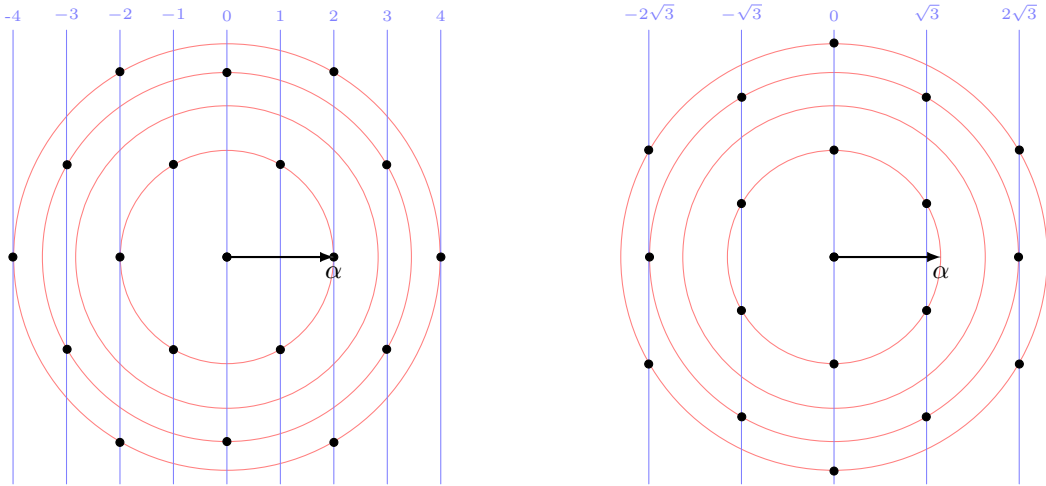


ABBILDUNG 2.1. Vektorkonfigurationen für das Gitter  $L = \mathbb{A}_2$ . Links: Die Anzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  für einen (beliebigen) kürzesten Vektor  $\alpha \in L_2$ . Rechts: Die Anzahlen  $n_{2m,j}^{\natural}(\alpha)$ .

Mit etwas Rechnung kann die Gleichheit in (6) verifiziert werden. Dies soll hier exemplarisch für  $\ell = 3$  ausgeführt werden.

Zunächst gilt für  $k < k_2 = 9$ , dass  $\dim \mathcal{M}_{k-k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = 0$  ist. Auch ist  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) - \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = 0$ , denn für  $k < 6$  gilt offenbar  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) = \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = 0$ , wohingegen für  $k \in \{6, 7, 8\}$  gilt  $\dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) = \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) = 1$ . Für  $k \geq 9$  gilt

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{M}_{k-k_2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{k-k_2}) &= 1 + \lfloor \frac{k-9}{6} \rfloor = \lfloor \frac{k-3}{6} \rfloor \\ \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_0(\ell), \chi_k) - \dim \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k) &= \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1 - \lfloor \frac{k}{6} \rfloor \end{aligned}$$

Mittels einer Fallunterscheidung nach  $k$  modulo 6 kann man nun leicht einsehen, dass diese beiden Ausdrücke übereinstimmen.  $\square$

### 2.3. Berechnung der Konfigurationsanzahlen

Ist  $L$  ein ganzzahliges Gitter, so gilt für alle  $x, y \in L$  definitionsgemäß  $(x, y) \in \mathbb{Z}$ . Besitzt  $L$  die Stufe  $\ell$ , dann gilt weiter  $(x, y) \in \sqrt{\ell}\mathbb{Z}$  für alle  $x \in L$  und  $y \in L^{\natural} = \sqrt{\ell}L^{\#}$ .

DEFINITION. Sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und seien  $m \in \mathbb{N}$  und  $i \in \mathbb{N}_0$ . Die *Konfigurationsanzahlen* bzgl. des Vektors  $\alpha \in L$  und dem Wert  $i$  auf der Schicht  $L_{2m} := \{x \in L \mid (x, x) = 2m\}$  bzw.  $L_{2m}^{\natural} := \{y \in L^{\natural} \mid (y, y) = 2m\}$  sind definiert als

$$\begin{aligned} n_{2m,i}(\alpha) &:= |\{x \in L_{2m} \mid (x, \alpha) = \pm i\}| \\ n_{2m,j}^{\natural}(\alpha) &:= |\{y \in L_{2m}^{\natural} \mid (y, \alpha) = \pm\sqrt{\ell}j\}| \end{aligned}$$

Für konkrete Gitter können die Konfigurationsanzahlen in kleinen Dimensionen durch Abzählen bestimmt werden (vgl. Abb. 2.1). In größeren Dimensionen können diese für ein konkretes Gitter zum Beispiel mit MAGMA bestimmt werden:

## BEISPIELE 2.3.1.

- a) Die Automorphismengruppe  $O(L)$  des Coxeter-Todd-Gitters  $L = CT_{12}$  operiert transitiv auf der Menge der kürzesten Vektoren. Daher sind die Konfigurationsanzahlen für alle kürzesten Vektoren  $\alpha \in L_4$  identisch:

$i$	0	1	2	3	4	$\geq 5$
$n_{4,i}(\alpha)$	270	320	164	0	2	0
$n_{6,i}(\alpha)$	1120	1728	864	320	0	0

- b) Ist  $L$  das eindeutig bestimmte extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{14}(7^+7)$ , so zerfallen die 560 kürzesten Vektoren von  $L$  unter der Operation der Automorphismengruppe  $O(L)$  in drei Bahnen  $B_1, B_2, B_3$  mit den Längen  $|B_1| = |B_2| = 252$  und  $|B_3| = 56$ . Es gilt:

$i$	Bahn	0	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
$n_{4,i}(\alpha)$	$\alpha \in B_1 \cup B_2$	116	236	142	64	0	0	2	0
$n_{4,i}(\alpha)$	$\alpha \in B_3$	144	180	198	36	0	0	2	0

■

Zusätzlich sei in diesem Abschnitt vorausgesetzt, dass  $\theta_L = \theta_{L^\natural}$  gilt. Somit besitzt  $L^\natural$  dasselbe Minimum wie  $L$ . Folglich ist für jedes  $P \in \text{Harm}_{n,d}$  mit  $d > 0$  die Spitzenform  $\theta_{L,P} \pm \theta_{L^\natural,P}$  von der Form  $O(q^{\min(L)/2})$ . Ziel des folgenden Abschnitts ist es, alle möglichen Konfigurationsanzahlen eines Gitters  $L$  nur in Abhängigkeit seiner (potenziellen) Thetareihe  $\theta_L$ , welche die Voraussetzung  $\theta_L = \theta_{L^\natural}$  erfüllt, zu berechnen. Dies geschieht mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems mit den Konfigurationsanzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  bzw.  $n_{2m,i}^\natural(\alpha)$  als Unbekannte.

Zunächst ist dazu die Anzahl  $s$  der Schichten festzulegen, für die die Anzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  sowie  $n_{2m,j}^\natural(\alpha)$  für  $m \in \mathcal{M} := \{\frac{\min(L)}{2}, \dots, \frac{\min(L)}{2} + (s-1)\}$  bestimmt werden sollen. Des Weiteren muss die Quadratlänge  $a := (\alpha, \alpha)$  des Vektors  $\alpha$  festgelegt werden.

Das im Folgenden beschriebene lineare Gleichungssystem wird so beschaffen sein, dass es als Lösungsmenge für jeden Vektor  $\alpha \in L$  mit  $(\alpha, \alpha) = a$  alle denkbaren Konfigurationsanzahlen für die Schichten  $L_{2m}$  und  $L_{2m}^\natural$  mit  $m \in \mathcal{M}$  umfasst.

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung zeigt man, dass die Zahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  abhängig von der Quadratlänge  $a = (\alpha, \alpha)$  nur für endlich viele  $i \in \mathbb{N}_0$  von 0 verschieden sind, denn ist  $x \in L$  mit  $|(x, \alpha)| = i$ , so folgt

$$(7) \quad i = |(x, \alpha)| \leq \sqrt{(x, x) \cdot (\alpha, \alpha)} = \sqrt{2m \cdot a}.$$

Aufgrund der Ganzzahligkeit von  $(x, \alpha)$  gilt bereits  $i = |(x, \alpha)| \leq \lfloor \sqrt{2m \cdot a} \rfloor$ . Daher ist  $n_{2m,i}(\alpha) = 0$  für  $i > \lfloor \sqrt{2m \cdot a} \rfloor$ . Ähnlich ist es bei den Zahlen  $n_{2m,j}^\natural(\alpha)$ , denn auch hier folgt aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\sqrt{\ell} j = |(y, \alpha)| \leq \sqrt{(y, y) \cdot (\alpha, \alpha)} = \sqrt{2m \cdot a} \Leftrightarrow j \leq \sqrt{\frac{2m \cdot a}{\ell}},$$

wenn  $\sqrt{\ell} j = |(y, \alpha)|$  für ein  $y \in L^\natural$ . Hier ist ebenfalls aufgrund der Ganzzahligkeit von  $j$  dann schon  $j \leq \lfloor \sqrt{\frac{2m \cdot a}{\ell}} \rfloor$ . Somit ist  $n_{2m,j}^\natural(\alpha) = 0$  für  $j > \lfloor \sqrt{\frac{2m \cdot a}{\ell}} \rfloor$ .



Es bezeichne  $\mathcal{I}(m) := \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{2m \cdot a} \rfloor\}$  die Menge der verbleibenden möglichen Skalarprodukte  $i = (x, \alpha) \in \mathbb{N}_0$  eines Vektors  $x \in L_{2m}$  mit  $\alpha$ . Entsprechend sei  $\mathcal{I}'(m) = \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{\frac{2m \cdot a}{\ell}} \rfloor\}$  die Menge der  $j \in \mathbb{N}_0$ , sodass  $\sqrt{\ell}j = (y, \alpha)$  ein mögliches Skalarprodukt von  $y \in L_{2m}^{\natural}$  mit  $\alpha$  ist.

Der Variablenvektor dieses linearen Gleichungssystems ist also von der Form

$$\vec{n} = (\dots, n_{2m,i}(\alpha), \dots, n_{2m,j}^{\natural}(\alpha), \dots)_{m \in \mathcal{M}, i \in \mathcal{I}(m), j \in \mathcal{I}'(m)}$$

Die Anzahl der Unbekannten ist demnach  $N := \sum_{m \in \mathcal{M}} (|\mathcal{I}(m)| + |\mathcal{I}'(m)|)$ , also jedenfalls endlich.

Es sollen nun (möglichst viele) lineare Gleichungen in den Unbekannten angegeben werden.

Bekanntlich gilt Gleichheit für die Cauchy-Schwarz-Ungleichung  $|(x, \alpha)| \leq \sqrt{(x, x)(\alpha, \alpha)}$  genau dann, wenn  $x$  und  $\alpha$  linear abhängig sind. Ist  $x \in L_a$  ein Vektor mit  $(x, \alpha) = \pm a$ , so sind also  $x$  und  $\alpha$  linear abhängig und wegen  $(x, x) = a = (\alpha, \alpha)$  folgt  $x = \pm \alpha$ . Da andererseits  $\pm \alpha \in L$  ist, folgt  $n_{a,a}(\alpha) = 2$ . Völlig analog folgt auch  $n_{\ell a, a}^{\natural}(\alpha) = 2$ . Ist  $a \in \mathcal{M}$  bzw.  $\ell a \in \mathcal{M}$ , so erhält man die Gleichungen

$$(8) \quad \begin{aligned} n_{a,a}(\alpha) &= 2 \\ n_{\ell a, a}^{\natural}(\alpha) &= 2 \end{aligned}$$

Hat das Gitter  $L$  das Minimum  $\min(L)$ , so muss auch jeder Vektor in dem von  $x$  und  $\alpha$  erzeugten Teilgitter von  $L$  mit Gram-Matrix  $\begin{pmatrix} 2m & (x, \alpha) \\ (x, \alpha) & a \end{pmatrix}$  mindestens Quadratlänge  $\min(L)$  besitzen. Ist also für ein  $i \in \mathbb{N}_0$   $\min\left(\begin{smallmatrix} 2m & i \\ i & a \end{smallmatrix}\right) < \min(L)$ , so folgt notwendig  $n_{2m,i}(\alpha) = 0$ .

Wegen  $\sqrt{\ell}L^{\natural} = \ell L^{\#} \subseteq L$  ist  $\sqrt{\ell}y \in L$  für jedes  $y \in L^{\natural}$  und daher ist  $n_{2m,j}^{\natural}(\alpha) = 0$ , wenn  $\min\left(\begin{smallmatrix} 2m\ell & j\ell \\ j\ell & a \end{smallmatrix}\right) < \min(L)$ . Für  $m \in \mathcal{M}$  erhält man die folgenden Gleichungen:

$$(9) \quad \begin{aligned} n_{2m,i}(\alpha) &= 0 \quad \text{für alle } i \in \mathcal{I}(m) \text{ mit } \min\left(\begin{smallmatrix} 2m & i \\ i & a \end{smallmatrix}\right) < \min(L) \\ n_{2m,j}^{\natural}(\alpha) &= 0 \quad \text{für alle } j \in \mathcal{I}'(m) \text{ mit } \min\left(\begin{smallmatrix} 2m\ell & j\ell \\ j\ell & a \end{smallmatrix}\right) < \min(L) \end{aligned}$$

Zusätzlich ergeben sich jeweils  $s$  Gleichungen für  $m \in \mathcal{M}$  durch:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} n_{2m,i}(\alpha) &= |L_{2m}| \\ \sum_{j \in \mathcal{I}'(m)} n_{2m,j}^{\natural}(\alpha) &= |L_{2m}^{\natural}| \end{aligned}$$

Es folgen nun die wesentlichen Gleichungen, die diese Methode ausmachen. Sei dazu  $P_d^{\alpha}$  das Gegenbauerpolynom vom Grad  $d \in 2\mathbb{N}$ . Wie in Prop. 2.1.3 gesehen, hängt der Funktionswert  $P_d^{\alpha}(x)$  für  $x \in L$  nur von der Quadratlänge  $2m = (x, x)$  von  $x$  und dem Skalarprodukt  $(x, \alpha)$  ab. Da  $P_d^{\alpha}$  ein homogenes Polynom von geradem Grad  $d$  ist, hängt  $P_d^{\alpha}(x)$  darüber hinaus sogar nur von  $i = |(x, \alpha)|$  ab. Der Wert  $P_d^{\alpha}(x)$  für ein  $x \in L_{2m}$  mit  $i = |(x, \alpha)|$  wird im Weiteren mit  $P_d^{\alpha}(2m, i)$  bezeichnet. Somit gilt für ein gerades Gitter  $L$

$$\theta_{L, P_d^{\alpha}} = \sum_{x \in L} P_d^{\alpha}(x) q^{(x, x)/2} = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{i \geq 0} n_{2m,i}(\alpha) P_d^{\alpha}(2m, i) \right) q^m.$$

Also erhält man für  $m \in \mathcal{M}$  als Koeffizient von  $q^m$  der Reihe  $\theta_{L, P_d^\alpha} \pm \theta_{L^\natural, P_d^\alpha}$  mit

$$\sum_{i \in \mathcal{I}(m)} n_{2m, i}(\alpha) P_d^\alpha(2m, i) \pm \sum_{j \in \mathcal{I}'(m)} n_{2m, j}^\natural(\alpha) P_d^\alpha(2m, \sqrt{\ell}j)$$

einen Ausdruck, der linear in den Konfigurationsanzahlen  $\vec{n} = (\dots, n_{2m, i}(\alpha), \dots, n_{2m, j}^\natural(\alpha), \dots)$  ist.

Wie im vorangegangenen Abschnitt gesehen, gilt  $\theta_{L, P_d^\alpha} \pm \theta_{L, P_d^\alpha} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$  falls  $d \equiv_4 0$  bzw.  $d \equiv_4 2$  und  $\theta_{L, P_d^\alpha} \mp \theta_{L, P_d^\alpha} \in \mathcal{S}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_{k+2})$  für  $d \equiv_4 2$  bzw.  $d \equiv_4 0$ . Aufgrund der Voraussetzung  $\theta_L = \theta_{L^\natural}$  müssen die ersten  $\frac{\min(L)}{2}$  Koeffizienten in der  $q$ -Entwicklung dieser Reihen gleich 0 sein. Somit besitzen diese Reihen eine Darstellung in den Elementen

$$(11) \quad \left\{ \Delta_{k_1}^i \theta_{k_0}^j \mid k_1 i + k_0 j = \frac{n}{2} + d, i \geq \frac{\min(L)}{2} \right\}$$

beziehungsweise

$$(12) \quad \left\{ \Phi_{k_2} \Delta_{k_1}^i \theta_{k_0}^j \mid k_2 + k_1 i + k_0 j = \frac{n}{2} + d, i \geq \frac{\min(L)}{2} - 1 \right\}$$

Insbesondere sind diese Reihen also durch  $\Delta_{k_1}^{\frac{\min(L)}{2}}$  bzw.  $\Phi_{k_2} \Delta_{k_1}^{\frac{\min(L)}{2} - 1}$  teilbar in dem Sinne, dass es Modulformen  $\Psi$  und  $\Psi'$  gibt mit

$$(13) \quad \theta_{L, P_d^\alpha} \pm \theta_{L^\natural, P_d^\alpha} = \begin{cases} \Delta_{k_1}^{\frac{\min(L)}{2}} \cdot \Psi & \text{falls } \frac{n}{2} + d \geq \frac{\min(L)}{2} k_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(14) \quad \theta_{L, P_d^\alpha} \mp \theta_{L^\natural, P_d^\alpha} = \begin{cases} \Phi_{k_2} \cdot \Delta_{k_1}^{\frac{\min(L)}{2} - 1} \cdot \Psi' & \text{falls } \frac{n}{2} + d \geq k_2 + \left(\frac{\min(L)}{2} - 1\right) k_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei  $\Psi$  das Gewicht  $\frac{n}{2} + d - \frac{\min(L)}{2} k_1$  und  $\Psi'$  das Gewicht  $\frac{n}{2} + d - \left(\frac{\min(L)}{2} - 1\right) k_1 - k_2$  besitzt.

Somit erhält man für alle  $d \in 2\mathbb{N}$  mit  $d < \frac{\min(L)}{2} k_1 - \frac{n}{2}$  und  $m \in \mathcal{M}$  eine homogene Gleichung durch

$$(15) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} n_{2m, i}(\alpha) P_d^\alpha(2m, i) \pm \sum_{j \in \mathcal{I}'(m)} n_{2m, j}^\natural(\alpha) P_d^\alpha(2m, \sqrt{\ell}j) = 0$$

Ebenso erhält man weitere  $s$  homogene Gleichungen für alle  $d \in 2\mathbb{N}$  mit  $d < k_2 + \frac{(\min(L)}{2} - 1) k_1 - \frac{n}{2}$  durch

$$(16) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} n_{2m, i}(\alpha) P_d^\alpha(2m, i) \mp \sum_{j \in \mathcal{I}'(m)} n_{2m, j}^\natural(\alpha) P_d^\alpha(2m, \sqrt{\ell}j) = 0$$

Ist anderenfalls  $d \geq \frac{\min(L)}{2} k_1 - \frac{n}{2}$ , so liegt  $\Psi$  in dem von den Elementen aus (11) aufgespannten Unterraum der Dimension  $\delta(d) := 1 + \lfloor (\frac{n}{2} + d)/k_1 \rfloor - \frac{\min(L)}{2}$ . Folglich besitzt  $\Psi$  eine Darstellung als  $\Psi = c_1 \psi_1 + \dots + c_{\delta(d)} \psi_{\delta(d)}$  mit  $\psi_{i+1} := \Delta_{k_1}^{\frac{\min(L)}{2} + i} \theta_{k_0}^j$  für  $i \in \{0, \dots, \delta(d) - 1\}$  und  $k_1 i + k_0 j = \frac{n}{2} + d - \frac{\min(L)}{2} k_1$ , wobei  $c_1, \dots, c_{\delta(d)}$  zunächst als zusätzliche Variablen angesehen werden. Aus (13) erhält man daher

$$(17) \quad \sum_{i \in \mathcal{I}(m)} n_{2m, i}(\alpha) P_d^\alpha(2m, i) \pm \sum_{j \in \mathcal{I}'(m)} n_{2m, j}^\natural(\alpha) P_d^\alpha(2m, \sqrt{\ell}j) = c_1 \cdot \psi_1[m] + \dots + c_{\delta(d)} \cdot \psi_{\delta(d)}[m]$$

wobei hier  $\psi_i[m]$  den Koeffizienten von  $q^m$  in der  $q$ -Entwicklung von  $\psi_i$  bezeichnet. Aufgrund der speziellen Gestalt der  $q$ -Entwicklungen der  $\psi_i$  kommt man mit (17) für jedes  $m \in \mathcal{M}$  auf insgesamt  $s$  lineare Gleichungen der Form:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c|c}
 \vec{n} & c_i \\
 \hline
 \star \cdots \cdots \star & 1 \\
 \vdots & \star \cdots 0 \\
 \vdots & \vdots \cdots \cdots \\
 \star \cdots \cdots \star & \star \cdots \star 1 \\
 \hline
 \star \cdots \cdots \star & \star \cdots \cdots \star \\
 \vdots & \vdots \\
 \star \cdots \cdots \star & \star \cdots \cdots \star \\
 \hline
 \underbrace{\hspace{10em}}_N & \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta(d)}
 \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} \delta(d) \\ \\ \\ s - \delta(d) \end{array} \right\}
 \end{array}$$

Mit Hilfe des Blockes rechts oben, der offenbar Rang  $\delta(d)$  besitzt, kann rechts unten ein Nullblock erzeugt werden. Somit erhält man mit den  $s - \delta(d)$  unteren Gleichungen also homogene lineare Gleichungen in  $\vec{n}$ .

Analog liegt im Fall  $d \geq k_2 + (\frac{\min(L)}{2} - 1)k_1 - \frac{n}{2}$  die Modulform  $\Psi'$  in dem von den Elementen in (12) aufgespannten Raum der Dimension  $\delta'(d) := 2 + \lfloor (\frac{n}{2} + d - k_2)/k_1 \rfloor - \frac{\min(L)}{2}$ . Verfährt man hier völlig analog zu oben, so erhält man  $s - \delta'(d)$  homogene Gleichungen in  $\vec{n}$ .

Schließlich erhält man ein lineares Gleichungssystem der Form  $A\vec{n} = b$  mit  $N$  Unbekannten. Im Folgenden wird dieses lineare Gleichungssystem  $A\vec{n} = b$  mit  $\mathcal{S}_{s,a}$  bezeichnet.

**BEMERKUNG 2.3.2.** Sowohl die Matrix  $A$  als auch die rechte Seite  $b$  des Systems  $\mathcal{S}_{s,a}$  besitzen rationale Einträge. Für die Gleichungen (8), (9) und (10) ist dies offensichtlich. Für die aus (13) und (14) resultierenden Gleichungen folgt dies aus den Bemerkungen 1.2.5 und 2.1.7 (ii). Durch Multiplikation mit einer geeigneten ganzen Zahl ist es also möglich, ein äquivalentes ganzzahliges lineares Gleichungssystem zu erhalten. ■

Als mögliche Konfigurationsanzahlen kommen sicherlich nur ganzzahlige Lösungen  $\vec{n} \in \mathbb{Z}^N$  des linearen Gleichungssystems  $A\vec{n} = b$  in Frage. Besitzt  $\mathcal{S}_{s,a}$  keine ganzzahlige Lösung, so gibt es offenbar keine möglichen Konfigurationsanzahlen und somit kann ein Gitter mit der vorgegebenen Thetareihe  $\theta_L = \theta_{L^\natural}$  nicht existieren.

Anderenfalls sei die ganzzahlige Lösungsmenge in der Form  $\vec{n}_0 + \Lambda$  gegeben, wobei  $\vec{n}_0 \in \mathbb{Z}^N$  eine konkrete Lösung von  $\mathcal{S}_{s,a}$  ist und  $\Lambda \subseteq \mathbb{Z}^N$  die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen linearen Gleichungssystems  $A\vec{n} = 0$ . Offenbar ist  $\Lambda$  ein Teilgitter in  $\mathbb{Z}^N$  der Dimension  $t := \dim(\Lambda) = N - \text{rang}(A)$ .

Des Weiteren sind sämtliche Werte  $n_{2m,i}(\alpha)$  gerade Zahlen, denn ist  $(x, \alpha) = i$ , so ist  $(-x, \alpha) = -i$ . Genauso sind auch  $n_{2m,i}^\natural(\alpha)$  gerade. Sei daher  $\vec{n}_0$  so gewählt, dass jede Komponente gerade ist. Ist dies nicht möglich, so kann auch in diesem Fall ein Gitter mit  $\theta_L = \theta_{L^\natural}$  nicht existieren.

Sei nun  $\Lambda \neq \{0\}$  angenommen, d.h. das System  $\mathcal{S}_{s,a}$  besitzt unendlich viele Lösungen. Sei  $\Lambda^0 := \{\vec{n} \in \Lambda \subseteq \mathbb{Z}^N \mid n_i \equiv_2 0 \text{ für alle } i \in \{1, \dots, N\}\}$  dasjenige Teilgitter, dessen Elemente  $\vec{n}$  ebenfalls nur gerade Einträge besitzen. Ist  $T \in \mathbb{Z}^{N \times t}$  eine Matrix, dessen Spalten gerade eine Basis von  $\Lambda_0$  bilden, so lässt sich die Lösungsmenge also beschreiben durch  $\{\vec{n}_0 + T\vec{x} \mid \vec{x} \in \mathbb{Z}^t\}$  bzw. als  $f(\mathbb{Z}^t)$ , wenn  $f : \mathbb{R}^t \rightarrow \mathbb{R}^N$  die affine Abbildung mit  $\vec{x} \mapsto \vec{n}_0 + T\vec{x}$  bezeichnet.

Zuletzt sind die Konfigurationsanzahlen nicht-negative Zahlen, d.h.  $n_{2m,i}(\alpha) \geq 0$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  und  $i \in \mathcal{I}(m)$ . Außerdem sind diese nach oben beschränkt durch die Anzahl der Vektoren in der entsprechenden Schicht, also  $n_{2m,i}(\alpha) \leq |L_{2m}|$  für alle  $m \in \mathcal{M}$  und  $i \in \mathcal{I}(m)$ . Selbiges gilt für die Anzahlen  $n_{2m,i}^h(\alpha)$ . Diese  $2N$  Ungleichungen definieren also ein Polytop  $\tilde{\mathcal{P}} \subset \mathbb{R}^N$ , welches sämtliche denkbaren Konfigurationsanzahlvektoren  $\vec{n}$  enthält. Diese Vektoren werden parametrisiert durch  $\vec{n} = f(\vec{x})$ , wobei  $\vec{x}$  die Menge  $f^{-1}(\tilde{\mathcal{P}}) \cap \mathbb{Z}^t$  durchläuft.

Im Folgenden bezeichne  $\mathcal{P}_{s,a}$  die Menge  $f^{-1}(\tilde{\mathcal{P}})$ . Als Urbild des Polytops  $\tilde{\mathcal{P}}$  unter der affinen Abbildung  $f$  ist  $\mathcal{P}_{s,a}$  ebenfalls ein Polytop. Es sind also die ganzzahligen Punkte des Polytops  $\mathcal{P}_{s,a}$  zu bestimmen.

Im Folgenden soll diese Methode auf extremale Gitter angewendet werden: Wäre  $L$  ein solches extremales Gitter, so wäre nach Definition  $\theta_L = \theta_{L^h}$  gleich der entsprechenden extremalen Modulform. Sämtliche relevanten Konfigurationsanzahlen könnten also mit obigem Gleichungssystem berechnet werden.

Da mit der extremalen Modulform die potenzielle Thetareihe eines extremalen Gitters bekannt ist, ist dies auch möglich, ohne das Gitter konkret zu kennen.

### BEISPIELE 2.3.3.

- a) Für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  ist die Lösung des Gleichungssystems  $\mathcal{S}_{2,6}$  eindeutig bestimmt:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
$n_{6,i}(\alpha)$	96240	127008	34830	3040	0	0	2	0
$n_{8,i}(\alpha)$	6002370	8916480	3399408	594432	34830	0	0	0

- b) Für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{18}(7^{+9})$  ist die Lösungsmenge des Systems  $\mathcal{S}_{5,8}$  2-dimensional. Das Polytop  $\mathcal{P}_{5,8}$  besitzt das Volumen 0.16 und enthält genau 2 ganzzahlige Punkte.
- c) Für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  ist die Lösungsmenge des Systems  $\mathcal{S}_{2,8}$  2-dimensional. Das Polytop  $\mathcal{P}_{2,8}$  besitzt das Volumen 80.00 und enthält genau 63 ganzzahlige Punkte.
- d) Für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$  ist die Lösungsmenge des Systems  $\mathcal{S}_{7,10}$  5-dimensional. Das Polytop  $\mathcal{P}_{7,10}$  besitzt ein Volumen von circa 260748.30. ■

## 2.4. Nicht-Existenz extremaler Gitter

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie man mit Hilfe der berechneten Konfigurationsanzahlen in gewissen Fällen die Existenz extremaler Gitter ausschließen kann. Dazu dient folgendes Kriterium:

PROPOSITION 2.4.1. (vgl. [Ven01] Prop. 7.13a) Sei  $\mathcal{X}$  eine endliche Teilmenge von  $\mathbb{R}^p$ . Dann gilt für jedes  $d \in \mathbb{N}$

$$\sum_{x, \alpha \in \mathcal{X}} P_d^\alpha(x) \geq 0.$$

BEWEIS. Sei  $F := \sum_{\alpha \in \mathcal{X}} P_d^\alpha(X) \in \mathcal{F}_{n,d}$ . Dann gilt für das Skalarprodukt  $[\cdot, \cdot]$  auf  $\mathcal{F}_{n,d}$  aus (3):

$$[F, F] = \sum_{x, \alpha \in \mathcal{X}} [P_d^x(X), P_d^\alpha(X)] = \sum_{x, \alpha \in \mathcal{X}} [(X, x)^d, P_d^\alpha(X)] = \sum_{x, \alpha \in \mathcal{X}} P_d^\alpha(x)$$

Da  $[\cdot, \cdot]$  als Skalarprodukt auf  $\mathcal{F}_{n,d}$  positiv definit ist, folgt  $[F, F] \geq 0$  und damit die Behauptung. □

KOROLLAR 2.4.2. Sei  $L$  ein gerades Gitter und  $m \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es zu jedem  $d \in \mathbb{N}$  ein  $\alpha \in L_{2m}$  mit:

$$(18) \quad \sum_{i \geq 0} n_{2m,i}(\alpha) \cdot P_d^\alpha(2m,i) \geq 0$$

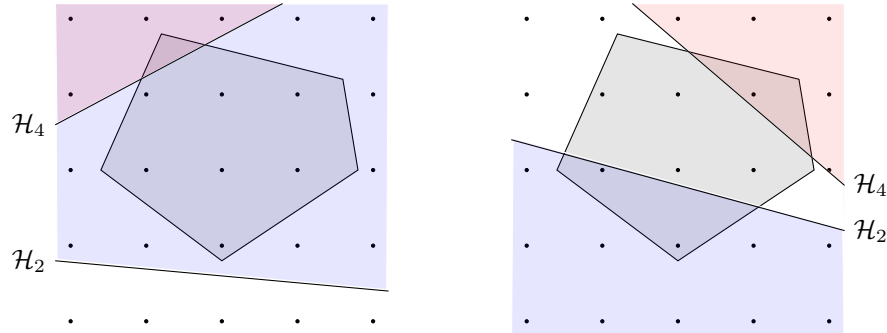
BEWEIS. Ist  $\mathcal{X} = L_{2m}$  eine Schicht eines Gitters, so folgt aus Prop. 2.4.1, dass gilt:

$$0 \leq \sum_{x, \alpha \in L_{2m}} P_d^\alpha(x) = \sum_{\alpha \in L_{2m}} \left( \sum_{i \geq 0} n_{2m,i}(\alpha) \cdot P_d^\alpha(2m,i) \right)$$

Da diese Summe über alle  $\alpha \in L_{2m}$  nicht-negativ ist, muss notwendig ein  $\alpha \in L_{2m}$  existieren, für das der entsprechende Summand nicht-negativ ist.  $\square$

Offenbar ist die Bedingung (18) linear in den Anzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  und liefert somit für jedes  $d \in \mathbb{N}$  eine weitere lineare Ungleichung, welche einen Halbraum  $\tilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathbb{R}^N$  definiert. Ist  $\mathcal{H}_d := f^{-1}(\tilde{\mathcal{H}}) \subseteq \mathbb{R}^t$  so muss nach Korollar 2.4.2 für jedes  $d \in \mathbb{N}$  das Polytop  $\mathcal{P}_{s,a} \cap \mathbb{Z}^t \cap \mathcal{H}_d$  wenigstens einen ganzzahligen Punkt  $\vec{x}$  enthalten, der durch  $\vec{n} = f(\vec{x})$  die Konfigurationsanzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  für den nach Korollar 2.4.2 existierenden Vektor  $\alpha$  liefert.

BEMERKUNG 2.4.3. Die Schnittmenge  $\mathcal{P}_{s,a} \cap \mathbb{Z}^t \cap \mathcal{H}_d$  muss jeweils für jeden Polynomgrad  $d \in \mathbb{N}$  gesondert betrachtet werden. Ist für ein  $d \in \mathbb{N}$  diese Menge leer (wie zum Beispiel im Bild links), so gibt es kein Gitter mit den geforderten Eigenschaften.



Ist jedoch für zwei verschiedene Polynomgrade  $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$  die Menge  $\mathcal{P}_{s,a} \cap \mathbb{Z}^t \cap \mathcal{H}_{d_1} \cap \mathcal{H}_{d_2}$  leer (wie etwa im Bild rechts), so kann man daraus im Allgemeinen nicht die Nicht-Existenz eines solchen Gitters folgern, da der Vektor  $\alpha$ , welcher nach Korollar 2.4.2 existieren muss, von dem Polynomgrad abhängen kann und daher für  $d_1$  und  $d_2$  verschieden sein kann. In diesem Fall lässt sich nur folgern, dass die Konfigurationsanzahlen nicht für jeden Vektor  $\alpha$  mit  $(\alpha, \alpha) = a$  gleich sein können und die Automorphismengruppe eines solchen Gitters nicht transitiv auf den Vektoren der Quadratlänge  $a$  operieren kann.  $\blacksquare$

Als Hauptergebnis dieses Kapitels erhält man:

SATZ 2.4.4. Es existiert kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$ .

BEWEIS. Sei  $L$  ein (hypothetisches) extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$ . Somit gilt  $\theta_L = \theta_{L^{\flat}} = 1 + 84672q^5 + 91728q^6 + O(q^7)$  und es kann also die oben beschriebene Methode angewendet werden, um die möglichen Konfigurationsanzahlen von  $L$  zu bestimmen. Wie in Beispiel 2.3.3 bereits erwähnt, ist die Lösungsmenge des Systems  $\mathcal{S}_{7,10}$  5-dimensional und das Polytop  $\mathcal{P}_{7,10}$  besitzt ein

Volumen von 260748.30. Es ist jedoch sowohl  $\mathcal{P}_{7,10} \cap \mathbb{Z}^5 \cap \mathcal{H}_4 = \emptyset$  als auch  $\mathcal{P}_{7,10} \cap \mathbb{Z}^5 \cap \mathcal{H}_6 = \emptyset$ . Somit kann ein solches Gitter nicht existieren.  $\square$

Nach Satz 1.2.9 c) erhält man also:

KOROLLAR 2.4.5. *Es existiert kein Gitter  $L$  im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$  mit  $\text{Minimum} \geq 10$ .*  $\square$

BEMERKUNGEN 2.4.6.

- (i) Die hier beschriebene Methode zeigt erfolgreich die Nicht-Existenz extremaler Gitter in einigen anderen Fällen: So ist zum Beispiel  $\mathcal{P}_{4,6} \cap \mathbb{Z}^1 \cap \mathcal{H}_4 = \emptyset$  für ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{12}(7^{+6})$ ,  $\mathcal{P}_{5,8} \cap \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{H}_4 = \emptyset$  für ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{18}(7^{+9})$  und  $\mathcal{P}_{7,8} \cap \mathbb{Z}^{11} \cap \mathcal{H}_4 = \emptyset$  für ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{12}(11^{+6})$ .
- (ii) Für den Fall eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  enthält die Menge  $\mathcal{P}_{2,8} \cap \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{H}_6$  genau 60 Elemente. Für alle anderen Polynomgrade  $d \in 2\mathbb{N}$  scheint die Menge  $\mathcal{P}_{2,8} \cap \mathbb{Z}^2 \cap \mathcal{H}_d$  unverändert 63 Elemente zu enthalten.
- (iii) Im Rahmen der Entstehung der Diplomarbeiten „Sphärische Polynome und ihre Anwendung auf Gitter kleiner Stufe“ von T. Helle (vgl. [**Hel12**]) und „Modulformen und Designeigenschaften von Gittern kleiner Stufe“ von R. Preuss (vgl. [**Pre12**]) ist die Methode jeweils mit vielen verschiedenen Parametern ( $s$  und  $a$ ) angewendet worden auf die  $\ell$ -modularen Geschlechter für die Stufen  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 11, 23\}$ .

Es scheint, als ob die oben beschriebene Methode in keinem weiteren Fall die Nicht-Existenz extremaler Gitter liefert.  $\blacksquare$

BEISPIEL 2.4.7. Das Geschlecht  $\text{II}_8(3^{+4})$  umfasst genau zwei Gitter. Einerseits das Gitter  $L_1 := 4\mathbb{A}_2$  und andererseits ein unzerlegbares Gitter  $L_2$ . Beide Gitter sind extremal und besitzen daher dieselbe Thetareihe. In beiden Fällen operiert die Automorphismengruppe transitiv auf den kürzesten Vektoren. Folglich sind für beide Gitter die Konfigurationsanzahlen eines kürzesten Vektors eindeutig bestimmt und lauten:

	$n_{2,0}(\alpha)$	$n_{2,1}(\alpha)$	$n_{2,2}(\alpha)$	$n_{2,0}^{\natural}(\alpha)$	$n_{2,1}^{\natural}(\alpha)$
$L_1$	18	4	2	20	4
$L_2$	6	16	2	24	0

Fasst man diese Anzahlen als Punkte im  $\mathbb{R}^5$  auf, so ist der Mittelpunkt der Strecke zwischen diesen beiden Punkten gerade der Punkt  $(12, 10, 2, 22, 2)$ . Dieser besitzt ebenfalls gerade positive Komponenten. Tatsächlich besitzt die Menge  $\mathcal{P}_{1,2} \cap \mathbb{Z}$  gerade drei Punkte.

Da die Konfigurationsanzahlen der beiden Gitter  $L_1$  und  $L_2$  jeweils für alle kürzesten Vektoren eindeutig bestimmt sind, müssen diese notwendig die Ungleichung (18) aus Korollar 2.4.2 erfüllen. Da der Vektor  $(12, 10, 2, 22, 2)$  zwischen diesen beiden Punkten liegt, muss also auch dieser die Ungleichung (18) erfüllen.  $\blacksquare$

Wie im obigen Beispiel gesehen, kann es Lösungen geben, welche „zwischen echten Lösungen“ liegen und die somit nicht mit den beschriebenen Methoden ausgeschlossen werden können. Es stellt sich die Frage, ob es andere Bedingungen an die Konfigurationsanzahlen gibt, mit denen solche Lösungen ausgeschlossen werden können. Im folgenden Abschnitt wird für gewisse Fälle eine solche Bedingung angegeben.

## 2.5. Berechnung der Thetareihe eines Nachbarn aus den Konfigurationsanzahlen

Sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter und  $p$  eine Primzahl mit  $p \nmid \det(L)$ . Ein Gitter  $M$  heißt ein  $p$ -Nachbar von  $L$ , wenn  $M$  ganzzahlig ist und  $L/(L \cap M) \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \cong M/(L \cap M)$  gilt. Gemäß [Kne02] (28.5) ist jeder  $p$ -Nachbar von  $L$  von der Form  $L(\alpha)$ , wobei  $\alpha \in L \setminus pL$  mit  $(\alpha, \alpha) \in p^2\mathbb{Z}$  und

$$L(\alpha) := \frac{1}{p}\mathbb{Z}\alpha + \underbrace{\{x \in L \mid (x, \alpha) \in p\mathbb{Z}\}}_{=: L_\alpha}$$

Man überlegt sich leicht, dass  $L(\alpha)$  genau dann gerade ist, wenn  $(\alpha, \alpha) \in 2p^2\mathbb{Z}$  ist. Für einen solchen geraden Nachbarn  $L(\alpha)$  lässt sich die Thetareihe nur in Abhängigkeit der Konfigurationsanzahlen bzgl.  $\alpha$  bestimmen:

**PROPOSITION 2.5.1.** *Sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter und  $p$  eine Primzahl mit  $p \nmid \det(L)$ . Weiter sei  $\alpha \in L \setminus pL$  mit  $(\alpha, \alpha) \in 2p^2\mathbb{Z}$ . Dann hängt die Thetareihe des (geraden) Gitters  $L(\alpha)$  nur von den Konfigurationsanzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  ab.*

**BEWEIS.** Zunächst ist klar, dass die Thetareihe des Teilgitters  $L_\alpha = \{x \in L \mid (x, \alpha) \in p\mathbb{Z}\}$  gegeben ist durch

$$\theta_{L_\alpha} = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{\substack{i \in \mathbb{N}_0 \\ p \mid i}} n_{2m,i}(\alpha) \right) \cdot q^m$$

Weiter gilt für das Translat  $L_\alpha - \lambda \frac{\alpha}{p}$  mit  $\lambda \neq 0$ :

$$\theta_{L_\alpha - \lambda \frac{\alpha}{p}} = \sum_{m \geq 0} \left( \sum_{k \geq 0} n_{2k,i(k)}(\alpha) \cdot \begin{cases} 1 & p \mid i(k) \\ 0 & p \nmid i(k) \end{cases} \right) \cdot q^m$$

wobei  $i(k) = p \cdot \left( \frac{\lambda a}{2p^2} - \frac{m-k}{\lambda} \right)$ , denn um die Vektoren  $x - \lambda \frac{\alpha}{p} \in L_\alpha - \lambda \frac{\alpha}{p}$  einer festen Quadratlänge  $2m$  zu zählen, sind alle Vektoren  $x \in L_\alpha$  jeder Quadratlänge  $2k$  zu betrachten, so dass der Vektor  $x - \lambda \frac{\alpha}{p}$  die Quadratlänge  $2m \stackrel{!}{=} (x - \lambda \frac{\alpha}{p}, x - \lambda \frac{\alpha}{p}) = (x, x) - \frac{2\lambda}{p}(x, \alpha) + \frac{\lambda^2}{p^2}(\alpha, \alpha) = 2k - \frac{2\lambda}{p}i + \frac{\lambda^2}{p^2}a$  besitzt. Dafür ist  $i$  nur abhängig von  $k$  wie oben angegeben zu wählen (das ist nur für endlich viele  $k$  möglich). Die betrachteten Vektoren  $x$  liegen aber nur genau dann in  $L_\alpha$ , wenn  $p \mid i(k)$  gilt.

Für die Thetareihe des Gitters  $L(\alpha)$  gilt schlussendlich  $\theta_{L(\alpha)} = \sum_{\lambda} \theta_{L_\alpha + \lambda \frac{\alpha}{p}}$ . □

Konkret erhält man beispielsweise:

**KOROLLAR 2.5.2.** *Sei  $L \subset \mathbb{R}^n$  ein gerades Gitter ungerader Determinante mit Minimum 8 und sei  $\alpha \in L_8$ . Dann erhält man als Thetareihe des 2-Nachbarn  $L(\alpha)$ :*

$$\theta_{L(\alpha)} = 1 + 2q + \frac{1}{2}n_{8,4}q^3 + (n_{8,0} + n_{8,2} + n_{8,4} + 2 + \frac{1}{2}(n_{8,2} + n_{10,4} + n_{12,6}))q^4 + O(q^5)$$

□

Mit Hilfe dieses Korollars ist es also explizit möglich, aus potenziellen Konfigurationsanzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  zu einem Vektor  $\alpha$  die potenzielle Thetareihe des Gitters  $L(\alpha)$  zu berechnen. Kann diese Reihe jedoch keine Thetareihe sein, weil etwa ungerade Koeffizienten auftreten, so ist auch die Lösung  $n_{2m,i}(\alpha)$  auszuschließen. Somit erhält man mittels dieser Methode im Wesentlichen bestimmte Kongruenzbedingungen an die Anzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  modulo 4. So muss beispielsweise  $n_{8,4}(\alpha) \equiv_4 0$  sein, damit der Koeffizient von  $q^3$  in der potenziellen Thetareihe  $\theta_{L(\alpha)}$  gerade ist.

## BEISPIELE 2.5.3.

- a) Ist  $L \in \text{II}_{24}(5^{+12})$  das Gitter ( $C2.J2YSL(2, 5)$ ) :  $C2$  (vgl. [LatDB]), dann operiert die Automorphismengruppe  $O(L)$  transitiv auf den kürzesten Vektoren  $L_8$ . Somit sind die Konfigurationsanzahlen für alle  $\alpha \in L_8$  identisch und lauten:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_{8,i}(\alpha)$	9550	14080	10032	2816	1320	0	0	0	2
$n_{10,i}(\alpha)$	53504	84480	63360	29440	8320	2816	0	0	0
$n_{12,i}(\alpha)$	447260	791296	565840	309760	139572	29440	10032	0	0

Mit Hilfe dieser Anzahlen und Korollar 2.5.2 kann man die Thetareihe des 2-Nachbarn  $L(\alpha)$  bestimmen:

$$\theta_{L(\alpha)} = 1 + 2q + 660q^3 + 35096q^4 + O(q^5)$$

Andererseits kann man nachrechnen, dass dies tatsächlich die Thetareihe eines 2-Nachbarn für beliebigen kürzesten Vektor  $\alpha \in L_8$  ist.

- b) Wie in Bsp. 2.3.3 b) erwähnt, besitzt das Polytop  $\mathcal{P}_{5,8}$  für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+9})$  genau zwei ganzzahlige Punkte. Die entsprechenden potenziellen Konfigurationsanzahlen lauten:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$n_{8,i}^{(1)}(\alpha)$	1624	2560	1904	768	576	0	0	0	2
$n_{8,i}^{(2)}(\alpha)$	1540	2686	1834	810	562	0	0	0	2

Hieraus lassen sich nun also die potenziellen Thetareihen der entsprechenden Nachbarn berechnen:

$$\theta_{L(\alpha)}^{(1)} = 1 + 2q + 288q^3 + O(q^4)$$

$$\theta_{L(\alpha)}^{(2)} = 1 + 2q + 281q^3 + O(q^4)$$

Somit kann also die Lösung  $n_{8,i}^{(2)}(\alpha)$  ausgeschlossen werden, während man mit dieser Methode keine Aussage über die Lösung  $n_{8,i}^{(1)}(\alpha)$  treffen kann.

- c) Im Fall eines extremalen Gitters  $L \in \text{II}_{36}(3^{+18})$  lassen sich somit insgesamt 41 der 63 gefundenen Lösungen ausschließen, so dass noch 22 mögliche Konfigurationsanzahlen  $n_{2m,i}(\alpha)$  für einen kürzesten Vektor  $\alpha \in L_8$  verbleiben. ■

## BEMERKUNGEN 2.5.4.

- (i) Ähnlich wie im Beweis zu Satz 1.2.9 kann man die Fricke-Involution anwenden auf diese potenziellen Thetareihen. Hätten diese negative Koeffizienten, so könnte man diese Lösungen ausschließen. In den betrachteten Fällen ist dies aber nicht so, tatsächlich hat hier auch die transformierte Reihe jeweils die Gestalt einer Thetareihe.
- (ii) Besitzt für ein betrachtetes Geschlecht der entsprechende Raum  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2})$  von Modulformen die Weierstraß-Eigenschaft und bestimmt man in Abhängigkeit der Konfigurationsanzahlen mehr Koeffizienten der entsprechenden Thetareihe als die Dimension des Raumes groß ist, so bekommt man weitere lineare Gleichungen in den Konfigurationsanzahlen  $\vec{n}$ . Diese Vorgehensweise scheint jedoch nicht praktikabel, weil die Anzahl  $s$  der Schichten dafür sehr groß gewählt werden muss. ■



## 2.6. Erzeugung durch Minimalvektoren

In diesem Unterkapitel soll gezeigt werden, dass ein extremales Gitter  $L \in \Pi_{36}(3^{+18})$  stets von seinen Minimalvektoren erzeugt sein muss, d.h.  $L = \langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{Z}} =: M$ . Für ähnliche Ergebnisse für unimodulare Gitter siehe [Kom09].

Notwendig dafür ist sicherlich zunächst, dass das Gitter *well-rounded* ist, d.h. die Minimalvektoren den Raum aufspannen, also  $\langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}L$  gilt. Dass dies so ist, wird in Lemma 2.6.1 gezeigt. Ein Beispiel eines Gitters, bei dem dieses zwar der Fall ist, die Minimalvektoren aber dennoch nur ein echtes Teilgitter erzeugen, ist das Gitter  $\mathbb{D}_5^{\#}$ .

Sei also nun  $\alpha + M$  eine Nebenklasse von  $M$ , wobei der Repräsentant  $\alpha$  so gewählt sein soll, dass  $a = (\alpha, \alpha)$  minimal ist. Dann muss entweder  $a = 0$  oder  $a \geq 10$  sein.

Andererseits kann ein solcher Vektor  $\alpha$  auch nicht beliebig lang sein. Dazu zunächst folgendes Lemma, welches den Begriff des sphärischen Designs benutzt: Eine Menge  $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$  mit  $(x, x) = (y, y)$  für alle  $x, y \in \mathcal{X}$  heißt *sphärisches  $t$ -Design*, wenn für jedes harmonische Polynom  $P \in \text{Harm}_{n,d}$  mit  $1 \leq d \leq t$  gilt:

$$(19) \quad \sum_{x \in \mathcal{X}} P(x) = 0$$

Gilt  $\mathcal{X} = -\mathcal{X}$  wie etwa bei einer Schicht  $L_{2m}$  eines Gitters, so genügt es, die Bedingung in (19) nur für gerade Polynomgrade  $d \leq t$  zu fordern.

LEMMA 2.6.1. *Ist  $L \subset V$  ein Gitter, für das die Minimalvektoren ein 3-Design bilden, so spannen diese den Raum  $V$  auf, d.h. es gilt  $\langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{R}} = V$ .*

*Insbesondere gilt dies für ein extremales Gitter im Geschlecht  $\Pi_{36}(3^{+18})$ .*

BEWEIS. Sei  $\alpha \in \langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp}$ . Dann gilt:

$$\sum_{x \in \text{Min}(L)} P_2^{\alpha}(x) = \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, \alpha)^2 - \frac{1}{n}(\alpha, \alpha) \sum_{x \in \text{Min}(L)} (x, x) = -\frac{1}{n}(\alpha, \alpha) \cdot \text{min}(L) \cdot |\text{Min}(L)|$$

Da nach Voraussetzung  $\text{Min}(L)$  ein 3-Design ist, muss insbesondere gelten:

$$0 = \sum_{x \in \text{Min}(L)} P_2^{\alpha}(x) = -\frac{1}{n}(\alpha, \alpha) \cdot \text{min}(L) \cdot |\text{Min}(L)|$$

Es folgt  $(\alpha, \alpha) = 0$ , also  $\alpha = 0$  und damit  $\langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{R}}^{\perp} = \{0\}$  bzw.  $\langle \text{Min}(L) \rangle_{\mathbb{R}} = V$ .

Die Menge  $\text{Min}(L)$  der Minimalvektoren eines extremales Gitters  $L$  im Geschlecht  $\Pi_{36}(3^{+18})$  erfüllt gerade die Design-Bedingung dieses Lemmas (vgl. [BV01] Cor. 4.1).  $\square$

Nach diesem Lemma ist es also möglich, eine  $\mathbb{R}$ -Basis aus den Vektoren der Länge 8 auszuwählen. Sei eine solche nun mit  $v_1, \dots, v_{36}$  bezeichnet. Ist nun also  $\alpha$  wie oben ein Repräsentant seiner Nebenklasse mit  $a = (\alpha, \alpha)$  minimal, so gibt es  $\lambda_1, \dots, \lambda_{36} \in \mathbb{R}$  so, dass

$$\alpha = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{36} v_{36}$$

Durch Addieren von Vektoren aus  $v_1, \dots, v_{36}$  kann man erreichen, dass alle  $\lambda_i$  im Intervall  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  liegen, wobei sich dadurch der Wert  $a$  höchstens vergrößert. Dann gilt folgende Abschätzung

$$\begin{aligned} a = (\alpha, \alpha) &\leq \left( \sum_{i=1}^{36} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{36} \lambda_i v_i \right) \leq \sum_{i=1}^{36} \lambda_i^2 (v_i, v_i) + 2 \sum_{i=1}^{36} \lambda_i \lambda_j (v_i, v_j) \\ &\leq \frac{1}{4} (36 \cdot 8 + 36 \cdot 35 \cdot 4) = 1332 \end{aligned}$$

Also ist gezeigt, dass für die Quadratlänge  $a = (\alpha, \alpha)$  eines kürzesten Vertreters  $\alpha$  seiner Nebenklasse  $\alpha + M$  gilt  $a \in \{0\} \cup \{10, 12, \dots, 1332\}$ .

Sei als erstes angenommen, es gibt eine Nebenklasse mit  $a = 10$ . Dann muss  $(x, \alpha) \leq 4$  sein für alle  $x \in \text{Min}(L)$ , denn sonst wäre  $\alpha - x \in \alpha + M$  ein kürzerer Vektor, weil  $(\alpha - x, \alpha - x) = a - 2(x, \alpha) + 8 < 10$ . Mit dieser Einschränkung erhält man für das System  $\mathcal{S}_{2,10}$  eine leere Lösungsmenge. Somit kann es keine Nebenklasse  $\alpha + M$  mit einem kürzesten Vertreter  $\alpha$  der Länge  $a = 10$  geben.

Als nächstes sei angenommen, es gibt eine Nebenklasse mit  $a = 12$ . Genau wie oben muss für alle  $x \in \text{Min}(L)$  gelten  $(x, \alpha) \leq 4$ .

Weiter kann man sich aber noch überlegen, dass es auch keinen Vektor  $x \in L$  mit  $(x, x) = 10$  geben darf mit  $(x, \alpha) > 5$ , denn sonst wäre  $(\alpha - x) + M$  eine Nebenklasse, für die es einen Repräsentanten  $\alpha - x$  geben würde, der eine Länge  $< a = 12$  hätte. Da, wie oben beschrieben, die Länge eines solchen Repräsentanten nicht 10 sein darf, muss die Nebenklasse  $(\alpha - x) + M = M$  sein. Dies würde aber implizieren, dass  $\alpha + M = x + M$  gilt und somit wäre  $x$  ein Repräsentant der Länge 10. Folglich wäre  $\alpha$  damit nicht der kürzeste Repräsentant seiner Nebenklasse wie aber angenommen.

Löst man das System  $\mathcal{S}_{2,12}$ , so erhält man ebenfalls eine leere Lösungsmenge. Also kann es auch keine Nebenklasse  $\alpha + M$  mit einem kürzesten Vertreter  $\alpha$  der Länge  $a = 12$  geben.

Diese Vorgehensweise kann man nun allgemein anwenden. Ist bereits gezeigt, dass der kürzeste Vertreter  $\alpha$  nicht die Länge  $\leq a$  besitzen darf, so muss für jedes  $x \in L$  mit  $(x, x) \leq a$  gelten, dass  $(x, \alpha) \leq \frac{(x, x)}{2}$  erfüllt ist. Es stellt sich heraus, dass die Systeme  $\mathcal{S}_{2,a}$  für  $a \in \{10, \dots, 24\}$  und  $\mathcal{S}_{3,a}$  für  $a \in \{26, \dots, 1332\}$  allesamt keine Lösung besitzen. Damit ist bewiesen

**SATZ 2.6.2.** *Ist  $L \in \Pi_{36}(3^{+18})$  ein extremales Gitter, so ist  $L$  von seinen Minimalvektoren erzeugt.*

□

## Hermitesche Strukturen von Gittern quadratfreier Stufe

In diesem Kapitel werden hermitesche Strukturen von geraden  $\mathbb{Z}$ -Gittern quadratfreier Stufe  $\ell$  über gewissen algebraischen Zahlkörpern betrachtet. Insbesondere werden hermitesche Strukturen der Gitter in den Quebbemannschen Geschlechtern über imaginär-quadratischen Zahlkörpern und Kreisteilungskörpern so weit wie möglich klassifiziert.

### 3.1. Gitter über Zahlkörpern und Transferkonstruktion

**3.1.1. Grundlegende Definitionen.** Geeignete Zahlkörper zur Betrachtung definiter hermitescher Formen sind die sogenannten CM-Körper:

**DEFINITION.** Ein Körper  $E$  heißt *CM-Körper*, falls dieser eine total imaginäre quadratische Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers  $F$  ist.

Damit besitzt der Körper  $F$  definitionsgemäß genau  $[F : \mathbb{Q}]$  reelle Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ , während der Körper  $E$  genau  $[E : \mathbb{Q}]$  komplexe Einbettungen  $\sigma : E \hookrightarrow \mathbb{C}$  besitzt.

Man kann zeigen, dass für je zwei Einbettungen  $\sigma_1, \sigma_2 : E \hookrightarrow \mathbb{C}$  und für alle  $\alpha \in E$  gilt  $\sigma_1^{-1}(\overline{\sigma_1(\alpha)}) = \sigma_2^{-1}(\overline{\sigma_2(\alpha)})$ . Die komplexe Konjugation in  $\mathbb{C}$  induziert also durch  $\bar{\alpha} := \sigma^{-1}(\overline{\sigma(\alpha)})$  eine von der Einbettung  $\sigma$  unabhängige Involution  $\bar{\cdot} : E \rightarrow E$  mit Fixkörper  $F = E \cap \mathbb{R}$ . Der Körper  $F$  ist also der maximal reelle Teilkörper von  $E$ .

Wichtige Beispiele für CM-Körper sind einerseits imaginär-quadratische Zahlkörper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  mit  $D \in \mathbb{N}$  quadratfrei und andererseits Kreisteilungskörper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  für  $m \in \mathbb{N}$  mit maximal reellem Teilkörper  $F = \mathbb{Q}(\zeta_m + \bar{\zeta}_m)$ . Der Körper  $E$  entsteht dabei durch Adjungieren der Wurzel aus  $\zeta_m^2 + \bar{\zeta}_m^2 - 2$  zu  $F$ .

Im Folgenden bezeichne  $E$  stets einen CM-Körper und  $F$  den maximal reellen Teilkörper von  $E$ . Folglich gilt  $[E : F] = 2$ . Der Ganzheitsring von  $E$  wird mit  $\mathfrak{D} := \mathbb{Z}_E$  bezeichnet, derjenige von  $F$  mit  $\mathfrak{o} := \mathbb{Z}_F$ . Als jeweils der Ganzheitsring eines algebraischen Zahlkörpers ist sowohl  $\mathfrak{D}$  als auch  $\mathfrak{o}$  ein Dedekindring.  $\mathfrak{D}$ -Ideale werden, wenn nicht anders gesagt, mit den Buchstaben  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$  und  $\mathfrak{o}$ -Ideale mit  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$  bezeichnet. Insbesondere werden mit  $\mathfrak{P}$  bzw.  $\mathfrak{p}$  Primideale von  $\mathfrak{D}$  bzw.  $\mathfrak{o}$  angegeben. Für ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A}$  ist die *Norm* gegeben durch  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) = |\mathfrak{D}/\mathfrak{A}|$ , für ein  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a}$  durch  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}) = |\mathfrak{o}/\mathfrak{a}|$ . Mit der Norm eines Ideals ist also stets die Idealnorm des zugehörigen Rings gemeint.

Wie bekanntlich für jeden Dedekindring gilt, lässt sich das Ideal  $p\mathfrak{D}$  für jede Primzahl  $p$  bis auf Reihenfolge eindeutig in ein Produkt von Primidealen zerlegen:

$$p\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_r^{e_r}$$

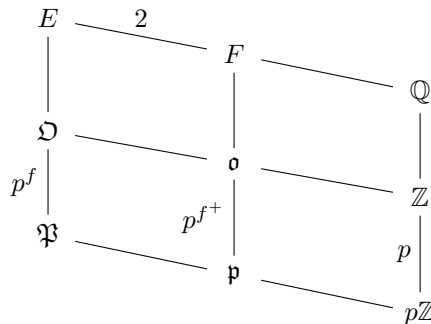
Dabei heißt die Zahl  $e_i$  der *Verzweigungsindex* von  $\mathfrak{P}_i$ , die Zahl  $f_i := [\mathfrak{D}/\mathfrak{P}_i : \mathbb{F}_p]$  heißt der *Trägheitsgrad* von  $\mathfrak{P}_i$ . Für diese gilt die sogenannte *fundamentale Gleichung*  $\sum_{i=1}^r e_i f_i = [E : \mathbb{Q}]$  (vgl. [Neu92])

I (8.2)). Das Primideal  $\mathfrak{P}_i$  heißt *unverzweigt* in  $E/\mathbb{Q}$ , wenn  $e_i = 1$  ist und ansonsten *verzweigt*. Eine Primzahl  $p$  heißt *unverzweigt* in  $E/\mathbb{Q}$ , wenn jedes  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{P} \mid p$  unverzweigt ist und *verzweigt* anderenfalls. Alle Definitionen sind in analoger Weise auf die Erweiterung  $F/\mathbb{Q}$  zu übertragen.

Ist die Erweiterung  $E/\mathbb{Q}$  galoissch, so sind sowohl Verzweigungsindex als auch Trägheitsgrad jeweils für alle  $\mathfrak{P} \mid p$  gleich und hängen somit nur noch von der Primzahl  $p$  ab. Verzweigungsindex und Trägheitsgrad für eine Galoiserweiterung  $E/\mathbb{Q}$  werden im Folgenden mit  $e$  und  $f$  oder, wenn die Primzahl  $p$  aus dem Kontext nicht eindeutig hervorgeht, auch mit  $e(p)$  und  $f(p)$  bezeichnet. Die fundamentale Gleichung vereinfacht sich also zu  $r \cdot e \cdot f = [E : \mathbb{Q}]$ .

Ist  $E/\mathbb{Q}$  galoissch, so erhält man mittels der Galoistheorie leicht, dass dann auch  $F/\mathbb{Q}$  galoissch ist, denn die von der Involution  $\bar{\phantom{x}}$  erzeugte Untergruppe von  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  mit Fixkörper  $F$  ist ein Normalteiler. Verzweigungsindex und Trägheitsgrad für die Erweiterung  $F/\mathbb{Q}$  werden im Folgenden mit  $e^+$  und  $f^+$  oder etwas präziser mit  $e^+(p)$  und  $f^+(p)$  bezeichnet.

In der Übersicht erhält man also:



Als Erweiterung von Zahlkörpern vom Grad  $[E : F] = 2$  ist die Erweiterung  $E/F$  stets galoissch. In dieser Erweiterung erhält man genau drei mögliche Zerlegungsverhalten für ein Primideal  $\mathfrak{p}$ : Ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ , so heißt das Ideal  $\mathfrak{p}$  *träge*, ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  mit  $\mathfrak{P} \neq \overline{\mathfrak{P}}$ , so heißt  $\mathfrak{p}$  *zerlegt* und im letzten verbleibenden Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  nennt man das Ideal  $\mathfrak{p}$  wie auch das Ideal  $\mathfrak{P}$  *verzweigt*.

Die *Differente*  $\mathfrak{D}_E$  von  $E$  ist definiert als das Inverse des gebrochenen Ideals (der sog. *Codifferente*)

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{D}/\mathbb{Z}} := \{\alpha \in E \mid \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\alpha\mathfrak{D}) \subseteq \mathbb{Z}\}.$$

Entsprechend ist auch die Differente  $\mathfrak{D}_F := \mathfrak{C}_{\mathfrak{o}/\mathbb{Z}}^{-1}$  von  $F$  und die Differente  $\mathfrak{D}_{E/F} := \mathfrak{C}_{\mathfrak{D}/\mathfrak{o}}^{-1}$  der relativen Erweiterung  $E/F$  definiert.  $\mathfrak{D}_E$  und  $\mathfrak{D}_{E/F}$  sind ganze  $\mathfrak{D}$ -Ideale,  $\mathfrak{D}_F$  ist ein ganzes  $\mathfrak{o}$ -Ideal. Für diese gilt der folgende Zusammenhang (vgl. [Lan94] III,§1)

$$(20) \quad \mathfrak{D}_E = \mathfrak{D}_F \cdot \mathfrak{D}_{E/F}.$$

Die Diskriminante von  $E$  sei im Folgenden mit  $d_E$  bezeichnet, diejenige von  $F$  mit  $d_F$ . Das Diskriminantenideal der relativen Erweiterung  $E/F$  sei  $\mathfrak{d}_{E/F}$ . Es gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E) = |d_E|$  sowie  $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_F) = |d_F|$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_{E/F}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})$  (vgl. [Lan94] III,§3). Durch Bilden der Norm erhält man aus (20) somit leicht

$$|d_E| = |d_F|^2 \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F}).$$

Eine rationale Primzahl  $p$  ist genau dann verzweigt in der Erweiterung  $E/\mathbb{Q}$  (bzw.  $F/\mathbb{Q}$ ), wenn  $p$  die Diskriminante  $d_E$  (bzw.  $d_F$ ) teilt. Ein Primideal  $\mathfrak{p}$  ist genau dann verzweigt in der Erweiterung  $E/F$ , wenn  $\mathfrak{p}$  das Diskriminantenideal  $\mathfrak{d}_{E/F}$  teilt. Ein Primideal  $\mathfrak{P}$  ist genau dann verzweigt in  $E/\mathbb{Q}$ , wenn  $\mathfrak{P}$  die Differente  $\mathfrak{D}_E$  teilt. Analoges gilt für die Erweiterungen  $F/\mathbb{Q}$  und  $E/F$  (vgl. [Lan94] III,§2).

Sei nun weiter  $V$  ein  $E$ -Vektorraum der Dimension  $N < \infty$  und  $h : V \times V \rightarrow E$  eine *hermitesche Form* bzgl. der Involution  $\bar{\phantom{x}}$ , d.h. es gelte für alle  $w, x, y \in V$  und  $\lambda \in E$ :

$$(h1) \quad h(\lambda w + x, y) = \lambda h(w, y) + h(x, y)$$

$$(h2) \quad h(x, y) = \overline{h(y, x)}$$

Gemäß (h1) ist  $h$  also eine Sesquilinearform, welche linear in der ersten Komponente ist. Aus der Eigenschaft (h2) ergibt sich insbesondere  $h(x, x) = \overline{h(x, x)}$  und damit  $h(x, x) \in F$  für alle  $x \in V$ .

Zuletzt bezeichne  $U(V, h) := \{\sigma \in \text{GL}(V) \mid h(\sigma(x), \sigma(y)) = h(x, y) \text{ für alle } x, y \in V\}$  die *unitäre Gruppe* des hermiteschen Raumes  $(V, h)$ .

**3.1.2. Hermitesche Gitter.** Unter einem  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  in  $V$  versteht man einen endlich erzeugten  $\mathfrak{D}$ -Modul  $L \subset V$ . Ist  $\mathfrak{D}$  kein Hauptidealring, so muss ein Gitter nicht notwendig frei sein, d.h. keine  $\mathfrak{D}$ -Basis besitzen. Für jedes Gitter  $L$  existiert aber stets eine sogenannte *Pseudobasis* (vgl. [O'M63] 81:3), d.h. eine Basis  $x_1, \dots, x_s$  des Vektorraumes  $EL$  und  $\mathfrak{D}$ -Ideale  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s$  derart, dass gilt

$$(21) \quad L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_s x_s.$$

Die Zahl  $\text{rk}(L) := s = \dim_E(EL)$  heißt der *Rang* von  $L$ . In der Folge wird  $L$  zumeist ein Gitter *auf*  $V$  sein, d.h. es gilt  $\text{rank}(L) = \dim_E(V) = N$  oder äquivalent  $EL = V$ . Des Weiteren heißt für ein Gitter  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  wie in (21) die Idealklasse  $[\mathfrak{A}]$  des Ideals  $\mathfrak{A} := \mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_N$  die *Steinitz-Klasse* von  $L$ . Diese hängt nicht von der Wahl der Pseudobasis ab (vgl. [O'M63] 81:8).

Zwei  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  und  $K$  auf  $V$  heißen *isometrisch*, wenn es eine Isometrie  $\sigma \in U(V, h)$  gibt mit  $\sigma(L) = K$ , im Folgenden abgekürzt als  $L \cong K$ . Ist  $L$  isometrisch zu einem freien Gitter  $K$  auf  $V$ , etwa  $K = \mathfrak{D}x_1 + \dots + \mathfrak{D}x_N$ , so schreibt man statt  $L \cong K$  auch  $L \cong G$ , wobei  $G$  die Gram-Matrix bzgl. der Vektoren  $x_1, \dots, x_N$  ist.

Die (unitäre) *Automorphismengruppe* eines Gitters  $L$  auf  $V$  ist definiert als

$$U(L) := \{\sigma \in U(V, h) \mid \sigma(L) = L\}.$$

Zu einem  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  kann man das (hermitesche) *Dualgitter* wie folgt definieren:

$$L^* := \{x \in EL \mid h(x, L) \subseteq \mathfrak{D}\}$$

Ist  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$ , so lässt sich das Dualgitter berechnen als  $L^* = \overline{\mathfrak{A}_1}^{-1} y_1 + \dots + \overline{\mathfrak{A}_N}^{-1} y_N$ , wobei  $y_1, \dots, y_N$  die duale Basis zu  $x_1, \dots, x_N$  bezeichnet.

Das *Skalenideal*  $\mathfrak{s}L$  das von der Menge  $\{h(x, y) \mid x, y \in L\}$  erzeugte  $\mathfrak{D}$ -Ideal, das *Normenideal*  $\mathfrak{n}L$  das von der Menge  $\{h(x, x) \mid x \in L\}$  erzeugte  $\mathfrak{D}$ -Ideal. Des Weiteren zeigt man, dass für ein Gitter  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  wie in (21) das  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{v}L := \mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}_1} \dots \mathfrak{A}_N \overline{\mathfrak{A}_N} \cdot \det(x_1, \dots, x_N)$  unabhängig von der gewählten Pseudobasis ist, wobei  $\det(x_1, \dots, x_N)$  die Determinante der Gram-Matrix von  $(V, h)$  bzgl. der Vektoren  $x_1, \dots, x_N$  bezeichne. Das Ideal  $\mathfrak{v}L$  heißt das *Volumenideal* von  $L$ .

In dem folgenden Lemma werden einige Eigenschaften von Skalen-, Norm- und Volumenideal zusammengetragen:

LEMMA 3.1.1. *Sei  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$ . Dann gilt*

$$a) \quad \text{Ist } L = J \perp K, \text{ so gilt } \mathfrak{s}L = \mathfrak{s}J + \mathfrak{s}K, \mathfrak{n}L = \mathfrak{n}J + \mathfrak{n}K \text{ und } \mathfrak{v}L = \mathfrak{v}J \cdot \mathfrak{v}K.$$

$$b) \quad \mathfrak{s}L = \overline{\mathfrak{s}L} \text{ und } (\mathfrak{n}L \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{n}L \text{ sowie } (\mathfrak{v}L \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{v}L.$$

$$c) \quad \text{Tr}_F^E(\mathfrak{s}L) \subseteq \mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_{E/F}^{-1} \cdot \mathfrak{n}L.$$

$$d) \quad \mathfrak{s}L = \sum_{i,j} \mathfrak{A}_i \overline{\mathfrak{A}_j} h(x_i, x_j) \text{ und } \mathfrak{n}L = \sum_i \mathfrak{A}_i \overline{\mathfrak{A}_i} h(x_i, x_i) + \text{Tr}_F^E(\mathfrak{s}L).$$

$$e) \quad \mathfrak{v}L \subseteq (\mathfrak{s}L)^N.$$

$$f) \quad \text{Ist } K \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Gitter mit } L \subseteq K, \text{ so gilt } \mathfrak{v}L \subseteq \mathfrak{v}K, \text{ und } L = K \text{ gilt genau dann, wenn } \mathfrak{v}L = \mathfrak{v}K.$$

BEWEIS. a) kann leicht nachgerechnet werden. b)  $\mathfrak{s}L = \overline{\mathfrak{s}L}$  folgt im Wesentlichen aus  $\overline{h(x, y)} = h(y, x) \in \mathfrak{s}L$ . Weiter ist klar, dass  $(\mathfrak{n}L \cap F)\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{n}L$  gilt. Da sowohl  $\mathfrak{n}L$  als auch  $(\mathfrak{n}L \cap F)\mathfrak{D}$  jeweils  $\mathfrak{D}$ -Ideale sind, genügt es zu zeigen, dass das Erzeugendensystem  $\{h(x, x) \mid x \in L\}$  in  $(\mathfrak{n}L \cap F)\mathfrak{D}$  enthalten ist. Dies ist aber klar wegen  $h(x, x) \in F$ . Für das Volumenideal folgt die Aussage leicht anhand der Definition und der Charakterisierung dieser Ideale in dem weiter unten folgenden Lemma 3.2.5.

c) Die Inklusion  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{s}L$  ist aufgrund der Definition von  $\mathfrak{s}L$  und  $\mathfrak{n}L$  trivial. Sind  $x, y \in L$  und  $\alpha \in \mathfrak{D}$ , so gilt

$$(22) \quad \mathrm{Tr}_F^E(\alpha h(x, y)) = h(\alpha x + y, \alpha x + y) - h(\alpha x, \alpha x) - h(y, y) \in \mathfrak{n}L \cap F.$$

Zusammen mit der  $F$ -Linearität von  $\mathrm{Tr}_F^E$  folgt aus (22) zunächst  $\mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}L) \subseteq \mathfrak{n}L \cap F$  und weiter auch  $\mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}L \cdot (\mathfrak{n}L)^{-1}) = \mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}L \cdot (\mathfrak{n}L \cap F)^{-1}) \subseteq \mathfrak{o}$  und damit  $\mathfrak{s}L \cdot (\mathfrak{n}L)^{-1} \subseteq \mathfrak{D}_{E/F}^{-1}$ .

d) und e) lassen sich mit entsprechenden Anpassungen völlig analog zu [O'M63] 82:8 bzw. [O'M63] 82:10 beweisen.

f) Mit dem Elementarteilersatz für Dedekindringe (vgl. [O'M63] 81:11) erhält man zunächst die Existenz linear unabhängiger Vektoren  $y_1, \dots, y_N$  von  $V$  sowie Idealen  $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_N, \mathfrak{R}_1, \dots, \mathfrak{R}_N$ , derart, dass gilt:

$$\begin{aligned} K &= \mathfrak{B}_1 y_1 + \dots + \mathfrak{B}_N y_N \\ L &= \mathfrak{B}_1 \mathfrak{R}_1 y_1 + \dots + \mathfrak{B}_N \mathfrak{R}_N y_N \end{aligned}$$

Bezeichnet  $\mathfrak{R} = \prod \mathfrak{R}_i$  das Produkt dieser Elementarteiler, so gilt offenbar nach Definition des Volumenideals  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{R}\overline{\mathfrak{R}} \cdot \mathfrak{v}K$ . Wegen  $L \subseteq K$  sind die Elementarteiler  $\mathfrak{R}_i$  ganze  $\mathfrak{D}$ -Ideale. Es folgt  $\mathfrak{v}L \subseteq \mathfrak{v}K$  und  $L = K$  genau dann, wenn  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{v}K$ .  $\square$

Ein Gitter  $L \neq \{0\}$  auf  $V$  heißt *modular* bzw. genauer  $\mathfrak{A}$ -*modular* für ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A}$ , wenn  $\mathfrak{A}L^* = L$  gilt. Ein  $\mathfrak{D}$ -modulares Gitter, d.h. ein Gitter mit  $L = L^*$ , nennt man auch *unimodular*. Wie in [O'M63] 82:14 zeigt man, dass  $L$  genau dann  $\mathfrak{A}$ -modular ist, wenn  $\mathfrak{s}L = \mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{A}^{\mathrm{rk}(L)}$  gilt.

Ein Gitter  $L$  auf  $V$  heißt *maximal* bzw. genauer  $\mathfrak{A}$ -*maximal* für ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A}$ , wenn  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{A}$  und wenn für jedes Gitter  $K$  auf  $V$  mit  $L \subseteq K$  und  $\mathfrak{n}K \subseteq \mathfrak{A}$  gilt  $L = K$ .

LEMMA 3.1.2. *Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$  mit  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{A}$ . Ist  $\mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot \mathfrak{A}^N \subseteq \mathfrak{v}L$ , so ist  $L$   $\mathfrak{A}$ -maximal.*

BEWEIS. Sei  $K$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter mit  $L \subseteq K$  und  $\mathfrak{n}K \subseteq \mathfrak{A}$ . Aus Lemma 3.1.1 e) und der Voraussetzung  $\mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot \mathfrak{A}^N \subseteq \mathfrak{v}L$  folgt dann:

$$\mathfrak{v}K \subseteq (\mathfrak{s}K)^N \subseteq \mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot (\mathfrak{n}K)^N \subseteq \mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot \mathfrak{A}^N = \mathfrak{v}L$$

Also ist  $\mathfrak{v}K = \mathfrak{v}L$  und nach 3.1.1 f) somit  $L = K$ .  $\square$

Ist beispielsweise  $L$  ein  $\mathfrak{D}_E^{-1}$ -modulares Gitter mit  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ , so ist  $\mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot \mathfrak{D}_F^{-N}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-N} = \mathfrak{v}L$ . Nach obigem Lemma ist  $L$  somit  $\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ -maximal. Solche Gitter spielen in der Folge eine wichtige Rolle.

**3.1.3. Spurkonstruktion.** Der  $E$ -Vektorraum  $V$  lässt sich auch als  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum der Dimension  $n := N \cdot [E : \mathbb{Q}]$  auffassen. Auf diesem kann man zu der hermiteschen Form  $h : V \times V \rightarrow E$  nun eine symmetrische Bilinearform  $b_h : V \times V \rightarrow \mathbb{Q}$  wie folgt definieren:

$$(23) \quad b_h(x, y) := \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y))$$

Damit wird  $(V, b_h)$  ein quadratischer  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum. Die Bilinearform  $b_h$  heißt auch die *zu  $h$  gehörige Spurform*.

Eine hermitesche Form  $h : V \times V \rightarrow E$  heißt *total positiv definit*, wenn für alle Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$  gilt  $\rho(h(x, x)) \geq 0$  für alle  $x \in V$  mit Gleichheit genau dann, wenn  $x = 0$  ist.

LEMMA 3.1.3. *Sei  $(V, h)$  ein hermitescher Raum und  $b_h$  die zu  $h$  gehörige Spurform. Dann gilt:*

- a)  *$h$  ist genau dann nicht entartet, wenn  $b_h$  nicht entartet ist.*
- b)  *$h$  ist genau dann total positiv definit, wenn  $b_h$  positiv definit ist.*

BEWEIS. a) Sei zunächst  $b$  nicht entartet. Aus  $h(x, y) = 0$  für alle  $y \in V$  folgt  $b_h(x, y) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y)) = 0$  für alle  $y \in V$ . Weil  $b_h$  nicht entartet ist, folgt  $x = 0$ . Somit ist  $h$  nicht entartet. Umgekehrt sei nun  $h$  nicht entartet und  $b_h(x, y) = 0$  für alle  $y \in V$ . Es folgt  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda h(x, y)) = 0$  für alle  $\lambda \in E$  und alle  $y \in V$ . Da  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E$  aufgefasst als Bilinearform auf  $E$  nicht entartet ist (vgl. [Neu92] I (2.8)), folgt  $h(x, y) = 0$  für alle  $y \in V$  und damit  $x = 0$ . Also ist  $b_h$  nicht entartet.

b) Ist  $h$  entartet, so ist nach a) auch  $b_h$  entartet und somit ist weder  $h$  noch  $b_h$  positiv definit. Sei also  $h$  nicht entartet. Zunächst kann  $h$  diagonalisiert werden, etwa  $h \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle$  mit  $\alpha_i \in F \setminus \{0\}$ . Dann ist  $h$  genau dann total positiv definit, wenn  $\alpha_i$  für jedes  $i \in \{1, \dots, N\}$  total positiv ist, d.h.  $\rho(\alpha_i) > 0$  für alle Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Die Signatur der Spurform der 1-dimensionalen hermiteschen Form  $\langle \alpha_i \rangle$  wird in [BF99] 2.2 berechnet. Diese lautet  $([E : \mathbb{Q}] - 2a_i, 2a_i)$ , wobei hier  $a_i$  die Anzahl der Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$  angibt mit  $\rho(\alpha_i) < 0$ . Durch Bilden orthogonaler Summen erhält man als Signatur von  $b_h$  also  $(N \cdot [E : \mathbb{Q}] - 2 \sum_{i=1}^{[E:\mathbb{Q}]} a_i, 2 \sum_{i=1}^{[E:\mathbb{Q}]} a_i)$ . Es folgt, dass  $b_h$  positiv definit ist genau dann, wenn  $\sum_{i=1}^{[E:\mathbb{Q}]} a_i = 0$  ist. Dies wiederum ist äquivalent zu  $a_i = 0$  für alle  $i \in \{1, \dots, N\}$  und damit ist  $\alpha_i$  für  $i \in \{1, \dots, N\}$  total positiv.  $\square$

Da in dieser Arbeit ausschließlich  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf positiv definiten Räumen von Interesse sind, werden im Weiteren die betrachteten hermiteschen Räume  $(V, h)$  stets als **total positiv definit** vorausgesetzt.

Ist  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$ , so ist  $L$  offenbar auch ein endlich erzeugter  $\mathbb{Z}$ -Modul und damit kann man  $L$  auffassen als  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf dem Raum  $(V, b_h)$ . Die Invarianten des, wie man sagt *mittels Spur-* oder auch *Transferkonstruktion* gebildeten Gitters oder auch einfach des *Spurgitters*, werden in der folgenden Proposition bestimmt.

PROPOSITION 3.1.4. *Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $(V, h)$ . Dann gilt für das Spurgitter auf  $(V, b_h)$ :*

- a)  $\dim_{\mathbb{Z}}(L) = N \cdot [E : \mathbb{Q}]$ .
- b)  $L$  ist ganzzahlig genau dann, wenn  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$ .
- c)  $L^\# = \mathfrak{D}_E^{-1} \cdot L^*$ .
- d)  $\det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$ .

BEWEIS. a) Sei  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  die Darstellung von  $L$  in einer (beliebigen) Pseudobasis. Jedes  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A}_i$  besitzt eine  $\mathbb{Z}$ -Basis bestehend aus  $[E : \mathbb{Q}]$  Elementen (vgl. [Neu92] I (2.10)), etwa  $\alpha_{i,1}, \dots, \alpha_{i,[E:\mathbb{Q}]}$ . Dann sind die  $N \cdot [E : \mathbb{Q}]$  Elemente  $\alpha_{i,j} x_i$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $L$ .

b) folgt sofort aus der Definition der Differenten.

c) Aufgrund der Definition des Dualgitters  $L^*$  gilt zunächst  $h(L^*, L) \subseteq \mathfrak{D}$ . Es folgt  $h(\mathfrak{D}_E^{-1} L^*, L) \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$  und damit  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\mathfrak{D}_E^{-1} \cdot L^*, L)) \subseteq \mathbb{Z}$ , also  $\mathfrak{D}_E^{-1} \cdot L^* \subseteq L^\#$ .

Umgekehrt ist  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(L^\#, L)) \subseteq \mathbb{Z}$ . Wegen  $\mathfrak{D}L = L$  und  $\overline{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}$  folgt  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\mathfrak{D}h(L^\#, L)) \subseteq \mathbb{Z}$ . Dies ist gleichbedeutend mit  $h(L^\#, L) \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$  und hieraus folgt  $h(\mathfrak{D}_E L^\#, L) \subseteq \mathfrak{D}$ , also  $\mathfrak{D}_E \cdot L^\# \subseteq L^*$ .

d) Man darf annehmen, dass  $L$  als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ganzzahlig ist, d.h.  $L \subseteq L^\#$ . Der allgemeine Fall lässt sich leicht auf diesen zurückführen. Mit dieser Voraussetzung folgt aus c)  $L \subseteq L^\# = \mathfrak{D}_E^{-1} \cdot L^* =$

$(\mathfrak{D}_E L)^*$ . Insgesamt hat man also  $\mathfrak{D}_E L \subseteq L \subseteq L^\# = (\mathfrak{D}_E L)^*$  und man erhält mit Hilfe des zweiten Isomorphiesatzes:

$$L^\# / L = (\mathfrak{D}_E L)^* / L \cong ((\mathfrak{D}_E L)^* / \mathfrak{D}_E L) / (L / \mathfrak{D}_E L)$$

Die Determinante  $\det(L)$  berechnet sich dann wie folgt:

$$\det(L) = |L^\# / L| = \frac{|(\mathfrak{D}_E L)^* / \mathfrak{D}_E L|}{|L / \mathfrak{D}_E L|} = \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E^{2N} \mathfrak{v}L)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E^N)} = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$$

□

PROPOSITION 3.1.5. *Sei  $E/\mathbb{Q}$  eine Galois-Erweiterung,  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$  und  $p$  eine Primzahl. Dann gilt:*

$$\nu_p(\det(L)) \equiv N \cdot \nu_p(d_E) \pmod{2f^+}$$

*Insbesondere gilt im Fall  $\text{ggT}(p, d_E) = 1$ , dass  $2f^+$  ein Teiler von  $\nu_p(\det(L))$  ist.*

BEWEIS. Sei  $p$  eine Primzahl. Nach Prop. 3.1.4 d) ist  $\det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$  und es folgt sofort  $\nu_p(\det(L)) = N \cdot \nu_p(d_E) + \nu_p(\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L))$ . Es genügt also zu zeigen, dass  $2f^+$  ein Teiler von  $\nu_p(\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L))$  ist. Schreibt man dazu  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{p}_1^{\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{p}_s^{\varepsilon_s} \cdot \mathfrak{q}\mathfrak{D}$ , wobei  $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_s$  Primideale über  $p$  sind und  $p\mathfrak{o}$  und  $\mathfrak{q}$  teilerfremd sind, so folgt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_1)^{2\varepsilon_1} \cdot \dots \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{p}_s)^{2\varepsilon_s} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{q})^2$ . Da  $p \nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{q})$  gilt und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p^{f^+}$  ist für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  mit  $\mathfrak{p}|p$ , folgt die Behauptung. □

Abschließend soll die Parität eines durch Transferkonstruktion entstandenen Gitters untersucht werden. Elementar zu zeigen ist das folgende Lemma:

LEMMA 3.1.6. (vgl. [BF99]) *Gibt es ein  $\gamma \in \mathfrak{D}$  mit  $\text{Tr}_F^E(\gamma) = \gamma + \bar{\gamma} = 1$ , so ist jedes mittels Transferkonstruktion aus einem  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  entstandene ganzzahlige  $\mathbb{Z}$ -Gitter auch gerade.*

BEWEIS. Sei  $\gamma \in \mathfrak{D}$  ein solches Element mit  $\gamma + \bar{\gamma} = 1$  und  $x \in L$  beliebig. Da  $L$  ganzzahlig ist, gilt  $b_h(\gamma x, x) \in \mathbb{Z}$ . Es folgt:

$$\begin{aligned} b_h(x, x) &= \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, x)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E((\gamma + \bar{\gamma})h(x, x)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\gamma h(x, x)) + \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\bar{\gamma} h(x, x)) \\ &= 2 \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\gamma h(x, x)) = 2 \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\gamma x, x)) = 2b_h(\gamma x, x) \in 2\mathbb{Z} \end{aligned}$$

□

Im Körper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  mit  $D \equiv_4 3$  erfüllt das Element  $\gamma = \frac{1+\sqrt{-D}}{2}$  die Gleichung  $1 = \gamma + \bar{\gamma}$  und auch für einen Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  für eine Primzahl  $p \neq 2$  kann man leicht mit  $\gamma = -\zeta - \zeta^2 - \dots - \zeta^{\frac{p-1}{2}}$  explizit ein solches Element angeben.

Etwas allgemeiner überlegt man sich, dass die Menge  $\text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$  ein ganzes  $\mathfrak{o}$ -Ideal ist. Somit ist die Existenz eines Elements  $\gamma \in \mathfrak{D}$  mit  $\text{Tr}_F^E(\gamma) = 1$  äquivalent zu  $\text{Tr}_F^E(\mathfrak{D}) = \mathfrak{o}$ , also zur Surjektivität der Spurabbildung  $\text{Tr}_F^E : \mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{o}$ . Dieses wiederum ist äquivalent dazu, dass die Erweiterung  $E/F$  *zahm verzweigt* ist (vgl. [Frö83] I §3), d.h. für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  die Restklassencharakteristik  $p = \text{char}(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})$  und der Verzweigungsindex  $e(\mathfrak{p})$  teilerfremd sind. Wegen  $[E : F] = 2$  ist dieses genau dann der Fall, wenn das Ideal  $2\mathfrak{o}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$  ist. Man erhält also

KOROLLAR 3.1.7. *Ist  $E$  ein CM-Körper derart, dass das Ideal  $2\mathfrak{o}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$  ist, so sind alle mittels Transferkonstruktion gebildeten ganzzahligen Gitter auch gerade.* □

Insbesondere gilt dies für alle Kreisteilungskörper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$ , solange  $m \neq 2^t$  für  $t \geq 2$  ist, denn dann ist das Ideal  $2\mathfrak{o}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$  (vgl. [Was82] 2.15.). Ist das Ideal  $2\mathfrak{o}$  hingegen verzweigt in der Erweiterung  $E/F$ , so ist ein mittels Transferkonstruktion gebildetes ganzzahliges Gitter nicht notwendig gerade, wie das folgende Beispiel zeigt:



BEISPIEL 3.1.8. Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_4) = \mathbb{Q}(i)$ . Das  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L_1 \cong \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle$  liefert mittels Transferkonstruktion ein unimodulares Gitter in Dimension 8, welches offenbar ungerade und damit isometrisch zu  $\mathbb{I}_8$  ist. Andererseits liefert das Gitter  $L_2$  mit folgender Gram-Matrix ein gerades unimodulares Gitter, welches somit zu  $\mathbb{E}_8$  isometrisch sein muss:

$$L_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1-i}{2} & \frac{1-i}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1+i}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Es ist  $\mathfrak{s}L_1 = \mathfrak{s}L_2 = \frac{1}{2}\mathbb{Z}$  und  $\mathfrak{v}L_1 = \mathfrak{v}L_2 = \frac{1}{16}\mathbb{Z}$ , während  $\mathfrak{n}L_1 = \frac{1}{2}\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z} = \mathfrak{n}L_2$ .  $\blacksquare$

Offenbar ist also das Normideal entscheidend bei der Frage, ob ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter mittels Transferkonstruktion ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter liefert.

PROPOSITION 3.1.9. *Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter mit  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$ , d.h. mittels Spurkonstruktion ergibt  $L$  ein ganzzahliges  $\mathbb{Z}$ -Gitter.*

- a) *Gilt  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ , so ist  $L$  als  $\mathbb{Z}$ -Gitter gerade.*
- b) *Enthält die Menge  $N_F^E(\mathfrak{D}) \cup N_F^E(\mathfrak{D}) \cdot \text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$  ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{o}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul, so ist  $L$  als  $\mathbb{Z}$ -Gitter gerade genau dann, wenn  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ .*

BEWEIS. a) Für jedes  $x \in L$  gilt  $h(x, x) \in \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D} \cap F = \mathfrak{D}_F^{-1}$ . Es folgt  $\text{Tr}_\mathbb{Q}^F(h(x, x)) \in \mathbb{Z}$  und

$$\text{Tr}_\mathbb{Q}^E(h(x, x)) = \text{Tr}_\mathbb{Q}^F(\text{Tr}_F^E(h(x, x))) = 2 \text{Tr}_\mathbb{Q}^F(h(x, x)) \in 2\mathbb{Z}.$$

b) Die Bedingung  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  ist äquivalent zu  $\mathfrak{n}L \cap F \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}$ . Hierfür reicht es im Wesentlichen zu zeigen, dass  $\text{Tr}_\mathbb{Q}^F(\mathfrak{o}h(x, x)) \subseteq \mathbb{Z}$  für alle  $x \in L$ . Dieses wiederum ist äquivalent zu  $\text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\mathfrak{o}h(x, x)) \subseteq 2\mathbb{Z}$  für alle  $x \in L$ . Da die Spur  $\text{Tr}_\mathbb{Q}^E$   $\mathbb{Q}$ -linear ist, genügt es zu zeigen, dass  $\text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\omega h(x, x)) \in 2\mathbb{Z}$  gilt für alle  $x \in L$  und alle Elemente  $\omega$  eines Erzeugendensystems von  $\mathfrak{o}$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul.

Sei nun angenommen, dass  $\omega \in N_F^E(\mathfrak{D})$ . Dann gibt es ein  $\lambda \in \mathfrak{D}$  mit  $\omega = \lambda\bar{\lambda}$ . Es folgt

$$\text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\omega h(x, x)) = \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\lambda\bar{\lambda}h(x, x)) = \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(h(\lambda x, \lambda x)) \in 2\mathbb{Z},$$

da  $L$  als gerade vorausgesetzt war und  $\lambda x \in L$  gilt.

Ist  $\omega \in N_F^E(\mathfrak{D}) \cdot \text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$ , so gibt es  $\lambda, \gamma \in \mathfrak{D}$  mit  $\omega = (\gamma + \bar{\gamma})\lambda\bar{\lambda}$ . Es folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\omega h(x, x)) &= \text{Tr}_\mathbb{Q}^E((\gamma + \bar{\gamma})\lambda\bar{\lambda}h(x, x)) = \text{Tr}_\mathbb{Q}^E((\gamma + \bar{\gamma})h(\lambda x, \lambda x)) \\ &= \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\gamma h(\lambda x, \lambda x)) + \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(\overline{\gamma h(\lambda x, \lambda x)}) = 2 \text{Tr}_\mathbb{Q}^E(h(\gamma \lambda x, \lambda x)) \in 2\mathbb{Z}, \end{aligned}$$

denn  $L$  ist ganzzahlig und  $\gamma \lambda x, \lambda x \in L$ .  $\square$

KOROLLAR 3.1.10. *Die Voraussetzung der vorherigen Proposition, dass  $N_F^E(\mathfrak{D}) \cup N_F^E(\mathfrak{D}) \cdot \text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$  eine Ganzheitsbasis von  $\mathfrak{o}$  enthält, ist unter anderem gegeben, wenn:*

- a)  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  mit  $D > 0$  quadratfrei ein imaginär-quadratischer Zahlkörper ist,
- b)  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  mit  $m \in \mathbb{N}$  ein Kreisteilungskörper ist,
- c) das Ideal  $2\mathfrak{o}$  in der Erweiterung  $E/F$  unverzweigt ist.

Insbesondere gilt für einen solchen Körper  $E$  also für ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter mit  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$ :

$$L \text{ ist als } \mathbb{Z}\text{-Gitter gerade} \iff \mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$$

BEWEIS. a) Ist  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, so ist  $F = \mathbb{Q}$  und  $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}$ . Da also 1 eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}$  ist und  $1 \in N_\mathbb{Q}^E(\mathfrak{D})$  gilt, ist die Voraussetzung der Proposition gegeben.

b) Ist  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  ein Kreisteilungskörper, so ist  $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\zeta_m + \overline{\zeta_m}]$ . Da  $(\zeta_m + \overline{\zeta_m})^k$  in  $N_F^E(\mathfrak{D})$  für gerades  $k \in \mathbb{N}$  und in  $N_F^E(\mathfrak{D}) \cdot \text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$  für ungerades  $k \in \mathbb{N}$ , gilt die Voraussetzung ebenfalls für Kreisteilungskörper.

c) Zuletzt ist unter der Voraussetzung, dass 2 nicht verzweigt ist in der Erweiterung  $E/F$ , die Spurabbildung surjektiv und damit ist jede Ganzheitsbasis von  $\mathfrak{o}$  in der Menge  $\text{Tr}_F^E(\mathfrak{D})$  enthalten.  $\square$

### 3.2. Ideal-Gitter

In diesem Abschnitt soll zunächst beschrieben werden, wie man sämtliche Ideal-Gitter über einem zunächst beliebigen CM-Körper  $E$  zu gegebener Stufe und Determinante konstruiert. Anschließend wird diese Methode angewandt, um sämtliche extremalen Gitter in den Quebbemannschen Geschlechtern in Dimensionen  $< 48$ , welche als Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper konstruiert werden können, zu klassifizieren.

**3.2.1. Bestimmung von Ideal-Gittern.** Ein *Ideal-Gitter* ist ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf einem 1-dimensionalen hermiteschen Raum  $(V, h)$ . Nach Wahl einer Basis kann  $V$  mit  $E$  identifiziert werden, sodass die hermitesche Form  $h$  von der Form  $h_\alpha(x, y) := \alpha x \overline{y}$  für ein  $\alpha \in F$  ist.  $h_\alpha$  ist genau dann total positiv definit, wenn  $\alpha$  *total positiv* ist, d.h.  $\rho(\alpha) > 0$  für alle  $[F : \mathbb{Q}]$  Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Die Tatsache, dass ein  $\alpha \in F$  total positiv ist, wird im Folgenden mit  $\alpha \gg 0$  abgekürzt.

Bei oben beschriebener Identifikation von  $V$  mit  $E$  entspricht einem Gitter  $L \subseteq V$  gerade ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A} \subseteq E$ . Das Ideal-Gitter  $\mathfrak{A}$  als  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(E, h_\alpha)$  wird im Folgenden abkürzend mit  $I(\mathfrak{A}, \alpha)$  bezeichnet, das zugehörige Spurgitter auf dem quadratischen Raum  $(V, b_\alpha)$  mit  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$ , wobei  $b_\alpha := b_{h_\alpha} = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h_\alpha)$  ist.

Die Klassengruppe von  $E$  wird im Folgenden mit  $\text{Cl}_E$  bezeichnet und für ein Ideal  $\mathfrak{A}$  ist  $[\mathfrak{A}] \in \text{Cl}_E$  die zugehörige Klasse in der Klassengruppe.

Die Bestimmung der Invarianten des Gitters  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  folgt im Wesentlichen durch Anwenden von Prop. 3.1.4 auf den Spezialfall eines Ideal-Gitters:

**KOROLLAR 3.2.1.** *Sei  $\mathfrak{A}$  ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal und  $\alpha \in F$  mit  $\alpha \gg 0$ . Dann gilt für  $L := L(\mathfrak{A}, \alpha)$ :*

- a)  $\dim_{\mathbb{Z}}(L) = [E : \mathbb{Q}]$ .
- b)  $L$  ist ganzzahlig genau dann, wenn  $\alpha \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E \subseteq \mathfrak{D}$  gilt.
- b)  $L^\# = (\alpha \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E)^{-1}$ .
- c)  $\det(L) = \mathfrak{N}(\alpha \mathfrak{A} \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E) = |d_E| \cdot N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha)^2 \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^2$ .  $\square$

Nun soll geklärt werden, welche Tupel  $(\mathfrak{A}, \alpha)$  betrachtet werden müssen, um sämtliche Ideal-Gitter zu gegebener Stufe  $\ell$  (quadratfrei) und Determinante  $d_0$  bis auf Isometrie zu bestimmen. Die folgenden beiden Lemmata reduzieren zunächst die Anzahl der relevanten Ideale  $\mathfrak{A}$ :

**LEMMA 3.2.2.** *Sind  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  zwei  $\mathfrak{D}$ -Ideale mit  $\beta \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$  für ein  $\beta \in E$ , so gilt  $L(\mathfrak{A}, \alpha) \cong L(\mathfrak{B}, \beta \overline{\beta} \alpha)$ . Ist insbesondere  $\beta = \varepsilon \in \mathfrak{D}^*$  eine Einheit, so gilt  $L(\mathfrak{A}, \alpha) \cong L(\mathfrak{A}, \varepsilon \overline{\varepsilon} \alpha)$ .*

**BEWEIS.** Betrachtet man die Abbildung  $\psi : E \rightarrow E$ ,  $x \mapsto \beta x$ , so gilt

$$h_\alpha(\psi(x), \psi(y)) = \alpha \psi(x) \overline{\psi(y)} = \alpha \beta \overline{\beta} x \overline{y} = h_{\alpha \beta \overline{\beta}}(x, y).$$

Damit folgt erst recht  $b_\alpha(\psi(x), \psi(y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h_\alpha(\psi(x), \psi(y))) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h_{\alpha \beta \overline{\beta}}(x, y)) = b_{\alpha \beta \overline{\beta}}(x, y)$ . Folglich ist  $\psi : (E, b_{\alpha \beta \overline{\beta}}) \rightarrow (E, b_\alpha)$  eine Isometrie mit  $\psi(\mathfrak{B}) = \beta \mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ . Somit ist  $L(\mathfrak{A}, \alpha) \cong L(\mathfrak{B}, \beta \overline{\beta} \alpha)$ .  $\square$

Damit genügt es, jeweils einen Repräsentanten aus jeder Idealklasse  $[\mathfrak{A}] \in \text{Cl}_E$  zu betrachten. Insbesondere sind dies also endlich viele.

Handelt es sich bei der Erweiterung  $E/\mathbb{Q}$  um eine Galoiserweiterung, so operiert die Galoisgruppe  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  auf  $\text{Cl}_E$  durch  $\sigma \cdot [\mathfrak{A}] = [\sigma(\mathfrak{A})]$ . Wie das folgende Lemma zeigt, genügt es sogar, jeweils nur eine Klasse aus jeder Bahn dieser Operation zu betrachten.

LEMMA 3.2.3. *Sei  $E/\mathbb{Q}$  eine Galoiserweiterung und seien  $\mathfrak{A}$  ein Ideal von  $E$  und  $\alpha \in F$  mit  $\alpha \gg 0$ . Ist  $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ , so gilt  $L(\mathfrak{A}, \alpha) \cong L(\sigma(\mathfrak{A}), \sigma(\alpha))$ .*

BEWEIS. Sei  $\sigma \in \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ . Unter Verwendung der Tatsache, dass die Spur  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E$  invariant unter  $\sigma$  ist, zeigt nun folgende Gleichung, dass  $\sigma : (E, b_\alpha) \rightarrow (E, b_{\sigma(\alpha)})$  eine Isometrie ist:

$$b_{\sigma(\alpha)}(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\sigma(\alpha)\sigma(x)\overline{\sigma(y)}) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\sigma(\alpha x \bar{y})) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\alpha x \bar{y}) = b_\alpha(x, y)$$

Es folgt also  $L(\mathfrak{A}, \alpha) \cong L(\sigma(\mathfrak{A}), \sigma(\alpha))$ .  $\square$

Es bezeichne im Folgenden die Menge  $\mathcal{A}$  eine Menge von Repräsentanten der Idealklassen bzw., im Fall einer Galoiserweiterung  $E/\mathbb{Q}$ , eine Menge von Repräsentanten der Idealklassen modulo Operation der Galoisgruppe  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$ .

Es bleibt die Frage zu klären, ob zu gegebenem Ideal  $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$  ein Element  $\alpha \in F$  mit  $\alpha \gg 0$  existiert, sodass das  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  die gewünschte Determinante annimmt. Gegebenenfalls sind alle diese  $\alpha$  modulo einer geeigneten Relation zu bestimmen.

Sei im Folgenden  $L = L(\mathfrak{A}, \alpha)$  ein Ideal-Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$ . Also muss gelten  $\ell L^\# \subseteq L \subseteq L^\#$  und mit Korollar 3.2.1 c) folgt  $\ell(\alpha \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E)^{-1} \subseteq \mathfrak{A} \subseteq (\alpha \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E)^{-1}$  bzw. äquivalent dazu

$$\ell \mathfrak{D} \subseteq \alpha \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E \subseteq \mathfrak{D}.$$

Demnach ist  $\mathfrak{B} := \alpha \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E$  ein ganzes Ideal und wegen 3.2.1 d) gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{N}(\alpha \overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E) = \det(L) = d_0$ . Da es jeweils nur endlich viele ganze Ideale mit gegebener Norm gibt, ist die Menge  $\mathcal{B} := \{\ell \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D} \mid \mathfrak{B} \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Ideal mit } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = d_0\}$  endlich.

Ist nun konkret  $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$  ein solches, so gilt:

$$(\alpha) = \mathfrak{B} \cdot (\overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E)^{-1} =: \mathfrak{J}$$

Ist also  $L = L(\mathfrak{A}, \alpha)$  ein Gitter mit Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$ , so ist  $\alpha$  also notwendig ein Erzeuger des Ideals  $\mathfrak{B} \cdot (\overline{\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_E)^{-1}$  für ein  $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ . Des Weiteren ist notwendig  $\alpha \in F$  mit  $\alpha \gg 0$ .

Umgekehrt ist für jedes solche  $\alpha$  das Ideal-Gitter  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  ein Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$ .

Es müssen also für ein gegebenes Ideal  $\mathfrak{J}$  alle total positiven Erzeuger  $\alpha \in F$  bestimmt werden. Insbesondere muss geklärt werden, ob ein solcher Erzeuger überhaupt existiert.

LEMMA 3.2.4. *Sei  $\mathfrak{J}$  ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal. Dann gibt es ein  $\alpha' \in F$  mit  $\mathfrak{J} = \alpha' \mathfrak{D}$  genau dann, wenn  $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \cap F) \mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{J} \cap F$  ein  $\mathfrak{o}$ -Hauptideal ist.*

BEWEIS. Sei  $\mathfrak{J} \cap F = \alpha' \mathfrak{o}$  für ein  $\alpha' \in F$ . Dann gilt  $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \cap F) \mathfrak{D} = \alpha' \mathfrak{o} \mathfrak{D} = \alpha' \mathfrak{D}$ . Umgekehrt sei nun  $\mathfrak{J} = \alpha' \mathfrak{D}$  für ein  $\alpha' \in F$ . Dann ist  $\mathfrak{J} \cap F = \alpha' \mathfrak{o}$  ein Hauptideal und  $(\mathfrak{J} \cap F) \mathfrak{D} = \alpha' \mathfrak{D}$ .  $\square$

Im folgenden Lemma werden die  $\mathfrak{D}$ -Ideale  $\mathfrak{J}$  mit  $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \cap F) \mathfrak{D}$  charakterisiert.

LEMMA 3.2.5. *Ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{J}$  erfüllt die Bedingung  $(\mathfrak{J} \cap F) \mathfrak{D} = \mathfrak{J}$  genau dann, wenn für jeden Primteiler  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{J}$  gilt:*

- Ist  $\mathfrak{P}$  verzweigt in  $E/F$ , so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) \in 2\mathbb{Z}$ ,
- ist  $\mathfrak{P}$  unverzweigt in  $E/F$ , so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) = \nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})$ .

BEWEIS. Sei zunächst  $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \cap F)\mathfrak{D}$ . Dann gilt  $\prod \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J} \cap F)}\mathfrak{D} = \prod \mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J})}$ . Aus der Eindeutigkeit dieser Primidealzerlegung folgt nun  $\mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J} \cap F)}\mathfrak{D} = \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J})}$  für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $\mathfrak{o}$  und damit

- ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ , so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) = 2\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J} \cap F) \in 2\mathbb{Z}$ ,
- ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}\}$ , so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{J} \cap F) = \nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{J})$ .

Ist  $\mathfrak{J}$  andererseits ein Ideal, welches die Bedingungen aus dem Lemma erfüllt, so sei  $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$  dasjenige Ideal mit

$$\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) & \mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}\} \\ \frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J}) & \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2 \end{cases}.$$

Dann ist  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a}) \in \mathbb{Z}$  und es gilt weiter

$$\mathfrak{J} = \prod_{\mathfrak{P}} \mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{J})} = \prod_{\mathfrak{p}} (\mathfrak{p}\mathfrak{D})^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}\mathfrak{D} = \mathfrak{a}\mathfrak{D}.$$

Da für jedes  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a}$  gilt  $\mathfrak{a}\mathfrak{D} \cap F = \mathfrak{a}$ , folgt  $(\mathfrak{J} \cap F)\mathfrak{D} = (\mathfrak{a}\mathfrak{D} \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{a}\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ .  $\square$

Ist ein Erzeuger  $\alpha' \in F$  des Ideals  $\mathfrak{J}$  gefunden und ist  $\alpha'$  nicht total positiv, so stellt sich die Frage, ob es auch möglich ist, einen total positiven Erzeuger von  $\mathfrak{J}$  zu wählen. Dazu betrachtet man den folgenden Homomorphismus:

$$\begin{aligned} \Sigma : F^* &\rightarrow \{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]} \\ \alpha &\mapsto (\text{sign}(\rho(\alpha)))_{\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}} \end{aligned}$$

LEMMA 3.2.6. *Das Ideal  $\alpha'\mathfrak{D}$  mit  $\alpha' \in F$  besitzt einen total positiven Erzeuger  $\alpha \in F$ ,  $\alpha \gg 0$  genau dann, wenn es eine Einheit  $\varepsilon' \in \mathfrak{o}^*$  gibt mit  $\Sigma(\alpha') = \Sigma(\varepsilon')$ .*

BEWEIS. Besitzt das Ideal  $\alpha'\mathfrak{D}$  einen total positiven Erzeuger  $\alpha$ , so gilt  $\alpha = \varepsilon'\alpha'$  für ein  $\varepsilon' \in \mathfrak{D}^* \cap F = \mathfrak{o}^*$ . Da  $\alpha$  total positiv ist, gilt für jede Einbettung  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ :

$$1 = \text{sign}(\rho(\alpha)) = \text{sign}(\rho(\varepsilon'\alpha')) = \text{sign}(\rho(\varepsilon')) \cdot \text{sign}(\rho(\alpha'))$$

Es folgt  $\Sigma(\alpha') = \Sigma(\varepsilon')$ . Ist umgekehrt  $\varepsilon' \in \mathfrak{o}^*$  eine Einheit mit  $\Sigma(\alpha') = \Sigma(\varepsilon')$ , dann ist  $\alpha := \varepsilon'\alpha'$  ebenfalls ein Erzeuger von  $\alpha'\mathfrak{D}$  und es gilt

$$\text{sign}(\rho(\alpha)) = \text{sign}(\rho(\varepsilon')) \cdot \text{sign}(\rho(\alpha')) = \text{sign}(\rho(\alpha'))^2 = 1$$

für alle Einbettungen  $\rho : F \hookrightarrow \mathbb{R}$ . Somit ist  $\alpha$  total positiv.  $\square$

Da Einheiten  $\varepsilon \in \mathfrak{o}^{*2}$  total positiv sind, induziert der Homomorphismus  $\Sigma|_{\mathfrak{o}^*}$  nach dem Homomorphiesatz einen Homomorphismus  $\overline{\Sigma} : \mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2} \rightarrow \{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}$  mit  $\text{Im}(\Sigma) = \text{Im}(\overline{\Sigma})$ . Es bleibt also zu entscheiden, ob  $\Sigma(\alpha') \in \text{Im}(\overline{\Sigma}) \subseteq \{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}$ .

Aufgrund des Dirichletschen Einheitensatzes ist  $\mathfrak{o}^* \cong \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^{[F:\mathbb{Q}]-1}$ . Es folgt, dass  $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2} \cong \{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}$  gilt. Fasst man sowohl  $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2}$  als auch  $\{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum der Dimension  $[F:\mathbb{Q}]$  auf, so ist die Abbildung  $\overline{\Sigma}$  eine  $\mathbb{F}_2$ -lineare Abbildung und somit ist das Entscheiden der Bedingung  $\Sigma(\alpha') \in \text{Im}(\overline{\Sigma})$  im Wesentlichen äquivalent zu dem Lösen eines linearen Gleichungssystems über  $\mathbb{F}_2$ . Im Folgenden bezeichne  $\mathcal{E}$  ein Repräsentantensystem der Quadratklassen von Einheiten.

BEMERKUNGEN 3.2.7.

- Wegen  $|\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2}| = 2^{[F:\mathbb{Q}]} = |\{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}|$  ist der Homomorphismus  $\overline{\Sigma}$  surjektiv genau dann, wenn  $\overline{\Sigma}$  injektiv ist; mit anderen Worten also, wenn jede total positive Einheit ein Quadrat ist.

Für Kreisteilungskörper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  ist diese Fragestellung untersucht worden. Für zusammengesetztes  $m \neq_4 2$  ist beispielsweise nicht jede total positive Einheit ein Quadrat und der Homomorphismus  $\bar{\Sigma}$  somit nicht surjektiv. Für einen Überblick zu diesen Fragestellungen siehe etwa [KL07].

- (ii) Für die Berechnung eines Repräsentantensystems  $\mathcal{E}$  von  $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2}$  genügt die Berechnung einer Untergruppe von  $\mathfrak{o}^*$  von ungeradem Index, denn: Ist allgemeiner  $G$  eine abelsche Gruppe,  $U$  eine Untergruppe von ungeradem Index  $[G : U]$  und bezeichnet  $\pi : G \rightarrow G/G^2$  die kanonische Projektion, so gilt zunächst  $\pi(U) = G/G^2$ , da jede Restklasse  $gG^2$  mit  $g^{[G:U]}$  einen Repräsentanten in  $U$  besitzt. Weiter ist  $\text{Kern}(\pi|_U) = U \cap G^2 = U^2$ , denn ist  $u = g^2 \in U \cap G^2$ , so besitzt das Element  $gU \in G/U$  Ordnung kleiner oder gleich 2. Da  $|G/U| = [G : U]$  ungerade ist, folgt also  $gU = U$  bzw.  $g \in U$ . Nach dem Homomorphiesatz induziert die Abbildung  $\pi|_U$  also einen Isomorphismus  $\varphi : U/U^2 \rightarrow G/G^2$  mit  $\varphi(uU^2) = uG^2$ . ■

Ist schließlich mit  $\alpha \in F$ ,  $\alpha \gg 0$  ein Erzeuger des Ideals  $\mathfrak{J} = \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_E)^{-1}$  gefunden, so ist jeder andere total positive Erzeuger von der Form  $\varepsilon\alpha$  für eine Einheit  $\varepsilon \in \mathfrak{D}^* \cap F = \mathfrak{o}^*$  mit  $\varepsilon \gg 0$ .

Vorausgesetzt, es gibt zu gewählten Idealen  $\mathfrak{A} \in \mathcal{A}$  und  $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$  ein  $\alpha \in F$  mit  $\alpha \gg 0$ , so erhält man sämtliche Ideal-Gitter durch  $L(\mathfrak{A}, \alpha\varepsilon)$ , wobei es aufgrund von Lemma 3.2.2 genügt, für  $\varepsilon$  jeweils nur Vertreter der Menge  $\mathcal{E}^+$  der total positiven Einheiten von  $F$  modulo  $N_F^E(\mathfrak{D}^*)$  zu betrachten.

Nach Konstruktion erhält man auf diese Weise  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  mit  $\ell L^\# \subseteq L$  und Determinante  $d_0$ . Es ist jedoch noch zu prüfen, ob diese Gitter jeweils Stufe  $\ell$  besitzen und gerade sind.

Der Übersicht halber sind in dem folgenden Algorithmus alle Schritte zusammengefasst:

---

**Algorithmus 2** Bestimmung von Ideal-Gittern.

---

**Eingabe:** CM-Körper  $E$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei,  $d_0 \in \mathbb{N}$ .

**Ausgabe:** Alle Ideal-Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$  über dem Körper  $E$ .

Berechne ein Repräsentantensystem  $\mathcal{A}$  von  $\text{Cl}_E$  bzw.  $\text{Cl}_E / \text{Gal}(E : \mathbb{Q})$ .

Berechne die Menge  $\mathcal{B} := \{\ell\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D} \mid \mathfrak{B} \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Ideal mit } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = d_0\}$ .

Berechne ein Repräsentantensystem  $\mathcal{E}$  von  $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{*2}$ .

Berechne ein Repräsentantensystem  $\mathcal{E}^+$  der Menge  $\{\varepsilon N_F^E(\mathfrak{D}^*) \mid \varepsilon \gg 0\}$ .

**for**  $(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  **do**

$\mathfrak{J} := \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_E)^{-1}$

**if**  $\mathfrak{J} = (\mathfrak{J} \cap F)\mathfrak{D}$  **and**  $\exists \alpha' \in F : \alpha'\mathfrak{o} = \mathfrak{J} \cap F$  **then**

**if**  $\exists \varepsilon' \in \mathcal{E} : \Sigma(\varepsilon') = \Sigma(\alpha')$  **then**

$\alpha := \varepsilon' \cdot \alpha'$

**for**  $\varepsilon \in \mathcal{E}^+$  **do**

            Falls  $L(\mathfrak{A}, \alpha\varepsilon)$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  ist, gib  $L(\mathfrak{A}, \alpha\varepsilon)$  aus.

**end for**

**end if**

**end if**

**end for**

---

**BEMERKUNG 3.2.8.** Auf die oben beschriebene Weise erhält man alle geraden  $\mathbb{Z}$ -Gitter einer gegebenen Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$ , welche sich als Ideal-Gitter über dem Körper  $E$  konstruieren lassen. Es ist im Allgemeinen jedoch nicht klar, in welchem  $\mathbb{Z}$ -Geschlecht diese Gitter liegen. Ist beispielsweise  $E := \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ , so ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{P} \rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , wobei  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{P}}$  gilt. Dann ist:

$$L(\mathfrak{D}, 1) \cong \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \quad L(\mathfrak{P}, \frac{1}{2}) \cong \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Während das Gitter  $L(\mathfrak{O}, 1)$  im Geschlecht  $II_2(3^{+1}5^{+1})$  liegt, ist  $L(\mathfrak{P}, \frac{1}{2})$  ein Gitter im Geschlecht  $II_2(3^{-1}5^{-1})$ . ■

**3.2.2. Ideal-Gitter über Kreisteilungskörpern.** Sei im Folgenden also stets  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  der  $m$ -te Kreisteilungskörper. Nach 3.2.1 a) ist die  $\mathbb{Z}$ -Dimension eines Ideal-Gitters über  $E$  somit stets von der Form  $n = [E : \mathbb{Q}] = \varphi(m)$ . Man kann nachrechnen, dass  $\varphi^{-1}(n) = \emptyset$  gilt unter anderem für  $n \in \{14, 26, 34, 38, \dots\}$  sowie für sämtliche ungeraden Zahlen  $n \neq 1$ . Daher kann es in diesen Dimensionen keine Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper geben.

Gemäß Korollar 3.1.10 sind im Fall  $m \neq 2^t$  alle ganzzahligen Ideal-Gitter auch gerade. Im Fall  $m = 2^t$  können Ideal-Gitter hingegen auch ungerade sein (vgl. Bemerkung 3.2.10b).

Das Minimum eines Ideal-Gitters ist a priori nur schwer bis gar nicht berechenbar. Die Rechnungen zeigen jedoch, dass die Minima von Ideal-Gittern „häufig groß“ sind. Beweisbar ist zum Beispiel Folgendes:

**BEMERKUNG 3.2.9.** (vgl. [BF84] Cor. 2.2.) Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  mit  $m$  quadratfrei. Dann ist  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  unzerlegbar. Ist weiter  $m \neq p, 2p$  für jede Primzahl  $p$  und  $[E : \mathbb{Q}] = \varphi(m) > 8$ , dann besitzt jedes Ideal-Gitter  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  ein Minimum von mindestens 4. ■

In der Folge werden alle Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper in den Quebbemannschen Geschlechtern für Dimensionen  $< 48$  bestimmt. Dabei werden nur solche Geschlechter betrachtet, welche ein extremales Gitter enthalten können (vgl. Tabelle 1.2). Dies geschieht zunächst gesondert für den Fall einer ungeraden Primzahlpotenz und im Anschluss daran für alle übrigen Kreisteilungskörper.

**3.2.2.1. Der Fall  $m = p^t$ ,  $p$  ungerade Primzahl.** Ist  $m = p^t$  die Potenz einer ungeraden Primzahl, so ist nach 3.2.1 d) die Quadratklasse der Determinante jedes entstehenden Gitters gleich  $p\mathbb{Q}^{*2}$ , denn die Diskriminante von  $E$  ist eine ungerade Potenz von  $p$  (vgl. [Was82] 2.1). Daher kann es in diesen Fällen höchstens dann Gitter in  $\ell$ -modularen Geschlechtern geben, wenn  $p = \ell$  ist und die Dimension kongruent zu 2 modulo 4 ist; gemäß Lemma 1.1.3 also nur dann, wenn  $\ell \equiv_4 3$ . Diese sind bis einschließlich Dimension 40 in folgender Tabelle angegeben:

$\ell$	$E$	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	Genus	$h_{\text{ext}}$
3	$\mathbb{Q}(\zeta_3)$	1	1	-	-	$II_2(3^{-1})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_9)$	1	1	-	-	$II_6(3^{-3})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{27})$	1	1	0	-	$II_{18}(3^{-9})$	0
7	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	1	0	1	-	$II_6(7^{+3})$	1
11	$\mathbb{Q}(\zeta_{11})$	1	0	0	1	$II_{10}(11^{-5})$	1

TABELLE 3.1. Ideal-Gitter über Kreisteilungskörpern  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  mit  $m = p^t$ .

Im Fall  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  handelt es sich bei diesen Gittern um Spezialfälle der sogenannten *Craig-Gitter*  $A_{p-1}^{(m)}$  (vgl. [CS93] §8.6), hier konkret also  $A_2^{(1)} \cong \mathbb{A}_2$ ,  $A_6^{(2)}$  und  $A_{10}^{(3)}$ . Diese drei Gitter sind extremal genauso, wie das Gitter  $\mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2$ .

**3.2.2.2. Der Fall  $m \neq p^t$ ,  $p$  ungerade Primzahl.** Sei im Folgenden also stets  $m \neq p^t$  für jede ungerade Primzahl  $p$ . Somit ist entweder  $m$  zusammengesetzt, d.h.  $m$  besitzt mindestens zwei verschiedene Primteiler, oder es ist  $m = 2^t$  für ein  $t \in \mathbb{N}$ . In beiden Fällen ergeben sich einige Vereinfachungen:

## BEMERKUNGEN 3.2.10.

- (i) Ist  $m$  zusammengesetzt, so ist die Erweiterung  $E/F$  unverzweigt. Somit gilt also  $\mathfrak{D}_{E/F} = \mathfrak{D}$ . Aus Formel (20) folgt somit  $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{D}_F \cdot \mathfrak{D}_{E/F} = \mathfrak{D}_F \cdot \mathfrak{D}$ . Damit erfüllt  $\mathfrak{D}_E^{-1}$  die Identität  $(\mathfrak{D}_E^{-1} \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-1}$ . Das Ideal  $\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}$  erfüllt offensichtlich die Bedingung aus Lemma 3.2.5 und somit ist auch  $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}} \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}$ . Das Ideal  $\mathfrak{J} := \mathfrak{B} \cdot (\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}\mathfrak{D}_E)^{-1}$  erfüllt folglich genau dann  $(\mathfrak{J} \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ , wenn dies bereits für das Ideal  $\mathfrak{B}$  gilt. Damit lässt sich die Menge  $\mathcal{B}$  wie folgt einschränken:

$$\mathcal{B} := \{\ell\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D} \mid \mathfrak{B} \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Ideal mit } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = d_0 \text{ und } (\mathfrak{B} \cap F)\mathfrak{D} = \mathfrak{B}\}$$

- (ii) Ist  $m = 2^t$  für ein  $t \in \mathbb{N}$ , so ist das Ideal-Gitter  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  nach 3.1.10 genau dann gerade, wenn  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ . Für das 1-dimensionale  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $(\mathfrak{A}, \alpha)$  gilt  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{s}L = \alpha\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{B}\mathfrak{D}_E^{-1}$ . Man erhält also als Kriterium dafür, wann  $L(\mathfrak{A}, \alpha)$  gerade ist, die Bedingung  $\mathfrak{B}\mathfrak{D}_E \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ . Mit (20) ist dies äquivalent zu  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}_{E/F} = \mathfrak{P}^2$ , wobei  $\mathfrak{P} := (1 - \zeta_m)$  ist. Also lässt sich in diesem Fall die Menge  $\mathcal{B}$  wie folgt wählen:

$$\mathcal{B} := \{\ell\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{P}^2 \mid \mathfrak{B} \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Ideal mit } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = d_0\}$$

Insbesondere muss also  $\ell$  notwendig gerade sein, damit ein gerades Ideal-Gitter über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  der Stufe  $\ell$  existieren kann. ■

Für zwei Geschlechter folgt die Bestimmung aller Ideal-Gitter hier noch einmal ausführlich:

BEISPIEL 3.2.11. (Ideal-Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$ ) Um ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Dimension 32 zu erhalten, sind genau die Zahlen  $m \in \varphi^{-1}(32) = \{51, 64, 68, 80, 96, 120\}$  zu betrachten:

$m=51$  Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1\overline{\mathfrak{P}_1}\mathfrak{P}_2\overline{\mathfrak{P}_2}$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2) = 2^8$ . Gemäß Bemerkung 3.2.10 gilt also  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}_1\overline{\mathfrak{P}_1}, \mathfrak{P}_2\overline{\mathfrak{P}_2}\}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{51})$  ist 5, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt zwei Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}\}$ . Weiter gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Von den vier so entstehenden  $\mathbb{Z}$ -Gittern sind genau zwei isometrisch. Die verbleibenden drei Gitter sind extremal und isometrisch zu  $MW_{32}$ ,  $MW'_{32}$  bzw.  $CQ_{32}$ .

$m=64$  Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^{32}$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 2$ . Die Menge  $\mathcal{B}$  besteht demnach aus dem Element  $\mathfrak{P}^{16}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{64})$  ist 17, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt zwei Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}\}$ . Weiter gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Von den zwei so entstehenden  $\mathbb{Z}$ -Gittern besitzt eines das Minimum 2 und eines das Minimum 4.

$m=68$  Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^2$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2) = 2^8$ . Die Menge  $\mathcal{B}$  umfasst demnach die drei Elemente  $\mathfrak{P}_1^2, \mathfrak{P}_2^2, \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ .

Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{68})$  ist 8, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt vier Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \mathfrak{A}^4\}$ . Weiter gibt es genau zwei Norm-Restklassen total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1, \varepsilon\}$ . Man erhält auf diese Weise bis auf Isometrie genau sechs  $\mathbb{Z}$ -Gitter. Je drei dieser Gitter besitzen das Minimum 4 und die drei übrigen Gitter sind extremal. Auch diese sind isometrisch zu den Gittern  $MW_{32}$ ,  $MW'_{32}$  und  $CQ_{32}$ .

$m=80$  Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^8$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 2^4$ . Die Menge  $\mathcal{B}$  umfasst demnach das Element  $\mathfrak{P}^4$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{80})$  ist 5, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt zwei Bahnen

unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}\}$ . Weiter gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Es entstehen zwei Gitter; eines davon ist extremal, isometrisch zu dem Gitter  $Q_{32}$ .

m=96 Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^{16}$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 2^2$ . Die Menge  $\mathcal{B}$  umfasst demnach das Element  $\mathfrak{P}^8$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{96})$  ist 9, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \rangle \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . Es gibt zwei Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}_1\}$ . Weiter gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Auf diese Weise entstehen genau zwei  $\mathbb{Z}$ -Gitter, eines mit Minimum 2 und eines mit Minimum 4.

m=120 Hier ist  $2\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^4 \mathfrak{P}^4$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 2^4$ . Gemäß 3.2.10 ist  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}^2 \mathfrak{P}^2\}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{120})$  ist 4, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt drei Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2\}$ . Weiter gibt es genau zwei Norm-Restklassen total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also ist  $\mathcal{E}^+ = \{1, \varepsilon\}$ . Von den sechs entstehenden Gittern sind jeweils zwei isometrisch. Die verbleibenden drei Gitter besitzen jeweils das Minimum 4.

Somit lässt sich als Ergebnis festhalten, dass in dem Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit den Gittern  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$  genau drei extremale Gitter mit einer Struktur als Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper existieren. ■

BEISPIEL 3.2.12. (Ideal-Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$ ) Um ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Dimension 36 zu erhalten, sind genau die Zahlen  $m \in \varphi^{-1}(36) = \{37, 57, 63, 76, 108\}$  zu betrachten. Da 37 eine Primzahl ist, scheidet diese aus (vgl. Abschnitt 3.2.2.1).

m=57 Hier ist  $3\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 3^{18}$ . Die Menge  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}\}$  ist also einelementig. Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{57})$  ist 9, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$  zyklisch. Es gibt drei Bahnen unter der Operation der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^3\}$ . Weiter gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Man erhält drei Gitter, zwei Gitter mit Minimum 6, eines mit Minimum 4.

m=63 Hier ist  $3\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^6$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 3^6$ . Es ist  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}^3\}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{63})$  ist 7, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ . Hier gibt es zwei Bahnen von Idealklassen unter der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}\}$ . Des Weiteren gibt es genau eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten in  $\mathfrak{o}^*$ , also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Man erhält zwei Gitter von denen eines Minimum 4 und eines Minimum 6 besitzt.

m=76 Hier ist  $3\mathfrak{D} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}_1) = \mathfrak{N}(\mathfrak{P}_2) = 3^{18}$ . Es ist also  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2\}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{76})$  ist 19, es ist  $\text{Cl}_E = \langle \mathfrak{A} \rangle \cong \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$ . Es gibt zwei Bahnen von Idealklassen unter der Galoisgruppe, genauer  $\mathcal{A} = \{\mathfrak{D}, \mathfrak{A}\}$ . Die Anzahl der total positiven Norm-Restklassen ist 1, also  $\mathcal{E} = \{1\}$ . Es entstehen vier Gitter mit Minimum 6 von denen jeweils zwei isometrisch sind.

m=108 Hier ist  $3\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^{18}$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 3^2$ . Es ist  $\mathcal{B} = \{\mathfrak{P}^9\}$ . Die Klassenzahl von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{108})$  ist ebenfalls 19, modulo der Operation der Galoisgruppe sind es auch hier zwei Klassen. Weiter gibt es eine Norm-Restklasse total positiver Einheiten, also  $\mathcal{E}^+ = \{1\}$ . Man erhält zwei Gitter; eines davon ist das Gitter  $18.A_2$  mit Minimum 2, das andere besitzt ein Minimum von 6.

Somit lässt sich als Ergebnis festhalten, dass in dem Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  kein extremales Gitter mit einer Struktur als Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper existiert. ■

Sämtliche Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle 3.2 aufgeführt. Dabei ist  $\ell$  die Stufe der  $\mathbb{Z}$ -Gitter,  $E$  der jeweilige Kreisteilungskörper,  $h^{\mathbb{Z}}$  die Gesamtanzahl der gefundenen Ideal-Gitter,



$h_2, \dots, h_{14}$  die Anzahl der hermiteschen Gitter, welche als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ein Minimum von  $2, \dots, 14$  besitzen, und  $h_{ext}^{\mathbb{Z}}$  die Anzahl der extremalen  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bis auf Isometrie), welche eine Struktur als Ideal-Gitter über dem Körper  $E$  besitzen.

$\ell$	$E$	$h^{\mathbb{Z}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	$h_{12}$	$h_{14}$	Genus	$h_{ext}^{\mathbb{Z}}$
2	$\mathbb{Q}(\zeta_8)$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_4(2^{-2})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_4(2^{-2})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{16})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_8(2^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_8(2^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{36})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(2^{-6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{32})$	1	1	0	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	1	1	0	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{33})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{20}(2^{-10})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{44})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{20}(2^{-10})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	1	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{51})$	3	0	0	3	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	3
	$\mathbb{Q}(\zeta_{64})$	2	1	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{68})$	6	0	3	3	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	3
	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	2	0	1	1	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	2	1	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	3	0	3	0	-	-	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{57})$	3	0	0	3	-	-	-	-	$\Pi_{36}(2^{-18})$	3
	$\mathbb{Q}(\zeta_{76})$	2	0	1	1	-	-	-	-	$\Pi_{36}(2^{-18})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{108})$	2	1	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{36}(2^{-18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{88})$	6	0	3	3	-	-	-	-	$\Pi_{40}(2^{+20})$	3
$\mathbb{Q}(\zeta_{132})$	4	0	1	3	-	-	-	-	$\Pi_{40}(2^{+20})$	3	
3	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_4(3^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	1	-	-	-	-	-	-	$\Pi_8(3^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{21})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(3^{+6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(3^{+6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{36})$	1	1	0	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(3^{+6})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	1	1	0	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{39})$	2	0	1	1	-	-	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{52})$	2	0	1	1	-	-	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	2	0	2	0	-	-	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	1	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	2	0	2	0	-	-	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0

$\ell$	$E$	$h^{\mathbb{Z}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	$h_{12}$	$h_{14}$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
3	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	6	0	2	4	-	-	-	-	$\Pi_{32}(3^{+16})$	4
	$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	2	1	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{32}(3^{+16})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	5	0	3	2	-	-	-	-	$\Pi_{32}(3^{+16})$	2
	$\mathbb{Q}(\zeta_{57})$	3	0	1	2	0	-	-	-	$\Pi_{36}(3^{+18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{63})$	2	0	1	1	0	-	-	-	$\Pi_{36}(3^{+18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{76})$	2	0	0	2	0	-	-	-	$\Pi_{36}(3^{+18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{108})$	2	1	0	1	0	-	-	-	$\Pi_{36}(3^{+18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{88})$	6	0	0	6	0	-	-	-	$\Pi_{40}(3^{+20})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{132})$	2	0	0	2	0	-	-	-	$\Pi_{40}(3^{+20})$	0
5	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_8(5^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_8(5^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_8(5^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{21})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(5^{-6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{35})$	1	0	0	0	1	-	-	-	$\Pi_{24}(5^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{45})$	1	0	1	0	0	-	-	-	$\Pi_{24}(5^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	2	0	1	0	1	-	-	-	$\Pi_{24}(5^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	0	1	1	0	-	-	-	$\Pi_{24}(5^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	1	0	1	0	0	-	-	-	$\Pi_{24}(5^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	2	0	1	0	1	0	-	-	$\Pi_{32}(5^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	2	0	1	1	0	0	-	-	$\Pi_{32}(5^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	8	0	1	2	5	0	-	-	$\Pi_{32}(5^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{63})$	8	0	1	0	7	0	-	-	$\Pi_{36}(5^{-18})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{55})$	2	0	0	0	2	0	0	-	$\Pi_{40}(5^{+20})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{75})$	2	0	1	0	1	0	0	-	$\Pi_{40}(5^{+20})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{88})$	8	0	0	4	4	0	0	-	$\Pi_{40}(5^{+20})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{100})$	6	0	3	0	3	0	0	-	$\Pi_{40}(5^{+20})$	0
$\mathbb{Q}(\zeta_{132})$	2	0	0	1	1	0	0	-	$\Pi_{40}(5^{+20})$	0	
$\mathbb{Q}(\zeta_{69})$	5	0	0	0	5	0	0	-	$\Pi_{44}(5^{-22})$	0	
6	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_8(2^{+4}3^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_{12}(2^{+6}3^{+6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}3^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}3^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}3^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{33})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{20}(2^{-10}3^{-10})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	2	0	1	0	1	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12}3^{+12})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	0	1	1	0	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12}3^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	2	0	0	0	2	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{+12}3^{+12})$	2
	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	6	0	0	1	5	0	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16}3^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	2	0	1	0	1	0	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16}3^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	5	0	0	1	4	0	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16}3^{+16})$	0

$\ell$	$E$	$h^{\mathbb{Z}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	$h_{12}$	$h_{14}$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
6	$\mathbb{Q}(\zeta_{88})$	6	0	0	0	5	1	0	-	$\Pi_{40}(2^{+20}3^{+20})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{132})$	4	0	0	1	2	1	0	-	$\Pi_{40}(2^{+20}3^{+20})$	0
7	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_8(7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	1	0	1	(0)	-	-	-	-	$\Pi_{12}(7^{+6})$	(0)
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}(7^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	2	0	1	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}(7^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}(7^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{44})$	1	0	0	1	0	-	-	-	$\Pi_{20}(7^{+10})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	6	0	1	2	3	(0)	-	-	$\Pi_{24}(7^{+12})$	(0)
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	0	1	1	0	(0)	-	-	$\Pi_{24}(7^{+12})$	(0)
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	1	0	0	0	1	(0)	-	-	$\Pi_{24}(7^{+12})$	(0)
	$\mathbb{Q}(\zeta_{80})$	4	0	0	1	1	2	0	-	$\Pi_{32}(7^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{96})$	6	0	1	1	4	0	0	-	$\Pi_{32}(7^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{120})$	9	0	0	2	7	0	0	-	$\Pi_{32}(7^{+16})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{88})$	20	0	0	2	11	6	1	0	$\Pi_{40}(7^{+20})$	0
$\mathbb{Q}(\zeta_{132})$	2	0	0	0	1	1	0	0	$\Pi_{40}(7^{+20})$	0	
11	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_4(11^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{36})$	1	0	1	(0)	-	-	-	-	$\Pi_{12}(11^{+6})$	(0)
14	$\mathbb{Q}(\zeta_8)$	1	0	1	-	-	-	-	-	$\Pi_4(2^{+2}7^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{16})$	1	0	1	0	-	-	-	-	$\Pi_8(2^{+4}7^{+4})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_8(2^{+4}7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	1	0	0	0	1	-	-	-	$\Pi_{12}(2^{+6}7^{+6})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{32})$	1	0	1	0	0	0	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}7^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	0	0	1	0	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}7^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	2	0	0	1	1	0	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}7^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	0	0	1	0	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}7^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	6	0	0	0	4	0	2	0	$\Pi_{24}(2^{+12}7^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	0	0	1	1	0	0	0	$\Pi_{24}(2^{+12}7^{+12})$	0
$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	1	0	0	0	1	0	0	0	$\Pi_{24}(2^{+12}7^{+12})$	0	
15	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_8(3^{+4}5^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{40})$	1	0	0	0	0	1	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8}5^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{48})$	1	0	0	1	0	0	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8}5^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{60})$	1	0	0	0	1	0	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8}5^{+8})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{56})$	1	0	0	0	1	0	0	0	$\Pi_{24}(3^{+12}5^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{72})$	2	0	0	1	0	0	1	0	$\Pi_{24}(3^{+12}5^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{84})$	2	0	0	0	0	0	2	0	$\Pi_{24}(3^{+12}5^{+12})$	0
23	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	1	0	0	1	-	-	-	-	$\Pi_4(23^{+2})$	1

TABELLE 3.2. Ideal-Gitter über Kreisteilungskörpern  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  mit  $m \neq p^t$ .

BEMERKUNG 3.2.13. Wie in Bemerkung 3.2.8 gesehen, ist a priori nicht klar, dass alle Ideal-Gitter über einem Körper  $E$  zu gegebener Stufe und Determinante im selben  $\mathbb{Z}$ -Geschlecht liegen. Dies ist jedoch für die betrachteten Kreisteilungskörper stets der Fall. ■

Als Ergebnis dieser Klassifikation erhält man:

SATZ 3.2.14. *In der nachfolgenden Tabelle sind für die Stufen  $\ell \in \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  bis Dimension  $< 48$  die Anzahlen extremer Gitter mit einer Struktur als Ideal-Gitter über einem Kreisteilungskörper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ ,  $m \neq p^r, 2p^r$ ,  $p$  ungerade Primzahl aufgelistet.*

$n$	2	3	5	6a	6b	7	11	14	15	23
4	1	1	0	0	0	0	1	1	0	1
8	1	1	1	1		1	1	1	1	-
12	1	1	1	1	0	0	0	1	0	-
16	1	2	0	1		3	-	0	1	-
20	1	0	0	0	1	0	-	0	0	-
24	1	1	1	2		0	-	0	0	-
32	4	7	0	0		0	-	-	-	-
36	3	0	0	0	0	0	-	-	-	-
40	6	0	0	0		0	-	-	-	-
44	0	0	0	0		-	-	-	-	-

□

### 3.3. Allgemeines zu Geschlechtern und Maßformel

Sei auch in diesem Abschnitt weiterhin  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$ . Bekanntlich korrespondieren die Primideale von  $F$  gerade zu Klassen äquivalenter nicht-archimedischer Bewertungen von  $F$ . Diese werden im Folgenden auch *Stellen* genannt und ebenfalls mit  $\mathfrak{p}$  bezeichnet. Die Menge dieser Stellen von  $F$  sei  $\Omega_F$ . Gilt  $\mathfrak{p} \mid 2$ , so spricht man auch von einer *dyadischen* Stelle.

Für  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  bezeichne  $F_{\mathfrak{p}}$  die Kompletterung von  $F$  an der Stelle  $\mathfrak{p}$  und entsprechend  $E_{\mathfrak{P}}$  die Kompletterung von  $E$  an der Stelle  $\mathfrak{P}$  (im Sinne von [O'M63] §11F). Im Folgenden wird mit  $\pi$  stets ein uniformisierendes Element von  $F_{\mathfrak{p}}$  bezeichnet. Weiter sei  $E_{\mathfrak{p}} := F_{\mathfrak{p}} \otimes_F E$  die *Kompletterung von  $E$  an der Stelle  $\mathfrak{p}$* . Es gilt (vgl. [Neu92] II (8.3)):

$$(24) \quad E_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} E_{\mathfrak{P}} & \mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2\} \\ F_{\mathfrak{p}} \times F_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}} \end{cases}$$

Auf  $E_{\mathfrak{p}}$  definiert man weiter eine Involution als Fortsetzung der Involution  $\bar{\phantom{x}}$  durch  $f \otimes e \mapsto f \otimes \bar{e}$ . Bei der Identifikation wie in (24) entspricht diese Involution im ersten Fall gerade der Involution der quadratischen (Körper-)Erweiterung  $E_{\mathfrak{P}}/F_{\mathfrak{p}}$  und im zweiten Fall gerade der Vertauschung der Komponenten von  $F_{\mathfrak{p}} \times F_{\mathfrak{p}}$ .

Den Ring  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$  definiert man als den ganzen Abschluss von  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  in  $E_{\mathfrak{p}}$ , sodass man im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2$  den gewöhnlichen Ganzheitsring von  $E_{\mathfrak{P}}$ , also  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{P}}$  und im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  den Ring  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \times \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  erhält.

Für ein  $\mathfrak{D}$ -Ideal  $\mathfrak{A}$  sei  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} := \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{A}$ . Im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2$  erhält man also einfach  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{A}_{\mathfrak{P}}$ , während im anderen Fall  $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A})} \times \mathfrak{p}^{\nu_{\overline{\mathfrak{P}}}(\mathfrak{A})}$  ist. Insbesondere erhält man für die Differenten:

$$\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}} := (\mathfrak{D}_E)_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{P}}} & \mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2\} \\ \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}} \times \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}} & \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}} \end{cases}$$

Ist  $\mathfrak{A}$  in beliebiges  $\mathfrak{D}$ -Ideal, so gilt

$$(25) \quad \mathfrak{A} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} (\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}} \cap E).$$

Weiter definiert man  $V_{\mathfrak{p}} := F_{\mathfrak{p}} \otimes_F V$ . Dann ist  $V_{\mathfrak{p}}$  ein freier  $E_{\mathfrak{p}}$ -Modul vom Rang  $N = \dim_E(V)$ . Die hermitesche Form  $h$  kann auf  $V_{\mathfrak{p}}$  fortgesetzt werden durch  $h(f_1 \otimes v, f_2 \otimes w) := f_1 f_2 \otimes h(v, w)$ .

Ist  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$ , so ist  $L_{\mathfrak{p}} := \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} \cdot L$  ein  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter auf  $V_{\mathfrak{p}}$ . Die Definitionen des dualen Gitters, des Skalen-, Norm- und Volumenideals sowie der Eigenschaften modular und maximal sind in naheliegender Weise auf  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter zu übertragen. Ist  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$ , so ist  $L_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{A}_1)_{\mathfrak{p}} x_1 + \dots + (\mathfrak{A}_N)_{\mathfrak{p}} x_N$ . Daraus ergibt sich leicht  $(L_{\mathfrak{p}})^* = (L^*)_{\mathfrak{p}}$  sowie  $\mathfrak{s}L_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{s}L)_{\mathfrak{p}}$ ,  $\mathfrak{n}L_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{n}L)_{\mathfrak{p}}$  und  $\mathfrak{v}L_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{v}L)_{\mathfrak{p}}$ . Zusammen mit (25) erhält man somit, dass ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  genau dann  $\mathfrak{A}$ -modular ist, wenn für jede Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  das  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter  $L_{\mathfrak{p}}$   $\mathfrak{A}_{\mathfrak{p}}$ -modular ist. Darüber hinaus gilt:

$$L = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} (L_{\mathfrak{p}} \cap V)$$

Die Definition eines Geschlechts von Gittern auf einem hermiteschen Raum  $(V, h)$  lautet wie folgt:

DEFINITION. Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(V, h)$ . Das *Geschlecht* von  $L$  ist definiert als

$$\text{gen}(L) := \{\mathfrak{D}\text{-Gitter } K \subset V \mid \forall \mathfrak{p} \in \Omega_F \exists \psi_{\mathfrak{p}} \in U(V_{\mathfrak{p}}, h) : K_{\mathfrak{p}} = \psi_{\mathfrak{p}}(L_{\mathfrak{p}})\}$$

Ein Geschlecht (auf einem total positiv definiten hermiteschen Raum) ist also wie üblich durch die Angabe einer Isometrieklasse für jede Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  festgelegt.

**3.3.1. Hermitesche Geschlechter.** Sei im Folgenden stets  $L$  ein hermitesches  $\mathfrak{D}$ -Gitter, welches mittels Spurkonstruktion ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter mit gegebener quadratfreier Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$  ergibt. Es sollen nun unter gewissen Voraussetzungen an das Gitter  $L$  und den Körper  $E$  alle möglichen hermiteschen Geschlechter eines solchen Gitters  $L$  bestimmt werden.

Aus Prop. 3.1.4 erhält man für ein solches Gitter  $L$  zunächst

$$(26) \quad \mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1} \text{ und } \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = d_0 \cdot |d_E|^{-N}.$$

Da weiter die Stufe von  $L$  gleich  $\ell$  ist, gilt nach Lemma 1.1.1  $\ell L^\# \subseteq L \subseteq L^\#$  und wegen  $L^\# = \mathfrak{D}_E^{-1} L^*$  auch:

$$(27) \quad \ell \mathfrak{D}_E^{-1} L^* \subseteq L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1} L^*$$

Insbesondere sind unimodulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  (also mit  $\ell = d_0 = 1$ ) als  $\mathfrak{D}$ -Gitter somit (global)  $\mathfrak{D}_E^{-1}$ -modular.

Allgemeiner erhält man für beliebige Stufe  $\ell$  durch Übergang zu den Kompletzierungen (d.h. Multiplizieren mit  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ ) der Inklusionskette (27) die folgenden Beziehungen:

$$(28) \quad \ell \mathfrak{D}_{E_\mathfrak{p}}^{-1} L_\mathfrak{p}^* \subseteq L_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{D}_{E_\mathfrak{p}}^{-1} L_\mathfrak{p}^*$$

Offenbar zeigen diese Inklusionen bereits für jede Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{p} \nmid \ell$ , dass  $L_\mathfrak{p} = \mathfrak{D}_{E_\mathfrak{p}}^{-1} L_\mathfrak{p}^*$  gilt, d.h.  $L_\mathfrak{p}$  also  $\mathfrak{D}_{E_\mathfrak{p}}^{-1}$ -modular ist. An einer Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ , welche unverzweigt in der gesamten Erweiterung  $E/\mathbb{Q}$  und damit teilerfremd zu  $\mathfrak{D}_E$  ist, folgt darüber hinaus  $L_\mathfrak{p}^* = L_\mathfrak{p}$  und somit ist  $L_\mathfrak{p}$  für eine solche Stelle  $\mathfrak{p}$  unimodular.

Für alle übrigen Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  ist das Gitter  $L_\mathfrak{p}$  nicht notwendig modular, ähnlich wie bei  $\mathbb{Z}_p$ -Gittern kann man jedes Gitter in eine Summe von modularen Gittern zerlegen:

**DEFINITION.** Eine Zerlegung  $\Lambda = \perp_{i \in \mathbb{Z}} J_i$  eines  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -Gitters  $\Lambda$  heißt *Jordan-Zerlegung*, falls  $J_i$  entweder  $\mathfrak{P}^i$ -modular im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}^2\}$  bzw.  $\mathfrak{p}^i \times \mathfrak{p}^i$ -modular im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  ist oder  $J_i = \{0\}$  gilt. Zwei Jordan-Zerlegungen  $\Lambda = \perp_{i \in \mathbb{Z}} J_i$  und  $\tilde{\Lambda} = \perp_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{J}_i$  sind *vom selben Typ*, wenn  $\dim J_i = \dim \tilde{J}_i$  und  $J_i$  normal genau dann, wenn  $\tilde{J}_i$  normal ist. Dabei heißt ein Gitter  $J$  *normal*, falls  $\mathfrak{n}J = \mathfrak{s}J$  und *subnormal* anderenfalls, also wenn  $\mathfrak{n}J \subsetneq \mathfrak{s}J$ .

Man kann leicht zeigen, dass jedes  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -Gitter eine Jordan-Zerlegung besitzt (vgl. [Jac62] 4.3 bzw. [Ger70] 1.6). Weiter kann man genau wie in [O'M63] 91:9 zeigen, dass der Typ jeder Jordan-Zerlegung eines Gitters stets derselbe ist. Der Typ einer beliebigen Jordan-Zerlegung eines  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -Gitters wird im Folgenden als dessen *Jordan-Typ* bezeichnet.

Die für das Folgende notwendige lokale Theorie für hermitesche Formen wurde in [Jac62] im Fall einer nicht-zerlegten Stelle und in [Ger70] im Fall einer zerlegten Stelle entwickelt. Die Ergebnisse sollen hier kurz zitiert werden. Es wird sich zeigen, dass diese Klassifikation in großen Teilen einfacher ist als die entsprechenden Resultate für quadratische Formen (vgl. auch [O'M63] 92:2 und 93:28).

**PROPOSITION 3.3.1.** (vgl. [Jac62] Theorem 7.1. bzw. [Ger70] Theorem 1.5.) Sei  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine nicht-verzweigte Stelle, d.h. es ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$  träge oder  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  zerlegt.

- a) Ist  $\Lambda$  ein  $\mathfrak{p}^i$ -modulares  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -Gitter (genauer  $\mathfrak{p}^i \mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -modular, d.h.  $\mathfrak{P}^i$ -modular bzw.  $\mathfrak{p}^i \times \mathfrak{p}^i$ -modular), so gilt:

$$\Lambda \cong \langle \pi^i, \dots, \pi^i \rangle$$

- b) Zwei  $\mathfrak{D}_\mathfrak{p}$ -Gitter  $\Lambda$  und  $\tilde{\Lambda}$  sind isometrisch genau dann, wenn  $\Lambda$  und  $\tilde{\Lambda}$  vom selben Jordan-Typ sind.  $\square$

## BEMERKUNGEN 3.3.2.

- (i) Für die hierbei verwendete Notation  $\Lambda \cong \langle \alpha_1, \dots, \alpha_N \rangle$  für ein  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter  $\Lambda$  im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  siehe [Ger70] Rem. 1.6 oder auch [Shi64] Prop. 3.2.
- (ii) Wegen  $h(x, y) = \overline{h(y, x)}$  gilt für ein  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter  $\Lambda$  ebenfalls  $\mathfrak{s}\Lambda = \overline{\mathfrak{s}\Lambda}$ . Ist also  $\Lambda$   $\mathfrak{A}$ -modular, so gilt notwendig  $\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$ . Insbesondere kann es im Fall  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  kein  $\mathfrak{P}$ -modulares  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter geben.  $\blacksquare$

Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte Stelle, d.h. gilt  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ , so ist  $\Pi := \sqrt{\pi}$  ein uniformisierendes Element von  $E_{\mathfrak{p}}$ . Für jedes  $i \in \mathbb{Z}$  bezeichnet man in diesem Fall das 2-dimensionale  $\mathfrak{P}^i$ -modulare  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter  $\mathbb{H}(i)$  mit

$$\mathbb{H}(i) \cong \begin{pmatrix} 0 & \Pi^i \\ \overline{\Pi}^i & 0 \end{pmatrix}$$

als ( $\mathfrak{P}^i$ -modulare) *hyperbolische Ebene*. Ist ein Gitter isometrisch zu einer orthogonalen Summe  $\mathbb{H}(i) \perp \dots \perp \mathbb{H}(i)$  von  $\mathfrak{P}^i$ -modularen hyperbolischen Ebenen, so bezeichnet man das Gitter auch als *hyperbolisch*. Falls  $\mathfrak{p}$  eine nicht-dyadische verzweigte Stelle und damit 2 eine Einheit ist, so gilt  $\mathbb{H}(i) \cong \langle \pi^{i/2}, -\pi^{i/2} \rangle$  für jedes gerade  $i$ , wie man leicht mit der Transformation  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$  verifiziert. Ist  $i$  hingegen ungerade, so ist  $\mathbb{H}(i)$  subnormal und damit insbesondere nicht diagonalisierbar.

PROPOSITION 3.3.3. (vgl. [Jac62] Theorem 8.2.) Sei  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte, nicht-dyadische Stelle, d.h. es ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  und es gilt  $\mathfrak{p} \nmid 2$ .

a) Sei  $\Lambda$  ein  $\mathfrak{P}^i$ -modulares  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter. Dann gilt:

$$\Lambda \cong \begin{cases} \langle \pi^{\frac{i}{2}}, \dots, \pi^{\frac{i}{2}}, \pi^{-\frac{(n-1)i}{2}} d\Lambda \rangle & \text{falls } i \text{ gerade} \\ \mathbb{H}(i) \perp \dots \perp \mathbb{H}(i) & \text{falls } i \text{ ungerade} \end{cases}$$

b) Zwei  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter  $\Lambda$  und  $\tilde{\Lambda}$  sind genau dann isometrisch, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

1.  $\Lambda$  und  $\tilde{\Lambda}$  sind vom selben Jordan-Typ.
2. Ist  $\Lambda = \perp J_i$  bzw.  $\tilde{\Lambda} = \perp \tilde{J}_i$  jeweils eine Jordan-Zerlegung von  $\Lambda$  bzw.  $\tilde{\Lambda}$ , so gilt  $dJ_i \cong d\tilde{J}_i$  für alle  $i \in 2\mathbb{Z}$ .  $\square$

Eine Folgerung der Propositionen 3.3.1 und 3.3.3 ist, dass die Jordan-Zerlegung eines Gitters an einer nicht-verzweigten oder nicht-dyadischen Stelle bis auf Isometrie eindeutig ist, d.h. sind  $\perp J_i$  bzw.  $\perp \tilde{J}_i$  zwei Jordan-Zerlegungen eines Gitters  $\Lambda$ , so gilt  $J_i \cong \tilde{J}_i$  für alle  $i \in \mathbb{Z}$ .

Diese Eindeutigkeit ist für eine verzweigte dyadische Stelle im Allgemeinen nicht gegeben. Beispielsweise gilt  $\langle 1, -2 \rangle \cong \langle -1, 2 \rangle$  über dem Körper  $\mathbb{Q}_2(\sqrt{-2})$ , wie man mit Hilfe der Transformation  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$  leicht nachrechnet. Andererseits ist jedoch  $\langle -1 \rangle \not\cong \langle 1 \rangle$  sowie  $\langle -2 \rangle \not\cong \langle 2 \rangle$ , wie sich an dem Hilbert-Symbol  $(-1, -2)_2 = -1$  zusammen mit [O'M63] 63:10 ablesen lässt.

Für das allgemeine Klassifikationsresultat für eine verzweigte dyadische Stelle sei auf [Jac62] §11 verwiesen. Hier werden ausschließlich die benötigten Ergebnisse modulare Gitter betreffend zitiert. Sei also nun  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte dyadische Stelle, d.h. es gelte  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  und  $\mathfrak{p} \nmid 2$ . Die Erweiterung  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  hat dementsprechend Grad  $[E_{\mathfrak{p}} : F_{\mathfrak{p}}] = 2$ . Demzufolge gibt es ein Nicht-Quadrat  $\theta \in F_{\mathfrak{p}}$  mit  $E_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\theta})$ . Durch Multiplizieren mit einer entsprechenden Potenz von  $\pi$  kann erreicht werden, dass  $\theta \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^2$ , also ist  $\theta$  entweder Einheit oder Primelement. Im ersten Fall heißt die (verzweigte quadratische) Erweiterung  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  vom Typ *R-U* („Ramified-Unit“) und im zweiten Fall vom Typ *R-P* („Ramified-Prime“).

PROPOSITION 3.3.4. (vgl. [Jac62] §9 und §10) Sei  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte dyadische Stelle, d.h. es ist  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  und es gilt  $\mathfrak{p} \mid 2$ . Sei  $\Lambda$  ein  $\mathfrak{P}^i$ -modulares  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ -Gitter.

- a) Es ist  $\mathfrak{n}\mathbb{H}(i) \subseteq \mathfrak{n}\Lambda$ .
- b) Ist  $\dim \Lambda = 2$  und  $\mathfrak{n}\Lambda = \mathfrak{n}\mathbb{H}(i)$ , so gilt im Fall R-U und  $i$  gerade bzw. R-P und  $i$  ungerade, dass  $\Lambda \cong \mathbb{H}(i)$  ist.
- c) Ist  $\dim \Lambda \geq 3$ , so gibt es ein  $\Lambda_0$  mit  $\dim \Lambda_0 \in \{1, 2\}$  und  $\mathfrak{n}\Lambda_0 = \mathfrak{n}\Lambda$ , so dass gilt

$$\Lambda \cong \mathbb{H}(i) \perp \dots \perp \mathbb{H}(i) \perp \Lambda_0.$$

Insbesondere gilt für ein  $\mathfrak{P}^i$ -modulares Gitter  $\Lambda$  im Fall R-U und  $i$  gerade bzw. R-P und  $i$  ungerade, dass  $\Lambda \cong \mathbb{H}(i) \perp \dots \perp \mathbb{H}(i)$  ist genau dann, wenn  $\mathfrak{n}\Lambda = \mathfrak{n}\mathbb{H}(i)$ .  $\square$

Da die Gitter, welche hier von Interesse sind, wie oben bereits bemerkt an gewissen verzweigten Stellen lokal  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ -modular sind, ist also die Parität von  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}) = -\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}})$  zu bestimmen, um die obige Klassifikation anwenden zu können. Hierzu dienen das unten folgende Lemma und Korollar.

Dabei verwendet wird der quadratische Defekt  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon)$  einer Einheit  $\varepsilon \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^*$ . Dieser ist definiert als diejenige Potenz  $\mathfrak{p}^d$  des Ideals  $\mathfrak{p}$ , modulo der die Einheit  $\varepsilon$  ein Quadrat ist, nicht aber modulo  $\mathfrak{p}^{d+1}$ . Man kann zeigen, dass der quadratische Defekt  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon)$  stets eines der Ideale  $\{0\} \subseteq 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \subseteq 4\mathfrak{p}^{-1} \subseteq 4\mathfrak{p}^{-3} \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{p}^3 \subseteq \mathfrak{p}$  ist (vgl. [O'M63] 63:2) und dass die Erweiterung  $F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\theta})/F_{\mathfrak{p}}$  für eine Einheit  $\theta \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}^*$  genau dann unverzweigt ist, wenn  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\theta) = 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  (vgl. [O'M63] 63:3).

LEMMA 3.3.5. Sei  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  eine verzweigte quadratische Erweiterung. O.B.d.A. sei  $\theta \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{p}^2$  gewählt mit  $E_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}(\sqrt{\theta})$ . Dann gilt:

- a) Ist  $\mathfrak{p}$  nicht-dyadisch, so gilt  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{P}$ .
- b) Ist  $\mathfrak{p}$  dyadisch und  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  vom Typ R-P, so gilt  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} = 2\mathfrak{P}$ .
- c) Ist  $\mathfrak{p}$  dyadisch und  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  vom Typ R-U, so gilt  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} = 2\mathfrak{P}^{-2d}$ , wobei  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\theta) = \mathfrak{p}^{2d+1}$  der quadratische Defekt der Einheit  $\theta$  ist.

BEWEIS. In den Fällen a) und b) ist  $\theta = \pi$ , im Fall c)  $\theta = 1 + \pi^{2d+1}\delta$  mit einer Einheit  $\delta$  für ein geeignet gewähltes uniformisierendes Element  $\pi$ . In den Fällen a) und b) ist dann  $\Pi = \sqrt{\theta}$  ein Uniformisierendes von  $E$ , im Fall c) das Element  $\Pi = \frac{1+\sqrt{\theta}}{\pi^d}$  (vgl. [Jac62] §5).

Nach [Ser79] I Prop. 18 ist dann stets  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[\Pi]$ , d.h.  $\{1, \Pi\}$  ist eine  $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$ -Basis von  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ . Das Minimalpolynom von  $\Pi$  ist  $m_{\Pi} = X^2 - \theta \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[X]$  bzw.  $m_{\Pi} = X^2 - \frac{2}{\pi^d}X + \frac{1-\theta}{\pi^{2d}} \in \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}[X]$ . Nach [Neu92] III (2.4) gilt folglich:

$$\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} = m'_{\Pi}(\Pi)\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} (2\sqrt{\theta})\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} & \text{im Fall a) und b)} \\ (\frac{2}{\pi^d}\sqrt{\theta})\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} & \text{im Fall c)} \end{cases}$$

Daraus folgt leicht das Resultat.  $\square$

KOROLLAR 3.3.6. Sei  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  eine verzweigte quadratische Erweiterung. Dann gilt:

- a) Ist  $\mathfrak{p}$  nicht-dyadisch, so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}})$  ungerade.
- b) Ist  $\mathfrak{p}$  dyadisch und  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  vom Typ R-P, so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}})$  ungerade.
- c) Ist  $\mathfrak{p}$  dyadisch und  $E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}$  vom Typ R-U, so ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}})$  gerade.

BEWEIS. Es gilt die folgende Formel (vgl. [Lan94] III, §1 Proposition 5)

$$\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} \cdot \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$$

und somit  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}) = \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}}) + \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}})$ . Da  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  verzweigt ist, ist  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}) = 2\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}})$  stets gerade. Mit Lemma 3.3.5 folgt die Behauptung.  $\square$



Demzufolge ist also für eine verzweigte, nicht-dyadische Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  ein  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ -modulares Gitter nach Prop. 3.3.3 stets von der Form

$$L \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})).$$

Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte dyadische Stelle und  $i$  gerade im Fall R-U oder  $i$  ungerade im Fall R-P, so erhält man zusammen mit [Jac62] (9.1) und Lemma 3.3.5:

$$\mathfrak{n}\mathbb{H}(i) = \mathfrak{P}^i \cdot \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}}$$

Gilt nun  $i = \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1}) = \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1})$  oder äquivalent  $\mathfrak{P}^i = \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ , so ist

$$\mathfrak{n}\mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) = \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1} \cdot \mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}.$$

Ist also  $\Lambda$  ein  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ -modulares Gitter mit  $\mathfrak{n}\Lambda \subseteq \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}\mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1}))$ , so gilt nach Prop. 3.3.4 bereits

$$L \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})).$$

Es folgt nun das erste Hauptresultat dieses Abschnitts:

**SATZ 3.3.7.** *Sei  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$  und Ganzheitsring  $\mathfrak{D}$ . Weiter sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter, welches mittels Spurkonstruktion ein gerades, unimodulares  $\mathbb{Z}$ -Gitter ergibt. Zudem gelte  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1} \mathfrak{D}$ . Dann ist das hermitesche Geschlecht von  $L$  festgelegt durch:*

$$(29) \quad L_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) & \mathfrak{p} \text{ verzweigt in } E/F \text{ (d.h. } \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2) \\ \langle \pi^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}, \dots, \pi^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})} \rangle & \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } E/F \text{ (d.h. } \mathfrak{p}\mathfrak{D} \in \{\mathfrak{P}, \overline{\mathfrak{P}}\}) \end{cases}$$

Ist umgekehrt  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter in dem durch (29) festgelegten Geschlecht, so ist  $L$  aufgefasst als  $\mathbb{Z}$ -Gitter gerade und unimodular.

**BEWEIS.** Da  $L$  aufgefasst als  $\mathbb{Z}$ -Gitter unimodular ist, gilt  $\mathfrak{D}_E^{-1} L^* = L^{\#} = L$ . Das Gitter  $L$  ist also  $\mathfrak{D}_E^{-1}$ -modular, insbesondere ist  $L_{\mathfrak{p}}$  also auch  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ -modular für jede Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ .

Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine nicht-verzweigte Stelle, so folgt  $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle \pi^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}, \dots, \pi^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})} \rangle$  aus Prop. 3.3.1. Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte, nicht-dyadische Stelle, so folgt aus Prop. 3.3.3 a), dass gilt

$$L_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})),$$

denn  $L_{\mathfrak{p}}$  ist  $\mathfrak{P}^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}$ -modular und  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})$  ist nach Korollar 3.3.6 ungerade.

Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  verzweigt dyadisch, so gilt wegen der Voraussetzung  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1} \mathfrak{D}$  auch  $\mathfrak{n}L_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$  für die Stelle  $\mathfrak{p}$ . Aus Prop. 3.3.4 a) folgt  $\mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{n}\mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \subseteq \mathfrak{n}L_{\mathfrak{p}}$ , insgesamt also  $\mathfrak{n}L_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{D}_{F_{\mathfrak{p}}}^{-1} \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$ . Nach Prop. 3.3.4 b) und c) folgt schließlich  $L_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1}))$ .

Ist umgekehrt  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter in dem durch (29) festgelegten Geschlecht, so rechnet man leicht nach, dass dann  $\mathfrak{s}L = \mathfrak{D}_E^{-1}$ ,  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{D}_F^{-1} \mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N}$  gilt. Nach Prop. 3.1.9 a) ist  $L$  wegen  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{D}_F^{-1} \mathfrak{D}$  gerade und wegen  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N}$  folgt mit Prop. 3.1.4

$$\det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E)^{-N} = 1.$$

Somit ist  $L$  ein gerades unimodulares Gitter. □

#### BEMERKUNGEN 3.3.8.

- (i) Das in Satz 3.3.7 beschriebene Geschlecht muss nicht existieren, d.h. es muss kein globales Gitter geben, dessen Komplettierungen wie in (29) angegeben sind. Da bekanntermaßen gerade unimodulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter nur in durch 8 teilbaren Dimension existieren, existiert beispielsweise für imaginär-quadratische Zahlkörper  $E$  dieses Geschlecht nur für  $N \equiv_4 0$ .

Ist allgemeiner  $E$  ein CM-Körper derart, dass zumindest eine Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  verzweigt ist in  $E/F$ , dann ist der Rang  $N$  eines Gitters in dem in Satz 3.3.7 beschriebenen Geschlecht stets gerade, denn an einer solchen Stelle ist das Gitter hyperbolisch. Beispielsweise gilt dies für alle Kreisteilungskörper  $\mathbb{Q}_{\zeta_p}$  für Primzahlen  $p > 2$ .

- (ii) Existiert das Geschlecht, so ist dieses das Geschlecht  $\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ -maximaler Gitter auf  $V$ , denn für ein solches Gitter  $L$  ist  $\mathfrak{s}L = \mathfrak{D}_E^{-1}$ ,  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N}$ . Also ist  $\mathfrak{D}_{E/F}^{-N} \cdot \mathfrak{D}_F^{-N} = \mathfrak{D}_E^{-N} = \mathfrak{v}L$  und mit Lemma 3.1.2 ist  $L$  also  $\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ -maximal.
- (iii) Die Bedingung  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  ist dann überflüssig, wenn die Tatsache, dass das Spurgitter von  $L$  ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter ist, diese bereits impliziert. Unter anderem gilt dies nach Korollar 3.1.10 für alle imaginär-quadratischen Zahlkörper und für alle Kreisteilungskörper.  $\blacksquare$

**PROPOSITION 3.3.9.** *Sei  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$  und Ganzheitsring  $\mathfrak{D}$ . Weiter sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Gilt  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$ ,  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{v}L = \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}} \cdot \mathfrak{D}_E^{-N}$  mit  $\prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}) = d_0$  sowie  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$ , so ist das Spurgitter von  $L$  ein gerades Gitter der Determinante  $d_0$  und die Stufe von  $L$  ist ein Teiler von  $\ell$ . Ist  $\ell$  minimal mit der Eigenschaft  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$ , so ist  $\ell$  die Stufe von  $L$ .*

**BEWEIS.** Gemäß 3.1.4 b) ist das Spurgitter von  $L$  wegen  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$  ein ganzzahliges  $\mathbb{Z}$ -Gitter. Nach Prop. 3.1.9 a) ist  $L$  wegen  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  gerade und wegen  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}$  folgt mit Prop. 3.1.4 d)

$$\det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E)^{-N} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}) = d_0.$$

Wegen  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$  folgt weiter mit  $L^{\#} = \mathfrak{D}_E^{-1}L^*$ :

$$\mathfrak{s}(L^{\#}) = \mathfrak{s}(\mathfrak{D}_E^{-1}L^*) = \mathfrak{D}_E^{-2}\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E^{-1}$$

Folglich ist das Spurgitter von  $L^{\#}$  aufgefasst als  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(V, \ell h)$ , welches als  $\mathbb{Z}$ -Gitter also isometrisch zu  ${}^{\ell}L^{\#}$  ist, ein ganzzahliges Gitter. Ist  $d_0$  ungerade, so ist  ${}^{\ell}L^{\#}$  bereits gerade nach Lemma 1.1.1. Ist  $d_0$  gerade, so ist auch  $\ell$  gerade und aufgrund der Voraussetzung  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  ist insbesondere das Ideal  $2\mathfrak{o}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$ . Damit ist  ${}^{\ell}L^{\#}$  als ganzzahliges Spurgitter nach 3.1.9 auch gerade. Es ist also in jedem Fall die Stufe von  $L$  ein Teiler von  $\ell$  und damit insbesondere kleiner oder gleich  $\ell$ .

Bezeichnet umgekehrt  $\ell$  die Stufe des Gitters  $L$ , so muss notwendig  $\mathfrak{s}(L^{\#}) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E^{-1}$  gelten. Mit  $L^{\#} = \mathfrak{D}_E^{-1}L^*$  folgt  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$ . Ist also  $\ell$  die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$ , so ist  $\ell$  die Stufe von  $L$ .  $\square$

**SATZ 3.3.10.** *Sei  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$  und Ganzheitsring  $\mathfrak{D}$ . Weiter sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N$ . Dann gilt:*

- a) *Ergibt  $L$  mittels Spurkonstruktion ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  (quadratifrei) und Determinante  $d_0$  und gilt zusätzlich  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  sowie  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ , dann gilt für alle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ :*

$$(30) \quad L_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) & \mathfrak{p} \text{ verzweigt in } E/F \\ \langle \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}, \dots, \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})} \rangle & \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } E/F, \mathfrak{p} \nmid \ell \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle \perp \underbrace{\langle \ell, \dots, \ell \rangle}_{k_{\mathfrak{p}}\text{-mal}} & \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } E/F, \mathfrak{p} \mid \ell, \end{cases}$$

wobei  $k_{\mathfrak{p}} = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}L)$  ist und die Bedingung  $\prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}) = d_0$  erfüllt sein muss.

- b) *Gibt es ein  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratifrei mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  so, dass sich das Geschlecht des  $\mathfrak{D}$ -Gitters  $L$  wie in a) schreiben lässt, so ergibt  $L$  mittels Spurkonstruktion ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der*

Determinante  $d_0 := \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D})$ . Ist  $\ell$  minimal mit dieser Eigenschaft gewählt, so ist die Stufe von  $L$  gleich  $\ell$ .

BEWEIS. a) Für die Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{p} \nmid \ell$  verläuft der Beweis analog zu dem Beweis von Satz 3.3.7. Sei also  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{p} \mid \ell$ . Aufgrund der Voraussetzung  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  ist  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{p}}$  und insbesondere ist das Ideal  $\mathfrak{p}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$ . Wegen  $\ell\mathfrak{D}_E^{-1}L^* = \ell L^{\#} \subseteq L$  folgt also  $\ell L_{\mathfrak{p}}^* \subseteq L_{\mathfrak{p}}$ , d.h. in einer Jordan-Zerlegung von  $L_{\mathfrak{p}}$  kommen höchstens zwei Komponenten vor, nämlich nur eine uni- und/oder eine  $\mathfrak{p}$ -modulare Komponente. Nach 3.3.1 legt allein der Typ der Jordan-Zerlegung die Isometrieklasse fest. Somit ist  $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle 1, \dots, 1, \pi, \dots, \pi \rangle$ . Da  $\ell$  wegen  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  unverzweigt in der Erweiterung  $F/\mathbb{Q}$  ist, kann  $\ell$  als Uniformisierendes gewählt werden. Ist  $k_{\mathfrak{p}}$  die Dimension der  $\mathfrak{p}$ -modularen Komponente, so gilt offenbar  $k_{\mathfrak{p}} = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}L_{\mathfrak{p}}) = \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}L)$ . Insgesamt erhält man über die Formel  $\mathfrak{v}L = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} \mathfrak{v}L_{\mathfrak{p}}$  als Volumenideal für ein Gitter in dem im Satz angegebenen Geschlecht das Ideal  $\mathfrak{D}_E^{-N} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}$ . Da die Determinante des Spurgitters von  $L$  nach Voraussetzung gleich  $d_0$  ist, muss nach Prop. 3.1.4 d) notwendig gelten:

$$\prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = \det(L) = d_0$$

b) Gibt es umgekehrt ein  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  so, dass sich das hermitesche Geschlecht von  $L$  wie in a) schreiben lässt, so rechnet man leicht nach, dass dann  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}$ ,  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$  und  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}$  gilt, wobei wegen Prop. 3.1.4 d) gilt:

$$d_0 = \mathfrak{N}\left(\prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}\mathfrak{D}\right) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = \det(L)$$

Offenbar lässt sich das Geschlecht von  $L$  genau dann für ein  $\ell \in \mathbb{N}$  auf die Weise wie in a) schreiben, wenn  $\mathfrak{s}(L^*) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$  gilt. Mit Prop. 3.3.9 folgt somit die Behauptung.  $\square$

KOROLLAR 3.3.11. *Es gibt eine bijektive Korrespondenz zwischen möglichen Geschlechtern derjenigen  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  vom Rang  $N$  mit  $\mathfrak{n}L \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ , welche mittels Transferkonstruktion gerade  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $d_0$  liefern, und ganzen  $\mathfrak{o}$ -Idealen  $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$  mit:*

1.  $k_{\mathfrak{p}} \leq N$
2.  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{D}) = d_0$

$\square$

Es soll nun eine systematische Bezeichnung für die Geschlechter wie in (30) gefunden werden. Ist die Erweiterung  $E/F$  verzweigt, d.h. ist mindestens eine Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  verzweigt, so ist der Rang  $N$  eines solchen Gitters  $L$  stets gerade, da  $L$  an einer solchen Stelle hyperbolisch ist (vgl. auch Bem. 3.3.8). Der Vollständigkeit halber und für spätere Zwecke soll auch für ungerades  $N$  und eine verzweigte Erweiterung  $E/F$  ein Geschlecht definiert werden:

Dieses sei zunächst für jede unverzweigte Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  wie in (30) definiert und für eine verzweigte Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  sei ein Gitter in diesem Geschlecht von der Form:

$$(31) \quad L_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \langle \pi^{\frac{1}{2}\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1}\mathfrak{D})} \rangle$$

Das Volumenideal eines solchen Gitters  $L$  ist  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-N}\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}/F_{\mathfrak{p}}}$  für jede verzweigte Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  und  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-N}$  sonst, sodass man als Produkt über alle Stellen gerade  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{D}_E^{-N}\mathfrak{D}_{E/F}$  erhält und somit ist  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E)^{-N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_{E/F})$ .

Ein solches Gitter liefert mittels Spurkonstruktion ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Determinante  $\mathfrak{N}(\mathfrak{D}_{E/F})$ . Ist die Erweiterung  $E/F$  unverzweigt, so stimmt dieses Geschlecht insbesondere mit dem durch (30) definierten Geschlecht überein.

DEFINITION. Sei  $E$  ein CM-Körper mit Ganzheitsring  $\mathfrak{O}$  und maximal reellem Teilkörper  $F$  mit Ganzheitsring  $\mathfrak{o}$ . Weiter sei  $\ell \in \mathbb{N}$  mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Das dem  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a} = \prod_{\mathfrak{p}|\ell} \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$  mit  $k_{\mathfrak{p}} \leq N$  entsprechende Geschlecht von  $\mathfrak{O}$ -Gittern  $L$  vom Rang  $N$  der lokalen Gestalt

$$L_{\mathfrak{p}} \cong \begin{cases} \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) & \mathfrak{p} \text{ verzweigt in } E/F, N \text{ gerade} \\ \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \langle \pi^{\frac{1}{2}} \nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1}) \rangle & \mathfrak{p} \text{ verzweigt in } E/F, N \text{ ungerade} \\ \langle \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}, \dots, \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})} \rangle & \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } E/F, \mathfrak{p} \nmid \ell \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle \perp \underbrace{\langle \ell, \dots, \ell \rangle}_{k_{\mathfrak{p}}\text{-mal}} & \mathfrak{p} \text{ unverzweigt in } E/F, \mathfrak{p} \mid \ell \end{cases}$$

für alle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  über dem Körper  $E$  wird im Folgenden mit  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  bezeichnet.

Ist  $\mathfrak{a} = \alpha \mathfrak{o}$  ein Hauptideal, so sei  $\mathfrak{G}_N^E(\alpha) := \mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$ . Das Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  wird im Folgenden auch als *Hauptgeschlecht* bezeichnet. Das für den Spezialfall  $\ell = 1$  entstehende Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{o})$  wird kurz als  $\mathfrak{G}_N^E$  bezeichnet.

Im folgenden Abschnitt soll eine explizite Maßformel für diese Geschlechter angegeben und ausgewertet werden.

**3.3.2. Maßformel und Standardmaß.** Ein wichtiges Hilfsmittel für die Klassifikation von Geschlechtern ist die Maßformel. Das Maß für ein hermitesches Geschlecht  $\mathfrak{G}$  ist wie üblich definiert als

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}) := \sum_{i=1}^h \frac{1}{|U(L_i)|},$$

wobei hier über ein Repräsentantensystem  $\{L_1, \dots, L_h\}$  der Isometrieklassen in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}$  summiert wird. Die für hermitesche Gitter zunächst von H. Braun bewiesene Maßformel macht dieses Maß nun a priori ohne Kenntnis des gesamten Geschlechts berechenbar und dient somit als Beweis dafür, dass eine gegebene Menge nicht isometrischer Gitter ein vollständiges Repräsentantensystem für die Isometrieklassen in dem entsprechenden Geschlecht ist.

THEOREM 3.3.12. (vgl. [GY00] Theorem 10.20.<sup>1</sup>) Sei  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$  und Ganzheitsring  $\mathfrak{O}$ . Sei  $L$  ein hermitesches  $\mathfrak{O}$ -Gitter vom Rang  $N$  im Geschlecht  $\mathfrak{G}$ . Dann gilt:

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}) = 2 \cdot |d_F|^{\frac{N^2}{2}} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{\frac{N(N+1)}{4}} \cdot \left( \prod_{j=1}^N \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)^{\frac{N}{2}} \cdot \prod_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} \alpha_{\mathfrak{p}}(L)^{-1}$$

□

Die Hauptaufgabe bei der Auswertung der Maßformel ist zunächst die Bestimmung der sogenannten *lokalen Darstellungsdichten*  $\alpha_{\mathfrak{p}}(L)$ , die wie folgt definiert sind

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(L) := \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{A_{\mathfrak{p}}^s(L, L)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{sN^2}},$$

<sup>1</sup>Um die Maßformel in der angegebenen Version in den in dieser Arbeit verwendeten Notationen angeben zu können, sind einige Notationen anzupassen und einige Größen auf den Fall eines CM-Körpers  $E$  zu spezialisieren:

$$\begin{aligned} \tau(G) &= 2, \quad \dim_{\mathbb{R}}(G) = N^2, \quad [G : G^{\circ}] = 1, \quad [L^{\perp} : L] = \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L), \\ d &= [F : \mathbb{Q}], \quad n(V) = N, \quad \mu = 1, \quad \lambda = \prod_{j=1}^N \frac{(2\pi)^j}{(j-1)!}, \quad \delta_{K, \epsilon} = 1. \end{aligned}$$

wobei hier  $A_{\mathfrak{p}^s}(L, L)$  die Anzahl der Isometrien von  $L/\mathfrak{p}^s L$  angibt. Dies geschieht in der Arbeit [GY00] für sämtliche Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit Ausnahme von verzweigten dyadischen Stellen, welche ergänzend in [Cho12] bestimmt werden. Die Ergebnisse werden hier an den Stellen, an denen sie gebraucht werden, zitiert und verwendet.

Für die Auswertung benötigt man im Wesentlichen die Dimensionen als reelle Lie-Gruppe (vgl. [Bum04]) und die Ordnungen über dem Körper  $\mathbb{F}_q$  (vgl. [CCN<sup>+</sup>85]) der klassischen linearen algebraischen Gruppen: Der allgemeinen linearen Gruppe  $GL(N)$ , der unitären Gruppe  $U(N)$ , der symplektischen Gruppe  $Sp(N)$  sowie den orthogonalen Gruppen  $O(N)$  (für ungerades  $N$ ) und  $O^+(N)$  bzw.  $O^-(N)$  (für gerades  $N$ , wobei  $O^+(N)$  die orthogonale Gruppe des hyperbolischen Raumes bezeichnet) in  $N$  Variablen. Diese Zahlen sind in Tabelle 3.3 zusammengefasst.

	$G$	$\dim_{\mathbb{R}}(G)$	$\text{ord}_{\mathbb{F}_q}(G)$
$N \in \mathbb{N}$	$GL(N)$	$N^2$	$q^{N^2} \cdot \prod_{j=1}^N (1 - q^{-j})$
	$U(N)$	$N^2$	$q^{N^2} \cdot \prod_{j=1}^N (1 - (-q)^{-j})$
$N \in \mathbb{N}$ gerade	$Sp(N)$	$\frac{N(N+1)}{2}$	$q^{\frac{N(N+1)}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{N/2} (1 - q^{-2j})$
	$O^+(N)$	$\frac{N(N-1)}{2}$	$2 \cdot q^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot (1 - q^{-\frac{N}{2}}) \cdot \prod_{j=1}^{N/2-1} (1 - q^{-2j})$
	$O^-(N)$	$\frac{N(N-1)}{2}$	$2 \cdot q^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot (1 + q^{-\frac{N}{2}}) \cdot \prod_{j=1}^{N/2-1} (1 - q^{-2j})$
$N \in \mathbb{N}$ ungerade	$O(N)$	$\frac{N(N-1)}{2}$	$2 \cdot q^{\frac{N(N-1)}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{(N-1)/2} (1 - q^{-2j})$

TABELLE 3.3. Dimensionen als reelle Lie-Gruppe und Ordnungen über dem Körper  $\mathbb{F}_q$  der klassischen linearen algebraischen Gruppen in  $N$  Variablen.

Sei im Weiteren entsprechend der Voraussetzung in [Cho12] das Ideal  $2\mathbb{Z}$  stets unverzweigt in der Erweiterung  $F/\mathbb{Q}$ , d.h. für jede dyadische Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  ist  $\pi = 2$  ein uniformisierendes Element. Eine solche Stelle wird auch als *2-adische* Stelle bezeichnet. Das hat unter anderem zur Konsequenz, dass im Fall R-U der quadratische Defekt  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\theta)$  in der verzweigten Erweiterung  $E_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}(\theta)$  nur noch  $2\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  sein kann, da im Fall  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\theta) = 4\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}}$  die Erweiterung unverzweigt wäre und im Fall  $\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\theta) = \{0\}$  die Erweiterung trivial, also nicht quadratisch wäre.

Es soll nun das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_{\mathbb{N}}^E$  berechnet werden. Im Folgenden sei dazu  $L$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_{\mathbb{N}}^E$ . Es werden nun die lokalen Darstellungsdichten  $\alpha_{\mathfrak{p}}(L)$  dieser Gitter abhängig von der Parität von  $N$  für sämtliche Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  bestimmt.

Sei zunächst  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine in der Erweiterung  $E/F$  nicht-verzweigte Stelle, d.h.  $\mathfrak{p}$  ist entweder träge oder zerlegt in  $E/F$ . Unabhängig von der Parität der Dimension  $N$  gilt hier  $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})}, \dots, \pi^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})} \rangle$ , insbesondere besitzt die Jordan-Zerlegung an der Stelle  $\mathfrak{p}$  also nur eine  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}$ -modulare Komponente. Nach [GY00] Proposition 6.2.3 und Theorem 7.3 erhält man:

$$(32) \quad \alpha_{\mathfrak{p}}(L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})N^2} \begin{cases} \prod_{j=1}^N (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j}) & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ in } E/F \text{ zerlegt} \\ \prod_{j=1}^N (1 - (-\mathfrak{N}(\mathfrak{p}))^{-j}) & \text{falls } \mathfrak{p} \text{ in } E/F \text{ träge} \end{cases}$$

Sei als nächstes  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte, nicht-dyadische Stelle. Ist  $N$  gerade, so ist gemäß (29) hier  $L_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{D}_E^{-1}))$ , d.h. die Jordan-Zerlegung von  $L_{\mathfrak{p}}$  besitzt hier ebenfalls nur

eine  $\mathfrak{D}_{E_p}$ -modulare Komponente. Nach [GY00] Prop. 6.3.9 und Thm. 7.3 erhält man:

$$(33) \quad \alpha_p(L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{N/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j})$$

Ist  $N$  ungerade, so ist gemäß (31) hier  $L_p \cong \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \dots \perp \mathbb{H}(\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})) \perp \langle \pi^{\frac{1}{2}} \nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1}) \rangle$ . Man erhält ebenfalls mit [GY00] Prop. 6.3.9 und Thm. 7.3:

$$(34) \quad \alpha_p(L) = 2 \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{(N-1)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j})$$

Schlussendlich sei  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  eine verzweigte, dyadische Stelle. Hier sind für die Erweiterung  $E_p/F_p$  die beiden Fälle R-U und R-P zu unterscheiden. Man erhält für gerades  $N$  mit [Cho12] Thm. 5.2 für den Fall R-U bzw. Thm. 8.2 für den Fall R-P die folgenden lokalen Darstellungsdichten

$$(35) \quad \alpha_p(L) = \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + 2\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{N/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) & E_p/F_p \text{ vom Typ R-U} \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + 3\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{N/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) & E_p/F_p \text{ vom Typ R-P} \end{cases}$$

und für ungerades  $N$  die folgenden Werte

$$(36) \quad \alpha_p(L) = 2 \cdot \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + 2\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{(N-1)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) & E_p/F_p \text{ vom Typ R-U} \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{D}_E^{-1})\frac{N^2}{2} + 3\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^{(N-1)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) & E_p/F_p \text{ vom Typ R-P} \end{cases}$$

Zur Auswertung der Maßformel ist nun das (unendliche) Produkt  $\prod_p \alpha_p(L)^{-1}$  über alle Primstellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  zu berechnen.

Dazu definiert man zunächst als Verallgemeinerung des Kronecker-Charakters den folgenden Charakter  $\chi_{E/F}$  auf der Gruppe der Ideale von  $F$  wie folgt als multiplikative Fortsetzung von:

$$\chi_{E/F}(\mathfrak{p}) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{P}} \text{ zerlegt} \\ -1 & \text{falls } \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P} \text{ träge} \\ 0 & \text{falls } \mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2 \text{ verzweigt} \end{cases}$$

Des Weiteren ist die *L-Reihe* zu  $\chi_{E/F}$  über das folgende Euler-Produkt gegeben:

$$(37) \quad L(s, \chi_{E/F}) := \prod_p (1 - \chi_{E/F}(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}$$

Mit [Neu92] VII (8.1) erhält man, dass das Euler-Produkt in (37) absolut und gleichmäßig auf der komplexen Halbebene  $\text{Re}(s) > 1$  konvergiert und somit  $L(s, \chi_{E/F})$  eine holomorphe Funktion auf dieser Halbebene ist.

Eng verwandt mit dieser L-Reihe sind die Dedekindschen Zetafunktionen  $\zeta_E$  und  $\zeta_F$ . Für einen Zahlkörper  $K$  ist die *Dedekindsche Zetafunktion* ber folgendes Euler-Produkt definiert

$$\zeta_K(s) := \prod_p (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Bekanntlich ist auch  $\zeta_K$  für  $\text{Re}(s) > 1$  eine holomorphe Funktion. Die folgende Proposition liefert nun den angedeuteten Zusammenhang:

PROPOSITION 3.3.13. (vgl. [Zag81] §11 für den Fall eines quadratischen Zahlkörpers) Sei  $E/F$  eine Erweiterung von Zahlkörpern vom Grad  $[E : F] = 2$ . Dann gilt:

$$\zeta_E(s) = \zeta_F(s) \cdot L(s, \chi_{E/F})$$

BEWEIS. Es ist zunächst

$$\zeta_E(s) = \prod_{\mathfrak{P}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = \prod_{\mathfrak{p}} \prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1}.$$

Es genügt zu zeigen, dass die Eulerfaktoren für jedes Primideal  $\mathfrak{p}$  von  $F$  übereinstimmen. Dazu sind wie üblich drei Fälle zu unterscheiden:

1.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{P}}$ . Hier ist  $\chi_{E/F}(\mathfrak{p}) = 1$  sowie  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\overline{\mathfrak{P}}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$  und es gilt

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-2}.$$

2.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ . Hier ist  $\chi_{E/F}(\mathfrak{p}) = -1$  sowie  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^2$  und es gilt

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2s})^{-1}.$$

3.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ . Hier ist  $\chi_{E/F}(\mathfrak{p}) = 0$  sowie  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})$  und es gilt

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

In allen Fällen gilt also

$$\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{P})^{-s})^{-1} = (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1} \cdot (1 - \chi_{E/F}(\mathfrak{p})\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-s})^{-1}.$$

Es folgt die Behauptung. □

Sowohl  $\zeta_E$  als auch  $\zeta_F$  besitzen eine eindeutige meromorphe Fortsetzung auf die gesamte komplexe Ebene mit jeweils genau einem Pol an der Stelle  $s = 1$ . Somit besitzt auch  $L(s, \chi_{E/F}) = \zeta_E(s)/\zeta_F(s)$  eine meromorphe Fortsetzung auf die komplexe Ebene. Da sowohl  $\zeta_E$  als auch  $\zeta_F$  einen einfachen Pol an der Stelle  $s = 1$  besitzen, ist  $L(1, \chi_{E/F}) < \infty$  und somit lässt sich  $L(s, \chi_{E/F})$  an der Stelle  $s = 1$  holomorph fortsetzen.

BEMERKUNGEN 3.3.14.

(i) Ist  $E/F$  eine Galois-Erweiterung, so kann man zeigen (vgl. [Ara33]), dass dann  $\zeta_E(s)/\zeta_F(s)$  sogar eine holomorphe Funktion auf der gesamten komplexen Ebene ist. Insbesondere gilt dies für einen CM-Körper  $E$  mit maximal reellem Teilkörper  $F$ . Diese Tatsache wird im Folgenden aber nicht weiter verwendet.

Ob selbiges für eine beliebige Erweiterung  $E/F$  von Zahlkörpern gilt, ist gerade Gegenstand der *Dedekindschen Vermutung*.

(ii) Die Schreibweise  $\chi_{E/F}^j$  soll so verstanden werden, dass  $\chi_{E/F}^j \equiv 1$  für gerades  $j \in \mathbb{N}$  der triviale Charakter ist. Somit ergibt sich:

$$L(s, \chi_{E/F}^j) = \begin{cases} L(s, \chi_{E/F}) & j \in \mathbb{N} \text{ ungerade} \\ \zeta_F(s) & j \in \mathbb{N} \text{ gerade} \end{cases}$$

■

Mit Hilfe der L-Reihe  $L(s, \chi_{E/F})$  und der oben vereinbarten Konvention bezüglich der Potenzen von  $\chi_{E/F}$  lässt sich das Produkt  $\prod_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} \alpha_{\mathfrak{p}}(L)^{-1}$  vereinfacht schreiben als

$$\begin{aligned} \prod_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} \alpha_{\mathfrak{p}}(L)^{-1} &= \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_E^{-1})^{\frac{N^2}{2}} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{D}_{E/F})^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \prod_{\mathfrak{p} \in \Omega_F} (1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j})^{-1} \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade} \end{cases} \\ &= |d_E|^{\frac{N^2}{2}} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{-\frac{N}{2}} \cdot \prod_{j=1}^N L(j, \chi_{E/F}^j) \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade,} \end{cases} \end{aligned}$$

wobei hier  $t$  die Anzahl der in der Erweiterung  $E/F$  verzweigten Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  angibt. Setzt man dies zusammen mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = |d_E|^{-N}$  im Fall  $N$  gerade und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = |d_E|^{-N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})$  im Fall  $N$  ungerade in die Maßformel 3.3.12 ein, erhält man als Maß für das Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E$ :

(38)

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}_N^E) = 2 \cdot |d_F|^{\frac{N^2}{2}} \cdot \left( \prod_{j=1}^N \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{j=1}^N L(j, \chi_{E/F}^j) \cdot \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{\frac{N(N-1)}{4}} & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{\frac{N(N+1)}{4}} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Funktionalgleichung für die Dedekindsche Zetafunktion (siehe z.B. [Lan94] XIII, §3) lässt sich die obige Formel noch weiter vereinfachen. Für die Dedekindsche Zetafunktion des (total imaginären) CM-Körpers  $E$  mit maximal reellem Teilkörper  $F$  gilt folgende Funktionalgleichung

$$(39) \quad \left( \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} |d_E|^{\frac{s}{2}} \cdot \zeta_E(s) = \left( \frac{\Gamma(1-s)}{(2\pi)^{1-s}} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} |d_E|^{\frac{1-s}{2}} \cdot \zeta_E(1-s),$$

während für den (total reellen) Körper  $F$  die folgende Funktionalgleichung gilt

$$(40) \quad \left( \frac{\Gamma(\frac{s}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} |d_F|^{\frac{s}{2}} \cdot \zeta_F(s) = \left( \frac{\Gamma(\frac{1-s}{2})}{\pi^{\frac{1-s}{2}}} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} |d_F|^{\frac{1-s}{2}} \cdot \zeta_F(1-s).$$

Mit Hilfe der Legendreschen Verdopplungsformel  $\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2}) = 2^{1-s}\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(s)$  (vgl. [Zag81] §3 (11)) zusammen mit  $|d_E| = |d_F|^2 \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})$  erhält man aus (39) und (40) sowie Prop. 3.3.13 für die L-Reihe  $L(s, \chi_{E/F})$  die folgende Funktionalgleichung:

$$(41) \quad \begin{aligned} &\left( \frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\pi^{\frac{s}{2}}} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} (|d_F| \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F}))^{\frac{s}{2}} \cdot L(s, \chi_{E/F}) = \\ &\left( \frac{\Gamma(\frac{2-s}{2})}{\pi^{\frac{1-s}{2}}} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} (|d_F| \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F}))^{\frac{1-s}{2}} \cdot L(1-s, \chi_{E/F}) \end{aligned}$$

Umstellen und etwas Rechnung ergibt für gerades  $j \in \mathbb{N}$  aus (40)

$$(42) \quad 2^{-[F:\mathbb{Q}]} \cdot |\zeta_F(1-j)| = |d_F|^{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} \zeta_F(j)$$

und für ungerades  $j \in \mathbb{N}$  aus (41)

$$(43) \quad 2^{-[F:\mathbb{Q}]} \cdot |L(1-j, \chi_{E/F})| = (|d_F| \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F}))^{j-\frac{1}{2}} \left( \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} L(j, \chi_{E/F}).$$



Induktiv folgt nun leicht:

$$(44) \quad 2^{-N \cdot [F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{j=1}^N |L(1-j, \chi_{E/F}^j)| = |d_F|^{\frac{N^2}{2}} \cdot \left( \prod_{j=1}^N \frac{(j-1)!}{(2\pi)^j} \right)^{[F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{j=1}^N L(j, \chi_{E/F}^j) \cdot \begin{cases} \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{\frac{N(N-1)}{4}} & N \text{ gerade} \\ \mathfrak{N}(\mathfrak{d}_{E/F})^{\frac{N(N+1)}{4}} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Setzt man dies in die Formel (38) ein, so erhält man für das Maß für das Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E$ :

$$(45) \quad \text{Maß}(\mathfrak{G}_N^E) = 2^{1-N \cdot [F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{j=1}^N |L(1-j, \chi_{E/F}^j)| \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Jedes Gitter in einem Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  ist ebenfalls an fast allen Stellen unimodular und stimmt daher lokal mit einem Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E$  überein. Es gibt also nur endlich viele Stellen, an denen das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E$  angepasst werden muss, um das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  zu berechnen. Es liegt daher nahe, das oben berechnete Maß als *Standardmaß* zu bezeichnen, mit dessen Hilfe dann Maße anderer Geschlechter mit endlich vielen „Korrekturfaktoren“ bestimmt werden können.

DEFINITION. Sei  $E$  ein CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Es bezeichne  $t$  die Anzahl der in der Erweiterung  $E/F$  verzweigten Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ . Als  $N$ -dimensionales *Standardmaß*  $\text{std}_N^E$  wird im Weiteren die folgende Größe bezeichnet:

$$\text{std}_N^E := 2^{1-N \cdot [F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{j=1}^N |L(1-j, \chi_{E/F}^j)| \cdot \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Definiert man zusätzlich  $\text{std}_0^E := 2$ , so lässt sich das Standardmaß für  $N \in \mathbb{N}$  rekursiv berechnen durch die Formel:

$$\text{std}_N^E = \text{std}_{N-1}^E \cdot 2^{-[F:\mathbb{Q}]} \cdot |L(1-N, \chi_{E/F}^N)| \cdot \begin{cases} 2^t & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Mit dieser Bezeichnung kann man festhalten:

SATZ 3.3.15. *Ist  $E$  ein CM-Körper, so lautet das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E$*

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}_N^E) = \text{std}_N^E.$$

□

Um allgemeiner das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  zu bestimmen, müssen nun für die (unverzweigten) Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{p} \mid \ell$  die lokalen Darstellungsdichten bestimmt werden. Ist  $L$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  und  $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$ , so ist gemäß Satz 3.3.10  $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle 1, \dots, 1, \ell, \dots, \ell \rangle$ . Also besitzt die Jordan-Zerlegung an der Stelle  $\mathfrak{p}$  eine  $k_{\mathfrak{p}}$ -dimensionale  $\mathfrak{p}$ -modulare und eine  $(N - k_{\mathfrak{p}})$ -dimensionale unimodulare Komponente. Mit [GY00] Prop. 6.2.3 und Theorem 7.3 ergibt sich:

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(L) = \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{k_{\mathfrak{q}}^2} \cdot \prod_{j=1}^{k_{\mathfrak{p}}} \left( 1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j} \right) \prod_{j=1}^{N-k_{\mathfrak{p}}} \left( 1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j} \right)$$

Des Weiteren ändert sich das Volumenideal für jede Stelle  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{p} \mid \ell$  um den Faktor  $\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$ . Da die Norm des Volumenideals in der Maßformel mit Potenz  $\frac{N}{2}$  eingeht, erhält man für die Stelle  $\mathfrak{p}$  zusätzlich den Faktor  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{Nk_{\mathfrak{p}}}$ .

Es ergibt sich für das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  mit  $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$  folgender Korrekturfaktor für die (unverzweigte) Stelle  $\mathfrak{p}$ :

$$\text{korr}_N^E(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}) := \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{Nk_{\mathfrak{p}}} \prod_{j=1}^N \left(1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j}\right)}{\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{k_{\mathfrak{p}}^2} \cdot \prod_{j=1}^{k_{\mathfrak{p}}} \left(1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j}\right) \prod_{j=1}^{N-k_{\mathfrak{p}}} \left(1 - \chi_{E/F}^j(\mathfrak{p}) \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-j}\right)}$$

Zusammenfassend kann man festhalten:

**KOROLLAR 3.3.16.** *Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  mit  $\mathfrak{a} = \prod \mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}$  lautet*

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})) = \text{std}_N^E \cdot \prod_{\mathfrak{p} \mid \ell} \text{korr}_N^E(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}}).$$

□

**BEMERKUNG 3.3.17.** Man kann leicht zeigen, dass der Korrekturfaktor  $\text{korr}_N^E(\mathfrak{p}^{k_{\mathfrak{p}}})$  wie oben definiert für jedes  $\mathfrak{p}$  eine ganze Zahl ist. Folglich unterscheidet sich das Maß eines Gitters in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  vom Standardmaß  $\text{std}_N^E$  ebenfalls nur um einen ganzzahligen Faktor. ■

**3.3.3. Exakte Berechnung des Standardmaßes.** In diesem Abschnitt soll demonstriert werden, wie man für gewisse CM-Körper  $E$  das Standardmaß exakt, d.h. als rationale Zahl, berechnen kann.

Sei dazu im Folgenden  $E$  ein CM-Körper und  $E/\mathbb{Q}$  eine *abelsche* Erweiterung, d.h.  $E/\mathbb{Q}$  ist galoissch und  $\text{Gal}(E/\mathbb{Q})$  ist eine abelsche Gruppe. Nach dem Satz von Kronecker-Weber (vgl. [Was82] Theorem 14.1.) gibt es dann ein  $m \in \mathbb{N}$  so, dass gilt

$$E \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m).$$

Weiter ist  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ . Bei dieser Identifikation entspricht der komplexen Konjugation  $\zeta_m \mapsto \zeta_m^{-1}$  gerade das Element  $-1 \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ .

Im Folgenden sind die Charaktere der Gruppe  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$ , die sogenannten Galois-Charaktere von Interesse. Bei obiger Identifikation können diese also aufgefasst werden als Charaktere der Gruppe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ .

**DEFINITION.** Ein Charakter der Gruppe  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ , d.h. ein Homomorphismus  $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , heißt *Dirichlet-Charakter modulo  $m$* .

Die Menge aller Dirichlet-Charaktere modulo  $m$  bildet bekanntermaßen mit der Verknüpfung  $\chi \cdot \psi(a) := \chi(a) \cdot \psi(a)$  eine Gruppe, die sogenannte *duale* Gruppe  $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*)^\wedge \cong \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})^\wedge$ , im Folgenden mit  $\mathcal{X}_m$  bezeichnet. Das neutrale Element  $\chi_0$  von  $\mathcal{X}_m$  nennt man auch den *Hauptcharakter*. Da  $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  eine endliche abelsche Gruppe ist, gilt  $((\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*)^\wedge \cong (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$  und somit besitzt  $\mathcal{X}_m$  ebenfalls  $\varphi(m) = |(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*|$  Elemente.

Man hat eine natürliche Paarung  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \times \mathcal{X}_m \rightarrow \mathbb{C}^*$  gegeben durch  $(\sigma, \chi) \mapsto \chi(\sigma)$ . Zu einer Untergruppe  $U \subseteq \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})$  bzw. eine Untergruppe  $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_m$  wird definiert:

$$\mathcal{X}^\perp := \{\sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) \mid \chi(\sigma) = 1 \text{ für alle } \chi \in \mathcal{X}\}$$

$$U^\perp := \{\chi \in \mathcal{X}_m \mid \chi(\sigma) = 1 \text{ für alle } \sigma \in U\}$$

Die Paarung ist nicht entartet in dem Sinne, dass  $\mathcal{X}_m^\perp = \{\text{id}\}$  und  $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})^\perp = \{\chi_0\}$ . Weiter gilt  $(\mathcal{X}^\perp)^\perp = \mathcal{X}$  und genauso  $(U^\perp)^\perp = U$  (vgl. [Was82] 3.4.). Mit Hilfe der Galoistheorie erhält man, dass die folgenden beiden Abbildungen

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &\mapsto K_{\mathcal{X}} := \text{Fix}(\mathcal{X}^\perp) \\ K &\mapsto \mathcal{X}_K := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/K)^\perp\end{aligned}$$

zueinander inverse, inklusionserhaltende Abbildungen sind. Auf diese Weise erhält man eine 1:1-Korrespondenz zwischen Teilkörpern  $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$  einerseits und Untergruppen  $\{\chi_0\} \subseteq \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}_m$  andererseits:

$$\begin{array}{ccccc}\mathbb{Q}(\zeta_m) & \longleftrightarrow & \{\text{id}\} & \longleftrightarrow & \mathcal{X}_m \\ \cup & & \cap & & \cup \\ K & \longleftrightarrow & \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/K) & \longleftrightarrow & \mathcal{X}_K \\ \cup & & \cap & & \cup \\ \mathbb{Q} & \longleftrightarrow & \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q}) & \longleftrightarrow & \{\chi_0\}\end{array}$$

Des Weiteren ist  $\mathcal{X}_K = \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/K)^\perp \cong (\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/\mathbb{Q})/\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_m)/K))^\wedge \cong \text{Gal}(K/\mathbb{Q})^\wedge$ . Da  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  eine endliche abelsche Gruppe ist, folgt weiter  $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})^\wedge \cong \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$  und damit  $|\mathcal{X}_K| = |\text{Gal}(K/\mathbb{Q})| = [K : \mathbb{Q}]$ .

Ist  $m_0 \in \mathbb{N}$  ein Teiler von  $m$  und  $\psi : (\mathbb{Z}/m_0\mathbb{Z})^* \rightarrow \mathbb{C}^*$  ein Dirichlet-Charakter modulo  $m_0$ , so ist die Komposition von  $\psi$  und kanonischer Projektion  $\pi$  ein Dirichlet-Charakter modulo  $m$ :

$$(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\pi} (\mathbb{Z}/m_0\mathbb{Z})^* \xrightarrow{\psi} \mathbb{C}^*$$

Einen Dirichlet-Charakter, welchen man nicht auf diese Weise zerlegen kann, nennt man *primitiv*. Ist ein Charakter  $\chi$  nicht primitiv, so gibt es einen eindeutigen primitiven Dirichlet-Charakter  $\hat{\chi}$  modulo einem Teiler  $m_0$  von  $m$  mit  $\chi = \pi \circ \hat{\chi}$ . Diesen Charakter  $\hat{\chi}$  nennt man den zu  $\chi$  *assoziierten* primitiven Charakter und den Modulus von  $\hat{\chi}$ , d.h. die Zahl  $m_0$ , nennt man den *Führer*  $f_\chi$  von  $\chi$ .

Man kann einen Dirichlet-Charakter  $\chi$  modulo  $m$  auch auffassen als Abbildung  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  durch folgende Festlegung:

$$\chi(a) := \begin{cases} \chi(a \bmod m) & \text{falls } \text{ggT}(a, m) = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Einem solchen ebenfalls als Dirichlet-Charakter bezeichneten  $\chi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  kann man eine *Dirichletsche L-Reihe* wie folgt zuordnen:

$$L(s, \chi) := \prod_p (1 - \frac{\chi(p)}{p^s})^{-1}$$

Auf diese Weise wird etwa dem assoziierten primitiven Charakter  $\hat{\chi}_0 \equiv 1$  des neutralen Elements  $\chi_0 \in \mathcal{X}_m$  für jedes  $m \in \mathbb{N}$  die Riemannsche Zetafunktion  $L(s, \hat{\chi}_0) = \zeta(s)$  zugeordnet.

Ein Dirichlet-Charakter  $\chi$  heißt *gerade*, falls  $\chi(-1) = 1$  und *ungerade* anderenfalls, also wenn  $\chi(-1) = -1$ . Die Menge der geraden Charaktere  $\mathcal{X}_K^0 := \{\chi \in \mathcal{X}_K \mid \chi \text{ gerade}\}$  ist Untergruppe von  $\mathcal{X}_K$  vom Index 2, die Nebenklasse der ungeraden Charaktere sei mit  $\mathcal{X}_K^1$  bezeichnet.

PROPOSITION 3.3.18. Sei  $E \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$  ein CM-Körper und sei  $\mathcal{X}_E$  die zu  $E$  assoziierte Gruppe von Dirichlet-Charakteren,  $\mathcal{X}_E^0$  die Untergruppe der geraden Charaktere und  $\mathcal{X}_E^1$  die Nebenklasse der ungeraden Charaktere. Dann gilt:

- a)  $\zeta_E(s) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E} L(s, \hat{\chi})$ .
- b)  $\zeta_F(s) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E^0} L(s, \hat{\chi})$ .
- c)  $L(s, \chi_{E/F}) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E^1} L(s, \hat{\chi})$ .

BEWEIS. a) Nach [Was82] Thm. 4.3 ist  $\zeta_K(s) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_K} L(s, \hat{\chi})$  für jeden Teilkörper  $K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_m)$ , insbesondere also für  $E$  (und  $F$ ).

b) Wegen  $F \subseteq E$  folgt zunächst  $\mathcal{X}_F \subseteq \mathcal{X}_E$ . Da  $F$  reell ist, also invariant unter der komplexen Konjugation, muss die Menge  $\mathcal{X}_F^\perp$  die komplexe Konjugation enthalten. Somit muss gelten  $\chi(-1) = 1$  für jeden Charakter  $\chi \in \mathcal{X}_F$ . Es folgt  $\mathcal{X}_F \subseteq \mathcal{X}_E^0$ . Wegen  $|\mathcal{X}_F| = [F : \mathbb{Q}] = \frac{1}{2}[E : \mathbb{Q}] = |\mathcal{X}_E^0|$  folgt die Gleichheit. Somit folgt wie behauptet  $\zeta_F(s) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_F} L(s, \hat{\chi}) = \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E^0} L(s, \hat{\chi})$ .

c) Die Behauptung folgt nun aus a) und b) zusammen mit Prop. 3.3.13.  $\square$

Für einen primitiven Dirichlet-Charakter  $\chi$  kann die zugehörige L-Reihe  $L(s, \chi)$  für negative ganze Stellen explizit ausgewertet werden. Es gilt für  $j \in \mathbb{N}$  (vgl. [Was82] Theorem 4.2.)

$$L(1-j, \chi) = -\frac{B_{j,\chi}}{j},$$

wobei  $B_{j,\chi}$  die verallgemeinerten Bernoulli-Zahlen zum Dirichlet-Charakter  $\chi$  sind, welche über die folgende Gleichung definiert sind

$$\sum_{a=1}^f \frac{\chi(a)te^{at}}{e^{ft} - 1} = \sum_{j=0}^{\infty} B_{j,\chi} \frac{t^j}{j!}$$

und berechnet werden können durch (vgl. [Was82] Prop. 4.1.)

$$B_{j,\chi} = f^{j-1} \sum_{a=1}^f \chi(a) B_j\left(\frac{a}{f}\right),$$

wobei hier  $B_j$  das gewöhnliche  $j$ -te Bernoulli-Polynom bezeichne und  $f := f_\chi$  den Führer von  $\chi$ .

BEISPIEL 3.3.19. Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_5)$  und somit  $F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ . Die Dirichlet-Charaktere modulo 5 lauten:

	$f_\chi$	0	1	2	3	4
$\chi_0$	1	0	1	1	1	1
$\chi_1$	5	0	1	$i$	$-i$	-1
$\chi_2$	5	0	1	-1	-1	1
$\chi_3$	5	0	1	$-i$	$i$	-1

Folglich sind also  $\chi_1, \chi_2, \chi_3$  primitiv, wohingegen  $\chi_0$  durch den trivialen Charakter induziert wird. Weiter ist  $\mathcal{X}_E^0 = \mathcal{X}_F = \{\chi_0, \chi_2\}$ , während  $\mathcal{X}_E^1 = \{\chi_1, \chi_3\}$ . Man erhält:

$$\begin{aligned} \zeta_F(s) &= L(s, \hat{\chi}_0) \cdot L(s, \hat{\chi}_2) \\ L(s, \chi_{E/F}) &= L(s, \hat{\chi}_1) \cdot L(s, \hat{\chi}_3) \end{aligned}$$

Die zur Berechnung des Standardmaßes bis zur Dimension 6 notwendigen Werte  $-\frac{B_{j,\chi}}{j}$  für  $j = 1, \dots, 6$  lauten:

$j$	1	2	3	4	5	6
$\hat{\chi}_0$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{120}$	0	$-\frac{1}{252}$
$\hat{\chi}_1$	$\frac{3+i}{5}$	0	$\frac{-4-2i}{5}$	0	$\frac{148+86i}{25}$	0
$\hat{\chi}_2$	0	$-\frac{2}{5}$	0	2	0	$-\frac{134}{5}$
$\hat{\chi}_3$	$\frac{3-i}{5}$	0	$\frac{-4+2i}{5}$	0	$\frac{148-86i}{25}$	0

Damit berechnet man nun mittels der im vorangegangenen Abschnitt angegebenen rekursiven Formel die folgenden Standardmaße für den Körper  $E := \mathbb{Q}(\zeta_5)$ :

$$\begin{aligned} \text{std}_1^E &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |L(0, \chi_{E/F})| \cdot \text{std}_0^E = \frac{1}{2^3} \cdot \left| \frac{3+i}{5} \cdot \frac{3-i}{5} \right| \cdot 2 = \frac{1}{10} \\ \text{std}_2^E &= 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |\zeta_F(-1)| \cdot \text{std}_1^E = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-1}{12} \cdot \frac{-2}{5} \right| \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{600} \\ \text{std}_3^E &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |L(-2, \chi_{E/F})| \cdot \text{std}_2^E = \frac{1}{2^3} \cdot \left| \frac{-4-2i}{5} \cdot \frac{-4+2i}{5} \right| \cdot \frac{1}{600} = \frac{1}{6000} \\ \text{std}_4^E &= 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |\zeta_F(-3)| \cdot \text{std}_3^E = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{1}{120} \cdot 2 \right| \cdot \frac{1}{6000} = \frac{1}{720000} \\ \text{std}_5^E &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |L(-4, \chi_{E/F})| \cdot \text{std}_4^E = \frac{1}{2^3} \cdot \left| \frac{148+86i}{25} \cdot \frac{148-86i}{25} \right| \cdot \frac{1}{720000} = \frac{293}{36000000} \\ \text{std}_6^E &= 2 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot |\zeta_F(-5)| \cdot \text{std}_5^E = \frac{1}{2} \cdot \left| \frac{-1}{252} \cdot \frac{-134}{5} \right| \cdot \frac{293}{36000000} = \frac{19631}{45360000000} \end{aligned}$$

■

Das Standardmaß kann also wie folgt berechnet werden:

**KOROLLAR 3.3.20.** *Sei  $E$  ein abelscher CM-Körper mit maximal reellem Teilkörper  $F$ . Es bezeichne  $\mathcal{X}_E^0$  die Menge der geraden zu dem Körper  $E$  assoziierten Dirichlet-Charaktere und  $\mathcal{X}_E^1$  die Nebenklasse der ungeraden Charaktere sowie  $t$  die Anzahl der in der Erweiterung  $E/F$  verzweigten Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ . Dann lässt sich das  $N$ -dimensionale Standardmaß wie folgt berechnen:*

$$\text{std}_N^E = 2^{1-N[F:\mathbb{Q}]} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \equiv 2 \pmod{0}}}^N \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E^0} \frac{|B_{j,\chi}|}{j} \cdot \prod_{\substack{j=1 \\ j \equiv 2 \pmod{1}}}^N \prod_{\chi \in \mathcal{X}_E^1} \frac{|B_{j,\chi}|}{j} \cdot \begin{cases} 1 & N \text{ gerade} \\ 2^{-t} & N \text{ ungerade} \end{cases}$$

□

### 3.4. Die Nachbarmethode über CM-Körpern

Die in [Kne57] zunächst für  $\mathbb{Z}$ -Gitter beschriebene sogenannte *Nachbarmethode* wurde mit gewissen Einschränkungen zunächst in [Iya69] sowie in [Hof91] auf hermitesche Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern übertragen. In [Sch98] ist diese Methode für imaginär-quadratische Zahlkörper in abschließender Form beschrieben, wobei viele Resultate bereits für beliebige CM-Körper formuliert sind. An dieser Stelle werden die Grundzüge der Nachbarmethode für beliebigen CM-Körper beschrieben. Die wesentlichen Ideen dazu sind der letztgenannten Arbeit entnommen und werden an den wenigen Stellen, an denen dies nötig ist, verallgemeinert.

In dem folgenden Abschnitt sei  $L$  stets ein ganzzahliges  $\mathfrak{D}$ -Gitter, d.h.  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}$  oder äquivalent  $L \subseteq L^*$ . Dies ist keine wirkliche Einschränkung, denn nach Skalieren mit einer geeigneten ganzen Zahl wird jedes  $\mathfrak{D}$ -Gitter ganzzahlig. Da die Abbildung  $L \mapsto {}^\alpha L$  eine Bijektion der Geschlechter von  $L$  und  ${}^\alpha L$  (vgl. [O'M63] §82J.) liefert, kann also die Klassifikation des Geschlechts von  $L$  leicht aus der von  ${}^\alpha L$  gewonnen werden.

**DEFINITION.** Sei  $L$  ein ganzzahliges  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $V$  und  $\mathfrak{P}$  ein Primideal, welches das Volumenideal  $\mathfrak{v}L$  nicht teilt. Dann heißt ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $M$  ein  $\mathfrak{P}$ -Nachbar von  $L$ , wenn  $M$  ganzzahlig ist und es

$\mathfrak{D}$ -Modulhomomorphismen gibt mit

$$M/(L \cap M) \cong \mathfrak{D}/\mathfrak{P} \quad \text{und} \quad L/(L \cap M) \cong \mathfrak{D}/\overline{\mathfrak{P}}.$$

Mit dem Begriff des  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn lässt sich der Nachbaralgorithmus grob wie folgt beschreiben:

---

**Algorithmus 3** Nachbaralgorithmus.

---

**Eingabe:**  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$ , Primideal  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{v}L$ .

**Ausgabe:** Alle sukzessiven  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn von  $L$ .

Setze  $Exp := \emptyset$  und  $Unexp := \{L\}$ .

**while**  $Unexp \neq \emptyset$  **do**

    Wähle  $L \in Unexp$ .

    Bestimme die Menge  $\mathcal{N}$  aller  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn  $M$  von  $L$ .

**for**  $M \in \mathcal{N}$  **do**

        Prüfe, ob  $M$  isometrisch zu einem Gitter in  $Exp \cup Unexp$  ist.

        Falls nicht, setze  $Unexp := Unexp \cup \{M\}$ .

**end for**

    Setze  $Unexp := Unexp \setminus \{L\}$  und  $Exp := Exp \cup \{L\}$ .

**end while**

Gib  $Exp$  aus.

---

Zunächst ist nicht klar, wie man die Menge aller  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn bestimmt. Ein Vektor  $x \in L$  heißt *zulässig* (zur Nachbarbildung von  $L$  bzgl.  $\mathfrak{P}$ ), wenn  $x \notin \mathfrak{P}L$  und  $h(x, x) \in \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$ . Zu einem zulässigen Vektor  $x \in L$  kann man das Gitter  $L(x, \mathfrak{P})$  wie folgt definieren:

$$L(x, \mathfrak{P}) := \mathfrak{P}^{-1}x + \underbrace{\{y \in L \mid h(x, y) \in \mathfrak{P}\}}_{=: L_x}$$

Ist das Primideal  $\mathfrak{P}$  durch den Kontext gegeben, so bezeichnet man dieses Gitter abkürzend mit  $L(x) := L(x, \mathfrak{P})$ . Mit diesen Bezeichnungen gilt:

LEMMA 3.4.1. (vgl. [Sch98] Lemma 2.2.) Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter und  $\mathfrak{P}$  ein Primideal von  $\mathfrak{D}$ . Ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L'$  ist ein  $\mathfrak{P}$ -Nachbar von  $L$  genau dann, wenn es einen zulässigen Vektor  $x \in L$  gibt mit  $L' = L(x)$ .  $\square$

Im Folgenden soll ein Repräsentantensystem  $R(L, \mathfrak{P})$  bezüglich der Äquivalenzrelation  $L(x) = L(y)$  auf  $L$  bestimmt werden. Essenziell für die Durchführbarkeit des Nachbaralgorithmus wie oben beschrieben ist die Tatsache, dass ein solches Repräsentantensystem eine endliche Menge ist. Dafür zunächst folgendes Lemma:

LEMMA 3.4.2. (vgl. [Sch98] Lemma 3.1) Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter und  $\mathfrak{P}$  ein Primideal. Weiter seien  $x, y \in L$  zulässige Vektoren. Dann ist  $L(x) = L(y)$  genau dann, wenn  $h(x, y) \in \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  und es ein  $\lambda \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{P}$  gibt mit  $x - \lambda y \in \mathfrak{P}L$ .  $\square$

Mit Hilfe dieses Lemmas erhält man die folgende Proposition:

PROPOSITION 3.4.3. (vgl. [Sch98] §3) Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter und  $\mathfrak{P}$  ein Primideal mit  $\mathfrak{P} \nmid \mathfrak{v}L$ . Ein Repräsentantensystem  $R(L, \mathfrak{P})$  zulässiger Vektoren in  $L$  zur  $\mathfrak{P}$ -Nachbarbildung lautet im Fall

a)  $\mathfrak{P}$  zerlegt (d.h.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$ ):

$$R(L, \mathfrak{P}) = \{\overline{\tau}x \mid x \in R\}$$

Dabei sei  $\tau \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  und  $R$  ein Repräsentantensystem von Vektoren in dem projektiven Raum  $\mathbb{P}(L/\mathfrak{P}L)$  über  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ .

b)  $\mathfrak{P}$  verzweigt (d.h.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ ):

$$R(L, \mathfrak{P}) = \{x + \tau\lambda y_x \mid x \in R_0, \lambda \in R_{\mathfrak{P}}\}$$

Dabei sei  $\tau \in \mathfrak{P} \setminus \mathfrak{P}^2$ ,  $R_{\mathfrak{P}}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$  und  $R_0$  ein Vertretersystem derjenigen Klassen  $[x]$  des projektiven Raums  $\mathbb{P}(L/\mathfrak{P}L)$  über  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ , für die gilt  $h(x, x) \in \mathfrak{P}$ .

Zu  $x \in R_0$  sei  $y_x \in L$  so gewählt, dass  $h(x, y_x) \notin \mathfrak{P}$ .

c)  $\mathfrak{P}$  träge (d.h.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ ):

$$R(L, \mathfrak{P}) = \{x + \tau\lambda y_x \mid x \in R_0, \lambda \in R_{\mathfrak{P}}, \text{Tr}_F^E(\lambda h(y_x, x)) + a_x \in \mathfrak{p}\}$$

Dabei sei  $\tau \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{p}^2$ ,  $R_{\mathfrak{P}}$  ein Repräsentantensystem von  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$  und  $R_20$  ein Vertretersystem derjenigen Klassen  $[x]$  des projektiven Raums  $\mathbb{P}(L/\mathfrak{P}L)$  über  $\mathfrak{D}/\mathfrak{P}$ , für die gilt  $h(x, x) \in \mathfrak{P}$ .

Zu  $x \in R_0$  sei  $y_x \in L$  so gewählt, dass  $h(x, y_x) \notin \mathfrak{P}$  und  $a_x \in \mathfrak{o}$  so gewählt, dass  $h(x, x) \in \tau a_x + \mathfrak{p}^2$ .  $\square$

Des Weiteren notwendig für den Nachbaralgorithmus ist der Isometrietest. Dieser ist in [Sch98] zunächst nur für Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern beschrieben (vgl. [Sch98] Lemma 4.2), kann jedoch leicht an den allgemeinen Fall eines CM-Körpers angepasst werden:

PROPOSITION 3.4.4. Sei  $(V, h)$  ein hermitescher Raum und  $b_h$  die zu  $h$  gehörige Spurform. Dann sind äquivalent:

- a)  $\psi \in U(V, h)$ .
- b)  $\psi \in O(V, b_h)$  und  $\psi$   $E$ -linear.
- c) Ist  $\omega_1, \dots, \omega_{[E:\mathbb{Q}]}$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $E$ , so ist  $\psi \in O(V, b_h^{(k)})$  für  $k = 1, \dots, [E:\mathbb{Q}]$ , wobei

$$b_h^{(k)}(x, y) := \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\omega_k h(x, y)).$$

$\psi$  ist also eine simultane Isometrie bezüglich der  $[E:\mathbb{Q}]$  Bilinearformen  $b_h^{(k)}$ .

BEWEIS. Die Implikation a)  $\Rightarrow$  c) ist klar, denn aus  $h(x, y) = h(\psi(x), \psi(y))$  folgt  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\omega h(x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\omega h(\psi(x), \psi(y)))$  für alle  $x, y \in V$  und jedes  $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_{[E:\mathbb{Q}]}\}$ .

Um die Richtung c)  $\Rightarrow$  b) zu zeigen, sei zunächst bemerkt, dass  $1 \in \mathbb{Q}\omega_1 + \dots + \mathbb{Q}\omega_{[E:\mathbb{Q}]}$ . Aufgrund der  $\mathbb{Q}$ -Linearität der Körperspur folgt also aus c) sofort  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\psi(x), \psi(y)))$  für alle  $x, y \in V$ , d.h.  $\psi \in O(V, b_h)$ .

Es verbleibt die  $E$ -Linearität von  $\psi$  zu zeigen. Dazu betrachtet man die folgende Gleichung für beliebige  $x, y \in V$  und  $\omega \in \{\omega_1, \dots, \omega_{[E:\mathbb{Q}]}\}$ :

$$\begin{aligned} b_h(\psi(\omega x), \psi(y)) &= \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\psi(\omega x), \psi(y))) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\omega x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\omega h(x, y)) \\ &= \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\omega h(\psi(x), \psi(y))) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\omega \psi(x), \psi(y))) = b_h(\omega \psi(x), \psi(y)) \end{aligned}$$

Folglich gilt  $b_h(\psi(\omega x) - \omega \psi(x), \psi(y)) = 0$  für alle  $x, y \in V$ . Da  $\psi$  surjektiv und  $b_h$  nicht entartet ist, folgt bereits  $\psi(\omega x) = \omega \psi(x)$  für alle  $x \in V$ . Wegen der  $\mathbb{Q}$ -Linearität der Körperspur und der Tatsache, dass  $\omega_1, \dots, \omega_{[E:\mathbb{Q}]}$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $E$  ist, folgt die  $E$ -Linearität von  $\psi$ .

b)  $\Rightarrow$  a) Sei  $\lambda \in E$  und  $x, y \in V$  beliebig. Dann gilt  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\lambda x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\psi(\lambda x), \psi(y)))$ . Da sowohl  $\psi$  als auch  $h$  in der ersten Komponente  $E$ -linear sind, folgt weiter  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda h(x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda h(\psi(x), \psi(y)))$  und mit  $\mu = h(x, y) - h(\psi(x), \psi(y))$  also weiter  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda \cdot \mu) = 0$ . Da  $\lambda \in E$  beliebig war, gilt also  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda \cdot \mu) = 0$  für alle  $\lambda \in E$ . Da die Körperspur aufgefasst als Bilinearform  $Tr : E \times E \rightarrow \mathbb{Q}$ ,  $(\lambda, \mu) \mapsto \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\lambda \cdot \mu)$  nicht entartet ist, folgt also  $\mu = 0$  und folglich  $h(x, y) = h(\psi(x), \psi(y))$  für alle  $x, y \in V$ , also  $\psi \in U(V, h)$ .  $\square$

Der Teil c) der obigen Proposition hilft nun dabei, das Problem algorithmisch durch Zurückführung auf den Isometrietest für  $\mathbb{Z}$ -Gitter zu lösen: Zunächst wählt man jeweils eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $x_1, \dots, x_n$  von  $L$  ( $n = N \cdot [E : \mathbb{Q}]$ ) und eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $x'_1, \dots, x'_n$  von  $L'$  und definiert die folgenden  $[E : \mathbb{Q}] \times n$ -Matrizen

$$(46) \quad (G_k)_{i,j} = b_h^{(k)}(x_i, x_j) \quad i, j \in \{1, \dots, n\},$$

$$(47) \quad (G'_k)_{i,j} = b_h^{(k)}(x'_i, x'_j) \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Ist o.B.d.A.  $\omega_1 = 1$ , so sind  $G_1$  und  $G'_1$  jeweils Gram-Matrizen der  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  bzw.  $L'$  und damit symmetrisch und auch positiv definit. Bekanntermaßen sind  $L$  und  $L'$  genau dann isometrisch über  $\mathbb{Z}$ , wenn es eine Matrix  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$  gibt mit  $G'_1 = T^t \cdot G_1 \cdot T$ . Die Matrix  $T$  ist in diesem Fall die Darstellungsmatrix zu einer Isometrie  $\psi \in O(V, b_h)$  bezüglich der Basen  $\{x_i\}$  und  $\{x'_i\}$ , welche  $\psi(L) = L'$  erfüllt.

Erfüllt  $T$  gleichzeitig auch die Bedingungen  $G'_k = T^t \cdot G_k \cdot T$  für  $k \in \{2, \dots, [E : \mathbb{Q}]\}$ , so ist  $\psi$  ebenfalls eine Isometrie bezüglich der Bilinearformen  $b_h^{(k)}(x, y)$ . Somit ist Bedingung c) aus obiger Proposition erfüllt. Es folgt, dass  $\psi$   $E$ -linear ist und damit Element von  $U(V, h)$ . In diesem Fall sind die  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  und  $L'$  isometrisch. Existiert anderenfalls eine solche Matrix  $T$  nicht, so sind  $L$  und  $L'$  nicht isometrisch.

Völlig analog kann auch die Automorphismengruppe eines hermiteschen Gitters bestimmt werden: Auch hier bestimmt man die Untergruppe von  $O(L)$  derjenigen Automorphismen  $\psi$  von  $L$ , welche simultan Automorphismen von  $L$  bezüglich der Bilinearformen  $b_h^{(k)}$  sind. Auf Matrixebene bestimmt man also diejenigen Matrizen  $T \in \text{GL}_n(\mathbb{Z})$ , welche simultan die Gleichung  $G_k = T^t \cdot G_k \cdot T$  für alle  $k \in \{1, \dots, [E : \mathbb{Q}]\}$  erfüllen.

Die Existenz einer solchen simultanen Isometrie für mehrere Bilinearformen, von denen zumindest eine symmetrisch und positiv definit ist, kann etwa mit dem in [PS97] beschriebenen Algorithmus geklärt werden. Ebenso kann die Menge der simultanen Automorphismen bezüglich mehrerer Bilinearformen bestimmt werden. Beide Funktionen sind zurückgehend auf [PS97] zum Beispiel in MAGMA implementiert.

Ist die Automorphismengruppe  $U(L)$  des Gitters  $L$  bekannt, so kann mit Hilfe dieser die Menge der zur Bestimmung aller  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn benötigten zulässigen Vektoren (bis auf Isometrie) noch weiter reduziert werden:

LEMMA 3.4.5. *Seien  $x, x' \in L$  zwei zulässige Vektoren. Gibt es ein  $\sigma \in U(L)$  mit  $\sigma(x) = x'$ , so ist  $L(x) \cong L(x')$ .*

BEWEIS. Im Wesentlichen ist dazu zu zeigen, dass gilt:

$$\begin{aligned} L_{x'} &= \{y \mid y \in L, h(\sigma(x), y) \in \mathfrak{P}\} = \{y \mid y \in L, h(x, \sigma^{-1}(y)) \in \mathfrak{P}\} \\ &= \sigma(\{\sigma^{-1}(y) \mid y \in L, h(x, \sigma^{-1}(y)) \in \mathfrak{P}\}) = \sigma(L_x) \end{aligned}$$

Damit folgt nämlich weiter

$$\sigma(L(x)) = \sigma(\mathfrak{P}^{-1}x + L_x) = \mathfrak{P}^{-1}\sigma(x) + \sigma(L_x) = \mathfrak{P}^{-1}x' + L_{x'} = L(x').$$

Folglich ist  $\sigma$  ein Isomorphismus, welcher  $L(x)$  auf  $L(x')$  abbildet und es gilt wie behauptet  $L(x) \cong L(x')$ .  $\square$



A priori ist nicht klar, ob man ausgehend von einem Gitter  $L$  mittels sukzessiver  $\mathfrak{P}$ -Nachbarbildung für ein einziges Primideal  $\mathfrak{P}$  bereits das komplette Geschlecht  $\text{gen}(L)$  erhält. Basierend auf dem starken Approximationssatz wird in [Sch98] gezeigt, dass es zumindest stets eine endliche Menge von Primidealen gibt, für die man auf diese Weise beweisbar das gesamte Geschlecht erhält.

In der Praxis genügt es jedoch in größeren Dimensionen bzw. größeren Geschlechtern zumeist, nur für ein Primideal  $\mathfrak{P}$  sukzessive  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn zu bilden, um das gesamte Geschlecht zu klassifizieren. Als Beweis der Vollständigkeit dient dann (einen korrekt funktionierenden Isometrietest vorausgesetzt) die Maßformel.

#### BEMERKUNGEN 3.4.6.

- (i) Durch die Präzisierung der Wahl von  $L \in \text{Unexp}$  sind verschiedene Strategien realisierbar. Denkbare Wahlen wären zum Beispiel
- das letzte gefundene Gitter,
  - das bislang am seltensten gefundene Gitter,
  - das Gitter mit der größten Automorphismengruppe,
  - das Gitter mit größtem Minimum.
- (ii) Ist das Maß des zu klassifizierenden Geschlechts bekannt, so kann die Abbruchbedingung  $\text{Unexp} \neq \emptyset$  ersetzt werden durch die Bedingung, dass das bislang erreichte Maß gleich dem tatsächlichen Maß des Geschlechts ist. Nach Erreichen der Bedingung muss dann die Menge  $\text{Exp} \cup \text{Unexp}$  zurückgegeben werden.
- Außerdem gibt der Kehrwert der Differenz von tatsächlichem und erreichtem Maß an, wie groß die Automorphismengruppe eines fehlenden Gitters mindestens sein muss. Diese Information kann genutzt werden, um Isometrietests zu sparen, sobald diese Differenz kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist.
- (iii) Um das Rechnen mit großen Zahlen bzw. Speicherüberläufe zu vermeiden, sollten die Gitter reduziert werden, etwa mit angepasstem LLL-Algorithmus wie in [Sch98] beschrieben. ■

### 3.5. Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

In diesem Abschnitt sei  $E$  stets ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, also  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  mit  $D > 0$  quadratfrei. Bekanntlich gilt für den Ganzheitsring  $\mathfrak{D} := \mathbb{Z}_E$  eines solchen:

$$\mathfrak{D} = \begin{cases} \mathbb{Z}[\sqrt{-D}] & -D \equiv_4 2, 3 \\ \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-D}}{2}\right] & -D \equiv_4 1 \end{cases}$$

Dementsprechend ist  $d_E = -4D$ , falls  $-D \equiv_4 2, 3$  und  $d_E = -D$ , falls  $-D \equiv_4 1$  die Diskriminante von  $E$  und für die Differente von  $E$  gilt:

$$\mathfrak{D}_E = \begin{cases} 2\sqrt{-D}\mathfrak{D} & -D \equiv_4 2, 3 \\ \sqrt{-D}\mathfrak{D} & -D \equiv_4 1 \end{cases}$$

In diesem Abschnitt sollen Strukturen von geraden  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{Z}$ -Gittern der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  über imaginär-quadratischen Zahlkörpern  $E$  betrachtet werden.

**3.5.1. Der Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ .** Sei auch hier weiterhin  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Des Weiteren sei  $\ell$  quadratfrei und zusätzlich  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Gemäß Satz 3.3.10 gibt es zu gegebener

Dimension  $N$  und  $\ell$  höchstens ein Geschlecht hermitescher Gitter, welches gerade  $n$ -dimensionale  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  ergibt, nämlich das Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$ . Durch einige Anpassungen, welche sich für einen imaginär-quadratischen Zahlkörper ergeben, besitzt ein Gitter  $L$  in diesem Geschlecht die folgende Gestalt:

$$(48) \quad L_p \cong \begin{cases} \mathbb{H}(-1) \perp \dots \perp \mathbb{H}(-1) & p \neq 2 \text{ verzweigt} \\ \mathbb{H}(-2) \perp \dots \perp \mathbb{H}(-2) & p = 2 \text{ verzweigt, } D \text{ ungerade} \\ \mathbb{H}(-3) \perp \dots \perp \mathbb{H}(-3) & p = 2 \text{ verzweigt, } D \text{ gerade} \\ \langle 1, \dots, \dots, 1 \rangle & p \text{ unverzweigt, } p \nmid \ell \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle \perp \underbrace{\langle \ell, \dots, \ell \rangle}_{N/2\text{-mal}} & p \text{ unverzweigt, } p \mid \ell \end{cases}$$

Es stellt sich die Frage, ob abhängig von dem Zahlkörper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-D})$  sowie  $N$  und  $\ell$  dieses Geschlecht auch tatsächlich existiert, d.h. ein Gitter in dem Geschlecht existiert.

Da es abgesehen von  $\mathbb{Q}$  keine unverzweigten Erweiterungen von  $\mathbb{Q}$  gibt, ist insbesondere bei einem quadratischen Zahlkörper  $E$  stets mindestens eine Stelle  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  verzweigt. Es folgt, dass der Rang  $N$  eines solchen Gitters  $L$  als  $\mathfrak{D}$ -Gitter notwendig gerade ist. Es wird sich zeigen, dass in Dimensionen  $N \equiv_4 0$  stets ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  existiert, während dies in Dimensionen  $N \equiv_4 2$  nicht notwendig der Fall sein muss. Im Fall  $\ell = 1$  beispielsweise kann ein solches Gitter nicht existieren, da gerade, unimodulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter bekanntlich nur in durch 8 teilbaren Dimensionen existieren (vgl. auch Bemerkung 3.3.8).

Nun soll (ähnlich wie in [DK03] Lemma 1 für den Fall  $\ell = 1$ ) zunächst ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_4^E(\ell^2)$  konstruiert werden. Dazu sei zunächst bemerkt, dass jede ganze Zahl die Summe von zwei Quadraten modulo  $D$  ist, denn bekanntlich stellt die Form  $\langle 1, 1 \rangle$  über dem Körper  $\mathbb{F}_p$  für jede Primzahl  $p$  jedes Element dar. Somit ist also jede ganze Zahl Summe zweier Quadrate modulo jedem Primteiler  $p$  von  $D$ . Mit dem Chinesischen Restsatz erhält man daraus leicht, dass jede ganze Zahl dann auch Summe zweier Quadrate modulo  $D$  ist. Es ist im Folgenden eine Fallunterscheidung nach  $-D$  modulo 4 notwendig:

Sei zunächst  $-D \equiv_4 1$ . Dann gibt es also  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $-\ell \equiv_D a^2 + b^2$ . Weiter sei  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + a^2 + b^2 = D\lambda$  und

$$(49) \quad G := \begin{pmatrix} I & S \\ \overline{S}^t & \lambda I \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}^{4 \times 4}$$

mit den Matrizen  $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $S := \frac{1}{\sqrt{-D}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ . Dann gilt für die Determinante von  $G$

$$\det(G) = \det(\lambda I - S \overline{S}^t) = \left( \frac{D\lambda - a^2 - b^2}{D} \right)^2 = \left( \frac{\ell}{|d_E|} \right)^2.$$

Sei nun  $-D \equiv_4 2, 3$ . Man überlegt sich zunächst leicht, dass zumindest eine der beiden Zahlen  $-\ell$  oder  $-\ell - D$  Summe zweier Quadrate modulo  $4D$  ist.

Im ersten Fall gibt es also  $a, b \in \mathbb{Z}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + a^2 + b^2 = 4D\lambda$ . Weiter sei  $S := \frac{1}{2\sqrt{-D}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$

und die Blockmatrix  $G$  genau wie in (49) definiert. Dann folgt

$$\det(G) = \det(\lambda I - S\bar{S}^t) = \left( \frac{4D\lambda - a^2 - b^2}{4D} \right)^2 = \left( \frac{\ell}{|d_E|} \right)^2.$$

Im zweiten Fall gibt es  $a, b \in \mathbb{Z}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + D + a^2 + b^2 = \lambda 4D$ . Sei hier  $S := \frac{1}{2}(I + \frac{1}{\sqrt{-D}} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix})$  und die Blockmatrix  $G$  sei genau wie in (49) definiert. Dann gilt hier

$$\det(G) = \det(\lambda I - S\bar{S}^t) = \left( \frac{4D\lambda - D - a^2 - b^2}{4D} \right)^2 = \left( \frac{\ell}{|d_E|} \right)^2.$$

Dann sind in allen Fällen die Hauptminoren der Matrix  $G$  gleich  $1, 1, \frac{\ell}{|d_E|}, \left( \frac{\ell}{|d_E|} \right)^2$  und damit positiv. Demnach ist die hermitesche Form auf  $V = Ex_1 + \dots + Ex_4$  gegeben durch die Matrix  $G$  bezüglich der Basis  $x_1, \dots, x_4$  (total) positiv definit.

Sei nun  $L = \mathfrak{D}x_1 + \dots + \mathfrak{D}x_4$ . Mit Hilfe von Lemma 3.1.1 rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}L = \frac{1}{\sqrt{-D}}\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-1}$  und  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-1}\mathfrak{D}$  sowie  $\mathfrak{v}L = \det(G)\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-4} \cdot \ell^2\mathfrak{D}$  gilt. Weiter ist  $L^* = \mathfrak{D}y_1 + \dots + \mathfrak{D}y_4$  für die duale Basis  $y_1, \dots, y_4$  von  $x_1, \dots, x_4$  und in dieser Basis ist die Gram-Matrix gegeben durch:

$$G^{-1} = \frac{|d_E|}{\ell} \begin{pmatrix} \lambda I & -S \\ -\bar{S}^t & I \end{pmatrix}$$

Damit rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}(L^*) = \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$  gilt. Nach Prop. 3.3.9 ist das Spurgitter von  $L$  ein 8-dimensionales gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^4$  und nach Satz 3.3.10 ist somit  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_4^E(\ell^2)$ .

Durch Bilden orthogonaler Summen erhält man:

**SATZ 3.5.1.** *Sei  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $d_E$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Dann existiert das Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 0$  in dem Sinne, dass dieses stets ein Gitter enthält. Des Weiteren enthält das Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  sogar stets ein freies Gitter.*  $\square$

**BEMERKUNG 3.5.2.** Bekanntermaßen ist das Geschlecht des Gitters  $\mathbb{E}_8$  einklassig. Somit folgt aus obigem Satz unter anderem, dass das Gitter  $\mathbb{E}_8$  eine Struktur über jedem imaginär-quadratischen Zahlkörper besitzt.  $\blacksquare$

Wie angekündigt ist die Situation in Dimensionen  $N \equiv_4 2$  komplizierter. Das folgende Lemma und das darauf folgende Korollar liefern ein notwendiges Kriterium für die Existenz eines solchen Gitters in Dimension  $N \equiv_4 2$ .

Hierzu sei bemerkt, dass das Hilbert-Symbol  $(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$  nicht von der Wahl des Vertreters der Idealklasse  $[\mathfrak{A}]$  abhängt, denn ist  $\mathfrak{A}' \in [\mathfrak{A}]$ , so gilt  $\mathfrak{A}' = \alpha\mathfrak{A}$  für ein  $\alpha \in E$ . Nach [O'M63] 63:10 ist  $(-D, \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}^E(\alpha))_p = 1$ . Da die Diskriminante von  $E$  entweder gleich  $-D$  oder  $-4D$  ist, unterscheiden sich  $d_E$  und  $-D$  (wenn überhaupt) um ein Quadrat und es folgt:

$$(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}'))_p = (d_E, \mathfrak{N}(\alpha\mathfrak{A}))_p = (-D, \mathfrak{N}_{\mathbb{Q}}^E(\alpha))_p (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

**LEMMA 3.5.3.** *Sei  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $d_E$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Ist  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 2$  mit Steinitzklasse  $[\mathfrak{A}]$ , so gilt notwendig für alle  $p \mid d_E$ :*

$$(d_E, -\ell)_p = (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

**BEWEIS.** Sei  $L = \mathfrak{A}_1x_1 + \dots + \mathfrak{A}_Nx_N$  mit Steinitzklasse  $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}_1 \cdot \dots \cdot \mathfrak{A}_N]$  ein solches Gitter und sei abkürzend  $\alpha := \det(x_1, \dots, x_N)$ . Gemäß Prop. 3.1.4 muss gelten  $\ell^N = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) =$

$|d_E|^N \cdot N_{\mathbb{Q}}^E(\alpha) \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^2$ . Wegen  $\alpha \in \mathbb{Q}$  ist  $N_{\mathbb{Q}}^E(\alpha) = \alpha^2$ . Aufgrund der Voraussetzung  $N \equiv_4 2$  ist  $\frac{N}{2}$  ungerade und somit ist die Quadratklasse von  $\alpha$  gleich  $\ell |d_E| \mathfrak{N}(\mathfrak{A}) \cdot \mathbb{Q}^{*2}$ . Weiter ist auch  $\binom{N}{2}$  ungerade. Wendet man [Ger08] §4.4 auf diese Situation an, so erhält man als Hasse-Invariante des quadratischen  $\mathbb{Q}$ -Vektorraumes  $(V, b_h)$  an der Stelle  $p$

$$s_p(L) = \pm(-D, -\ell \cdot |d_E| \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = \pm(-D, -\ell)_p \cdot (-D, |d_E|)_p \cdot (-D, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

mit dem Vorzeichen „ $-$ “ genau dann, wenn  $p = 2$  (tatsächlich wird hier die Hasse-Invariante bzgl. der quadratischen Form  $h(x, x)$  und nicht bzgl.  $2h(x, x) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, x))$  bestimmt. Die resultierenden Hasse-Invarianten unterscheiden sich nach [Ger08] Lemma 4.33 jedoch nur um den Faktor  $(2, -1)_p$ , welcher für jede Primzahl  $p$  gleich 1 ist).

Da sich, wie bereits oben bemerkt,  $d_E$  und  $-D$  um ein Quadrat unterscheiden und  $|d_E| = -d_E$  ist, folgt  $(-D, |d_E|)_p = (d_E, -d_E)_p = 1$  und somit

$$(50) \quad s_p(L) = \pm(d_E, -\ell)_p \cdot (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

mit dem Vorzeichen „ $-$ “ genau dann, wenn  $p = 2$ .

Sei zunächst  $p$  ein ungerader Primteiler von  $d_E$ . Wegen  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  ist  $L_p = \mathbb{Z}_p L$  unimodular und somit ist  $s_p(L) = 1$ . Aus (50) folgt also  $1 = s_p(L) = (d_E, -\ell)_p (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$ .

Sei nun  $p = 2$  ein Primteiler von  $d_E$ . Dann ist notwendig  $-D \equiv_4 2, 3$ . Wegen  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  ist  $\ell$  ungerade und somit ist  $L_2 = \mathbb{Z}_2 L$  ebenfalls gerade unimodular. Da  $\det(L) = \ell^N$  ein Quadrat ist, folgt  $L_2 \cong \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H}$  als  $\mathbb{Z}_2$ -Gitter (und nicht  $\cong \mathbb{H} \perp \dots \perp \mathbb{H} \perp \mathbb{A}$ , vgl. [Ger08] 8.10) und damit rechnet man leicht nach, dass hier  $s_2(L) = (-1, -1)_2^{\binom{N}{2}} = -1$ . Also folgt auch hier  $(d_E, -\ell)_2 = (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_2$ .  $\square$

Etwa aus dem Dirichletschen Dichtigkeitssatz (vgl. [Neu92] VII (13.2)) folgt, dass jede Idealklasse  $[\mathfrak{A}]$  unendlich viele Primideale enthält. Also ist es stets möglich, bei gegebener Primzahl  $p$  einen Vertreter  $\mathfrak{A}$  einer gegebenen Idealklasse  $[\mathfrak{A}]$  so zu wählen, dass  $p \nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  gilt. Für alle ungeraden  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  mit  $p \nmid d_E$  sind dann sowohl  $d_E$  als auch  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  Einheiten und somit ist nach [O'M63] 63:12  $(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = 1$ . Gilt  $2 \nmid d_E$ , so gilt  $d_E \equiv_4 1$ . Wählt man auch hier einen Vertreter  $\mathfrak{A}$  mit  $2 \nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ , so gilt auch hier  $(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_2 = 1$ . Da  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) > 0$  ist, gilt zudem  $(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_{\infty} = 1$ . Also folgt aus Hilberts Reziprozitätsgesetz (vgl. [O'M63] 71:18) somit:

$$(51) \quad 1 = \prod_{p \in \Omega_{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}} (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = \prod_{p|d_E} (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

Man erhält:

**KOROLLAR 3.5.4.** *Sei  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $d_E$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Ist  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 2$ , so gilt notwendig:*

$$\prod_{p|d_E} (d_E, -\ell)_p = 1$$

**BEWEIS.** Sei  $L$  ein solches Gitter und sei  $[\mathfrak{A}]$  die Steinitzklasse von  $L$ . Dann gilt nach Lemma 3.5.3 zusammen mit (51)

$$\prod_{p|d_E} (d_E, -\ell) = \prod_{p|d_E} (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = 1.$$

$\square$

Im Folgenden soll nun in dem Fall, dass die notwendige Bedingung  $\prod_{p|d_E} (d_E, -\ell)_p = 1$  erfüllt ist, ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\ell)$  konstruiert werden.

Sei zunächst  $t$  die Anzahl der verschiedenen Primteiler von  $d_E$ . Wegen (51) ist die folgende Abbildung wohldefiniert:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Cl}_E &\longrightarrow \mathcal{H} := \{\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^t \mid \prod \varepsilon_i = 1\} \\ [\mathfrak{A}] &\longmapsto (\dots, (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p, \dots)_{p|d_E} \end{aligned}$$

Offenbar gilt  $\text{Cl}_E^2 \subseteq \text{Kern}(\Phi)$ . Ist umgekehrt  $[\mathfrak{A}] \in \text{Kern}(\Phi)$ , so ist für alle Stellen  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$   $(d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = 1$ . Nach [O'M63] 63:11 ist damit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  eine Norm lokal an jeder Stelle  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ . Mit dem Hasseschen Normensatz (vgl. [O'M63] 65:23) folgt, dass  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  die Norm eines Elements  $\alpha \in E$  ist, d.h. es gilt  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) = N_{\mathbb{Q}}^E(\alpha) = N_{\mathbb{Q}}^E(\alpha)\mathfrak{N}(\mathfrak{D})$ . Nach [Zag81] §12 Satz 1 ist damit  $[\mathfrak{A}]$  ein Element im sogenannten *Hauptgeschlecht*, d.h.  $[\mathfrak{A}] \in \text{Cl}_E^2$ . Also ist  $\text{Kern}(\Phi) = \text{Cl}_E^2$  und somit induziert  $\Phi$  nach dem Homomorphiesatz einen injektiven Homomorphismus

$$\bar{\Phi} : \text{Cl}_E / \text{Cl}_E^2 \hookrightarrow \mathcal{H}$$

mit  $\text{Bild}(\bar{\Phi}) = \text{Bild}(\Phi)$ . Offensichtlich ist  $|\mathcal{H}| = 2^{t-1}$ . Nach [Zag81] §12 Satz 2 (Korollar) ist auch  $|\text{Cl}_E / \text{Cl}_E^2| = 2^{t-1}$ . Somit ist  $\bar{\Phi}$  ein Isomorphismus und folglich ist  $\Phi$  surjektiv.

Also gibt es unter der Voraussetzung  $\prod (d_E, -\ell)_p = 1$  eine Idealklasse  $[\mathfrak{A}] \in \text{Cl}_E$  mit

$$(d_E, -\ell)_p = (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p$$

für alle  $p$  mit  $p \mid d_E$ . O.B.d.A. sei auch hier angenommen, dass  $p \nmid \mathfrak{N}(\mathfrak{A})$ . Dann folgt für  $p \neq 2$  aus der Formel für das Hilbert-Symbol (vgl. [Ger08] 4.10)

$$\left(\frac{-\ell}{p}\right) = (d_E, -\ell)_p = (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{A}))_p = \left(\frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})}{p}\right).$$

Also sind für jedes  $p$  mit  $p \mid d_E$  die Elemente  $-\ell$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  in der selben Quadratklasse modulo  $p$ . Mit dem Chinesischen Restsatz erhält man daraus, dass  $-\ell$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  in der selben Quadratklasse modulo  $D$  liegen, d.h. es gibt ein  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2 \equiv_D -\ell$ . Auch hier ist eine Fallunterscheidung nach  $-D$  modulo 4 notwendig:

Sei zunächst  $-D \equiv_4 1$ . Dann gibt es ein  $a \in \mathbb{Z}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2 = \lambda D$ . Ähnlich wie oben sei

$$(52) \quad G := \begin{pmatrix} 1 & s \\ \bar{s} & \frac{\lambda}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}^{2 \times 2}$$

mit  $s := \frac{a}{\sqrt{-D}}$ . Dann gilt

$$\det(G) = \frac{\lambda}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} - s\bar{s} = \frac{\lambda D - \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2}{D\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} = \frac{\ell}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})|d_E|}.$$

Sei nun  $-D \equiv_4 2, 3$ . Mit Hilfe der Formel für das Hilbert-Symbol an der Stelle  $p = 2$  folgt, dass  $-\ell$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  oder  $-\ell - D\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{A})$  in derselben Quadratklasse modulo  $4D$  liegen.

Im ersten Fall gibt es ein  $a \in \mathbb{Z}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2 = 4D\lambda$ . Sei  $G$  wie in (52) mit  $s := \frac{a}{2\sqrt{-D}}$ . Dann gilt hier

$$\det(G) = \frac{\lambda}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} - s\bar{s} = \frac{4D\lambda - \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2}{4D\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} = \frac{\ell}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})|d_E|}.$$

Im zweiten Fall gibt es ein  $a \in \mathbb{Z}$  und ein  $\lambda \in \mathbb{N}$  mit  $\ell + D\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) + \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2 = 4D\lambda$ . Sei auch hier  $G$  wie in (52) mit  $s := \frac{1}{2} + \frac{a}{2\sqrt{-D}}$ . Dann gilt:

$$\det(G) = \frac{\lambda}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} - s\bar{s} = \frac{4D\lambda - D\mathfrak{N}(\mathfrak{A}) - \mathfrak{N}(\mathfrak{A})a^2}{4D\mathfrak{N}(\mathfrak{A})} = \frac{\ell}{\mathfrak{N}(\mathfrak{A})|d_E|}$$

Die Hauptminoren der Matrix  $G$  lauten in allen Fällen 1 und  $\frac{\ell}{|d_E|}$ . Demnach ist die hermitesche Form auf  $V = Ex_1 + Ex_2$  gegeben durch die Matrix  $G$  bezüglich der  $E$ -Basis  $x_1, x_2$  (total) positiv definit. Sei nun  $L := \mathfrak{O}x_1 + \mathfrak{A}x_2$ . Mit Hilfe von Lemma 3.1.1 rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}L = \frac{1}{\sqrt{-D}}\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_E^{-1}$  und  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{O} = \mathfrak{O}_E^{-1}\mathfrak{O}$  sowie  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}\det(G)\mathfrak{O} = \mathfrak{O}_E^{-2}\ell\mathfrak{O}$  gilt. Weiter ist  $L^* = \mathfrak{O}y_1 + \overline{\mathfrak{A}}^{-1}y_2$  für die duale Basis  $y_1, y_2$  von  $x_1, x_2$  und in dieser Basis ist die Gram-Matrix gegeben durch

$$G^{-1} = \frac{|d_E|}{\ell} \begin{pmatrix} \lambda & -s \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{A}) \\ -\overline{s} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{A}) & \mathfrak{N}(\mathfrak{A}) \end{pmatrix}.$$

Damit rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}(L^*) = \frac{1}{\ell}\mathfrak{O}_E$  gilt. Nach Prop. 3.3.9 ist das Spurgitter von  $L$  ein 4-dimensionales gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^2$  und nach Satz 3.3.10 ist somit  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\ell)$ .

Zusammenfassend erhält man durch Bilden orthogonaler Summen zusammen mit Korollar 3.5.4

**SATZ 3.5.5.** *Sei  $E$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $d_E$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Dann gibt es ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 2$  genau dann, wenn*

$$\prod_{p|d_E} (d_E, -\ell)_p = 1.$$

□

**BEISPIEL 3.5.6.** Sei  $E := \mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ . Die Klassengruppe  $\text{Cl}_E = \{[\mathfrak{O}], [\mathfrak{P}]\}$  besitzt zwei Elemente, wobei  $2\mathfrak{O} = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{P}}$  und somit  $\mathfrak{N}(\mathfrak{P}) = 2$  gilt. Es ist weiter:

$$\begin{aligned} (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{O}))_3 &= 1 & (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{P}))_3 &= -1 \\ (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{O}))_5 &= 1 & (d_E, \mathfrak{N}(\mathfrak{P}))_5 &= -1 \end{aligned}$$

- a) Ist  $\ell = 11$ , so ist  $(d_E, -11)_3 = 1$  und  $(d_E, -11)_5 = 1$ . Nach Satz 3.5.5 gibt es also ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(11)$ . Nach Lemma 3.5.3 ist dieses Gitter notwendig frei. Mit der oben beschriebenen Konstruktion erhält man (mit  $a = 2, \lambda = 1$ ) das Gitter  $L = \mathfrak{O}x_1 + \mathfrak{O}x_2$  mit der folgenden Gram-Matrix bezüglich der Basis  $x_1, x_2$  von  $V$ :

$$G := \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{-15}} \\ \frac{-2}{\sqrt{-15}} & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Ist  $\ell = 7$ , so ist  $(d_E, -7)_3 = -1$  und  $(d_E, -7)_5 = -1$ . Auch hier gibt es nach Satz 3.5.5 ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(7)$ . Nach Lemma 3.5.3 besitzt dieses Gitter notwendig die Steinitzklasse  $[\mathfrak{P}]$ . Mit der oben beschriebenen Konstruktion erhält man (mit  $a = 2, \lambda = 1$ ) das Gitter  $L = \mathfrak{O}x_1 + \mathfrak{P}x_2$  mit der folgenden Gram-Matrix bezüglich der Basis  $x_1, x_2$  von  $V$ :

$$G := \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{\sqrt{-15}} \\ \frac{-2}{\sqrt{-15}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- c) Ist  $\ell = 2$ , so ist  $(d_E, -2)_3 = 1$  und  $(d_E, -2)_5 = -1$ . Demnach kann in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(2)$  kein Gitter existieren. Insbesondere besitzt das Gitter  $\mathbb{D}_4$  keine Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$ . ■

Für eine gewisse Klasse von imaginär-quadratischen Zahlkörpern ergibt sich ein vereinfachtes Kriterium:

KOROLLAR 3.5.7. Sei  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-p})$  für eine Primzahl  $p \equiv_4 3$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $p \nmid \ell$ . Dann gibt es ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 2$  genau dann, wenn

$$\left(\frac{-\ell}{p}\right) = 1.$$

BEWEIS. Die Diskriminante von  $E$  ist in diesem Fall  $d_E = -p$ . Nach Satz 3.5.5 folgt zusammen mit [Ger08] 4.10:

$$1 = (d_E, -\ell)_p = (p, -\ell)_p = \left(\frac{-\ell}{p}\right)$$

□

Es sollen nun für die imaginär-quadratischen Zahlkörper  $E$  mit  $d_E \in \{-3, -4, -7, -8, -11, -15\}$  und die Quebbemannschen Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  unter der Bedingung  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  die Geschlechter  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für kleine Dimensionen  $N$ , sofern diese Geschlechter existieren, klassifiziert werden. Die für die Berechnung der Maße dieser Geschlechter notwendigen Standardmaße für kleine Dimensionen und die oben genannten Zahlkörper sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst.

$N \setminus E$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$
2	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{1}{648}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{3}$
4	$\frac{1}{155520}$	$\frac{1}{46080}$	$\frac{1}{5040}$	$\frac{1}{3840}$	$\frac{1}{1920}$	$\frac{1}{24}$
5	$\frac{1}{466560}$	$\frac{1}{36864}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{19}{2560}$	$\frac{85}{1408}$	$\frac{62}{45}$
6	$\frac{1}{235146240}$	$\frac{1}{18579456}$	$\frac{1}{158760}$	$\frac{19}{1290240}$	$\frac{85}{709632}$	$\frac{31}{11340}$
7	$\frac{1}{100776960}$	$\frac{61}{74317824}$	$\frac{73}{19845}$	$\frac{5833}{286720}$	$\frac{102595}{78848}$	$\frac{641762}{2835}$
8	$\frac{1}{48372940800}$	$\frac{61}{3567255520}$	$\frac{73}{9525600}$	$\frac{5833}{137625600}$	$\frac{20519}{7569408}$	$\frac{320881}{680400}$

TABELLE 3.4. Standardmaße  $\text{std}_N^E$  für imaginär-quadratische Zahlkörper mit Diskriminante  $d_E$

Einige Beispiele, konkret das Coxeter-Todd Gitter  $CT_{12}$ , das Barnes-Wall Gitter  $BW_{16}$  und die in ihren Geschlechtern jeweils eindeutig bestimmten extremalen Gitter  $Q_8(1)$  (vgl. [LatDB] „Q8(1)“) sowie  $\mathbb{A}_2 \otimes \mathbb{D}_4$  (vgl. [LatDB] „A2 x D4“), folgen hier ausführlich und in zitierfähiger Form.

SATZ 3.5.8. Das Coxeter-Todd-Gitter  $CT_{12}$  besitzt genau eine Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  sowie genau zwei Strukturen über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$ . Weiterhin besitzt es keine Struktur über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ .

BEWEIS. Die Nicht-Existenz einer Struktur von  $CT_{12}$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$  zeigt Korollar 3.5.7, denn es ist  $\left(\frac{-3}{11}\right) = -1$ . Ebenso folgt mit Satz 3.5.5, dass  $CT_{12}$  keine Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  besitzt, denn es ist  $(-8, -3)_2 = -1$ .

Der für die Berechnung des Maßes des Geschlechts  $\mathfrak{G}_6^E(3)$  über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  notwendige Korrekturfaktor lautet 15860 und somit erhält man als Maß  $\frac{3965}{4644864}$ . Durch sukzessives Nachbarbilden kann dieses Geschlecht bestimmt werden: Es umfasst genau 6 Klassen, von denen eine mittels Transferkonstruktion ein zu  $CT_{12}$  isometrisches Gitter liefert.

Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_6^E(3)$  für den Körper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  ist  $\frac{793}{7938}$ . Auch hier kann durch sukzessives Nachbarbilden dieses Geschlecht bestimmt werden: Es umfasst genau 11 Klassen, von denen genau zwei ein mittels Transferkonstruktion zu  $CT_{12}$  isometrisches Gitter liefern. □

SATZ 3.5.9. *Das Barnes-Wall-Gitter  $BW_{16}$  besitzt genau eine Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ , sechs Strukturen über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  sowie 32 Strukturen über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ .*

BEWEIS. Hier gibt es über den Körpern  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$  jeweils ein in Frage kommendes Geschlecht hermitescher Gitter. Die Maße lauten  $\frac{4885817}{3175200}$  bzw.  $\frac{14999389}{98304}$  und die Klassenzahlen 65 bzw. 639. Wie man leicht etwa mit MAGMA überprüft, liefern jeweils 6 bzw. 32 Gitter mittels Transferkonstruktion ein zu  $BW_{16}$  isometrisches Gitter.  $\square$

Auf analoge Weise zeigt man:

SATZ 3.5.10. *Das Gitter  $Q_8(1)$  besitzt über den Körpern  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  jeweils genau eine Struktur sowie zwei je Strukturen über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ .*  $\square$

SATZ 3.5.11. *Das Gitter  $\mathbb{A}_2 \otimes \mathbb{D}_4$  besitzt genau zwei Strukturen über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  und fünf Strukturen über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ .*  $\square$

Weitere Ergebnisse sind in der nachfolgenden Tabelle 3.5 aufgeführt. Dabei ist  $\ell$  die Stufe der  $\mathbb{Z}$ -Gitter,  $E$  der jeweilige imaginär-quadratische Zahlkörper,  $n$  die Dimension der hermiteschen Gitter,  $h$  die Klassenzahl des entsprechenden Geschlechts,  $h_{\text{st.m}}$  die Anzahl der hermiteschen Gitter, welche stark modulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter liefern,  $h_2, \dots, h_6$  die Anzahl der hermiteschen Gitter, welche als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ein Minimum von  $2, \dots, 6$  besitzen und  $h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$  die Anzahl der extremalen  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bis auf Isometrie), welche eine Struktur über dem Körper  $E$  besitzen.

$\ell$	$E$	$N$	Maß	$h$	$h_{\text{st.m}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
1	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	4	$\frac{1}{27 \cdot 3^5 \cdot 5}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{1}{2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^2}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_{16}$	1
		12	$\frac{1032508093}{2^{22} \cdot 3^{17} \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	5	(5)	4	1	-	$\text{II}_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	4	$\frac{1}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{61}{2^{22} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7}$	3	(3)	3	-	-	$\text{II}_{16}$	2
		12	$\frac{589874455867}{2^{33} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13}$	28	(28)	27	1	-	$\text{II}_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	4	$\frac{1}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{73}{2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$	3	(3)	3	-	-	$\text{II}_{16}$	2
		12	$\frac{22795633732009}{2^4 \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^4 \cdot 13}$	464	(464)	455	9	-	$\text{II}_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	4	$\frac{1}{2^8 \cdot 3 \cdot 5}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{5833}{2^{18} \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7}$	6	(6)	6	-	-	$\text{II}_{16}$	2
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	4	$\frac{1}{27 \cdot 3 \cdot 5}$	1	(1)	1	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{20519}{2^{15} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}$	7	(7)	7	-	-	$\text{II}_{16}$	2
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	4	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$	2	(2)	2	-	-	$\text{II}_8$	1
		8	$\frac{320881}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7}$	49	(49)	49	-	-	$\text{II}_{16}$	2
	2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(2^{-2})$
4			$\frac{1}{2^7 \cdot 3^4}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_8(2^{+4})$	1
6			$\frac{11}{2^{10} \cdot 3^8}$	2	2	2	-	-	$\text{II}_{12}(2^{-6})$	2
$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$		8	$\frac{56287}{2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^2}$	6	6	5	1	-	$\text{II}_{16}(2^{+8})$	1
		4	$\frac{1}{2^4 \cdot 3^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_8(2^{+4})$	1
		8	$\frac{4885817}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$	65	61	59	6	-	$\text{II}_{16}(2^{+8})$	1



$\ell$	$E$	$N$	Maß	$h$	$h_{\text{st.m}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
2	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	2	$\frac{1}{2^3 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(2^{-2})$	1
		4	$\frac{1}{2^7}$	2	2	2	-	-	$\text{II}_8(2^{+4})$	1
		6	$\frac{425}{2^{10} \cdot 3^2}$	8	8	8	-	-	$\text{II}_{12}(2^{-6})$	3
		8	$\frac{14999389}{2^{15} \cdot 3}$	639	615	607	32	-	$\text{II}_{16}(2^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	4	$\frac{7}{7^2}$	4	4	4	-	-	$\text{II}_8(2^{+4})$	1
3	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	2	$\frac{1}{2^3 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(3^{+2})$	1
		4	$\frac{7}{2^9 \cdot 3^2}$	2	2	2	-	-	$\text{II}_8(3^{+4})$	2
		6	$\frac{3965}{2^{13} \cdot 3^4 \cdot 7}$	6	6	5	1	-	$\text{II}_{12}(3^{+6})$	1
		8	$\frac{1084861271}{2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7}$	54	52	44	10	-	$\text{II}_{16}(3^{+8})$	6
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	2	$\frac{1}{2^2 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(3^{+2})$	1
		4	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2}$	2	2	2	-	-	$\text{II}_8(3^{+4})$	2
		6	$\frac{793}{2 \cdot 3^4 \cdot 7^2}$	11	11	9	2	-	$\text{II}_{12}(3^{+6})$	1
		8	$\frac{1298276603}{2^4 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$	944	778	841	103	-	$\text{II}_{16}(3^{+8})$	6
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	4	$\frac{13}{2^7 \cdot 3}$	3	3	3	-	-	$\text{II}_8(3^{+4})$	2
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	4	$\frac{13}{2^6 \cdot 3}$	3	3	3	-	-	$\text{II}_8(3^{+4})$	2
5	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{1}{2 \cdot 3^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(5^{-2})$	1
		4	$\frac{91}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}$	3	3	2	1	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
		6	$\frac{209963}{2^7 \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7}$	10	10	7	3	-	$\text{II}_{12}(5^{-6})$	3
		8	$\frac{65824579523}{2^{14} \cdot 3^{10} \cdot 5^2}$	178	128	83	94	1	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	4	$\frac{403}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5}$	4	4	3	1	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
		2	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(5^{-2})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	4	$\frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}$	4	4	3	1	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
		6	$\frac{209963}{3^4 \cdot 5 \cdot 7^2}$	57	53	43	14	-	$\text{II}_{12}(5^{-6})$	4
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	2	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(5^{-2})$	1
		4	$\frac{91}{2^7 \cdot 5}$	7	7	5	2	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
	6	$\frac{3989297}{2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$	133	119	110	23	-	$\text{II}_{12}(5^{-6})$	4	
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	4	$\frac{403}{2^6 \cdot 3 \cdot 5}$	8	8	6	2	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
6	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	2	$\frac{1}{2^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(2^{+2}3^{+2})$	1
		4	$\frac{35}{2^3 \cdot 3^2}$	8	8	6	2	-	$\text{II}_8(2^{+4}3^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	2	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(2^{-2}3^{-2})$	1
		4	$\frac{65}{2^6}$	13	13	8	5	-	$\text{II}_8(2^{+4}3^{+4})$	1
7	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	4	$\frac{95}{2^6 \cdot 3^4}$	4	4	3	1	-	$\text{II}_8(7^{+4})$	1
		2	$\frac{1}{2^3}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(7^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	4	$\frac{215}{2^9 \cdot 3^2}$	6	6	4	2	-	$\text{II}_8(7^{+4})$	1
		6	$\frac{997975}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 7}$	68	54	38	30	0	$\text{II}_4(7^{+2})$	(0)
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	2	$\frac{1}{2^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(7^{+2})$	1
		4	$\frac{215}{2^7 \cdot 3}$	11	11	7	4	-	$\text{II}_8(7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	2	$\frac{1}{2^2}$	1	1	1	-	-	$\text{II}_4(7^{+2})$	1
		4	$\frac{215}{2^6 \cdot 3}$	12	12	7	5	-	$\text{II}_8(7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	2	$\frac{1}{2}$	2	2	2	-	-	$\text{II}_4(7^{+2})$	1
		4	$\frac{215}{2^2 \cdot 3^2}$	42	42	30	12	-	$\text{II}_8(7^{+4})$	1

$\ell$	$E$	$N$	Maß	$h$	$h_{\text{st.m}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
11	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{5}{2^2 \cdot 3^2}$	2	2	1	2	-	$\Pi_4(11^{+2})$	1
		4	$\frac{2257}{2^6 \cdot 3^4 \cdot 5}$	9	9	4	4	1	$\Pi_8(11^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	2	$\frac{5}{2^3 \cdot 3}$	2	2	1	1	-	$\Pi_4(11^{+2})$	1
		4	$\frac{2257}{2^9 \cdot 3 \cdot 5}$	13	13	6	6	1	$\Pi_8(11^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	4	$\frac{1159}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5}$	17	17	7	9	1	$\Pi_8(11^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	4	$\frac{8113}{2^7 \cdot 3 \cdot 5}$	28	28	13	14	1	$\Pi_8(11^{+4})$	1
$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	2	$\frac{5}{6}$	4	4	2	2	-	$\Pi_4(11^{+2})$	1	
14	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{1}{3^2}$	2	0	1	1	-	$\Pi_4(2^{-2}7^{-2})$	(0)
		4	$\frac{475}{2^6 \cdot 3^3}$	14	8	5	8	1	$\Pi_8(2^{+4}7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	4	$\frac{1075}{2^6}$	64	44	19	43	2	$\Pi_8(2^{+4}7^{+4})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-15})$	2	$\frac{3}{2}$	4	4	2	2	-	$\Pi_4(2^{+2}7^{+2})$	1
15	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	2	$\frac{1}{2^2}$	2	0	1	1	-	$\Pi_4(3^{+2}5^{+2})$	(0)
		4	$\frac{2821}{2^8 \cdot 3^2}$	28	16	10	12	4	$\Pi_8(3^{+4}5^{+4})$	2
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	4	$\frac{91}{2^2 \cdot 3}$	34	26	10	20	4	$\Pi_8(3^{+4}5^{+4})$	2
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	2	$\frac{2}{3}$	2	2	1	1	-	$\Pi_4(3^{-2}5^{-2})$	1
		4	$\frac{1183}{2^6}$	92	56	29	51	12	$\Pi_8(3^{+4}5^{+4})$	2
23	$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{11}{2^2 \cdot 3^2}$	3	3	1	1	1	$\Pi_4(23^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$	2	$\frac{11}{2^3 \cdot 3}$	3	3	1	1	1	$\Pi_4(23^{+2})$	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-2})$	2	$\frac{11}{2^2 \cdot 3}$	3	3	1	2	0	$\Pi_4(23^{+2})$	0

TABELLE 3.5. Strukturen über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

**3.5.2. Tensorprodukte über imaginär-quadratischen Zahlkörpern.** Sind  $V_1$  und  $V_2$  zwei hermitesche  $E$ -Vektorräume der Dimension  $N_1$  bzw.  $N_2$ , so besitzt das Tensorprodukt  $V_1 \otimes_E V_2$  die Dimension  $N_1 \cdot N_2$ . Genauer sind  $x_1, \dots, x_{N_1}$  und  $y_1, \dots, y_{N_2}$   $E$ -Basen von  $V_1$  bzw.  $V_2$ , so erhält man mit  $x_1 \otimes y_1, \dots, x_{N_1} \otimes y_{N_2}$  eine  $E$ -Basis von  $V_1 \otimes_E V_2$  (vgl. etwa [JS06] VII 10.7).

Sind  $h_1$  und  $h_2$  hermitesche Formen auf  $V_1$  bzw.  $V_2$ , so kann auf  $V := V_1 \otimes_E V_2$  eine hermitesche Form  $h : V \times V \rightarrow E$  wie folgt definiert werden durch Fortsetzung von

$$h(x_i \otimes y_j, x_k \otimes y_l) := h_1(x_i, x_k) \cdot h_2(y_j, y_l)$$

zu einer hermiteschen Form auf  $V$ , welche unabhängig von den gewählten Basen  $x_1, \dots, x_{N_1}$  von  $V_1$  und  $y_1, \dots, y_{N_2}$  von  $V_2$  ist. Die Gram-Matrix von  $h$  bezüglich der Basis  $x_1 \otimes y_1, \dots, x_{N_1} \otimes y_{N_2}$  erhält man also durch das Kronecker-Produkt der Gram-Matrizen von  $h_1$  bzw.  $h_2$  bezüglich der Basen  $x_1, \dots, x_{N_1}$  bzw.  $y_1, \dots, y_{N_2}$ .

Ist  $L_1 = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_{N_1} x_{N_1}$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $(V_1, h_1)$  und  $L_2 = \mathfrak{B}_1 y_1 + \dots + \mathfrak{B}_{N_2} y_{N_2}$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $(V_2, h_2)$ , so erhält man im Wesentlichen mit [JS06] VII 10.6, dass gilt

$$(53) \quad L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2 = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \cdot x_1 \otimes y_1 + \dots + \mathfrak{A}_{N_1} \mathfrak{B}_{N_2} \cdot x_{N_1} \otimes y_{N_2}.$$

Insbesondere ist also  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf  $(V, h)$ . Mit Hilfe der Darstellung von  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  aus (53) erhält man leicht  $\mathfrak{v}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) = (\mathfrak{v}L_1)^{N_2} \cdot (\mathfrak{v}L_2)^{N_1}$  und  $\mathfrak{s}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) = \mathfrak{s}L_1 \cdot \mathfrak{s}L_2$  sowie  $(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)^* = L_1^* \otimes_{\mathfrak{D}} L_2^*$ . Für weitere Details zu hermiteschen Tensorprodukten siehe [Cou00].

LEMMA 3.5.12. Sei  $L_1$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter im Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_{N_1}^E(\ell^{N_1/2})$  und  $L_2$  ein unimodulares  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N_2$ . Weiter sei  $N := N_1 \cdot N_2$ . Dann ist  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  ein Gitter im Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$ .

BEWEIS. Da  $L_2$  unimodular ist, gilt  $\mathfrak{s}L_2 = \mathfrak{v}L_2 = \mathfrak{D}$ . Somit ist wegen  $\mathfrak{s}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) = \mathfrak{s}L_1$  das Spurgitter von  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  ein ganzzahliges  $\mathbb{Z}$ -Gitter. Weiter gilt  $\mathfrak{n}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) \subseteq \mathfrak{n}L_1$ , denn

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) &= \sum_{i=1}^{N_1} \sum_{j=1}^{N_2} \mathfrak{A}_i \mathfrak{B}_j \overline{\mathfrak{A}_i} \overline{\mathfrak{B}_j} h(x_i \otimes y_j, x_i \otimes y_j) + \mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \mathfrak{A}_i \overline{\mathfrak{A}_i} h(x_i, x_i) \underbrace{\sum_{j=1}^{N_2} \mathfrak{B}_j \overline{\mathfrak{B}_j} h(y_j, y_j)}_{\subseteq \mathfrak{s}L_2 = \mathfrak{D}} + \mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}(L_1)) \\ &\subseteq \sum_{i=1}^{N_1} \mathfrak{A}_i \overline{\mathfrak{A}_i} h(x_i, x_i) + \mathrm{Tr}_F^E(\mathfrak{s}(L_1)) = \mathfrak{n}L_1. \end{aligned}$$

Da  $L_2$  ein gerades Gitter ist, gilt  $\mathfrak{n}L_2 \subseteq \mathfrak{D}$ . Also ist wegen  $\mathfrak{n}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) \subseteq \mathfrak{n}L_2 \subseteq \mathfrak{D}$  auch  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  ein gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter. Des Weiteren ist  $\mathfrak{v}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) = (\mathfrak{v}L_1)^{N_2}$  und damit

$$\det(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) = |d_E|^{-N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L_1)^{N_2} = |d_E|^{-N} \cdot (|d_E|^{N_1} \cdot \ell^{N_1})^{N_2} = \ell^N.$$

Zudem ist  $(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)^{\#} = \mathfrak{D}_E^{-1}(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)^* = (\mathfrak{D}_E^{-1}L_1^*) \otimes_{\mathfrak{D}} L_2 = L_1^{\#} \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$ . Somit gilt also  $\mathfrak{n}((L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)^{\#}) = \mathfrak{n}(L_1^{\#} \otimes_{\mathfrak{D}} L_2) \subseteq \mathfrak{n}(L_1^{\#})$ . Da das Spurgitter von  $L_1$  die Stufe  $\ell$  besitzt, ist also das Spurgitter von  $L_1^{\#}$  bezüglich der hermiteschen Form  $\ell \cdot h$  ein gerades Gitter. Demnach muss  $\mathfrak{n}(L_1^{\#}) \subseteq \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}$  gelten. Also ist auch das Spurgitter von  $(L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2)^{\#}$  bzgl. der Form  $\ell \cdot h$  ein gerades Gitter und damit besitzt das Spurgitter von  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} L_2$  die Stufe  $\ell$ .  $\square$

Somit lassen sich also durch Bilden von Tensorprodukten mit unimodularen  $\mathfrak{D}$ -Gittern auch für großes  $N$  Gitter in Geschlechtern  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  konstruieren. Diese Idee wird in [CN13] zur Konstruktion extremaler unimodularer Gitter verfolgt. Als besonders geeignet für die Konstruktion neuer extremaler Gitter hat sich der Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  mit Ganzheitsring  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\omega]$  mit  $\omega := \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$  herausgestellt; im Besonderen das Barnes-Gitter  $P_b$  in Dimension 3

$$P_b \cong \begin{pmatrix} 2 & -1 & \overline{\omega} \\ -1 & 2 & \omega \\ \omega & \overline{\omega} & 2 \end{pmatrix},$$

also das eindeutig bestimmte unzerlegbare unimodulare  $\mathfrak{D}$ -Gitter der Dimension 3 (vgl.[Sch98]). Beispielsweise erhält man durch Tensorieren von  $P_b$  mit der Struktur von  $\mathbb{E}_8$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_{12}^E$ , dessen Spurgitter das Leech-Gitter  $\Lambda_{24}$  ist.

BEISPIEL 3.5.13. In [Hen09] werden sämtliche hermiteschen Strukturen des Leech-Gitters über  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  bestimmt. Es gibt neben der oben erwähnten noch genau acht weitere solcher 12-dimensionalen Strukturen. Durch Bilden des Tensorprodukts dieser Strukturen mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$  erhält man auf diese Weise neun Gitter, von denen genau eines, das Gitter  $\Gamma_{72}$ , das Minimum 8 besitzt und demnach extremal ist (vgl. [Neb12]).  $\blacksquare$

Ähnlich wie im obigen Beispiel sollen in diesem Abschnitt Tensorprodukte der zuvor bestimmten Strukturen einiger interessanter Gitter mit dem Gitter  $P_b$  über  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  bestimmt werden. In der Folge bezeichne stets  $\omega := \frac{1+\sqrt{-7}}{2}$ .

BEISPIEL 3.5.14. Durch Tensorieren der Struktur des Gitters  $Q_8(1)$  mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$  erhält man ein extremales, 5-modulares Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(5^{+12})$ . Dieses ist isometrisch zu dem bereits bekannten Gitter  $[2.J_2 \square SL_2(5)]_{24}(s)$  (vgl. [LatDB] „(C2.J2 Y SL(2,5)):C2“). ■

BEISPIEL 3.5.15. Tensoriert man die zwei Strukturen des Gitters  $A_2 \otimes \mathbb{D}_4$  mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$ , so erhält man zwei stark modulare, extremale  $\mathbb{Z}$ -Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(2^{+12}3^{+12})$ .

$i$	$ U(L_i) $	$ U(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b) $	$\min(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b)$	$ O(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b) $
1	$2^5 \cdot 3$	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 7$	8	$2^{11} \cdot 3^4 \cdot 7$
2	$2^4 \cdot 3$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 7$	8	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$

Das Gitter  $L_1 \otimes_{\mathfrak{D}} P_b$  ist isometrisch zu dem Gitter  $[6.L_3(4).2 \otimes^{2(2)} D_8]_{24}$  (vgl. [LatDB] „(C6.PSL(3,4).C2 Y D8).C2“). Das Gitter  $L_2 \otimes_{\mathfrak{D}} P_b$  ist isometrisch zu dem Gitter  $[(SL_2(3) \circ C_4).2 \otimes_{\sqrt{-1}}^{2(3)} U_3(3)]_{24}$  (vgl. [LatDB] „((SL(2,3) Y C4).C2 x PSU(3,3)).C2“). ■

BEISPIEL 3.5.16. Tensoriert man die sechs Strukturen des Gitters  $BW_{16}$  mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$ , so erhält man (bis auf Isometrie) fünf extremale, 2-modulare Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{48}(2^{+24})$ .

$i$	$ U(L_i) $	$ U(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b) $	$\min(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b)$	$ O(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b) $
1	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$	8	$2^{10} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$
2	$2^8 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	8	$2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$
3a	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	8	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
3b	$2^6 \cdot 3^2 \cdot 5$	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	8	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$
4	$2^8 \cdot 3^2$	$2^{11} \cdot 3^3 \cdot 7$	8	$2^{12} \cdot 3^3 \cdot 7$
5	$2^6 \cdot 3 \cdot 7$	$2^9 \cdot 3^2 \cdot 7^2$	8	$2^{10} \cdot 3^2 \cdot 7^2$

Bekannt sind bislang zwei extremale Gitter: Zum einen das Gitter  $Bhurw_{12}$  (vgl. [LatDB] „Bhurw12“), welches keinen Automorphismus der Ordnung 7 besitzt und damit zu keinem der obigen Gitter isometrisch ist. Zum anderen das Gitter  $\mathbb{Z}_2 P_{48n}$  (vgl. [LatDB] „Z2P48n“), welches eine Automorphismengruppe der Ordnung  $2^{20} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13$  besitzt. Das Gitter  $L_2 \otimes_{\mathfrak{D}} P_b$  ist isometrisch zu  $\mathbb{Z}_2 P_{48n}$ , alle weiteren sind in der Literatur bislang nicht erwähnt. ■

BEISPIEL 3.5.17. Bilden des Tensorprodukts der beiden Strukturen des Gitters  $CT_{12}$  mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$  ergibt zwei 3-modulare Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$ :

$i$	$ U(L_i) $	$ U(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b) $	$\min(L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b)$	$\theta_{L_i \otimes_{\mathfrak{D}} P_b}$
1	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 7$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 7^2$	6	$1 + 12096q^3 + O(q^4)$
2	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$	$2^9 \cdot 3^3 \cdot 7^2$	6	$1 + 2016q^3 + O(q^4)$

Beide Gitter besitzen ein Minimum von 6 und sind folglich nicht extremal. ■

Man erhält durch Bilden von Tensorprodukten also für die Stufen  $\ell \leq 6$  jeweils (stark)  $\ell$ -modulare Gitter. Mit Ausnahme der Stufe  $\ell = 3$  sind diese Gitter extremal.

In den folgenden beiden Fällen ist die obere Schranke an das Minimum 12, denn der Tensor  $x \otimes y$  für jeweils einen kürzesten Vektor  $x$  bzw.  $y$  der tensorierten Gitter besitzt gerade diese Quadratlänge. In beiden Fällen können keine extremalen Gitter entstehen, denn ein extremales Gitter hätte jeweils das Minimum 14. Zumindest wird die obere Schranke von 12 angenommen:

BEISPIEL 3.5.18. Tensoriert man die Struktur des (eindeutigen) extremalen, 11-modularen Gitters in Dimension 8 mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$ , so erhält man ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(11+12)$  mit Minimum 12. Dieses ist isometrisch zu dem in der Datenbank gelisteten Gitter  $(4 + \sqrt{5})\Lambda_{24}$  (vgl. [LatDB] „(4+sqrt(5)) x Leech“). ■

BEISPIEL 3.5.19. Tensoriert man die vier Strukturen der zwei extremalen, stark 15-modularen Gitter in Dimension 8 mit dem Gitter  $P_b$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$ , so erhält man vier stark 15-modulare Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(3+125+12)$  mit Minimum 12. ■

BEMERKUNGEN 3.5.20.

- (i) Das extremale unimodulare Gitter  $P_{48n}$  in Dimension 48 lässt sich als Tensorprodukt der Struktur des Leech-Gitters über  $\mathbb{Z}[\omega]$  mit  $\omega := \frac{1+\sqrt{-11}}{2}$  mit dem folgenden unimodularen Gitter vom Rang 2 konstruieren:

$$T \cong \begin{pmatrix} 2 & \omega \\ \bar{\omega} & 2 \end{pmatrix}$$

Tensoriert man hingegen die 32 Strukturen des Barnes-Wall Gitters  $BW_{16}$  mit dem Gitter  $T$  über  $\mathbb{Z}[\omega]$ , so erhält man 32 Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2+16)$  mit Minimum 4, d.h. also keines dieser Gitter ist extremal.

- (ii) Das Tensorieren der Strukturen extremaler Gitter mit (unzerlegbaren) unimodularen Gittern über anderen Körpern ergab keine nennenswerten Ergebnisse. Für eine mögliche Erklärung, warum gerade der Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  viele interessante Ergebnisse liefert, während dies ansonsten nicht der Fall ist, siehe [CN13] Rem. 3.6 ■

**3.5.3. Einige Beispiele im Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) > 1$ .** Anders als im Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  gibt es hier im Allgemeinen mehrere Geschlechter hermitescher Gitter, welche  $n$ -dimensionale gerade  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  liefern. Dies soll am Beispiel von Strukturen von Gittern der Stufe  $\ell = 3$  über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  verdeutlicht werden.

BEISPIEL 3.5.21. (Strukturen von Gittern der Stufe  $\ell = 3$  über  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ )  
Das Geschlecht  $\text{II}_8(3+4)$  enthält genau zwei Gitter: Neben dem Gitter  $\mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2$  noch ein unzerlegbares Gitter. Beide Gitter besitzen eine Struktur über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Das Gitter  $\mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2 \perp \mathbb{A}_2$  entsteht per Spurkonstruktion aus dem 4-dimensionalen Standardgitter  $L_1 \cong \langle 1, 1, 1, 1 \rangle$ , wohingegen das unzerlegbare Gitter die folgende Struktur über  $E$  besitzt:

$$L_2 \cong \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-w}{3} & \frac{1-w}{3} & \frac{1-w}{3} \\ \frac{2+w}{3} & 1 & \frac{1-w}{3} & 0 \\ \frac{2+w}{3} & \frac{2+w}{3} & 2 & \frac{-1+w}{3} \\ \frac{2+w}{3} & 0 & \frac{-2-w}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Letzteres Gitter ist offenbar nicht ganzzahlig (im Sinne von  $L \subseteq L^*$ ), während das Gitter  $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$  unimodular und damit auch ganzzahlig ist. Somit können diese beiden  $\mathfrak{D}$ -Gitter nicht im selben Geschlecht liegen.

Sei nun allgemeiner  $L$  ein hermitesches Gitter, welches per Spurkonstruktion ein  $n$ -dimensionales gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe 3 und Determinante  $3^{n/2}$  liefert. Genau wie in Abschnitt 3.3.1 folgt zunächst

$$3\mathfrak{D}_E^{-1}L^* \subseteq L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}L^*.$$

Für alle Stellen  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}} \setminus \{3\}$  gilt nach wie vor, dass  $L_p$  für diese unimodular ist und damit wie gesehen der Isometrietyp von  $L_p$  feststeht. Sei nun  $p = 3$ . Dann gilt  $3\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$  und für die Stelle  $p = 3$  gilt:

$$\mathfrak{P}L_3^* \subseteq L_3 \subseteq \mathfrak{P}^{-1}L_3^*$$

Also sind in einer Jordan-Zerlegung an der Stelle  $p = 3$  mit einer  $\mathfrak{P}^{-1}$ -, einer  $\mathfrak{P}$ - und einer unimodularen nur drei Komponenten möglich. In kleinstmöglicher Dimension besitzen diese Komponenten die Gestalt:

$$\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{P}^{-1} & \mathfrak{D} & \mathfrak{P} \\ \hline \mathbb{H}(-1) & \begin{array}{c} \langle 1 \rangle \\ \langle \Delta \rangle \end{array} & \mathbb{H}(1) \end{array}$$

Die Dimension eines Spurgitters  $L$  ist  $n = N \cdot [E : \mathbb{Q}] = 2N$ . Ist  $L$  ein Gitter mit  $\det(L) = 3^{n/2}$ , so gilt:

$$3^N = \det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = 3^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$$

Also muss gelten  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v}L) = 0$ . Des Weiteren zeigt man mit ähnlichen Argumenten, wie sie im Beweis zu Satz 4.1.19 verwendet werden, dass die Determinante von  $L_3$  eine Norm ist und damit eine unimodulare Komponente der Determinante  $\Delta$  nicht auftreten kann. Unter diesen Nebenbedingungen lassen sich in kleinen Dimensionen die folgenden Geschlechter kombinieren:

$N$	$L_3$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
1	$\langle 1 \rangle$	$\frac{1}{2 \cdot 3}$	1	1	-	$\Pi_2(3^{-1})$	1
2	$\langle 1, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2}$	1	1	-	$\Pi_4(3^{+2})$	1
3	$\langle 1, 1, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^4 \cdot 3^4}$	1	1	-	$\Pi_6(3^{-3})$	1
4	$\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^5}$	1	1	-	$\Pi_8(3^{+4})$	1
4	$\mathbb{H}(-1) \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{1}{2^6 \cdot 3^3}$	1	1	-	$\Pi_8(3^{+4})$	1
5	$5 \cdot \langle 1 \rangle$	$\frac{1}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5}$	1	1	-	$\Pi_{10}(3^{-5})$	1
5	$\mathbb{H}(-1) \perp \langle 1 \rangle \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^4}$	1	1	-	$\Pi_{10}(3^{-5})$	1
6	$6 \cdot \langle 1 \rangle$	$\frac{13}{2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7}$	2	1	1	$\Pi_{12}(3^{+6})$	1
6	$\mathbb{H}(-1) \perp 2 \cdot \langle 1 \rangle \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{13}{2^9 \cdot 3^6}$	4	3	1	$\Pi_{12}(3^{+6})$	1
7	$7 \cdot \langle 1 \rangle$	$\frac{1}{2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5}$	2	2	0	$\Pi_{14}(3^{-7})$	0
7	$\mathbb{H}(-1) \perp 3 \cdot \langle 1 \rangle \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{91}{2^{10} \cdot 3^7}$	7	7	0	$\Pi_{14}(3^{-7})$	0
8	$8 \cdot \langle 1 \rangle$	$\frac{41}{2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^2}$	3	2	1	$\Pi_{16}(3^{+8})$	1
8	$\mathbb{H}(-1) \perp 4 \cdot \langle 1 \rangle \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{3731}{2^{13} \cdot 3^8}$	12	10	2	$\Pi_{16}(3^{+8})$	2
8	$2 \cdot \mathbb{H}(-1) \perp 2 \cdot \mathbb{H}(1)$	$\frac{3731}{2^{14} \cdot 3^2 \cdot 5^2}$	15	11	4	$\Pi_{16}(3^{+8})$	4

Bereits in diesen kleinen Dimensionen zeigt sich, dass die Maße in fester Dimension  $N$  je nach Geschlecht stark variieren. Noch eklatanter ist dieser Anstieg der Maße in Dimension  $N = 12$ :

$N$	$L_3$	Maß	$h$
12	$12 \cdot \langle 1 \rangle$	$\approx 5.4 \cdot 10^{-9}$	12
	$\mathbb{H}(-1) \perp 8 \cdot \langle 1 \rangle \perp \mathbb{H}(1)$	$\approx 2.7$	$> 16$
	$2 \cdot \mathbb{H}(-1) \perp 4 \cdot \langle 1 \rangle \perp 2 \cdot \mathbb{H}(1)$	$\approx 1.8 \cdot 10^5$	$> 10^6$
	$3 \cdot \mathbb{H}(-1) \perp 3 \cdot \mathbb{H}(1)$	$\approx 2.6 \cdot 10^6$	$> 10^7$

Eine Klassifikation, insbesondere des Geschlechtes mit  $L_3 \cong 3 \cdot \mathbb{H}(-1) \perp 3 \cdot \mathbb{H}(1)$ , scheint nicht möglich. Andererseits ist dieses Geschlecht jedoch für die Konstruktion extremaler Gitter durchaus relevant:

Beispielsweise besitzt das Gitter  $L_{24.2}$  (vgl. [LatDB] „L\_24.2“) zwei nicht isometrische Strukturen, welche gerade in diesem Geschlecht liegen. Andererseits wurde bereits in [Fei78] gezeigt, dass kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(3^{+12})$  eine Struktur als unimodulares  $\mathfrak{O}$ -Gitter besitzt.

### 3.6. Gitter über Kreisteilungskörpern

Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  der  $m$ -te Kreisteilungskörper. Wegen  $\mathbb{Q}(\zeta_{2m}) = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  für ungerades  $m$  sei  $m \not\equiv_4 2$ . Der maximal reelle Teilkörper von  $E$  ist  $F = \mathbb{Q}(\zeta_m + \bar{\zeta}_m)$ . Die entsprechenden Ganzheitsringe sind  $\mathfrak{O} = \mathbb{Z}[\zeta_m]$  und  $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\zeta_m + \bar{\zeta}_m]$ . Die Diskriminante von  $E$  lautet

$$d_E = (-1)^{\varphi(m)/2} \cdot \frac{m^{\varphi(m)}}{\prod_{p|m} p^{\varphi(m)/(p-1)}}.$$

Je nachdem, ob  $m$  eine Primzahlpotenz ist oder nicht, ergibt sich folgender wesentlicher Unterschied: Ist  $m = p^t$ , dann ist die Erweiterung  $E/F$  verzweigt an der Stelle  $\mathfrak{p}|p$ . Ist hingegen  $m \neq p^t$ , so ist die Erweiterung  $E/F$  unverzweigt. Für weitere Details zu Kreisteilungskörpern siehe [Was82].

In diesem Abschnitt sollen hermitesche Strukturen von  $n$ -dimensionalen geraden  $\mathbb{Z}$ -Gittern der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  über Kreisteilungskörpern  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  betrachtet werden. Das Hauptaugenmerk wird auf die Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  für Primzahlen  $p > 2$  gelegt.

Zunächst wird erklärt, inwiefern ein Zusammenhang zwischen diesen Strukturen und Automorphismen der jeweiligen  $\mathbb{Z}$ -Gitter besteht. Für eine etwas allgemeinere Betrachtung von  $\mathbb{Z}G$ -Gittern für die zyklische Gruppe  $G$  sowie eine kategorielle Beschreibung dieses Sachverhalts siehe auch [Hof13]. Für den Spezialfall des Körpers  $\mathbb{Q}(\zeta_4)$  siehe auch [KM02], für den Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_3)$  siehe auch [Hen09].

**3.6.1. Zusammenhang zu Automorphismen.** Sei  $L$  ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf dem quadratischen Raum  $(V, b)$  der Dimension  $n$  mit einem Automorphismus  $\sigma \in O(L)$  mit (irreduziblem) Minimalpolynom  $m_\sigma = \Phi_m$  und weiter sei  $E := \mathbb{Q}(\zeta_m)$ .

Als erstes soll gezeigt werden, inwiefern  $\sigma$  auf  $V$  eine Struktur als hermitescher  $E$ -Vektorraum induziert. Für eine etwas allgemeinere Betrachtung dieses Themas siehe [Mil69].

Auf dem  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $V$  kann eine  $E$ -Vektorraumstruktur durch  $\zeta_m \cdot x := \sigma(x)$  für alle  $x \in V$  definiert werden. Als  $E$ -Vektorraum besitzt  $V_\sigma := V$  die Dimension  $N := \frac{n}{\varphi(m)}$ .

Weiter sei die Abbildung  $h_\sigma : V_\sigma \times V_\sigma \rightarrow E$  definiert als

$$(54) \quad h_\sigma(x, y) := \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b(\sigma^{-i}(x), y) \cdot \zeta_m^i.$$

Man rechnet leicht nach, dass es sich bei  $h_\sigma$  um eine hermitesche Form auf  $V_\sigma$  handelt. Bildet man die zugehörige Spurform, so erhält man

$$\begin{aligned} b_{h_\sigma}(x, y) &= \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h_\sigma(x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E\left(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b(\sigma^{-i}(x), y) \cdot \zeta_m^i\right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} b(\zeta_m^{-i}x, y) \cdot \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\zeta_m^i) = b\left(\frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\zeta_m^i) \cdot \zeta_m^{-i}x, y\right) = b(x, y), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung gilt, da  $\sum_{i=0}^{m-1} \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\zeta_m^i) \cdot \zeta_m^{-i} = m$ , denn

$$\sum_{i=0}^{m-1} \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\zeta_m^i) \cdot \zeta_m^{-i} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j \in \mathbb{Z}_m^*} (\zeta_m^j)^i \cdot \zeta_m^{-i} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_m^*} \sum_{i=0}^{m-1} (\zeta_m^{j-1})^i = \sum_{j \in \mathbb{Z}_m^*} \begin{cases} m & j = 1 \\ 0 & j \neq 1 \end{cases} = m.$$

Ist  $h' : V_\sigma \times V_\sigma \rightarrow E$  eine weitere hermitesche Form mit  $b_{h'}(x, y) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h'(x, y)) = b(x, y)$ , so gilt für beliebiges  $\alpha \in E$

$$\begin{aligned} 0 &= b(\alpha x, y) - b(\alpha x, y) = b_{h_\sigma}(\alpha x, y) - b_{h'}(\alpha x, y) \\ &= \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h_\sigma(\alpha x, y)) - \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h'(\alpha x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\alpha \cdot (h_\sigma(x, y) - h'(x, y))). \end{aligned}$$

Da  $\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E : E \times E \rightarrow \mathbb{Q}$  nicht entartet ist, folgt  $h_\sigma(x, y) = h'(x, y)$  für alle  $x, y \in V$ , d.h. es gibt mit der in (54) definierten hermiteschen Form genau eine hermitesche Form auf  $V_\sigma$  mit der Eigenschaft, dass die zugehörige Spurform gerade die ursprüngliche Bilinearform  $b$  auf  $V$  ergibt.

Da  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus von  $L$  ist, ist  $\sigma(L) = L$  und damit  $\zeta_m \cdot L = L$ . Wegen  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\zeta_m]$  wird  $L$  dadurch zu einem  $\mathfrak{D}$ -Modul. Da  $L$  als  $\mathbb{Z}$ -Modul endlich erzeugt ist, ist  $L$  auch als  $\mathfrak{D}$ -Modul endlich erzeugt. Folglich ist  $L$  ein Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(V_\sigma, h_\sigma)$ .

Ist umgekehrt  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(V, h)$ , so kann man, wie in Abschnitt 3.1.3 in etwas allgemeinerem Kontext gesehen,  $L$  als  $\mathbb{Z}$ -Gitter auf dem Raum  $V$  mit Bilinearform  $b_h(x, y) := \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y))$  auffassen. Die Abbildung  $\sigma : V \rightarrow V$ ,  $x \mapsto \zeta_m \cdot x$  liefert dann eine Isometrie von  $V$ , denn für alle  $x, y \in V$  gilt

$$b_h(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\zeta x, \zeta y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(\zeta \bar{\zeta} h(x, y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y)) = b_h(x, y).$$

Wegen  $\sigma(L) = \zeta_m \cdot L = L$  ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus von  $L$  mit Minimalpolynom  $m_\sigma = \Phi_m$ .

Somit erhält man eine bijektive Korrespondenz von  $\mathfrak{D}$ -Gittern  $L$  auf hermiteschen Räumen  $(V, h)$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  einerseits und Paaren aus  $\mathbb{Z}$ -Gittern  $L$  auf dem quadratischen Raum  $(V, b)$  zusammen mit einem Automorphismus  $\sigma \in O(L)$  mit Minimalpolynom  $\Phi_m$  andererseits.

Sind nun  $\sigma, \tilde{\sigma} \in O(L)$  zwei Automorphismen eines  $\mathbb{Z}$ -Gitters  $L$  mit Minimalpolynom  $\Phi_m$ , so bezeichne  $L_\sigma$  auf  $(V_\sigma, h_\sigma)$  und  $L_{\tilde{\sigma}}$  auf  $(V_{\tilde{\sigma}}, h_{\tilde{\sigma}})$  die daraus resultierenden hermiteschen Gitter. Für diese gilt dann:

**PROPOSITION 3.6.1.** *Zwei hermitesche Strukturen  $L_\sigma$  und  $L_{\tilde{\sigma}}$  eines  $\mathbb{Z}$ -Gitters  $L$  über  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  sind isometrisch genau dann, wenn  $\sigma$  und  $\tilde{\sigma}$  konjugiert in  $O(L)$  sind.*

*Insbondere erhält man für ein  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  eine bijektive Korrespondenz zwischen Isometrieklassen hermitescher Strukturen von  $L$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  und Konjugationsklassen in  $O(L)$  mit Minimalpolynom  $\Phi_m$ .*

**BEWEIS.** Genau dann sind  $L_\sigma$  und  $L_{\tilde{\sigma}}$  isometrisch über  $\mathfrak{D}$ , wenn es eine Isometrie  $\psi : (V_\sigma, h_\sigma) \rightarrow (V_{\tilde{\sigma}}, h_{\tilde{\sigma}})$  gibt mit  $\psi(L_\sigma) = L_{\tilde{\sigma}}$ . Ähnlich wie in Prop. 3.4.4 zeigt man, dass dieses wiederum äquivalent ist zur Existenz eines  $\psi \in O(V, b)$ , welches  $E$ -linear ist und  $\psi(L_\sigma) = L_{\tilde{\sigma}}$  erfüllt. Da  $L_\sigma$  und  $L_{\tilde{\sigma}}$  als  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bzw. als Menge) gleich  $L$  sind, gilt also  $\psi(L) = L$ , d.h.  $\psi \in O(L)$ . Da  $\zeta_m$  ein primitives Element von  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  ist, ist die  $E$ -Linearität von  $\psi$  äquivalent zu  $\zeta_m \cdot \psi(x) = \psi(\zeta_m \cdot x)$  für alle  $x \in V$ , also  $\sigma \circ \psi = \psi \circ \sigma$  bzw.  $\tilde{\sigma} = \psi \circ \sigma \circ \psi^{-1}$ . Letzteres ist genau dann der Fall, wenn  $\tilde{\sigma}$  und  $\sigma$  konjugiert in  $O(L)$  sind.  $\square$



Um also sämtliche hermiteschen Strukturen von  $L$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$  zu bestimmen, müssen die Konjugationsklassen innerhalb der Automorphismengruppe  $O(L)$  mit Minimalpolynom  $\Phi_m$  berechnet werden und für je einen Vertreter  $\sigma$  das Gitter  $L_\sigma$  gebildet werden.

**BEMERKUNG 3.6.2.** Um zu einem  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L$  und einem Automorphismus  $\sigma \in O(L)$  mit  $m_\sigma = \Phi_m$  konkret eine hermitesche Struktur über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  in Form einer Darstellung  $L_\sigma = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  zu finden, muss aus einer beliebigen  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $L$ , welche stets auch ein  $\mathfrak{D}$ -Erzeugendensystem von  $L_\sigma$  ist, eine Pseudobasis bestimmt werden.

Dieses algorithmische Problem kann für  $\mathfrak{D}$ -Untermoduln von  $E^N$  mit einem gängigen Computeralgebrasystem wie MAGMA bewerkstelligt werden. Da eine Basis von  $L$  zunächst jedoch aus Vektoren aus  $V$  besteht, ist also explizit ein  $E$ -linearer Isomorphismus  $\varphi : V \rightarrow E^N$  zu konstruieren.

Dazu ist zunächst eine  $\mathbb{Q}$ -Basis  $\mathcal{B} = \{v_{11}, \dots, v_{1\varphi(m)}, \dots, v_{N1}, \dots, v_{N\varphi(m)}\}$  von  $V$  derart zu wählen, dass die Darstellungsmatrix  $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma)$  von  $\sigma$  bezüglich der Basis  $\mathcal{B}$  in Frobenius-Normalform ist, d.h. die Matrix die folgende Blockgestalt besitzt

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\sigma) = \bigoplus_{i=1}^N \begin{pmatrix} & & & -a_0 \\ & & & -a_1 \\ & & & \vdots \\ & & & 1 \\ & & & -a_{\varphi(m)-1} \end{pmatrix},$$

wobei  $X^{\varphi(m)} + a_{\varphi(m)-1}X^{\varphi(m)-1} + \dots + a_1X + a_0 = \Phi_m$  gilt (da es sich bei der Frobenius-Normalform um eine rationale Normalform handelt, ist die Basis  $\mathcal{B}$  im Allgemeinen keine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $L$ ). Aus dieser Basis  $\mathcal{B}$  lässt sich mit  $v_{11}, v_{21}, \dots, v_{N1}$  leicht eine  $E$ -Basis von  $V$  auswählen, denn wegen  $v_{ij} = \zeta^{j-1} \cdot v_{i1}$  für  $i \in \{1, \dots, N\}$  und  $j \in \{1, \dots, \varphi(m)\}$  ist diese Menge ein  $N$ -elementiges  $E$ -Erzeugendensystem von  $V$ . Der gesuchte Isomorphismus  $\varphi : V \rightarrow E^N$  ergibt sich dann durch  $E$ -lineare Fortsetzung von

$$v_{11} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_{21} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_{N1} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ist  $y_1, \dots, y_n$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $L$ , so kann zu dem  $\mathfrak{D}$ -Modul  $\mathfrak{D}\varphi(y_1) + \dots + \mathfrak{D}\varphi(y_n) \subseteq E^N$  eine Pseudobasis  $\mathfrak{A}_1 \tilde{x}_1 + \dots + \mathfrak{A}_N \tilde{x}_N$  bestimmt werden. Setzt man  $x_i := \varphi^{-1}(\tilde{x}_i)$  für  $i = 1, \dots, N$ , so gilt

$$L_\sigma = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N.$$

Eine Gram-Matrix in dieser Basis  $x_1, \dots, x_N$  ist dann leicht über die Formel (54) berechenbar.  $\blacksquare$

**3.6.2. Der Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ .** Sei weiterhin  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\zeta_m]$ . Zusätzlich gelte nun für diesen Abschnitt die Bedingung  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$ . Ist  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N$ , welches mittels Spurkonstruktion ein  $n$ -dimensionales gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  ergibt, so gilt nach Korollar 3.1.10 bereits  $nL \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$ . Die Bedingung  $nL \subseteq \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  in Satz 3.3.10 ist also redundant und ein solches  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$  besitzt an der Stelle  $\mathfrak{q} \in \Omega_F$  die Darstellung:

$$(55) \quad L_{\mathfrak{q}} \cong \begin{cases} \mathbb{H}(2-p) \perp \dots \perp \mathbb{H}(2-p) & \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle & \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \nmid \ell \\ \langle 1, \dots, 1, \underbrace{\ell, \dots, \ell}_{k_{\mathfrak{q}}\text{-mal}} \rangle & \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{q} \mid \ell, \end{cases}$$

wobei  $k_{\mathfrak{q}} = \nu_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{v}L)$  ist und die Bedingung  $\prod_{\mathfrak{q} \mid \ell} \mathfrak{N}(\mathfrak{q}^{k_{\mathfrak{q}}}\mathfrak{D}) = \ell^{N[F:\mathbb{Q}]}$  erfüllt sein muss. Gemäß Korollar 3.3.11 erhält man eine 1:1-Korrespondenz zwischen den möglichen Geschlechtern von  $L$  wie in (55) und

$\mathfrak{o}$ -Idealen  $\mathfrak{a} = \prod_{q|\ell} \mathfrak{q}^{k_q}$  mit  $k_q \leq N$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{D}) = \ell^{N[F:\mathbb{Q}]}$ . Anders als im Fall imaginär-quadratischer Zahlkörper kann es also mehr als ein solches Geschlecht geben, nämlich genau dann, wenn das Ideal  $\ell\mathfrak{o}$  in der Erweiterung  $F/\mathbb{Q}$  zerlegt ist. Dies soll anhand des folgenden Beispiels erläutert werden.

BEISPIEL 3.6.3. Sei  $L$  das eindeutig bestimmte extremale Gitter im Geschlecht  $\Pi_8(11^{+4})$  (vgl. [LatDB] „8QF.8.a“). Die Automorphismengruppe  $O(L)$  dieses Gitters besitzt  $2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$  Elemente. In dieser gibt es drei Konjugationsklassen mit Minimalpolynom  $\Phi_5$ . Gemäß Prop. 3.6.1 gibt es also drei hermitesche Strukturen von  $L$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ . Mit Hilfe von Bemerkung 3.6.2 lassen sich diese explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} L_1 &\cong \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -\zeta_5^3 - \zeta_5^2 + 7 & 2\zeta_5^3 - 2\zeta_5^2 + \zeta_5 + 4 \\ -3\zeta_5^3 + \zeta_5^2 - \zeta_5 + 3 & -\zeta_5^3 - \zeta_5^2 + 7 \end{pmatrix} \\ L_2 &\cong \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + 8 & 4\zeta_5^3 - \zeta_5^2 + 2\zeta_5 + 5 \\ -3\zeta_5^3 + 2\zeta_5^2 - 2\zeta_5 + 3 & \zeta_5^3 + \zeta_5^2 + 8 \end{pmatrix} \\ L_3 &\cong \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3\zeta_5^3 - 3\zeta_5^2 + 6 & \zeta_5^3 + 2\zeta_5^2 - 3 \\ 2\zeta_5^3 + \zeta_5^2 - 3 & 3\zeta_5^3 + 3\zeta_5^2 + 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In dem Körper  $F = \mathbb{Q}(\zeta_5 + \bar{\zeta}_5) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$  gilt  $11\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$ . Man rechnet leicht nach, dass gilt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{s}L_1 &= \mathfrak{l}_1\mathfrak{D}_E^{-1} & \mathfrak{n}L_1 &= \mathfrak{l}_1\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D} & \mathfrak{v}L_1 &= \mathfrak{l}_1^2\mathfrak{D}_E^{-1} \\ \mathfrak{s}L_2 &= \mathfrak{l}_2\mathfrak{D}_E^{-1} & \mathfrak{n}L_2 &= \mathfrak{l}_2\mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D} & \mathfrak{v}L_2 &= \mathfrak{l}_2^2\mathfrak{D}_E^{-1} \\ \mathfrak{s}L_3 &= \mathfrak{D}_E^{-1} & \mathfrak{n}L_3 &= \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D} & \mathfrak{v}L_3 &= 11\mathfrak{D}_E^{-1} \end{aligned}$$

Folglich ist  $L_1$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_1^2)$ ,  $L_2$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_2^2)$  und  $L_3$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(11)$ .  $\blacksquare$

Ähnlich wie in Abschnitt 3.5.1 soll auch hier zumindest für den  $p$ -ten Kreisteilungskörper und das Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  eine notwendige und hinreichende Bedingung an den Rang  $N$  für die Existenz eines Gitters in diesem Geschlecht hergeleitet werden.

Klar ist, dass  $N$  gerade sein muss, denn für den  $p$ -ten Kreisteilungskörper ist das Ideal  $\mathfrak{p}$  verzweigt in der Erweiterung  $E/F$ , d.h.  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}\bar{\mathfrak{P}}$ . Ähnlich wie oben kann in Dimension  $N \equiv_4 0$  stets ein solches Gitter angegeben werden:

Wie jede ganze Zahl ist auch  $-\ell$  die Summe zweier Quadrate modulo  $p$ , also gibt es  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $-\ell \equiv_p a^2 + b^2$ . Es folgt  $\ell + a^2 + b^2 \in p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{p} = (1 - \zeta)(1 - \bar{\zeta})\mathfrak{o}$ . Folglich gibt es ein  $\lambda \in \mathfrak{o}$  mit  $\ell + a^2 + b^2 = \lambda(1 - \zeta)(1 - \bar{\zeta})$ . Als Quotient zweier total positiver Zahlen gilt  $\lambda \gg 0$ . Weiter sei

$$(56) \quad G := \frac{1}{\delta\bar{\delta}} \begin{pmatrix} I & S \\ \bar{S}^t & \lambda I \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}^{4 \times 4}$$

mit den Matrizen  $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  und  $S := \frac{1}{1-\zeta} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$  sowie  $\delta := (1 - \zeta_p)^{\frac{p-3}{2}}$ . Für die Determinante von  $G$  gilt dann

$$\begin{aligned} \det(G) &= \frac{1}{(\delta\bar{\delta})^4} \det(\lambda I - S\bar{S}^t) = \frac{(\lambda(1 - \zeta)(1 - \bar{\zeta}) - a^2 - b^2)^2}{((\delta\bar{\delta})^2(1 - \zeta)(1 - \bar{\zeta}))^2} \\ &= \left( \frac{\ell}{((1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p))^{p-2}} \right)^2. \end{aligned}$$

Dann sind die Hauptminoren der Matrix  $G$  gleich  $N_F^E(\delta)^{-1}$ ,  $N_F^E(\delta)^{-1}$ ,  $\ell N_F^E(1 - \zeta)^{-1}$ ,  $\det(G)$  und damit jeweils total positiv. Demnach ist die hermitesche Form auf  $V = Ex_1 + \dots + Ex_4$  gegeben durch die Matrix  $G$  bezüglich der Basis  $x_1, \dots, x_4$  total positiv definit.

Sei nun  $L := \mathfrak{D}x_1 + \dots + \mathfrak{D}x_4$ . Mit Hilfe von Lemma 3.1.1 rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}L = \mathfrak{P}^{2-p} = \mathfrak{D}_E^{-1}$  und  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{P}^{3-p} = \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  sowie  $\mathfrak{v}L = \det(G)\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-4} \cdot \ell^2\mathfrak{D}$  gilt. Weiter ist  $L^* = \mathfrak{D}y_1 + \dots + \mathfrak{D}y_4$

für die duale Basis  $y_1, \dots, y_4$  von  $x_1, \dots, x_4$  und in dieser Basis ist die Gram-Matrix gegeben durch

$$G^{-1} = \frac{((1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p))^{p-2}}{\ell \delta \bar{\delta}} \begin{pmatrix} \lambda I & -S \\ -\bar{S}^t & I \end{pmatrix}.$$

Damit rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}(L^*) = \frac{1}{\ell} \mathfrak{D}_E$  gilt. Nach Prop. 3.3.9 ist das Spurgitter von  $L$  ein  $4[E : \mathbb{Q}]$ -dimensionales gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{4[F:\mathbb{Q}]}$  und nach Satz 3.3.10 ist somit  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_4^E(\ell^2)$ .

Durch Bilden orthogonaler Summen erhält man:

**SATZ 3.6.4.** *Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  der  $p$ -te Kreisteilungskörper und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $\text{ggT}(\ell, p) = 1$ . Dann existiert das Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für  $N \equiv_4 0$  in dem Sinne, dass dieses stets ein Gitter enthält. Des Weiteren enthält das Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  sogar stets ein freies Gitter.  $\square$*

Genau wie in Abschnitt 3.5.1 wird auch hier die Hasse-Invariante des zugrunde liegenden Raumes benutzt, um eine notwendige Bedingung im Fall  $N \equiv_4 2$  an  $\ell$  herzuleiten. Hierfür werden Ergebnisse aus der Arbeit [Neb99] angewendet.

Für spätere Zwecke sei bemerkt, dass es im folgenden Lemma keine weiteren als die dort genannten Voraussetzungen an  $L$  gibt. Insbesondere muss nicht notwendig  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  gelten.

**LEMMA 3.6.5.** *Sei  $L$  ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  vom Rang  $N$  auf dem hermiteschen Raum  $(V, h)$ . Dann erhält man als Hasse-Invariante des Spurgitters von  $L$  an der Stelle  $q \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ :*

$$s_q(L) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{N+1}{2}} & \text{falls } q = 2 \\ (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{N+1}{2}} \cdot \prod_{v \text{ prim}} (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}} & \text{falls } q = p \\ (-1)^{\frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}} & \text{sonst} \end{cases}$$

**BEWEIS.** Sei  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  ein solches Gitter mit Steinitzklasse  $[\mathfrak{A}] = [\mathfrak{A}_1 \dots \mathfrak{A}_N]$  und abkürzend sei  $\alpha := \det(x_1, \dots, x_N)$ . Nach [Sch85] 1.6 iv) sind die Dimension und die Determinante bereits ein vollständiges Invariantensystem für einen (total positiv definiten) hermiteschen Raum, d.h. es gilt

$$(V, h) \cong \langle 1, \dots, 1, \alpha \rangle.$$

Mit den Notationen aus [Neb99] gilt also  $(V, b_h) \cong \varphi_1 \perp \dots \perp \varphi_1 \perp \varphi_\alpha$ , wobei  $b_h = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E \circ h$ . Nach [Neb99] Satz 3.3.8 (c) bzw. (d) gilt  $s_p(\varphi_1) = (-1, p)_p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  für die Stelle  $p$  bzw.  $s_q(\varphi_1) = 1$  für alle Stellen  $q \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ . Mit der Formel zur Berechnung der Hasse-Invariante für orthogonale Summen (vgl. [Ger08] Prop. 4.18.) erhält man daraus wegen  $d(\varphi_1) = d(\varphi_\alpha) = p\mathbb{Q}^{*2}$  und  $(p, p)_p = (-1, p)_p = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$  induktiv für jede Stelle  $q \in \Omega_{\mathbb{Q}} \setminus \{2\}$ :

$$(57) \quad s_q(L) = s_q(\varphi_1)^{N-1} \cdot (p, p)_q^{\binom{N}{2}} \cdot s_q(\varphi_\alpha) = \begin{cases} (-1)^{\frac{p-1}{2} \left( \binom{N}{2} + N - 1 \right)} \cdot s_p(\varphi_\alpha) & q = p \\ s_q(\varphi_\alpha) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es verbleibt also die Berechnung von  $s_q(\varphi_\alpha)$ . Die beiden Fälle  $q = p$  und  $q \in \Omega_{\mathbb{Q}} \setminus \{2, p\}$  sind hier gesondert zu betrachten.

Sei zunächst  $q \in \Omega_{\mathbb{Q}} \setminus \{2, p\}$  und  $\alpha(\mathbb{Z}_q \otimes \mathfrak{D}) = \prod_{i=1}^r \mathfrak{Q}_i^{\varepsilon_i}$  die Primidealzerlegung von  $\alpha\mathfrak{D}$  über dem Ring  $\mathbb{Z}_q \otimes \mathfrak{D}$ . In dieser Zerlegung treten die Vervollständigungen aller über  $q$  gelegenen Primideale  $\mathfrak{Q}_i$  aus der Zerlegung des Ideals  $\alpha\mathfrak{D}$  auf. Nach [Neb99] Satz 3.3.14.(iv) gilt dann

$$(58) \quad s_q(\varphi_\alpha) = (p, q)_q^{f(q) \cdot \sum_{i=1}^r \varepsilon_i} \cdot (-1)^{\sum_{i=1}^r \varepsilon_i}.$$

Die entscheidende Beobachtung ist, dass die Berechnung der Hasse-Invariante  $s_q(\varphi_\alpha)$  gemäß (58) nur von der Parität der Zahl  $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i$  abhängt. Diese Parität kann, wie jetzt gezeigt wird, nur mit Hilfe der Determinante  $\det(L)$  bestimmt werden.

Aufgrund von Prop. 3.1.4 ist  $\det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$  und wegen  $q \nmid |d_E| = p^{p-2}$  ist  $\nu_q(\det(L)) = \nu_q(\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L))$ . Da jedes Primideal  $\mathfrak{Q}$  über  $q$  die Norm  $q^{f(q)}$  besitzt, kann man daraus folgern, dass exakt  $\frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}$  solcher Primideale (ggf. mit Vielfachheit gezählt) in der Zerlegung von  $\mathfrak{v}L$  vorkommen. Nach Definition gilt  $\mathfrak{v}L = \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}} \cdot \alpha$ , umgestellt also  $\alpha\mathfrak{D} = \mathfrak{v}L \cdot (\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}})^{-1}$ . Ist nun  $\mathfrak{Q}_i$  ein Teiler von  $\mathfrak{A}$ , so ist  $\bar{\mathfrak{Q}}_i$  ein Teiler von  $\bar{\mathfrak{A}}$ . Im Fall  $\mathfrak{Q}_i = \bar{\mathfrak{Q}}_i$  unterscheiden sich also die Exponenten von  $\mathfrak{Q}_i$  in den Zerlegungen von  $\mathfrak{v}L$  und  $\alpha\mathfrak{D}$  um 2, wohingegen sich im Fall  $\mathfrak{Q}_i \neq \bar{\mathfrak{Q}}_i$  die Exponenten von  $\mathfrak{Q}_i$  und  $\bar{\mathfrak{Q}}_i$  jeweils um 1 unterscheiden. Die Parität der Zahl  $\sum_{i=1}^r \varepsilon_i$  ist also gleich der Parität von  $\frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}$ . Zusammen mit  $\nu_q(\det(L)) \equiv_2 0$  folgt aus (57) und (58) dann

$$s_q(L) = s_q(\varphi_\alpha) = (p, q)_p^{f(q) \cdot \frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}} (-1)^{\frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}} = (-1)^{\frac{\nu_q(\det(L))}{f(q)}}.$$

Nun soll die Stelle  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  betrachtet werden. Durch Multiplizieren von  $\alpha$  mit geeigneten Potenzen des Elements  $\pi := (1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p) \in F$  der Norm  $N_{\mathbb{Q}}^F(\pi) = p$  kann erreicht werden, dass  $\nu_p(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha)) = 0$  gilt. Nach [Neb99] Lemma 3.3.11. ist dann  $N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha) \equiv_p \pm 1$ . Ist  $\varepsilon \in \{\pm 1\}$  mit  $N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha) \equiv_p \varepsilon$ , so gilt nach [Neb99] Satz 3.3.14 (iii):

$$(59) \quad s_p(\varphi_\alpha) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \varepsilon$$

Zur Berechnung von  $s_p(\varphi_\alpha)$  ist somit das genaue Vorzeichen zu bestimmen. Sei dazu  $v$  eine Primzahl mit  $v \neq p$ . Wegen  $|d_E| = p^{p-2}$  ist hier  $\nu_v(\det(L)) = \nu_v(|d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{A})^2 N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha)^2) = 0 + 2\nu_v(\mathfrak{N}(\mathfrak{A})) + 2\nu_v(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha))$  und deswegen gilt  $\frac{\nu_v(\det(L))}{2} = \nu_v(\mathfrak{N}(\mathfrak{A})) + \nu_v(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha))$ . Jeder über  $v$  gelegene Primteiler von  $\mathfrak{A}$  besitzt die Norm  $v^{f(v)}$ , daher ist  $\nu_v(\mathfrak{N}(\mathfrak{A}))$  durch  $f(v)$  teilbar, etwa  $\nu_v(\mathfrak{N}(\mathfrak{A})) = \lambda \cdot f(v)$ . Nach [Neu92] I (10.3) ist  $f(v)$  gerade die Ordnung von  $v$  in  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ , d.h. es ist  $v^{f(v)} \equiv_p 1$ . Damit erhält man

$$v^{\nu_v(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha))} = v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2} + \nu_v(\mathfrak{N}(\mathfrak{A}))} = v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}} \cdot v^{\lambda \cdot f(v)} \equiv_p v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}}.$$

Ist nun  $f(v)$  gerade, so ist  $v^{\frac{f(v)}{2}} \equiv_p -1$  und damit gilt in diesem Fall

$$(60) \quad v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}} = (v^{\frac{f(v)}{2}})^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}} \equiv_p (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}.$$

Ist hingegen  $f(v)$  ungerade, so ist  $\nu_v(\det(L))$  wegen  $\nu_v(\det(L)) \equiv_2 0$  sogar durch  $2f(v)$  teilbar und folglich gilt hier ebenfalls

$$(61) \quad v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}} = (v^{f(v)})^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2f(v)}} \equiv_p 1 = (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}.$$

Somit gilt in jedem Fall also  $v^{\nu_v(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha))} \equiv_p v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}} \equiv_p (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}$ . Da  $\alpha$  als Determinante des total positiv definiten Raumes  $(V, h)$  total positiv ist, ist auch  $N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha) > 0$  und man erhält insgesamt

$$N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha) = \prod_{v \text{ prim}} v^{\nu_v(N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha))} \equiv_p \prod_{v \text{ prim}} (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}.$$

Nach (59) ist  $s_p(\varphi_\alpha) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot (N_{\mathbb{Q}}^F(\alpha) \bmod p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \cdot \prod_{v \text{ prim}} (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}$ . Einsetzen in die Formel (57) ergibt

$$s_p(L) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{N+1}{2}} \cdot \prod_{v \text{ prim}} (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}}.$$

Die Formel für die Stelle  $q = 2$  ergibt sich jetzt aus der Produktformel für die lokalen Hasse-Invarianten. □

Daraus ergibt sich die folgende notwendige Bedingung:

PROPOSITION 3.6.6. Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  für eine Primzahl  $p > 2$  und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $p \nmid \ell$ . Gibt es ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$  über dem Körper  $E$  für  $N \equiv_4 2$  und  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{D}) = \ell^{n/2}$  mit  $n := N(p-1)$ , so gilt notwendig

$$\left(\frac{-\ell}{p}\right) = 1.$$

BEWEIS. Sei  $v$  ein Primteiler von  $\ell$ . Wegen  $\text{ggT}(\ell, p) = 1$  ist also  $v \neq p$ . Wie im Beweis zu Lemma 3.6.5 gesehen (vgl. Formeln (60) bzw. (61)), ist einerseits

$$(62) \quad (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}} \equiv_p v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}}.$$

Da  $\nu_v(\det(L)) = \nu_v(N(\mathfrak{a}\mathfrak{D})) = \frac{n}{2} = \frac{N}{2} \cdot (p-1)$  ist und  $\frac{N}{2}$  wegen der Voraussetzung  $N \equiv_4 2$  ungerade ist, erhält man andererseits nach dem Satz von Euler auch

$$(63) \quad v^{\frac{\nu_v(\det(L))}{2}} = (v^{\frac{p-1}{2}})^{\frac{N}{2}} \equiv_p \left(\frac{v}{p}\right)^{\frac{N}{2}} = \left(\frac{v}{p}\right).$$

Zusammengenommen folgt aus (62) und (63) also wegen  $p \neq 2$  sogar die Gleichheit

$$(64) \quad (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}} = \left(\frac{v}{p}\right).$$

Weiter ist wiederum aufgrund der Voraussetzung  $N \equiv_4 2$  die Zahl  $\binom{N+1}{2}$  ungerade, womit also gilt

$$(65) \quad (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{N+1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \left(\frac{-1}{p}\right).$$

Da ein  $\ell$ -elementares Gitter an der Stelle  $p$  unimodular ist, muss notwendig  $s_p(L) = 1$  gelten. Zusammen mit (64) und (65) folgt also aus Lemma 3.6.5:

$$1 = s_p(L) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{N+1}{2}} \cdot \prod_{v \text{ prim}} (-1)^{\frac{\nu_v(\det(L))}{f(v)}} = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \prod_{v|\ell} \left(\frac{v}{p}\right) = \left(\frac{-\ell}{p}\right)$$

□

Auch hier soll nun für den Körper  $E := \mathbb{Q}(\zeta_p)$  ein Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\ell)$  konstruiert werden, falls die notwendige Bedingung  $\left(\frac{-\ell}{p}\right) = 1$  erfüllt ist. Sei also  $-\ell$  ein Quadrat modulo  $p$ , etwa  $-\ell \equiv_p a^2$  für ein  $a \in \mathbb{Z}$ . Also gilt  $\ell + a^2 \in p\mathbb{Z} \subseteq \mathfrak{p} = (1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p)\mathfrak{o}$ . Folglich gibt es ein  $\lambda \in \mathfrak{o}$  mit  $\ell + a^2 = \lambda \cdot (1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p)$ . Da sowohl  $\ell + a^2$  als auch  $(1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p) = N_F^E(1 - \zeta_p)$  total positiv sind, ist auch  $\lambda$  total positiv.

Sei  $G$  die Matrix

$$G := \frac{1}{\delta\bar{\delta}} \begin{pmatrix} 1 & s \\ \bar{s} & \lambda \end{pmatrix},$$

wobei hier  $s := \frac{a}{1-\zeta_p}$  und  $\delta := (1 - \zeta_p)^{\frac{p-3}{2}}$  ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} \det(G) &= \frac{1}{(\delta\bar{\delta})^2} \left( \lambda - \frac{a^2}{(1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p)} \right) = \frac{\lambda \cdot (1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p) - a^2}{(\delta\bar{\delta})^2(1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p)} \\ &= \frac{\ell}{((1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p))^{p-2}}. \end{aligned}$$

Die Hauptminoren von  $G$  sind 1 und  $\det(G)$  und damit sind diese total positiv. Demnach ist die hermitesche Form auf  $V = Ex_1 + Ex_2$  gegeben durch die Matrix  $G$  bezüglich der Basis  $x_1, x_2$  total positiv definit.

Sei nun  $L := \mathfrak{D}x_1 + \mathfrak{D}x_2$ . Mit Hilfe von Lemma 3.1.1 rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}L = \mathfrak{P}^{2-p} = \mathfrak{D}_E^{-1}$  und  $\mathfrak{n}L = \mathfrak{P}^{3-p} = \mathfrak{D}_F^{-1}\mathfrak{D}$  sowie  $\mathfrak{v}L = \det(G)\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_E^{-2}\ell\mathfrak{D}$  gilt. Weiter ist  $L^* = \mathfrak{D}y_1 + \mathfrak{D}y_2$  für die duale

Basis  $y_1, y_2$  von  $x_1, x_2$  und in dieser Basis ist die Gram-Matrix gegeben durch

$$G^{-1} = \frac{((1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p))^{p-2}}{\ell\delta\bar{\delta}} \begin{pmatrix} \lambda & -s \\ -\bar{s} & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit rechnet man leicht nach, dass  $\mathfrak{s}(L^*) = \frac{1}{\ell}\mathfrak{D}_E$  gilt. Nach Prop. 3.3.9 ist das Spurgitter von  $L$  ein  $2[E : \mathbb{Q}]$ -dimensionales gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{2[F:\mathbb{Q}]}$  und nach Satz 3.3.10 ist somit  $L$  ein Gitter in dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\ell)$ .

Damit ist bewiesen:

**SATZ 3.6.7.** *Sei  $E = \mathbb{Q}(\zeta_p)$  mit  $p > 2$  Primzahl und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei. Ist  $N \equiv_4 2$ , so gibt es ein Gitter im Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  genau dann, wenn  $\left(\frac{-\ell}{p}\right) = 1$ .  $\square$*

Bildet man die Spurgitter dieser konstruierten  $\mathfrak{D}$ -Gitter, so erhält man zusammen mit der notwendigen Bedingung aus Prop. 3.6.6 folgende Aussage für  $\mathbb{Z}$ -Gitter:

**SATZ 3.6.8.** *Seien  $p > 2$  Primzahl und  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei mit  $p \nmid \ell$ . Es gibt genau dann ein gerades Gitter  $L$  der Dimension  $n = N(p-1)$ , Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  mit einem Automorphismus mit Minimalpolynom  $\Phi_p$ , wenn gilt*

- a)  $N \equiv_4 0$  oder
- b)  $N \equiv_4 2$  und  $\left(\frac{-\ell}{p}\right) = 1$ .

$\square$

Es sollen nun für Kreisteilungskörper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  für kleine  $m$  und die Quebbemannschen Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  unter der Bedingung  $\text{ggT}(\ell, d_E) = 1$  die Geschlechter  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$  für kleine Dimensionen  $N$ , sofern diese Geschlechter existieren, klassifiziert werden. Die für die Berechnung der Maße dieser Geschlechter notwendigen Standardmaße für kleine Dimensionen und einige Kreisteilungskörper sind in Tabelle 3.6 zusammengefasst.

$N \setminus E$	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	$\mathbb{Q}(\zeta_9)$	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$
2	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{1176}$	$\frac{1}{648}$	$\frac{1}{1800}$	$\frac{1}{480}$
3	$\frac{1}{6000}$	$\frac{1}{10368}$	$\frac{1}{2058}$	$\frac{13}{34992}$	$\frac{1}{10125}$	$\frac{1}{640}$
4	$\frac{1}{720000}$	$\frac{23}{2488320}$	$\frac{79}{1728720}$	$\frac{2587}{12597120}$	$\frac{1261}{1215000}$	$\frac{3793}{30720}$
5	$\frac{293}{36000000}$	$\frac{23}{5971968}$	$\frac{130429}{1512630}$	$\frac{18628987}{226748160}$	$\approx 2.01$	$\approx 3185.4$
6	$\frac{19631}{45360000000}$	$\frac{38663}{3009871872}$	$\approx 2.53$	$\approx 38.30$	$> 10^6$	$> 6 \cdot 10^{28}$
$N \setminus E$	$\mathbb{Q}(\zeta_{11})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{21})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{13})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{17})$	$\mathbb{Q}(\zeta_{19})$
2	$\frac{5}{2904}$	$\frac{1}{504}$	$\frac{13}{1176}$	$\frac{19}{4056}$	$\frac{73}{867}$	$\frac{1461}{2888}$
3	$\frac{6505}{21296}$	$\frac{43}{567}$	$\approx 3.64$	$\approx 32.93$	$> 3 \cdot 10^6$	$> 2 \cdot 10^9$
4	$\approx 196.19$	$> 10^4$	$> 10^7$	$> 6 \cdot 10^6$	$> 5 \cdot 10^{66}$	$> 7 \cdot 10^{83}$

TABELLE 3.6. Die Standardmaße  $\text{std}_N^E$  für Kreisteilungskörper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  sortiert nach Körpergrad bzw. Diskriminante. Für die Fälle  $m = 3, 4$  siehe Tab. 3.4.

In [Que92] werden alle 32-dimensionalen geraden unimodularen Gitter mit einer Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_{68})$  (bzw. Gitter mit einem irreduziblen Automorphismus der Ordnung  $4 \cdot 17$ ) bestimmt

und gezeigt, dass es neben einem Gitter mit Minimum 2 genau drei extremale solche Gitter gibt. Etwas allgemeiner gilt:

**SATZ 3.6.9.** *Es gibt genau vier extremale gerade unimodulare Gitter in Dimension 32 mit einer Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$ .*

**BEWEIS.** Das Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E$  über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$  besitzt das Maß  $\frac{73}{867}$ . Die Klassifikation dieses Geschlechts ergibt genau sieben Gitter:  $L_{1a}, L_{1b}, L_2, L_3, L_{4a}, L_{4b}$  und  $L_5$ . Abgesehen von dem Gitter  $L_5$  führen alle übrigen zu extremalen unimodularen Gittern in Dimension 32.

$i$	$ U(L_i) $	$ O(L_i) $	$\min(L_i)$
1a	2.17	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 17$	4
1b	2.17		4
2	$2^2 \cdot 17$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 17$	4
3	$2^2 \cdot 3 \cdot 17$	$2^7 \cdot 3^3 \cdot 17$	4
4a	$2^3 \cdot 3 \cdot 17$	$2^{31} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 17 \cdot 31$	4
4b	$2^3 \cdot 3 \cdot 17$		4
5	$2^2 \cdot 17^2$	$2^{32} \cdot 3^{12} \cdot 5^6 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2$	2

Die Gitter 1a und 1b sowie 4a und 4b besitzen jeweils über  $\mathbb{Z}$  isometrische Spurgitter. Somit erhält man also exakt vier extremale unimodulare Gitter in Dimension 32 mit einer Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$ .  $\square$

Wie in Bsp. 3.2.11 gesehen, besitzen die drei extremalen Gitter  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$  eine Struktur als Ideal-Gitter über den Körpern  $\mathbb{Q}(\zeta_{51})$  und  $\mathbb{Q}(\zeta_{68})$ . Wegen  $\mathbb{Q}(\zeta_{17}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{51})$  bzw.  $\mathbb{Q}(\zeta_{17}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_{68})$  ist damit klar, dass diese drei extremalen Gitter ebenfalls eine Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$  besitzen. Der interessante Teil der Aussage in dem folgenden Satz ist daher, dass es außer den drei genannten keine weiteren extremalen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einer solchen Struktur gibt.

**SATZ 3.6.10.** *Es gibt genau drei extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$ , nämlich die Gitter  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$ .*

**BEWEIS.** Es ist  $2\mathfrak{o} = \mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2$ . Folglich gibt es also mit  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_1^2)$ ,  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_2^2)$  und  $\mathfrak{G}_2^E(2\mathfrak{o})$  drei Geschlechter. Das Hauptgeschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(2\mathfrak{o})$  enthält kein extremales Gitter. Das Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_1^2)$  entsteht aus dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E$  durch Skalieren mit einem total positiven Erzeuger  $\eta_1$  des Ideals  $\mathfrak{l}_1$ . Man erhält die folgenden sieben Gitter:

$i$	$ U({}^{\eta_1}L_i) $	$ O({}^{\eta_1}L_i) $	$\min({}^{\eta_1}L_i)$
1a	2.17	$2^4 \cdot 17$	4
1b	2.17	$2^4 \cdot 17$	4
2	$2^2 \cdot 17$	$2^5 \cdot 17$	4
3	$2^2 \cdot 3 \cdot 17$	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 17$	6
4a	$2^3 \cdot 3 \cdot 17$	$2^{14} \cdot 3 \cdot 17$	6
4b	$2^3 \cdot 3 \cdot 17$	$2^{14} \cdot 3 \cdot 17$	6
5	$2^2 \cdot 17^2$	$2^8 \cdot 17^2$	4

Das Gitter  ${}^{\eta_1}L_3$  ist isometrisch zu dem Gitter  $CQ_{32}$ . Das Gitter  ${}^{\eta_1}L_{4a}$  ist isometrisch zu  $MW_{32}$ , wohingegen  ${}^{\eta_1}L_{4b}$  isometrisch zu dem reskalierten Dualgitter  $MW'_{32}$  von  $MW_{32}$  ist. Da  $MW'_{32} \not\cong MW_{32}$  gilt, sind diese Gitter insbesondere also nicht 2-modular.

Das Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E(\mathfrak{l}_2^2)$  erhält man völlig analog durch Skalieren der Gitter aus dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_2^E$  mit einem total positiven Erzeuger  $\eta_2$  des Ideals  $\mathfrak{l}_2$ . Auf diese Weise entstehen ebenfalls drei extreme Gitter, welche jedoch in der folgenden Weise ebenfalls zu den Gittern  $MW_{32}$ ,  $MW'_{32}$  und  $CQ_{32}$  isometrisch sind:

$$\begin{array}{ccccc}
 L_{4a} & \longrightarrow & MW_{32} & \longleftarrow & L_{4a} \\
 L_{4b} & \longrightarrow & MW'_{32} & \longleftarrow & L_{4b} \\
 L_3 & \xrightarrow{\eta_1} & CQ_{32} & \xleftarrow{\eta_2} & L_3
 \end{array}$$

□

Auf analoge Weise erhält man die folgenden Resultate:

SATZ 3.6.11. *Es gibt genau ein extremes Gitter im Geschlecht  $\Pi_{24}(3^{+12})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$ , nämlich das Gitter  $L_{24.2}$ .* □

SATZ 3.6.12. *Es gibt genau ein extremes Gitter im Geschlecht  $\Pi_{20}(7^{+10})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{11})$ , nämlich das Gitter  $L_{20}$ .* □

In der folgenden Tabelle ist  $\ell$  die Stufe der mittels Spurkonstruktion resultierenden  $\mathbb{Z}$ -Gitter,  $E$  der jeweilige Kreisteilungskörper und  $N$  der Rang der hermiteschen Gitter des jeweiligen Geschlechts, welches durch das Ideal  $\mathfrak{a}$  festgelegt wird. Für jedes dieser Geschlechter ist  $h$  die Klassenzahl,  $h_{\text{st.m}}$  die Anzahl der hermiteschen Gitter, welche stark modulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter liefern,  $h_2, \dots, h_{10}$  die Anzahl der hermiteschen Gitter, welche als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ein Minimum von  $2, \dots, 10$  besitzen, und  $h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$  die Anzahl der extremalen  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bis auf Isometrie), welche eine Struktur über dem Körper  $E$  besitzen.

$\ell$	$E$	$N$	$\mathfrak{a}$	Maß	$h$	$h_{\text{st.m}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
1	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$	1	(1)	1	-	-	-	-	$\Pi_8$	1
		4	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	1	(1)	1	-	-	-	-	$\Pi_{16}$	1
		6	$\mathfrak{o}$	$\frac{19631}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7}$	3	(3)	2	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
		8	$\mathfrak{o}$	$\frac{150020278679}{2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5^9 \cdot 7}$	18	(18)	9	9	-	-	-	$\Pi_{32}$	6
	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{2^5 \cdot 3^2}$	1	(1)	1	-	-	-	-	$\Pi_8$	1
		4	$\mathfrak{o}$	$\frac{23}{2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5}$	2	(2)	2	-	-	-	-	$\Pi_{16}$	1
		6	$\mathfrak{o}$	$\frac{38663}{2^{16} \cdot 3^8 \cdot 7}$	7	(7)	6	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	4	$\mathfrak{o}$	$\frac{79}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^4}$	2	(2)	1	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{480}$	2	(2)	2	-	-	-	-	$\Pi_{16}$	1
		3	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{640}$	5	(5)	4	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{21})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}$	1	(1)	0	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 7^2}$	2	(2)	1	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{13})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{19}{2^3 \cdot 3 \cdot 13^2}$	2	(2)	1	1	-	-	-	$\Pi_{24}$	1
	$\mathbb{Q}(\zeta_{17})$	2	$\mathfrak{o}$	$\frac{73}{3 \cdot 17^2}$	7	(7)	1	6	-	-	-	$\Pi_{32}$	4



$\ell$	$E$	$N$	$\mathfrak{a}$	Maß	$h$	$h_{\text{st.m}}$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$	
2	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	4	$2\mathfrak{o}$	$\frac{221}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	3	3	2	1	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	1	
	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	4	$2\mathfrak{o}$	$\frac{74971}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^4}$	17	15	3	14	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{-12})$	8	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	2	$2\mathfrak{o}$	$\frac{17}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$	2	2	1	1	-	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8})$	1	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{11})$	2	$2\mathfrak{o}$	$\frac{155}{2^3 \cdot 3 \cdot 11^2}$	3	3	1	2	-	-	-	$\Pi_{24}(2^{-12})$	2	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{17})$	2	$2\mathfrak{o}$	$\frac{5475}{17^2}$	648	648	1	647	0	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	0	
			$\mathfrak{l}_1^2$	$\frac{73}{3 \cdot 17^2}$	7	5	0	4	3	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	3	
			$\mathfrak{l}_2^2$	$\frac{73}{3 \cdot 17^2}$	7	5	0	4	3	-	-	$\Pi_{32}(2^{+16})$	3	
3	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	4	$3\mathfrak{o}$	$\frac{2993}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	6	6	3	3	-	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8})$	3	
	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	2	$3\mathfrak{o}$	$\frac{13}{2^2 \cdot 3 \cdot 7^2}$	2	2	1	1	-	-	-	$\Pi_{12}(3^{+6})$	1	
		4	$3\mathfrak{o}$	$\frac{4054201}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^4}$	439	305	13	423	3	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{20})$	2	$3\mathfrak{o}$	$\frac{41}{240}$	7	7	2	5	-	-	-	$\Pi_{16}(3^{+8})$	3	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{28})$	2	$3\mathfrak{o}$	$\frac{2197}{2 \cdot 3 \cdot 7^2}$	215	215	2	210	3	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1	
				$\mathfrak{l}_1^2$	$\frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 7^2}$	3	3	0	3	0	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0
				$\mathfrak{l}_2^2$	$\frac{13}{2^3 \cdot 3 \cdot 7^2}$	3	3	0	3	0	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0
	$\mathbb{Q}(\zeta_{13})$	2	$3\mathfrak{o}$	$\frac{1862}{3 \cdot 13^2}$	98	98	1	97	0	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	0	
				$\mathfrak{l}_1^2$	$\frac{19}{2^3 \cdot 3 \cdot 13^2}$	2	2	0	1	1	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1
			$\mathfrak{l}_2^2$	$\frac{73}{2^3 \cdot 3 \cdot 13^2}$	2	2	0	1	1	-	-	$\Pi_{24}(3^{+12})$	1	
5	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	2	$5\mathfrak{o}$	$\frac{31}{2 \cdot 3 \cdot 7^2}$	3	3	1	2	-	-	-	$\Pi_{12}(5^{-6})$	2	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{12})$	2	$5\mathfrak{o}$	$\frac{13}{2^4 \cdot 3^2}$	3	3	2	1	-	-	-	$\Pi_8(5^{+4})$	1	
		4	$5\mathfrak{o}$	$\frac{1562183}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5}$	111	97	25	85	1	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	1	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{24})$	2	$5\mathfrak{o}$	$\frac{169}{2^5 \cdot 3}$	49	49	3	44	2	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	1	
				$\mathfrak{l}_1^2$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3}$	2	2	0	2	0	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	0
			$\mathfrak{l}_2^2$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3}$	2	2	0	2	0	-	-	$\Pi_{16}(5^{+8})$	0	
6	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	2	$6\mathfrak{o}$	$\frac{1}{5^2}$	2	0	1	1	-	-	-	$\Pi_8(2^{-4}3^{-4})$	(0)	
		4	$6\mathfrak{o}$	$\frac{661453}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	60	32	8	46	6	-	-	$\Pi_{16}(2^{+8}3^{+8})$	4	
	$\mathbb{Q}(\zeta_7)$	2	$6\mathfrak{o}$	$\frac{39}{2^2 \cdot 7^2}$	5	4	1	4	-	-	-	$\Pi_{12}(2^{+6}3^{+6})$	2	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{11})$	2	$6\mathfrak{o}$	$\frac{9455}{2 \cdot 3 \cdot 11^2}$	289	5	1	132	156	-	-	$\Pi_{20}(2^{-10}3^{-10})$	3	
7	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	4	$7\mathfrak{o}$	$\frac{2825953}{2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	138	112	11	98	29	-	-	$\Pi_{16}(7^{+8})$	13	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	2	$7\mathfrak{o}$	$\frac{1201}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$	42	42	1	16	25	-	-	$\Pi_{16}(7^{+8})$	8	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{11})$	2	$7\mathfrak{o}$	$\frac{14005}{2^2 \cdot 11^2}$	638	638	1	154	482	1	-	$\Pi_{20}(7^{+10})$	1	
11	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	2	$11\mathfrak{o}$	$\frac{6}{5^2}$	4	4	1	2	1	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	1	
			$\mathfrak{l}_1^2$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$	1	1	0	0	1	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	1	
			$\mathfrak{l}_2^2$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$	1	1	0	0	1	-	-	$\Pi_8(11^{+4})$	1	
14	$\mathbb{Q}(\zeta_5)$	2	$14\mathfrak{o}$	$\frac{6}{5^2}$	4	0	1	2	1	-	-	$\Pi_8(2^{-4}7^{-4})$	(0)	
	$\mathbb{Q}(\zeta_{15})$	2	$14\mathfrak{o}$	$\frac{20417}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$	684	92	1	18	301	362	2	$\Pi_{16}(2^{+8}7^{+8})$	0	

TABELLE 3.7. Strukturen über Kreisteilungskörpern

BEMERKUNG 3.6.13. Eine Klassifikation der hermiteschen Strukturen von Gittern im Geschlecht  $\Pi_{36}(3^{+18})$  über  $E = \mathbb{Q}(\zeta_7)$  ist nicht möglich. Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_6^E(3^3)$  über  $\mathbb{Q}(\zeta_7)$  beträgt  $\approx 1.8 \cdot 10^{13}$ , sodass dieses Geschlecht sogar mehr als  $2.5 \cdot 10^{14}$  Gitter enthält.

Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_2^E(3)$  über dem Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{19})$  beträgt  $\approx 9956.8$ , sodass dieses Geschlecht circa 400.000 Gitter enthält. Eine Klassifikation könnte in diesem Fall gerade noch machbar sein, würde jedoch einiges an Rechenzeit und Speicherplatz in Anspruch nehmen. ■

Wie in Lemma 4.1.17 gezeigt werden wird, sind (mit Ausnahme des ersten) sämtliche Fourier-Koeffizienten der Thetareihe eines Gitters mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  durch  $p$  teilbar. Lässt sich die extremale Modulform als ganzzahlige Linearkombination von Thetareihen von Gittern mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  darstellen, so gilt dies auch für die extremale Modulform. Auf diese Weise erhält man:

PROPOSITION 3.6.14. *Die Fourier-Koeffizienten der extremalen Modulform  $f_{\mathcal{M}}$  in dem Raum  $\mathcal{M} := \mathcal{M}_{18}(\Gamma_*(3), \chi_{18})$  sind (mit Ausnahme des ersten) sowohl durch 7 als auch durch 19 teilbar.  $\square$*

**3.6.3. Einige Beispiele im Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) > 1$ .** Wie bereits in Abschnitt 3.5.3 gesehen, gibt es nicht nur ein Geschlecht hermitescher Gitter über  $\mathbb{Q}(\zeta_3) = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ , welches per Spurkonstruktion  $n$ -dimensionale gerade  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe 3 und Determinante  $3^{n/2}$  liefert.

Ebenso gibt es im Allgemeinen auch für den Körper  $E = \mathbb{Q}(\zeta_m)$  im Fall  $\text{ggT}(\ell, d_E) > 1$  mehrere mögliche solcher Geschlechter. Ein grundsätzlicher Unterschied besteht dabei zwischen den Fällen  $m = p^t$  für eine Primzahl  $p$  und einem zusammengesetzten  $m \in \mathbb{N}$  ( $m \not\equiv_4 2$ ), da die Erweiterung  $E/F$  im ersten Fall verzweigt und im zweiten unverzweigt ist.

Ist  $L$  ein hermitesches Gitter, welches per Spurkonstruktion ein  $n$ -dimensionales gerades  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  liefert, so folgt zunächst genau wie in Abschnitt 3.3.1

$$\ell \mathfrak{D}_E^{-1} L^* \subseteq L \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1} L^*.$$

Für alle Stellen  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$ , welche  $\ell$  nicht teilen, gilt nach wie vor, dass diese  $\mathfrak{D}_{E_{\mathfrak{p}}}^{-1}$ -modular (bzw. unimodular) sind und damit wie gesehen der Isometrietyp für solche feststeht. Ist  $\mathfrak{p} \in \Omega_F$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/F$  und gilt  $\mathfrak{p} \mid \ell$ , so legt allein der Typ der Jordan-Zerlegung den Isometrietyp fest (vgl. Prop. 3.3.1). Für in der Erweiterung  $E/F$  verzweigte Stellen kommt in einigen Fällen zusätzlich die Determinante als Invariante hinzu (vgl. Prop. 3.3.3). Dies soll anhand von drei Beispielen veranschaulicht werden.

BEISPIEL 3.6.15. (Strukturen von Gittern der Stufe  $\ell = 3$  über  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{21})$ )

In diesem Fall gilt  $3\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$  und  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ . Also legt allein die Stelle  $\mathfrak{p}$  das Geschlecht fest. Für diese gilt:

$$\mathfrak{P}L_{\mathfrak{p}}^* \subseteq L_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{P}^{-1}L_{\mathfrak{p}}^*$$

Also sind in einer Jordan-Zerlegung an der Stelle  $\mathfrak{p}$  mit einer  $\mathfrak{P}^{-1}$ -, einer  $\mathfrak{P}$ - und einer unimodularen nur drei Komponenten möglich. In kleinstmöglicher Dimension besitzen diese Komponenten die Gestalt:

$$\frac{\mathfrak{P}^{-1} \mid \mathfrak{D} \mid \mathfrak{P}}{\langle \pi^{-1} \rangle \mid \langle 1 \rangle \mid \langle \pi \rangle}$$

Die Dimension eines Spurgitters  $L$  ist  $n = N \cdot [E : \mathbb{Q}] = 12N$ . Ist also  $L$  ein Gitter mit  $\det(L) = 3^{n/2}$ , so gilt:

$$3^{6N} = \det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = 3^{6N} \cdot 7^{10N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$$

Folglich gilt  $\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{v}L) = 0$ . Unter dieser Nebenbedingung lassen sich die folgenden Geschlechter kombinieren:

$N$	$L_{\mathfrak{p}}$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
1	$\langle 1 \rangle$	$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}$	1	0	1	-	-	$\text{II}_{12}(3^{+6})$	1
2	$\langle 1, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}$	2	0	2	0	-	$\text{II}_{24}(3^{+12})$	0
	$\langle \pi^{-1}, \pi \rangle$	$\frac{39}{2^2 \cdot 7}$	59	0	53	6	-	$\text{II}_{24}(3^{+12})$	1
3	$\langle 1, 1, 1 \rangle$	$\frac{43}{3^4 \cdot 7}$	22	0	5	17	0	$\text{II}_{36}(3^{+18})$	0
	$\vdots$								

Das Gitter  $L_{24,2}$  besitzt genau sechs nicht isometrische Strukturen in dem durch  $\langle \pi^{-1}, \pi \rangle$  festgelegten Geschlecht, während kein extremales Gitter eine Struktur mit  $L_{\mathfrak{p}} \cong \langle 1, 1 \rangle$  besitzt. Gleiches gilt für das Geschlecht festgelegt durch  $\langle 1, 1, 1 \rangle$ . Das Maß des Geschlechts festgelegt durch  $\langle \pi^{-1}, 1, \pi \rangle$  lautet  $\frac{785954}{3 \cdot 7} \approx 37426.4$ . Somit ist eine Klassifikation dieses Geschlechts nicht ohne Weiteres möglich.

BEISPIEL 3.6.16. (Strukturen von Gittern der Stufe  $\ell = 2$  über  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{20})$ )

In diesem Fall gilt  $2\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$  und  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}$ . Also legt allein die Stelle  $\mathfrak{p}$  das Geschlecht fest. Für diese gilt:

$$L_{\mathfrak{p}}^* \subseteq L_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{P}^{-2}L_{\mathfrak{p}}^*$$

Also sind in einer Jordan-Zerlegung mit einer  $\mathfrak{P}^{-2}$ -,  $\mathfrak{P}^{-1}$ - und unimodularen nur drei Komponenten möglich. In kleinstmöglicher Dimension besitzen diese Komponenten die Gestalt:

$$\begin{array}{c|c|c} \mathfrak{P}^{-2} & \mathfrak{P}^{-1} & \mathfrak{D} \\ \hline \langle 2^{-1} \rangle & \langle \pi^{-1} \rangle & \langle 1 \rangle \end{array}$$

Die Dimension eines Spurgitters  $L$  ist  $n = N \cdot [E : \mathbb{Q}] = 8N$ . Ist  $L$  ein Gitter mit  $\det(L) = 2^{n/2}$ , so gilt:

$$2^{4N} = 2^{N \cdot [E : \mathbb{Q}]} = \det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = 2^{8N} \cdot 5^{6N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$$

Also muss gelten  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}L) = -N$ . Unter dieser Nebenbedingung lassen sich die folgenden Geschlechter kombinieren:

$N$	$L_{\mathfrak{p}}$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
2	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1} \rangle$	$\frac{1}{2^5 \cdot 3 \cdot 5}$	1	0	1	-	$\text{II}_{16}(2^{+8})$	1
	$\langle 2^{-1}, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^3 \cdot 5}$	3	2	1	-	$\text{II}_{16}(2^{+8})$	1
4	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, \pi^{-1}, \pi^{-1} \rangle$	$\frac{3793}{2^{11} \cdot 3 \cdot 5}$	20	0	19	1	$\text{II}_{32}(2^{+16})$	1
	$\vdots$							

Das dabei konstruierte extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  ist isometrisch zu dem Gitter  $Q_{32}$ . Dieses besitzt auch noch jeweils genau eine Struktur in den anderen beiden Geschlechtern festgelegt durch  $\langle 2^{-1}, \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1 \rangle$  bzw.  $\langle 2^{-1}, 2^{-1}, 1, 1 \rangle$ . Die Maße lauten  $\approx 1.4 \cdot 10^{12}$  und  $\approx 4.6 \cdot 10^{13}$ .

BEISPIEL 3.6.17. (Strukturen von Gittern der Stufe  $\ell = 5$  über  $E = \mathbb{Q}(\zeta_5)$ )

In diesem Fall gilt  $5\mathfrak{o} = \mathfrak{p}^2$  und  $\mathfrak{p}\mathfrak{D} = \mathfrak{P}^2$ . Also legt allein die Stelle  $\mathfrak{p}$  das Geschlecht fest. Für diese

gilt:

$$\mathfrak{P}L_{\mathfrak{p}}^* \subseteq L_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{P}^{-3}L_{\mathfrak{p}}^*$$

Somit sind in einer Jordan-Zerlegung an der Stelle  $\mathfrak{p}$  nur die folgenden fünf Komponenten möglich, welche in kleinstmöglicher Dimension die folgende Gestalt besitzen:

$\mathfrak{P}^{-3}$	$\mathfrak{P}^{-2}$	$\mathfrak{P}^{-1}$	$\mathfrak{O}$	$\mathfrak{P}$
$\mathbb{H}(-3)$	$\langle \pi^{-1} \rangle$ $\langle \Delta \pi^{-1} \rangle$	$\mathbb{H}(-1)$	$\langle 1 \rangle$ $\langle \Delta \rangle$	$\mathbb{H}(1)$

Die Dimension eines Spurgitters  $L$  ist  $n = N \cdot [E : \mathbb{Q}] = 4N$ . Ist  $L$  ein Gitter mit  $\det(L) = 5^{n/2}$ , so gilt:

$$5^{2N} = \det(L) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L) = 5^{3N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{v}L)$$

Also muss gelten  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{v}L) = -N$ . Des Weiteren zeigt man mit ähnlichen Argumenten, wie sie im Beweis zu Satz 4.1.19 verwendet werden, dass die Determinante von  $L_{\mathfrak{p}}$  eine Norm ist. Unter diesen Nebenbedingungen lassen sich die folgenden Geschlechter kombinieren:

$N$	$L_{\mathfrak{p}}$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	Genus	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
2	$\mathbb{H}(-1)$	$\frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5^2}$	1	0	1	-	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
	$\langle \Delta \pi^{-1}, \Delta \rangle$	$\frac{1}{2^2 \cdot 5^2}$	1	1	0	-	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	0
	$\langle \pi^{-1}, 1 \rangle$	$\frac{1}{2^2 \cdot 5^2}$	1	0	1	-	-	$\text{II}_8(5^{+4})$	1
4	$\mathbb{H}(-1) \perp \mathbb{H}(-1)$	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^2 \cdot 5^4}$	1	0	1	0	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	0
	$\langle \Delta \pi^{-1} \rangle \perp \mathbb{H}(-1) \perp \langle \Delta \rangle$	$\frac{13}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^4}$	2	0	2	0	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	0
	$\langle \pi^{-1} \rangle \perp \mathbb{H}(-1) \perp \langle 1 \rangle$	$\frac{13}{2^5 \cdot 3 \cdot 5^4}$	2	1	1	0	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	0
	$\langle \pi^{-1}, \Delta \pi^{-1}, 1, \Delta \rangle$	$\frac{13}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2}$	6	2	4	0	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	0
	$\langle \pi^{-1}, \pi^{-1}, 1, 1 \rangle$	$\frac{13}{2^6 \cdot 5^2}$	9	2	7	0	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	0
6	$\mathbb{H}(-3) \perp \mathbb{H}(1)$	$\frac{325}{2^6 \cdot 3^2}$	37	7	29	1	-	$\text{II}_{16}(5^{+8})$	1
	$\mathbb{H}(-1) \perp \mathbb{H}(-1) \perp \mathbb{H}(-1)$	$\frac{19361}{2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5^7 \cdot 7}$	3	0	2	0	1	$\text{II}_{24}(5^{+12})$	1
	$\vdots$								

Bei dem konstruierten extremalen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(5^{+12})$  handelt es sich um das Gitter  $(C_2.J_2YSL(2,5)) : C_2$ . Dieses besitzt noch genau zwei weitere Strukturen, welche in dem durch  $\mathbb{H}(-3) \perp \mathbb{H}(-1) \perp \mathbb{H}(1)$  festgelegten Geschlecht liegen.

### 3.7. Unimodulare Gitter

In diesem Abschnitt werden unimodulare Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern und Quaternionenalgebren über  $\mathbb{Q}$  untersucht. Anders als in den vorherigen Abschnitten meist vorausgesetzt, sind in den hier betrachteten Fällen die Stufe  $\ell$  und die Diskriminante nicht teilerfremd, sondern gleich. Des Weiteren lässt sich in diesen Fällen zeigen, dass es jeweils genau ein Geschlecht unimodularer Gitter gibt und dass unimodulare Gitter mittels Spurkonstruktion jeweils gerade modulare  $\mathbb{Z}$ -Gitter ergeben.

**3.7.1. Unimodulare Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern.** Unimodulare Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern sind in diversen Arbeiten untersucht worden: In [Iya69] ( $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  bis Rang 7), [Fei78] ( $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  bis Rang 12), [Hof91] (Rang 2, 3 über Körpern mit Diskriminante  $\geq -20$ ), relativ umfassend in [Sch98] und ergänzend in [KM02] ( $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$  gerade, Rang 8 und 12), [Abd04] bzw. [AS09] ( $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  Rang 13, 14 bzw. 15).

Diese Ergebnisse werden hier teilweise reproduziert und in einigen wenigen Fällen erweitert.

**PROPOSITION 3.7.1.** *Sei  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell})$  mit einer Primzahl  $\ell \equiv_4 3$  und  $N \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es genau ein Geschlecht  $\mathfrak{U}_N^E$  (positiv definiter) unimodularer  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N$  über  $E$ , nämlich das Geschlecht des Gitters*

$$\mathcal{I}_N := \langle 1, \dots, 1 \rangle.$$

**BEWEIS.** Sei  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$  ein unimodulares  $\mathfrak{D}$ -Gitter auf dem hermiteschen Raum  $(V, h)$ . Nach 3.3.1 gilt für jede Stelle  $p \neq \ell$  zunächst

$$(66) \quad L_p \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle.$$

Für jede zerlegte Stelle  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  ist  $(\frac{-\ell}{p}) = 1$  und somit ist  $-\ell$  ein Quadrat modulo  $p$ . Mit dem lokalen Quadratesatz (vgl. [O'M63] 63:1) folgt, dass  $-\ell$  dann auch ein Quadrat in  $\mathbb{Q}_p$  ist. Es folgt  $(-\ell, dV)_p = 1$ . Ist  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  eine träge Stelle, so ist nach (66)  $dV$  eine Norm, also  $(-\ell, dV)_p = 1$ . Da  $(V, h)$  positiv definit ist, gilt zudem  $dV > 0$  und daher  $(-\ell, dV)_{\infty} = 1$ . Aus Hilberts Reziprozitätsgesetz (vgl. [O'M63] 71:18) folgt damit auch  $(-\ell, dV)_{\ell} = 1$ , also ist  $dV$  nach [O'M63] 63:10 auch an der Stelle  $\ell$  eine Norm und mit 3.3.3 folgt

$$(67) \quad L_{\ell} \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle.$$

Somit ist das Geschlecht von  $L$  durch (66) und (67) eindeutig festgelegt. Das Gitter  $\mathcal{I}_N$  ist offenbar ein unimodulares  $\mathfrak{D}$ -Gitter in diesem Geschlecht.  $\square$

Die folgende Maßformel kann leicht mit Hilfe des Standardmaßes und geeigneter Korrekturfaktoren hergeleitet werden. Der Einfachheit halber sei an dieser Stelle auf [HK89] Theorem 5.6 verwiesen. Für das Geschlecht  $\mathfrak{U}_N^E$  unimodularer  $\mathfrak{D}$ -Gitter vom Rang  $N$  über  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell})$  gilt

$$\text{Maß}(\mathfrak{U}_N^E) = 2^{-N} \prod_{j=1}^N \frac{|B_{j, \chi^j}|}{j} \cdot \begin{cases} (\ell^{N/2} + (-1)^{N/2}) & N \text{ gerade} \\ 1 & N \text{ ungerade,} \end{cases}$$

wobei hier  $\chi = \chi_{E/\mathbb{Q}}$  den Kronecker-Charakter bezeichnet.

Da die Diskriminante  $d_E = -\ell$  von  $E$  ungerade ist, ist das Ideal  $2\mathbb{Z}$  unverzweigt in der Erweiterung  $E/\mathbb{Q}$  und nach Korollar 3.1.7 ist dann jedes ganzzahlige Spurgitter auch gerade. Insbesondere gilt dies für die Spurgitter unimodularer  $\mathfrak{D}$ -Gitter über dem Körper  $E$ . Darüber hinaus gilt

**PROPOSITION 3.7.2.** *Sei  $\ell \equiv_4 3$ ,  $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-\ell})$  und sei  $L$  ein unimodulares Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{U}_N^E$ . Dann ist das mittels Spurkonstruktion aus  $L$  gewonnene Gitter ein gerades  $\ell$ -modulares  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Dimension  $n = 2N$ .*

**BEWEIS.** Wegen  $L^* = L$  und  $\mathfrak{D}_E = \sqrt{-\ell}\mathfrak{D}$  gilt  $L = L^* = \mathfrak{D}_E L^{\#} = \sqrt{-\ell} L^{\#}$ . Die Abbildung  $\sigma : V \rightarrow V$ ,  $x \mapsto \sqrt{-\ell}x$  erfüllt also  $\sigma(L^{\#}) = L$  und es gilt für beliebige  $x, y \in V$

$$b_h(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\sigma(x), \sigma(y))) = \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(\sqrt{-\ell}x, \sqrt{-\ell}y)) = \ell \text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(h(x, y)) = \ell b_h(x, y).$$

Somit ist  $\sigma$  eine Ähnlichkeit, welche  $L^{\#}$  auf  $L$  abbildet. Folglich ist  $L$   $\ell$ -modular.  $\square$

Nach obigem Lemma ist also die Thetareihe eines  $\mathbb{Z}$ -Gitters mit einer Struktur als unimodulares  $\mathfrak{D}$ -Gitter stets ein Element von  $\mathcal{M}_{n/2}(\Gamma_*(\ell), \chi_{n/2})$  und folglich ist ein solches Gitter extremal bereits dann, wenn das Minimum entsprechend groß ist. Im Folgenden wird ein  $\mathfrak{D}$ -Gitter als *extremal* bezeichnet, wenn das Spurgitter extremal ist.

Die Klassenzahl der Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ,  $\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$  ist jeweils 1. Daher sind sämtliche Gitter über diesen Körpern frei.

Im Wesentlichen sind in diesem Abschnitt über die oben zitierten Ergebnisse hinausgehend zwei weitere Geschlechter klassifiziert worden:

**SATZ 3.7.3.** *Es gibt genau 5611 unimodulare Gitter vom Rang 16 über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ . Unter diesen sind genau 37 extremale Gitter. Weiter gibt es genau 33 extremale Gitter in dem Geschlecht  $\text{II}_{32}(3^{+16})$  mit einer Struktur als unimodulares Gitter über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ .*  $\square$

Erwartungsgemäß gilt außerdem:

**SATZ 3.7.4.** *Es gibt genau 23523 unimodulare Gitter vom Rang 9 über dem Körper  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ . Es gibt kein extremales Gitter in diesem Geschlecht. Demnach gibt es kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{18}(11^{+9})$  mit einer Struktur als unimodulares Gitter über  $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ .*  $\square$

In der folgenden Tabelle bezeichnet  $h$  jeweils die Klassenzahl des Geschlechts unimodularer Gitter vom Rang  $N$  über dem Körper  $E$ , zudem ist das jeweilige Maß des Geschlechts angegeben.  $h_2, \dots, h_{10}$  gibt jeweils die Anzahl der hermiteschen Gitter an, welche als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ein Minimum von  $2, \dots, 10$  besitzen und  $h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$  die Anzahl der extremalen  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bis auf Isometrie), welche eine Struktur über dem Körper  $E$  besitzen.

$E$	$N$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$	2	$\frac{1}{2^2 \cdot 3^2}$	1	1	-	-	-	-	1
	3	$\frac{1}{2^4 \cdot 3^4}$	1	1	-	-	-	-	1
	4	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^5}$	1	1	-	-	-	-	1
	5	$\frac{1}{2^8 \cdot 3^6 \cdot 5}$	1	1	-	-	-	-	1
	6	$\frac{13}{2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7}$	2	1	1	-	-	-	1
	7	$\frac{1}{2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5}$	2	2	0	-	-	-	0
	8	$\frac{41}{2^{15} \cdot 3^{10} \cdot 5^2}$	3	2	1	-	-	-	1
	9	$\frac{809}{2^{16} \cdot 3^{13} \cdot 5^2}$	4	3	1	-	-	-	1
	10	$\frac{8899}{2^{18} \cdot 3^{14} \cdot 5^2}$	6	4	2	-	-	-	2
	11	$\frac{1494223}{2^{18} \cdot 3^{15} \cdot 5 \cdot 11}$	8	6	2	-	-	-	2
	12	$\frac{75373090789}{2^{22} \cdot 3^{17} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13}$	20	8	12	0	-	-	0
	13	$\frac{630862444823}{2^{23} \cdot 3^{18} \cdot 5^3 \cdot 11}$	34	20	13	1	-	-	1
	14	$\frac{689532652191539}{2^{25} \cdot 3^{19} \cdot 5^3 \cdot 11}$	93	34	58	1	-	-	1
	15	$\frac{4366489808207046403}{2^{26} \cdot 3^{21} \cdot 5^3 \cdot 11}$	353	93	258	2	-	-	2
	16	$\frac{3048163571802983160052643}{2^{31} \cdot 3^{22} \cdot 5^4 \cdot 11}$	5611	353	5221	37	-	-	33

$E$	$N$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{10}$	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{-7})$	2	$\frac{1}{2^3}$	1	1	-	-	-	-	1
	3	$\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 7}$	2	1	1	-	-	-	1
	4	$\frac{5}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 7}$	3	2	1	-	-	-	1
	5	$\frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7}$	5	3	2	-	-	-	1
	6	$\frac{19}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2}$	11	5	6	0	-	-	(0)
	7	$\frac{73}{2 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7^2}$	26	11	15	0	-	-	0
	8	$\frac{87673}{2^5 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$	71	26	45	0	-	-	0
	9	$\frac{644663}{2 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3}$	291	71	218	2	0	-	(0)
	10	$\frac{1805701063}{2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot 11}$	2225	291	1918	14	2	-	1
	$\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$	2	$\frac{5}{2^3 \cdot 3}$	2	1	1	-	-	-
3		$\frac{1}{2^4}$	2	2	0	-	-	-	0
4		$\frac{61}{2^7 \cdot 3 \cdot 5}$	6	2	4	0	-	-	0
5		$\frac{85}{2^8 \cdot 11}$	10	6	3	1	-	-	1
6		$\frac{8075}{2^{10} \cdot 3^2 \cdot 11}$	39	10	28	1	0	-	(0)
7		$\frac{102595}{2^{11} \cdot 7 \cdot 11}$	112	39	72	1	0	-	0
8		$\frac{150219599}{2^{15} \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}$	1027	112	857	54	4	0	(0)
9		$\frac{12821810125}{2^{16} \cdot 7 \cdot 11}$	23523	1027	18969	3527	0	0	0

TABELLE 3.8. Unimodulare Gitter über imaginär-quadratischen Zahlkörpern

Als interessanter Spezialfall sollen hier unimodulare Gitter über den sogenannten Eisenstein-Zahlen, dem Ganzheitsring  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-3}}{2}]$  des Körpers  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  etwas genauer betrachtet werden.

3.7.1.1. *Konfigurationsanzahlen von Gittern über den Eisenstein-Zahlen.* Sei hier nun also  $E := \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$  mit Ganzheitsring  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\omega]$  mit  $\omega = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ . Die Einheitengruppe lautet in diesem Fall  $\mathfrak{D}^* = \{\pm 1, \pm w, \pm \bar{w}\}$  und umfasst gerade die 6-ten Einheitswurzeln.

Analog zu Kapitel 2 lassen sich auch für ein ganzzahliges  $\mathfrak{D}$ -Gitter  $L$ , d.h.  $sL \subseteq \mathfrak{D}$ , die *Konfigurationsanzahlen* wie folgt definieren

$$N_{m,i}(\alpha) := |\{x \in L_m \mid h(x, \alpha) \in i\mathfrak{D}^*\}|.$$

Genau wie in Kapitel 2 können diese Anzahlen in gewissen Fällen mit Hilfe eines Gleichungssystems  $\mathcal{S}_{s,a}$  bestimmt werden. Im Unterschied zu Kapitel 2 müssen hier zonale Polynome bzgl. der unitären Gruppe bestimmt werden. Für Details siehe [BN02]. Als Lösung des Gleichungssystems  $\mathcal{S}_{3,8}$  erhält man beispielsweise:

PROPOSITION 3.7.5. (vgl. [BN02] Tbl. III) *Ist  $L$  ein extremales unimodulares Gitter vom Rang 18 über den Eisenstein-Zahlen, so sind die Konfigurationsanzahlen  $N_{m,i}(\alpha)$  unabhängig von  $\alpha \in L_8$  eindeutig bestimmt und lauten:*

$i$	0	1	$w+1$	2	$-w+3$	$w+2$	3	$2w+2$	4
$N_{8,i}$	189414	404736	39168	13056	0	0	0	0	6
$N_{10,i}$	5816448	15353856	2612736	959616	13056	13056	0	0	0
$N_{12,i}$	110401536	335238912	78127104	35956224	2612736	2612736	404736	13056	0

□

BEMERKUNG 3.7.6. Aus den Anzahlen  $N_{8,i}$  aus Prop. 3.7.5 können leicht die entsprechenden Anzahlen  $n_{8,i}$  und  $n_{10,i}$  für das Spurgitter eines solchen extremalen unimodularen Gitters berechnet werden:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	$\geq 9$
$n_{8,i}$	202470	269824	143616	26112	4356	0	0	0	2	0
$n_{10,i}$	6687360	10262016	5757696	1741824	345984	26112	0	0	0	0

Tatsächlich handelt es sich bei dieser Lösung um eine der 63 in 2.4.6 b) erwähnten Lösungen. ■

Mit Hilfe der Anzahlen aus Prop. 3.7.5 lässt sich analog zu Abschnitt 2.5 die Thetareihe  $L(\alpha)$  eines  $2\mathfrak{D}$ -Nachbarn von  $L$  bzgl. eines Vektors  $\alpha \in L_8$  von  $L$  berechnen. Zunächst gilt

$$L(\alpha) = L_\alpha + \mathfrak{D}\frac{\alpha}{2} = L_\alpha \dot{\cup} (L_\alpha - \frac{\alpha}{2}) \dot{\cup} (L_\alpha - w\frac{\alpha}{2}) \dot{\cup} (L_\alpha - \bar{w}\frac{\alpha}{2}).$$

Offenbar liefert die Multiplikation mit (den Einheiten)  $w$  bzw.  $\bar{w}$  eine Bijektion zwischen  $L_\alpha - \frac{\alpha}{2}$  und den übrigen beiden Nebenklassen. Da diese die hermitesche Form  $h$  und damit auch Quadratlängen erhält, folgt

$$\theta_{L(\alpha)} = \theta_{L_\alpha} + 3 \cdot \theta_{L_\alpha - \frac{\alpha}{2}}.$$

Als erstes soll nun die Thetareihe von  $L_\alpha = \{x \in L \mid h(\alpha, x) \subseteq 2\mathfrak{D}\}$  bestimmt werden. Da  $L_\alpha$  nach Definition ein Teilgitter von  $L$  ist, besitzt  $L_\alpha$  (genauer das Spurgitter von  $L_\alpha$ ) ebenfalls keine Vektoren der Quadratlänge 2, 4 und 6. Von den Vektoren  $x \in L_8$  enthält  $L_\alpha$  nur genau diejenigen, deren Wert der hermiteschen Form  $i = h(x, \alpha)$  im Ideal  $2\mathfrak{D}$  ist, also

$$N_{4,0} + N_{4,2} + N_{4,4} = 189414 + 13056 + 6 = 202476.$$

Nun soll die Thetareihe von  $L_\alpha - \frac{\alpha}{2}$  bestimmt werden. Zunächst rechnet man leicht nach, dass die Bedingung, dass der Vektor  $x - \frac{\alpha}{2}$  die Quadratlänge  $b_h(x - \frac{\alpha}{2}, x - \frac{\alpha}{2}) = m$  hat, äquivalent ist zu

$$(68) \quad b_h(x, \alpha) = b_h(x, x) - m + 2.$$

Da das Gitter  $L$  das Minimum 8 besitzt, gilt folglich für jeden Vektor  $x \neq \alpha$ , dass  $8 \leq b_h(x - \alpha, x - \alpha) = b_h(x, x) - 2b_h(x, \alpha) + 8$  gilt. Es folgt

$$(69) \quad 2b_h(x, \alpha) \leq b_h(x, x).$$

Um alle Vektoren  $x - \frac{\alpha}{2}$  in  $L_\alpha - \frac{\alpha}{2}$  der Quadratlänge  $m$  zu bestimmen, müssen also neben  $-\frac{\alpha}{2}$  (für  $x = \alpha$ ) alle  $x \in L_\alpha$  betrachtet werden, für die wegen (68) und (69) gilt

$$b_h(x, x) \leq 2m - 4.$$

Anschließend bestimmt man für jedes  $k \leq 2m - 4$  diejenigen  $i = i(k) \in 2\mathfrak{D}$ , für die (neben  $N_{k,i} > 0$ ) gilt

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}}^E(i) = k - m + 2.$$

Für jedes solche  $i$  liefert dann jedes  $x \in L_k$  mit  $h(x, \alpha) = i$  durch  $x - \frac{\alpha}{2}$  einen Vektor in  $L_\alpha - \frac{\alpha}{2}$  der Quadratlänge  $m$ . Dies geschieht nun für  $m = 1, \dots, 4$ :

$m = 2$  Hier muss gelten  $x = \alpha$  oder  $b_h(x, x) \leq 0$ , d.h.  $x = 0$ . Somit gibt es hier also mit  $\pm\frac{\alpha}{2}$  genau zwei Vektoren der Quadratlänge 2.

$m = 4$  Hier muss  $b_h(x, x) \leq 4$  gelten. Somit gibt es keinen Vektor der Quadratlänge 4.



$m = 6$  Hier muss  $b_h(x, x) \leq 8$  gelten. Also sind die Vektoren der Quadratlänge 8 zu betrachten. Relevant sind die Werte  $i \in \{2, 4\omega, 4\bar{\omega}\}$ . Man erhält als Anzahl

$$\frac{1}{6}N_{4,2} + \frac{1}{3}N_{4,4} = 2176 + 2 = 2178.$$

$m = 8$  Hier muss  $b_h(x, x) \leq 12$  gelten. Also sind die Vektoren der Quadratlängen 8, 10 und 12 zu betrachten. Für  $k = 8$  sind  $i \in \{2\omega, 2\bar{\omega}\}$ , für  $k = 10$  sind  $i \in \{4\omega, 4\bar{\omega}\}$  und für  $k = 12$  sind  $i \in \{2\omega + 2, (2\omega + 2)\bar{\omega}\}$  relevant. Man erhält

$$\frac{1}{3}N_{8,2} + \frac{1}{6}N_{10,2} + \frac{1}{3}N_{12,2\omega+2} = 4352 + 159936 + 4352 = 168640.$$

Zusammenfassend erhält man die folgenden Anzahlen von Vektoren der Quadratlänge  $m \in \{0, \dots, 8\}$ :

	0	2	4	6	8
$L_\alpha$	1	0	0	0	202476
$L_\alpha - \frac{\alpha}{2}$	0	2	0	2178	168640
$L(\alpha)$	1	6	0	6534	708396

Damit lautet die gesuchte Thetareihe also  $\theta_{L(\alpha)} = 1 + 6q + 6534q^3 + 708396q^4 + O(q^5)$ . Somit enthält das Gitter  $L(\alpha)$  genau sechs Vektoren der Quadratlänge 2, nämlich die Vektoren  $\mathfrak{D}^* \cdot \frac{\alpha}{2}$ . Das 1-dimensionale von  $\frac{\alpha}{2}$  erzeugte Untergitter von  $L$  ist isometrisch zu  $\langle 1 \rangle$  und somit unimodular und kann daher orthogonal abgespalten werden (vgl. [O'M63] 82:15). Somit ist  $L(\alpha)$  von der Form  $L = \langle 1 \rangle \perp L_0$  mit einem unimodularen Gitter  $L_0$  vom Rang 17. Die Thetareihe des Spurgitters von  $\langle 1 \rangle$  ist gegeben durch  $\theta_{\mathbb{A}_2} = 1 + 6q + 6q^3 + 6q^4 + O(q^5)$ . Aufgrund der orthogonalen Zerlegung gilt  $\theta_{L(\alpha)} = \theta_{\mathbb{A}_2} \cdot \theta_{L_0}$ . Damit lässt sich also die Thetareihe von  $L_0$  berechnen. Es gilt

$$\theta_{L_0} = 1 + 6528q^3 + 669222q^4 + O(q^5).$$

Diese ist genau die extremale Modulform und somit ist  $L_0$  ein extremales unimodulares Gitter vom Rang 17. Also ist bewiesen:

**SATZ 3.7.7.** *Gibt es ein extremales unimodulares Gitter vom Rang 18 über den Eisenstein-Zahlen, so ist für jeden kürzesten Vektor  $\alpha \in L_8$  der  $2\mathfrak{D}$ -Nachbar  $L(\alpha)$  von der Form  $L(\alpha) = \langle 1 \rangle \perp L_0$ , wobei  $L_0$  ein extremales unimodulares Gitter vom Rang 17 ist.*  $\square$

Im Prinzip reduziert sich die Frage nach der Existenz eines extremalen unimodularen Gitters vom Rang 18 über den Eisenstein-Zahlen darauf, alle extremalen unimodularen Gitter vom Rang 17 zu bestimmen und anschließend alle  $2\mathfrak{D}$ -Nachbarn dieser Gitter zu berechnen. Auf diese Weise würde man nach obigem Satz alle extremalen unimodularen Gitter vom Rang 18 konstruieren.

Das Problem an dieser Vorgehensweise ist die Tatsache, dass es sehr viele extremale Gitter vom Rang 17 gibt und auch der Nachbaralgorithmus sehr lange benötigt, um auch nur für ein Gitter sämtliche  $2\mathfrak{D}$ -Nachbarn zu berechnen.

Als weitere Anwendung der Berechnung der Konfigurationsanzahlen erhält man:

**SATZ 3.7.8.** *Es gibt kein extremales unimodulares Gitter vom Rang 19 über den Eisenstein-Zahlen.*

**BEWEIS.** Das System  $\mathcal{S}_{2,10}$  besitzt keine Lösung und daher kann es ein solches Gitter nicht geben.  $\square$

**3.7.2. Unimodulare Gitter über Quaternionenalgebren.** In diesem Abschnitt sollen exkursartig Gitter über Quaternionenalgebren betrachtet werden. Insbesondere werden unimodulare Gitter betrachtet, da diese zumindest für gewisse Quaternionenalgebren der Diskriminante  $\ell$  ähnlich wie bei imaginär-quadratischen Zahlkörpern gerade  $\ell$ -modulare Gitter liefern.

Seien  $a, b \in \mathbb{Q}^*$ . Eine (rationale) *Quaternionenalgebra*  $Q$  ist eine  $\mathbb{Q}$ -Algebra erzeugt von zwei Elementen  $i$  und  $j$ , welche folgende definierenden Relationen erfüllen:

$$i^2 = a, \quad j^2 = b, \quad i \cdot j = -j \cdot i.$$

Eine solche Algebra wird im Weiteren mit  $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$  bezeichnet. Setzt man  $k := i \cdot j$ , so kann man leicht zeigen, dass  $\{1, i, j, k\}$  eine  $\mathbb{Q}$ -Basis von  $Q$  ist und die Algebra  $Q$  somit 4-dimensional über  $\mathbb{Q}$  ist. Jede solche Quaternionenalgebra  $Q$  besitzt eine Involution  $\bar{\phantom{x}} : Q \rightarrow Q$  mit Fixkörper  $\mathbb{Q}$  gegeben durch

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 i + \lambda_3 j + \lambda_4 k \mapsto \lambda_1 1 - \lambda_2 i - \lambda_3 j - \lambda_4 k.$$

Mit Hilfe dieser Involution definiert man die *reduzierte Norm* und die *reduzierte Spur* eines Elements  $\alpha \in Q$  wie folgt:

$$\text{Tr} : Q \rightarrow \mathbb{Q}, \alpha \mapsto \alpha + \bar{\alpha} \quad \text{N} : Q \rightarrow \mathbb{Q}, \alpha \mapsto \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

Ähnlich wie bei imaginär-quadratischen Zahlkörpern ist die relevante Menge von Stellen  $\Omega = \Omega_{\mathbb{Q}}$  die Menge der rationalen Primzahlen. Eine Stelle  $p \in \Omega_{\mathbb{Q}}$  heißt *verzweigt*, wenn  $Q_p := Q \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$  eine Divisionsalgebra über  $\mathbb{Q}_p$  ist (also isomorph zu der eindeutig bestimmten Divisionsalgebra, vgl. [O'M63] 63:11b) und *zerlegt* oder auch *unverzweigt*, falls  $Q_p \cong M_2(\mathbb{Q}_p)$  gilt. Entsprechend heißt  $Q$  *verzweigt bei  $\infty$* , wenn  $Q_{\infty} := Q \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$  eine Divisionsalgebra ist (also isomorph zu den Hamiltonschen Quaternionen  $\mathbb{H}$ ) und *zerlegt*, falls  $Q_{\infty} \cong M_2(\mathbb{R})$  gilt. Quaternionenalgebren, welche an der Stelle  $\infty$  verzweigt sind, nennt man auch *definit*. Man kann leicht zeigen, dass eine Quaternionenalgebra  $\left(\frac{a,b}{\mathbb{Q}}\right)$  genau dann verzweigt bei  $p \in \Omega$  bzw.  $\infty$  ist, wenn die sogenannte *Normform*  $\langle 1, -a, -b, a \cdot b \rangle$  anisotrop über  $\mathbb{Q}_p$  bzw.  $\mathbb{R}$  ist (vgl. [O'M63] 57:9).

Anders als bei Zahlkörpern, bei denen die Maximalordnung mit dem Ring der ganzen Zahlen  $\mathfrak{O}$  übereinstimmt und damit eindeutig bestimmt ist, kann es bei Quaternionenalgebren mehrere (nicht konjugierte) Maximalordnungen geben. Die Anzahl der Konjugationsklassen von Maximalordnungen heißt auch die *Typenzahl* von  $Q$ . Für eine beliebige Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  heißt die Anzahl der Klassen von Linksideal (bzgl. der Relation  $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \Leftrightarrow \exists \alpha \in Q^* : \mathfrak{A} = \mathfrak{B}\alpha$ ) die *Klassenzahl*. Diese hängt nicht von der gewählten Maximalordnung ab.

Sei im Folgenden  $\mathfrak{M}$  eine fest gewählte Maximalordnung von  $Q$ . Die *Diskriminante* von  $Q$  ist definiert als  $d_Q := \sqrt{|\det(\text{Tr}(\omega_i \omega_j))|}$ , wobei  $\omega_1, \dots, \omega_4$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis der Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  bezeichnet. Die *Differente*  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$  ist definiert als das Inverse zu  $\mathfrak{C}_{\mathfrak{M}/\mathbb{Z}} := \{\alpha \in Q \mid \text{Tr}(\alpha \mathfrak{M}) \subseteq \mathbb{Z}\}$ .

**BEMERKUNG 3.7.9.** Während die Diskriminante  $d_Q$  einer Quaternionenalgebra  $Q$  nicht von der Wahl der Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  abhängt (vgl. [Deu35] S. 88<sup>2</sup>), ist dies bei der Differente  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$  der Fall. Sind  $\mathfrak{M}_1$  und  $\mathfrak{M}_2$  zwei Maximalordnungen von  $Q$ , so gibt es ein  $\mathfrak{M}_1$ -Linksideal  $\mathfrak{A}$  (d.h.  $\mathfrak{M}_1 \cdot \mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}$ ), welches zugleich ein  $\mathfrak{M}_2$ -Rechtsideal ist, sodass gilt (vgl. [Deu35] S. 88)

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}_2} = \mathfrak{A}^{-1} \cdot \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}_1} \cdot \mathfrak{A}.$$

■

<sup>2</sup>Die Diskriminante wird in [Deu35] als *Grundideal* bzw. *Grundzahl* bezeichnet, während dort die Größe  $|\det(\text{Tr}(\omega_i \omega_j))|$  als Diskriminante bezeichnet wird.

Ähnlich wie bei Zahlkörpern ist die Differente ein ganzes, zweiseitiges  $\mathfrak{M}$ -Ideal. Des Weiteren ist  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$  das Produkt aller verzweigten Primideale von  $\mathfrak{M}$  und die Norm der Differente ist gleich der Diskriminante von  $Q$ . Zudem ist eine Primzahl  $p$  genau dann verzweigt, wenn sie die Diskriminante  $d_Q$  von  $Q$  teilt (vgl. [Deu35] VI §5,6).

Sei nun  $V$  ein  $Q$ -Linksmodul der Dimension  $N$  und sei  $h : V \times V \rightarrow Q$  eine positiv definite hermitesche Form auf  $V$ . Unter einem  $\mathfrak{M}$ -Gitter  $L$  in  $V$  versteht man einen endlich erzeugten  $\mathfrak{M}$ -Linksmodul  $L \subset V$ . Für jedes  $\mathfrak{M}$ -Gitter  $L$  gibt es  $\mathfrak{M}$ -Linksideale  $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_s$  mit  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_s x_s$  (vgl. [Cou00] 2.2). Die Zahl  $s$  heißt auch der *Rang* von  $L$ . Ist  $s = N$ , so heißt  $L$  auch ein Gitter *auf*  $V$ .

Das *duale Gitter* eines Gitters  $L$  ist definiert als  $L^* := \{x \in QL \mid h(x, L) \subseteq \mathfrak{M}\}$ . Ist  $L = \mathfrak{A}_1 x_1 + \dots + \mathfrak{A}_N x_N$ , so ist  $L^* = \overline{\mathfrak{A}_1}^{-1} x_1 + \dots + \overline{\mathfrak{A}_N}^{-1} x_N$ , wobei  $y_1, \dots, y_N$  die duale Basis zu  $x_1, \dots, x_N$  ist.

Weiter ist das *Skalenideal*  $\mathfrak{s}L$  als das von der Menge  $\{h(x, y) \mid x, y \in L\}$  erzeugte zweiseitige Ideal und das *Normideal*  $\mathfrak{n}L$  als das von der Menge  $\{h(x, x) \mid x \in L\}$  erzeugte zweiseitige Ideal definiert.

Mit Hilfe der reduzierten Norm (in beliebigen zentral einfachen Algebren) und des Satzes von Jordan-Hölder lässt sich für zwei  $\mathfrak{M}$ -Gitter  $M$  und  $L$  ein verallgemeinerter *Index*  $\chi(M, L)$  definieren (für Details siehe [Cou00] 2.2). Man kann zeigen (vgl. [Cou00] 2.2.1), dass  $\chi(L^*, L) = d^2 \mathbb{Z}$  für ein (o.B.d.A) positives  $d \in \mathbb{Z}$  gilt. Dieses  $d$  wird auch als *Diskriminante*  $d_L$  von  $L$  bezeichnet. Des Weiteren gilt die folgende Verallgemeinerung der Determinanten-Index-Formel (vgl. [Cou00] 2.2.2):

$$d_L = \chi(M, L) \cdot d_M$$

Ein  $\mathfrak{M}$ -Gitter  $L \neq \{0\}$  heißt  $\mathfrak{A}$ -modular, wenn  $\mathfrak{A}L^* = L$  ist. Insbesondere ist  $L$  unimodular genau dann, wenn  $L^* = L$  gilt. Für ein unimodulares Gitter  $L$  gilt offenbar  $d_L = 1$ .

Genau wie im Fall von Zahlkörpern lässt sich der  $Q$ -Modul  $V$  auffassen als  $Q$ -Vektorraum der Dimension  $n := 4N$ . Zu der hermiteschen Form  $h$  kann man auch hier die *Spurform*  $b_h$  für  $x, y \in V$  wie folgt definieren

$$b_h(x, y) := \text{Tr}(h(x, y)).$$

Auch hier ist  $h$  positiv definit genau dann, wenn  $b_h$  positiv definit ist und analog zu Prop. 3.1.4 erhält man:

PROPOSITION 3.7.10. (vgl. [Cou00] 2.2) Sei  $L \subseteq V$  ein  $\mathfrak{M}$ -Gitter vom Rang  $N$  und  $h : V \times V \rightarrow Q$  eine positiv definite hermitesche Form. Dann gilt

- a)  $\dim_{\mathbb{Z}}(L) = 4 \cdot N$ .
- b)  $L$  ist ganzzahlig genau dann, wenn  $\mathfrak{s}L \subseteq \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}^{-1}$ .
- c)  $L^{\#} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}^{-1} \cdot L^*$ .
- d)  $\det(L) = |d_Q|^{2N} \cdot d_L^4$ . □

Ist  $L$  ein ganzzahliges  $\mathfrak{M}$ -Gitter, d.h.  $L \subseteq L^*$ , so gilt also  $h(x, x) \in \mathfrak{M} \cap Q = \mathbb{Z}$ . Somit ist  $b_h(x, x) = \text{Tr}(h(x, x)) = 2h(x, x) \in 2\mathbb{Z}$  und folglich ist das Spurgitter eines solchen Gitters  $L$  stets gerade. Insbesondere gilt dies für unimodulare  $\mathfrak{M}$ -Gitter.

PROPOSITION 3.7.11. (vgl. [Shi64] 6.18) Sei  $Q$  eine Quaternionenalgebra und sei  $\mathfrak{M}$  eine Maximalordnung von  $Q$ . Dann gibt es genau ein hermitesches Geschlecht  $\mathfrak{A}_N^{\mathfrak{M}}$  (positiv definit) unimodularer  $\mathfrak{M}$ -Gitter vom Rang  $N$  über  $Q$ , nämlich das Geschlecht des Gitters

$$\mathcal{I}_N := \langle 1, \dots, 1 \rangle.$$

□

Die Maßformel für das Geschlecht  $\mathfrak{U}_N^{\mathfrak{M}}$  unimodularer  $\mathfrak{M}$ -Gitter vom Rang  $N$  lautet gemäß [GY00] 11.2.

$$\begin{aligned} \text{Maß}(\mathfrak{U}_N^{\mathfrak{M}}) &= \prod_{j=1}^N \zeta(2j) \frac{(2j-1)!}{(2\pi)^{2j}} \cdot \prod_{p|d_Q} (p^j + (-1)^j) \\ &= 2^{-2N} \prod_{j=1}^N \frac{|B_{2j}|}{j} \cdot \prod_{p|d_Q} (p^j + (-1)^j). \end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass es zu einer ungeraden Anzahl von Stellen  $p \in \Omega$  stets eine bis auf Isomorphie eindeutig bestimmte Quaternionenalgebra über  $\mathbb{Q}$  existiert, welche an genau diesen Stellen sowie bei  $\infty$  verzweigt ist (vgl. [Vig80] III Theoreme 3.1). Insbesondere gibt es also zu einer Primzahl  $\ell$  genau eine Quaternionenalgebra  $Q := \mathbb{Q}_{\ell, \infty}$ , welche genau bei  $\ell$  und  $\infty$  verzweigt ist.  $Q$  ist also definit mit Diskriminante  $d_Q = \ell$ . Man kann leicht nachrechnen, dass sich diese Algebra  $Q$  wie folgt konstruieren lässt:

$$(70) \quad Q \cong \left( \frac{-\ell, -q}{\mathbb{Q}} \right) \text{ für eine Primzahl } q \in \mathbb{N} \text{ mit } q \equiv_8 3 \text{ und } \left( \frac{-q}{\ell} \right) = -1$$

Sei im Folgenden  $\mathfrak{M}$  eine Maximalordnung von  $Q$ . Die Different  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$  ist in diesem Fall genau das maximale zweiseitige  $\mathfrak{M}$ -Ideal  $\mathfrak{P}$  mit  $\ell\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^2$ .

Zum Beispiel in [Deu50] wird gezeigt, dass die Typenzahl und Klassenzahl von  $\mathbb{Q}_{\ell, \infty}$  gleich 1 ist genau dann, wenn  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$ . In diesen Fällen sind dann sämtliche Maximalordnungen konjugiert. Zudem ist in diesem Fall die Different (wie jedes andere Ideal) ein Hauptideal und daher erhält man in diesen Fällen folgende Proposition:

**PROPOSITION 3.7.12.** *Sei  $Q := \mathbb{Q}_{\ell, \infty}$  mit  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$  und sei  $L$  ein unimodulares  $\mathfrak{M}$ -Gitter im Geschlecht  $\mathfrak{U}_N^{\mathfrak{M}}$ . Dann liefert  $L$  mittels Transferkonstruktion ein gerades  $\ell$ -modulares  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Dimension  $n = 4N$ .*

**BEWEIS.** Zunächst folgt aus Prop. 3.7.10, dass  $\dim_{\mathbb{Z}}(L) = 4N$  ist. Wie oben bemerkt ist das Spurgitter von  $L$  gerade. Weiter ist  $L = L^* = \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}L^{\#}$ . Da die Different von  $\mathfrak{M}$  gleich dem einzigen verzweigten Primideal  $\mathfrak{P}$  mit  $\mathfrak{P}^2 = \ell\mathfrak{M}$  ist und dieses wegen  $\ell \in \{2, 3, 5, 7, 13\}$  ein Hauptideal ist, gibt es folglich ein Element  $\alpha \in \mathfrak{M}$  der Norm  $N(\alpha) = \ell$  mit  $\alpha\mathfrak{M} = \mathfrak{P} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$ . Demnach erfüllt die Abbildung  $\sigma : V \rightarrow V$ ,  $x \mapsto \alpha x$  die Gleichung  $\sigma(L^{\#}) = \alpha L^{\#} = \mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}L^{\#} = L^* = L$ . Wegen

$$b(\sigma(x), \sigma(y)) = \text{Tr}(h(\alpha x, \alpha y)) = \text{Tr}(N(\alpha)h(x, y)) = \ell \cdot \text{Tr}(h(x, y)) = \ell \cdot b(x, y)$$

für beliebige  $x, y \in V$  ist  $\sigma$  eine Ähnlichkeit der Norm  $\ell$ , welche  $L^{\#}$  auf  $L$  abbildet. Folglich ist  $L$   $\ell$ -modular.  $\square$

**BEMERKUNG 3.7.13.** Für eine beliebige Primzahl  $\ell \notin \{2, 3, 5, 7, 13\}$  ist das Spurgitter von  $L$  wie in obiger Proposition im Allgemeinen nicht mehr modular, sondern nur noch ein  $n$ -dimensionales gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$ . Beispielsweise besitzt die Quaternionenalgebra  $\mathbb{Q}_{37, \infty}$  die Klassen- und Typenzahl 2, es gibt also genau zwei Konjugiertenklassen von Maximalordnungen mit Vertretern  $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ , welche jeweils Klassenzahl 2 besitzen. Betrachtet man für  $\mathfrak{M} \in \{\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2\}$  jeweils das über 37 gelegene (verzweigte) Primideal, so ist dieses in einem Fall ein Hauptideal und in dem anderen nicht. Sei die zum ersten Fall gehörende Maximalordnung  $\mathfrak{M}_1$  und die andere  $\mathfrak{M}_2$ . Fasst man diese beiden Maximalordnungen jeweils als  $\mathbb{Z}$ -Gitter bzgl. der Form  $b(x, y) = \text{Tr}(x\bar{y})$  auf, so ist das Gitter  $\mathfrak{M}_1$  37-modular, wohingegen  $\mathfrak{M}_2$  nicht 37-modular ist.

Allgemeiner kann man allerdings stets eine Maximalordnung  $\mathfrak{M}$  so wählen, dass das maximale Ideal

über  $\ell$  ein Hauptideal ist. Sei dazu die Quaternionenalgebra konkret wie in (70) gegeben. Dann ist  $\mathfrak{D} := \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}j + \mathbb{Z}k$  eine Ordnung. Wählt man nun  $\mathfrak{M}$  als eine Maximalordnung, welche  $\mathfrak{D}$  umfasst, so ist hier  $\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}} = i\mathfrak{M}$  ein Hauptideal. In diesem Fall lässt sich der Beweis völlig analog zu dem von Prop. 3.7.12 führen und man erhält ebenfalls ein modulares Gitter. ■

In der Folge werden die unimodularen Geschlechter in kleinen Dimensionen für die Quaternionenalgebren  $Q = \mathbb{Q}_{\ell, \infty}$  mit  $\ell \in \{2, 3, 5, 7\}$  klassifiziert. Dabei sind einige Resultate bereits in [BN97] und [Bac97] zu finden.

Wesentliche Ergebnisse dieser Klassifikation sind:

SATZ 3.7.14.

- a) Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\Pi_{24}(3^{+12})$  besitzt eine Struktur über  $\mathbb{Q}_{3, \infty}$ .
- b) Es gibt genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\Pi_{28}(3^{+14})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}_{3, \infty}$ . Dieses ist isometrisch zu dem Gitter *Beis*<sub>14</sub> (vgl. [LatDB] „Beis14“). □

SATZ 3.7.15. Es gibt genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\Pi_{24}(5^{+12})$  mit einer Struktur über  $\mathbb{Q}_{5, \infty}$ . Dieses Gitter ist isometrisch zu dem Gitter  $[2.J_2 \square SL_2(5)]_{24}(s)$  (vgl. [LatDB] „(C2.J2 Y SL(2,5)):C2“). □

SATZ 3.7.16. Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\Pi_{20}(7^{+10})$  besitzt eine Struktur über  $\mathbb{Q}_{7, \infty}$ . □

In der folgenden Tabelle bezeichnet  $h$  jeweils die Klassenzahl des Geschlechts unimodularer  $\mathfrak{M}$ -Gitter vom Rang  $N$  über der Quaternionenalgebra  $Q$ , zudem ist das jeweilige Maß des Geschlechts angegeben.  $h_2, \dots, h_8$  gibt jeweils die Anzahl der hermiteschen Gitter an, welche als  $\mathbb{Z}$ -Gitter ein Minimum von  $2, \dots, 8$  besitzen, und  $h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$  die Anzahl der extremalen  $\mathbb{Z}$ -Gitter (bis auf Isometrie), welche eine Struktur über  $Q$  besitzen.

$Q$	$N$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{Q}_{2, \infty}$	2	$\frac{1}{2^7 \cdot 3^2}$	1	1	-	-	-	1
	3	$\frac{1}{2^{10} \cdot 3^4}$	1	1	-	-	-	1
	4	$\frac{17}{2^{15} \cdot 3^5 \cdot 5}$	2	1	1	-	-	1
	5	$\frac{527}{2^{18} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 11}$	3	2	1	-	-	1
	6	$\frac{364157}{2^{22} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	5	3	2	-	-	2
	7	$\frac{46247939}{2^{25} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}$	8	5	3	-	-	3
	8	$\frac{2528861788723}{2^{31} \cdot 3^{10} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11}$	24	8	16	0	-	0
	$\mathbb{Q}_{3, \infty}$	2	$\frac{1}{2^5 \cdot 3^2}$	1	1	-	-	-
3		$\frac{13}{2^7 \cdot 3^4 \cdot 7}$	2	1	1	-	-	1
4		$\frac{533}{2^{11} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 7}$	3	2	1	-	-	1
5		$\frac{5863}{2^{13} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7}$	5	3	2	-	-	2
6		$\frac{22749793}{2^{16} \cdot 3^8 \cdot 5 \cdot 7^2}$	14	5	9	0	-	0
7		$\frac{24865523749}{2^{18} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7^2}$	49	14	34	1	-	1

$Q$	$N$	Maß	$h$	$h_2$	$h_4$	$h_6$	$h_8$	$h_{\text{ext}}^{\mathbb{Z}}$
$\mathbb{Q}_{5,\infty}$	2	$\frac{13}{2^4 \cdot 3^2 \cdot 5}$	2	1	1	-	-	1
	3	$\frac{403}{2^5 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7}$	3	2	1	-	-	1
	4	$\frac{126139}{2^9 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7}$	8	3	5	0	-	0
	5	$\frac{8955869}{2^{10} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7}$	27	8	19	0	-	0
	6	$\frac{3719291792879}{2^{13} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^2}$	333	27	279	26	1	1
$\mathbb{Q}_{7,\infty}$	2	$\frac{5}{2^5 \cdot 3}$	2	1	1	-	-	1
	3	$\frac{95}{2^7 \cdot 3 \cdot 7}$	5	2	3	0	-	(0)
	4	$\frac{22819}{2^{11} \cdot 3^2 \cdot 7}$	21	5	16	0	-	0
	5	$\frac{63916019}{2^{13} \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11}$	228	21	191	16	0	0

TABELLE 3.9. Unimodulare Gitter über Quaternionenalgebren

BEMERKUNG 3.7.17. Ähnlich wie bei imaginär-quadratischen Zahlkörpern gibt es auch hier andere als unimodulare Geschlechter, welche  $n$ -dimensionale  $\mathbb{Z}$ -Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  ergeben. Beispielsweise findet man diese weitere nicht ganzzahlige Struktur von  $BW_{16}$  über  $\mathbb{Q}_{2,\infty}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1-j & 1 & \frac{1+i+j+k}{2} \\ -1+j & 2 & \frac{j+k}{2} & \frac{-1-j}{2} \\ 1 & \frac{-j-k}{2} & 2 & \frac{-j+k}{2} \\ \frac{1-i-j-k}{2} & \frac{-1+j}{2} & \frac{j-k}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Dies beantwortet die in [Van10] aufgeworfene Frage (vgl. [Van10] §4.1), ob das Gitter  $BW_{16}$  außer der unimodularen Struktur noch eine weitere nicht-isometrische Struktur besitzt. ■

## Automorphismenordnungen extremaler Gitter

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass Automorphismen von  $\mathbb{Z}$ -Gittern mit Minimalpolynom  $\Phi_p$  für eine Primzahl  $p > 2$  gerade gewissen hermiteschen Gittern über dem  $p$ -ten Kreisteilungskörper  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  entsprechen. In diesem Kapitel sollen nun - soweit möglich - Aussagen bezüglich der Existenz sämtlicher Automorphismen der Ordnung  $p$  gewisser Gitter getroffen werden.

Bereits von Minkowski (vgl. [Min87]) wurde gezeigt, dass die größtmögliche Primzahlordnung  $p$  eines Automorphismus  $\sigma$  eines Gitters  $L$  auf einem  $n$ -dimensionalen quadratischen Raum  $V$  gleich  $n + 1$  ist. In derselben Arbeit werden zudem die Exponenten  $\nu_p(|O(L)|)$  wie folgt abgeschätzt:

$$\nu_p(|O(L)|) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p(p-1)} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2(p-1)} \right\rfloor + \dots$$

Diese Resultate gelten jedoch allgemein für ein beliebiges Gitter  $L$  auf  $V$  und benutzen in keiner Weise die weiteren Invarianten von  $L$  wie etwa das genaue Geschlecht oder das Minimum von  $L$ .

In diesem Kapitel wird gezeigt, wie alle Gitter in einem Geschlecht gerader Gitter der Stufe  $\ell$  mit einem Automorphismus der Ordnung  $p > 2$  mit  $\text{ggT}(\ell, p) = 1$  und einem „großen“ Minimum bestimmt werden können. Dabei wird methodisch wie in [Neb13] für unimodulare Gitter vorgegangen. Ungeachtet des Minimums werden ähnliche Argumente bereits in [Que81] benutzt. Dort werden als Spezialfall unimodulare Gitter der Dimension  $n = p + 1$  mit einem Automorphismus der Ordnung  $p$  betrachtet und alle solchen Gitter für  $p \in \{7, 23, 31, 47\}$  klassifiziert.

Im Folgenden bezeichne stets  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  auf einem euklidischen Vektorraum  $(V, b)$  der Dimension  $n$ . Weiter sei  $p > 2$  eine Primzahl,  $E := \mathbb{Q}(\zeta_p)$  der  $p$ -te Kreisteilungskörper mit Ganzheitsring  $\mathfrak{D} = \mathbb{Z}[\zeta_p]$  und  $F := \mathbb{Q}(\zeta_p + \bar{\zeta}_p)$  der maximal reelle Teilkörper von  $E$  mit Ganzheitsring  $\mathfrak{o} = \mathbb{Z}[\zeta_p + \bar{\zeta}_p]$ . Es sei weiter  $\mathfrak{P} := (1 - \zeta_p)\mathfrak{D}$  und  $\mathfrak{p} := \mathfrak{P} \cap F$ . Die Diskriminante von  $E$  lautet  $d_E = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}$ , die Differenten  $\mathfrak{D}_E = \mathfrak{P}^{p-2}$ .

### 4.1. Primärzerlegung eines Gitters

Zunächst sei  $\sigma \in O(V, b)$  ein Automorphismus von  $V$  der Ordnung  $p$ . Da  $\sigma^p = \text{id}_V$  gilt, ist das Minimalpolynom  $m_\sigma$  ein Teiler von  $X^p - 1$ , also entweder  $m_\sigma = \Phi_p$  oder  $m_\sigma = X^p - 1 = \Phi_1 \Phi_p$ . Man definiert weiter:

$$V_1 := \text{Kern}(\Phi_1(\sigma)) \quad V_\zeta := \text{Kern}(\Phi_p(\sigma))$$

Im Folgenden seien  $n_1 := \dim_{\mathbb{Q}}(V_1)$  und  $n_\zeta := \dim_{\mathbb{Q}}(V_\zeta)$ . Unmittelbar aus der Definition von  $V_1$  und  $V_\zeta$  ergibt sich  $m_{\sigma|_{V_1}} = \Phi_1$  und  $m_{\sigma|_{V_\zeta}} = \Phi_p$ . Ähnlich wie bereits in Abschnitt 3.6.1 gesehen, besitzt  $V_\zeta$  dann eine durch  $\zeta_p \cdot x := \sigma(x)$  induzierte Struktur als  $E$ -Vektorraum. Folglich ist  $n_\zeta$  ein Vielfaches von  $p - 1$ .

Da  $\text{ggT}(\Phi_p, \Phi_1) = 1$ , folgt aus dem Lemma von Bézout die Existenz von Polynomen  $u, v \in \mathbb{Q}[X]$  mit

$$(71) \quad 1 = u \cdot \Phi_p + v \cdot \Phi_1.$$

Ist  $x \in V_1 \cap V_\zeta$ , so folgt  $x = (u \cdot \Phi_p)(\sigma)(x) + (v \cdot \Phi_1)(\sigma)(x) = u(\sigma)(0) + v(\sigma)(0) = 0$ . Wegen  $(\Phi_1 \cdot \Phi_p)(\sigma) = \sigma^p - \text{id}_V = 0$  ist andererseits  $(u \cdot \Phi_p)(\sigma)(x) = (\Phi_p \cdot u)(\sigma)(x) \in V_1$  und  $(v \cdot \Phi_1)(\sigma)(x) = (\Phi_1 \cdot v)(\sigma)(x) \in V_\zeta$ . Somit induziert (71) durch Einsetzen von  $\sigma$  für jeden Vektor  $x \in V$  eine Zerlegung  $x = x_1 + x_\zeta$  mit  $x_1 \in V_1$  und  $x_\zeta \in V_\zeta$ .

Es folgt  $V = V_1 \oplus V_\zeta$  und damit  $n = n_1 + n_\zeta$ . Des Weiteren erhält man also die Projektionen auf  $V_1$  bzw. auf  $V_\zeta$  (bezüglich der Zerlegung  $V = V_1 \oplus V_\zeta$ ) durch:

$$(72) \quad \begin{array}{ll} \pi_1 : V \longrightarrow V_1 & \pi_\zeta : V \longrightarrow V_\zeta \\ x \longmapsto (u \cdot \Phi_p)(\sigma)(x) & x \longmapsto (v \cdot \Phi_1)(\sigma)(x) \end{array}$$

Diese hängen nicht von  $u$  und  $v$  in der Darstellung in (71) ab, denn die Polynome  $u, v \in \mathbb{Q}[X]$  sind modulo  $\Phi_1 \cdot \Phi_p$  eindeutig bestimmt und  $(\Phi_1 \cdot \Phi_p)(\sigma) = 0$ .

Ebenfalls aus  $(\Phi_1 \cdot \Phi_p)(\sigma) = 0$  folgt  $\text{Bild}(\Phi_p(\sigma)) \subseteq \text{Kern}(\Phi_1(\sigma))$  und mit der Dimensionsformel für lineare Abbildungen folgt dann bereits Gleichheit, d.h.  $V_1 = \text{Bild}(\Phi_p(\sigma))$  und genauso folgt  $V_\zeta = \text{Bild}(\Phi_1(\sigma))$ .

LEMMA 4.1.1. Seien  $\sigma \in O(V, b)$  und  $V_1 := \text{Kern}(\Phi_1(\sigma))$  sowie  $V_\zeta := \text{Kern}(\Phi_p(\sigma))$ . Dann gilt

$$V = V_1 \perp V_\zeta.$$

BEWEIS. Wie bereits oben gesehen ist  $V = V_1 \oplus V_\zeta$ . Seien nun  $x_1 \in V_1$  und  $x_\zeta \in V_\zeta$ . Wegen  $V_1 = \text{Kern}(\Phi_1(\sigma))$  gilt dann  $\sigma(x_1) = x_1$  und wegen  $V_\zeta = \text{Bild}(\Phi_1(\sigma))$  gibt es ein  $y \in V$  mit  $x_\zeta = (\sigma - \text{id}_V)(y)$ . Es folgt

$$b(x_1, x_\zeta) = b(x_1, (\sigma - \text{id}_V)(y)) = b(\sigma(x_1), \sigma(y)) - b(x_1, y) = 0.$$

□

Die Projektionen  $\pi_1$  und  $\pi_\zeta$  aus (72) sind also die Orthogonalprojektionen auf die Unterräume  $V_1$  bzw.  $V_\zeta$ .

BEMERKUNG 4.1.2. Bei der Zerlegung  $V = V_1 \oplus V_\zeta$  handelt es sich um die sogenannte *Primärzerlegung* von  $V$  bezüglich  $\sigma$ . Ist dabei allgemeiner  $\sigma \in \text{End}_{\mathbb{Q}}(V)$  und  $m_\sigma = \prod f_i$  die Zerlegung in irreduzible Faktoren in  $\mathbb{Q}[X]$ , so ist  $V = \bigoplus \text{Kern}(f_i(\sigma))$  eine Zerlegung in  $\sigma$ -invariante Unterräume mit  $m_{\sigma|_{\text{Kern}(f_i(\sigma))}} = f_i$ . Ist darüber hinaus  $\sigma \in O(V, b)$  mit endlicher Ordnung  $m$ , so ist  $m_\sigma = \prod \Phi_{d_i}$  für gewisse Teiler  $d_i$  von  $m$ . In diesem Fall lässt sich zudem zeigen, dass die Zerlegung orthogonal ist, d.h.  $V = \perp \text{Kern}(\Phi_{d_i}(\sigma))$  gilt. ■

**4.1.1. Das induzierte Teilgitter eines Automorphismus.** Sei nun im Folgenden  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus von  $L$  der Ordnung  $p > 2$ .

Definiert man nun weiter

$$(73) \quad L_1 := L \cap V_1 \quad \text{und} \quad L_\zeta := L \cap V_\zeta,$$

so sind nach Definition  $L_1$  und  $L_\zeta$  als Schnitt des Unterraumes  $V_1$  bzw.  $V_\zeta$  mit  $L$  primitive Teilgitter in  $L$ , da sämtliche Elementarteiler von  $L_1$  bzw.  $L_\zeta$  in  $L$  entweder 0 oder 1 sind.

Des Weiteren ist  $L_1^\perp := \{x \in L \mid b(x, L_1) = 0\} = L \cap V_\zeta = L_\zeta$  und umgekehrt auch  $L_\zeta^\perp = L_1$ . Das Gitter  $M := L_1 \perp L_\zeta$  ist ein Teilgitter von  $L$ , das *induzierte Teilgitter* von  $\sigma$ .



LEMMA 4.1.3. Sei  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung  $p$  und  $L_1, L_\zeta$  wie oben. Dann gilt:

- a) Es gibt ein ganzzahliges Polynom  $\tilde{v} \in \mathbb{Z}[X]$  mit  $1 = \frac{1}{p}\Phi_p + \frac{1}{p}\tilde{v} \cdot \Phi_1$ .
- b) Es gilt  $\pi_1(L) \subseteq \frac{1}{p}L$  und  $\pi_\zeta(L) \subseteq \frac{1}{p}L$ .
- c) Sei  $M := L_1 \perp L_\zeta$ . Dann gilt  $pL \subseteq M \subseteq L$ .

BEWEIS. a) Offenbar besitzt das Polynom  $p - \Phi_p \in \mathbb{Q}[X]$  die Nullstelle 1. Also ist  $p - \Phi_p$  durch  $x - 1 = \Phi_1$  teilbar, d.h. es existiert ein  $\tilde{v} \in \mathbb{Q}[x]$  mit  $p - \Phi_p = \tilde{v} \cdot \Phi_1$ . Wegen  $p - \Phi_p \in \mathbb{Z}[x]$  folgt aus dem Lemma von Gauß, dass auch  $\tilde{v} \in \mathbb{Z}[x]$  ist (das Polynom  $\tilde{v}$  lässt sich auch konkret angeben durch  $\tilde{v} := -\sum_{i=0}^{p-2} (p-i-1)X^i$ ).

b) Nach a) ist  $\pi_1 = \frac{1}{p}\Phi_p(\sigma)$ . Für jedes  $x \in L$  gilt somit  $\pi_1(x) = \frac{1}{p}\Phi_p(\sigma)(x) \in \frac{1}{p}L$ . Wegen  $x = \pi_1(x) + \pi_\zeta(x)$  ist auch  $\pi_\zeta(x) \in \frac{1}{p}L$ .

c) Nach b) gilt  $pL = p\pi_1(L) + p\pi_\zeta(L) \subseteq (L \cap V_1) \perp (L \cap V_\zeta) = L_1 \perp L_\zeta = M$ .  $\square$

Wegen  $pL \subseteq L_1 \perp L_\zeta \subseteq L$  ist auch  $M = L_1 \perp L_\zeta$  ein Gitter auf  $V$ , also folgt  $\dim_{\mathbb{Z}}(L_1) = n_1$  und  $\dim_{\mathbb{Z}}(L_\zeta) = n_\zeta$ . Wegen  $pL \subseteq M$  folgt  $pM^\# \subseteq L^\#$  und mit  $\ell L^\# \subseteq L$  folgt

$$\ell pM^\# \subseteq \ell L^\# \subseteq L.$$

Wegen  $M^\# = L_1^\# \perp L_\zeta^\#$  gilt  $\ell pL_1^\# \subseteq L \cap V_1 = L_1$  und  $\ell pL_\zeta^\# \subseteq L \cap V_\zeta = L_\zeta$ , d.h. die Stufen von  $L_1$  und  $L_\zeta$  sind jeweils Teiler von  $p\ell$ .

Im Folgenden sollen die Determinanten der Gitter  $L_1$  und  $L_\zeta$  genauer bestimmt werden. Dazu betrachtet man die partiellen Dualgitter  $L_1^{\#,p}$  bzw.  $L_\zeta^{\#,p}$  wie in Abschnitt 1.1.2 definiert.

LEMMA 4.1.4. Sei  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung  $p > 2$ .

- a)  $\pi_1(L^\#) = L_1^\#$  und  $\pi_\zeta(L^\#) = L_\zeta^\#$ .
- b) Es gilt  $p \cdot L_1^{\#,p} \subseteq L_1$ .
- c) Es gilt  $\mathfrak{P} \cdot L_\zeta^{\#,p} \subseteq L_\zeta$ .

BEWEIS. a) Da  $L_1$  primitiv in  $L$  ist, gibt es eine  $\mathbb{Z}$ -Basis  $x_1, \dots, x_{n_1}$  von  $L$  so, dass  $x_1, \dots, x_{n_1}$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $L_1$  ist. Bezeichnet  $y_1, \dots, y_{n_1}$  die duale Basis zu  $x_1, \dots, x_{n_1}$ , d.h.  $b(x_i, y_j) = \delta_{ij}$ , so gilt  $L_1^\# = \mathbb{Q}y_1 + \dots + \mathbb{Q}y_{n_1}$  sowie  $y_{n_1+1}, \dots, y_n \in L^\# \cap V_\zeta$ . Folglich ist:

$$\pi_1(y_j) = \begin{cases} y_j & j \in \{1, \dots, n_1\} \\ 0 & j \in \{n_1 + 1, \dots, n\} \end{cases}$$

Es folgt  $\pi_1(L^\#) = \pi_1(\mathbb{Q}y_1 + \dots + \mathbb{Q}y_n) = \mathbb{Q}\pi_1(y_1) + \dots + \mathbb{Q}\pi_1(y_n) = \mathbb{Q}y_1 + \dots + \mathbb{Q}y_{n_1} = L_1^\#$ . Der Beweis von  $\pi_\zeta(L^\#) = L_\zeta^\#$  verläuft völlig analog.

b) Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Definition, denn  $pL_1^{\#,p} = p(\frac{1}{p}L_1 \cap L_1^\#) \subseteq L_1$ .

c) Da  $\pi_1$  und  $\pi_\zeta$  Polynome in  $\sigma$  sind, kommutieren diese mit  $\sigma$ . Wegen  $\sigma^p = \text{id}_V$  folgt leicht aus  $\pi_1 = \frac{1}{p}\Phi_p(\sigma)$ , dass  $\sigma\pi_1 = \pi_1$  gilt und damit dann auch  $(\text{id}_V - \sigma)\pi_\zeta = (\text{id}_V - \sigma)(\text{id}_V - \pi_1) = (\text{id}_V - \sigma)$  gilt. Also ist wegen a)

$$\mathfrak{P} \cdot L_\zeta^\# = (1 - \zeta_p) \cdot L_\zeta^\# = (\text{id}_V - \sigma)(L_\zeta^\#) = (\text{id}_V - \sigma)\pi_\zeta(L^\#) \subseteq (\text{id}_V - \sigma)(\frac{1}{\ell}L) \subseteq \frac{1}{\ell}L$$

und damit wegen  $\mathfrak{P} \cdot L_\zeta^\# \subseteq V_\zeta$  weiter  $\mathfrak{P} \cdot L_\zeta^\# \subseteq \frac{1}{\ell}L \cap V_\zeta = \frac{1}{\ell}L_\zeta$ . Schließlich folgt

$$\mathfrak{P} \cdot L_\zeta^{\#,p} = \mathfrak{P} \cdot (\frac{1}{p}L_\zeta \cap L_\zeta^\#) \subseteq \mathfrak{D}_E^{-1}L_\zeta \cap \frac{1}{\ell}L_\zeta = (\mathfrak{D}_E^{-1} \cap \frac{1}{\ell}\mathfrak{D})L_\zeta = L_\zeta.$$

$\square$

LEMMA 4.1.5. Sei  $\Lambda$  ein ganzzahliges Gitter der Stufe  $p\ell$ , wobei  $p$  Primzahl,  $\ell$  quadratfrei und  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$  gilt. Dann gilt

- a)  $\Lambda^{\#,p} \cap \Lambda^{\#,\ell} = \Lambda$ .
- b)  $\Lambda^{\#,p} + \Lambda^{\#,\ell} = \Lambda^\#$ .
- c)  $\Lambda^{\#,p}/\Lambda \cong \Lambda^\#/\Lambda^{\#,\ell}$ .
- d)  $\nu_p([\Lambda^{\#,p} : \Lambda]) = \nu_p(\det(\Lambda))$ .

BEWEIS. a) Die Inklusion  $\Lambda \subseteq \Lambda^{\#,p} \cap \Lambda^{\#,\ell}$  ist klar. Umgekehrt ist  $\Lambda^{\#,p} \cap \Lambda^{\#,\ell} \subseteq \frac{1}{p}\Lambda \cap \frac{1}{\ell}\Lambda = \Lambda$ , weil  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ .

b) Auch hier ist die Inklusion  $\Lambda^{\#,p} + \Lambda^{\#,\ell} \subseteq \Lambda^\#$  klar. Umgekehrt ist zunächst  $p\ell\Lambda^\# \subseteq \Lambda$ , also  $p\Lambda^\# \subseteq \frac{1}{\ell}\Lambda \cap \Lambda^\# = \Lambda^{\#,\ell}$  und  $\ell\Lambda^\# \subseteq \frac{1}{p}\Lambda \cap \Lambda^\# = \Lambda^{\#,p}$ . Sei nun  $y \in \Lambda^\#$ . Wegen  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$  findet man Zahlen  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $1 = pa + \ell b$ . Es folgt  $y = (pa + \ell b)y = pay + \ell by \in p\Lambda^\# + \ell\Lambda^\# \subseteq \Lambda^{\#,p} + \Lambda^{\#,\ell}$ .

c) Der Homomorphismus  $\Psi : \Lambda^{\#,p} \rightarrow \Lambda^\#/\Lambda^{\#,\ell}$ ,  $y \mapsto y + \Lambda^{\#,\ell}$  besitzt nach a) den Kern  $\Lambda^{\#,p} \cap \Lambda^{\#,\ell} = \Lambda$ . Weiter ist  $\Psi$  nach b) surjektiv. Mit dem Homomorphiesatz folgt die Behauptung.

d) Mit c) gilt  $[\Lambda^\# : \Lambda^{\#,\ell}] = [\Lambda^{\#,p} : \Lambda]$  und es folgt

$$(74) \quad \det(\Lambda) = [\Lambda^\# : \Lambda] = [\Lambda^\# : \Lambda^{\#,\ell}][\Lambda^{\#,\ell} : \Lambda] = [\Lambda^{\#,p} : \Lambda][\Lambda^{\#,\ell} : \Lambda].$$

Offenbar ist der Exponent der Gruppe  $\Lambda^{\#,\ell}/\Lambda$  ein Teiler von  $\ell$ , denn  $\ell\Lambda^{\#,\ell} \subseteq \Lambda$ . Da Exponent und Ordnung einer endlichen Gruppe exakt dieselben Primteiler besitzen und  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$  gilt, folgt  $p \nmid [\Lambda^{\#,\ell} : \Lambda]$  und somit aus (74) die Behauptung.  $\square$

SATZ 4.1.6. Sei  $L$  ein Gitter der Stufe  $\ell$  und  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung  $p$  mit  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ . Seien  $L_1, L_\zeta$  wie oben und  $n_1 = \dim_{\mathbb{Z}}(L_1)$  sowie  $n_\zeta = \dim_{\mathbb{Z}}(L_\zeta)$ . Weiter sei  $N := \frac{n_\zeta}{p-1}$ . Dann gilt

$$L_1^{\#,p}/L_1 \cong \mathbb{F}_p^s \cong L_\zeta^{\#,p}/L_\zeta,$$

wobei  $s \leq \min(n_1, N)$  ist.

BEWEIS. Zunächst wird die Isomorphie  $L_1^{\#,p}/L_1 \cong L_\zeta^{\#,p}/L_\zeta$  bewiesen. Dazu genügt es wie in Lemma 4.1.5 gesehen, die Isomorphie  $L_1^\#/\Lambda_1^{\#,\ell} \cong L_\zeta^\#/\Lambda_\zeta^{\#,\ell}$  zu zeigen.

Sei  $y \in L_1^\#$  beliebig. Da  $L_1$  primitiv in  $L$  ist, kann man die Linearform  $b(\_, y) \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L_1, \mathbb{Z})$  (im Allgemeinen nicht eindeutig) fortsetzen auf  $L$  und erhält damit eine Linearform in  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z})$ . Wegen  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(L, \mathbb{Z}) \cong L^\#$  wird diese dargestellt durch einen Vektor  $\hat{y} \in L^\#$ , d.h. es gilt  $b(\_, y) = b(\_, \hat{y})|_{L_1}$ . Für ein beliebiges  $x \in L_1$  gilt also  $b(x, y) = b(x, \hat{y})$ . Damit liegt der Vektor  $\hat{y} - y$  zunächst offenbar in  $V_1^\perp = V_\zeta$ . Des Weiteren gilt aber auch für jeden Vektor  $x \in L_\zeta$ :

$$\underbrace{b(x, \hat{y})}_{\in \mathbb{Z}} - \underbrace{b(x, y)}_{=0} \in \mathbb{Z}$$

und damit ist  $\hat{y} - y \in L_\zeta^\#$ . Man definiert nun die Abbildung:

$$\begin{aligned} \Psi : L_1^\# &\longrightarrow L_\zeta^\#/\Lambda_\zeta^{\#,\ell} \\ y &\longmapsto (\hat{y} - y) + \Lambda_\zeta^{\#,\ell} \end{aligned}$$

Diese Abbildung  $\psi$  ist wohldefiniert, denn wählt man eine andere Fortsetzung dargestellt durch  $\tilde{y} \in L^\#$ , so ist zunächst  $\tilde{y} - \hat{y} \in L^\# \subseteq \frac{1}{\ell}L$ . Somit gilt

$$(\tilde{y} - y) - (\hat{y} - y) = \tilde{y} - \hat{y} \in \frac{1}{\ell}L \cap L_\zeta^\# = \frac{1}{\ell}L_\zeta \cap L_\zeta^\# = \Lambda_\zeta^{\#,\ell}.$$

Aus diesem Grund hängt die Klasse  $(\hat{y} - y) + \Lambda_\zeta^{\#,\ell}$  nicht von der gewählten Fortsetzung ab.

Weiter überlegt man sich, dass diese Abbildung ein Homomorphismus ist. Ist  $y \in L_1^{\#, \ell}$ , so ist  $y \in \frac{1}{\ell}L_1 \subseteq \frac{1}{\ell}L$ . Weiter ist  $\hat{y} \in L^\# \subseteq \frac{1}{\ell}L$ . Somit ist auch  $\hat{y} - y \in \frac{1}{\ell}L \cap L_\zeta^\# = \frac{1}{\ell}L_\zeta \cap L_\zeta^\# = L_\zeta^{\#, \ell}$  und damit ist  $y \in \text{Kern}(\Psi)$ . Ist umgekehrt  $y \in \text{Kern}(\Psi)$ , so gilt  $\hat{y} - y \in \frac{1}{\ell}L_\zeta \subseteq \frac{1}{\ell}L$ . Da auch  $\hat{y} \in L^\# \subseteq \frac{1}{\ell}L$  gilt, folgt  $y = \hat{y} - (\hat{y} - y) \in \frac{1}{\ell}L \cap L_1^\# = \frac{1}{\ell}L \cap L_1^\# = L_1^{\#, \ell}$ . Also folgt  $\text{Kern}(\Psi) = L_1^{\#, \ell}$ .

Zudem ist  $\Psi$  surjektiv, denn zu gegebenem  $y' \in L_\zeta^\#$  gibt es ein  $\hat{y} \in L^\#$  mit  $b(\_, y') = b(\_, \hat{y})|_{L_\zeta}$ . Wie oben überlegt man sich, dass  $y := \hat{y} - y'$  in  $L_1^{\#, \ell}$  liegt. Weiter gilt nun:

$$b(\_, y) = b(\_, \hat{y} - y') = b(\_, \hat{y})|_{L_1} - b(\_, y')|_{L_\zeta} = b(\_, \hat{y})|_{L_1}$$

Damit wird eine mögliche Fortsetzung von  $b(\_, y)$  dargestellt durch  $\hat{y}$ . Es folgt  $\Psi(y) = (\hat{y} - y) + L_\zeta^{\#, \ell} = y' + L_\zeta^{\#, \ell}$ .

Mit dem Homomorphiesatz folgt schließlich  $L_1^\# / L_1^{\#, \ell} \cong L_\zeta^\# / L_\zeta^{\#, \ell}$ .

Aus Lemma 4.1.4 b) folgt, dass  $pL_1^{\#, p} \subseteq L_1 \subseteq L_1^{\#, p}$  und damit, dass  $L_1^{\#, p} / L_1$  ein Quotient von  $L_1^{\#, p} / pL_1^{\#, p} \cong \mathbb{F}_p^{n_1}$  und deshalb von der Form  $\mathbb{F}_p^s$  mit  $s \leq n_1$  ist.

Ebenso ist nach Lemma 4.1.4 c)  $\mathfrak{P}L_\zeta^{\#, p} \subseteq L_\zeta \subseteq L_\zeta^{\#, p}$  und damit ist  $L_\zeta^{\#, p} / L_\zeta$  ein Quotient von  $L_\zeta^{\#, p} / \mathfrak{P}L_\zeta^{\#, p} \cong (\mathfrak{D}/\mathfrak{P})^N \cong \mathbb{F}_p^N$ . Somit folgt  $s \leq N$ .  $\square$

**4.1.2. Der Typ eines Automorphismus.** Zwar lassen sich alle folgenden Resultate auch für beliebiges (quadratfreies)  $\ell$  mit  $\text{ggT}(\ell, p) = 1$  formulieren, aus Gründen der besseren Lesbarkeit sei jedoch im Folgenden  $\ell$  eine Primzahl  $\neq p$ .

Die Determinanten der Gitter  $L_1$  und  $L_\zeta$  sind also jeweils durch dieselbe  $p$ -Potenz teilbar und die Primfaktorzerlegungen sind damit von der Form

$$\det(L_1) = p^s \cdot \ell^{k_1} \quad \text{und} \quad \det(L_\zeta) = p^s \cdot \ell^{k_\zeta},$$

wobei  $k_1 \in \{0, \dots, \min(k, n_1)\}$  und  $k_\zeta \in \{0, \dots, \min(k, n_\zeta)\}$  mit  $k_1 + k_\zeta = k$  sowie  $s \leq \min(n_1, N)$ . Weiter ist der Index von  $M$  in  $L$  gleich  $p^s$ .

DEFINITION. Sei  $\ell$  eine Primzahl,  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^k$  sowie  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung  $p$  mit  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$ . Seien  $L_1$  und  $L_\zeta$  sowie  $\det(L_1)$  und  $\det(L_\zeta)$  wie oben. Das Tupel

$$p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$$

wird im Folgenden als *Typ* des Automorphismus  $\sigma$  bezeichnet.

BEMERKUNG 4.1.7. Ist  $L$  unimodular, also  $\ell = 1$ , so ist der Typ von  $\sigma$  bereits durch das Tupel  $p - (n_1, n_\zeta) - s$  festgelegt (vgl. [Neb13]).  $\blacksquare$

Mit diesen Bezeichnungen gilt:

PROPOSITION 4.1.8. Sei  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^k$  sowie  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus vom Typ  $p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$ . Weiter sei  $N := \frac{n_\zeta}{p-1}$ . Dann gilt:

$$k_\zeta \equiv_2 0 \quad k_1 \equiv_2 k \quad s \equiv_2 N$$

BEWEIS. Das Gitter  $L_\zeta$  besitzt eine Struktur als  $N$ -dimensionales hermitesches  $\mathfrak{D}$ -Gitter. Es gilt mit Satz 3.1.4 d)

$$\det(L_\zeta) = |d_E|^N \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{b}L_\zeta).$$

Wie in Lemma 3.1.1 gesehen, ist das Ideal  $\mathfrak{v}L_\zeta$  von der Form  $\mathfrak{a}\mathfrak{D}$  für ein  $\mathfrak{o}$ -Ideal  $\mathfrak{a}$ . Somit ist  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L_\zeta) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{D}) = \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2$  und man erhält

$$(75) \quad p^s \cdot \ell^{k_\zeta} = p^{(p-2)N} \cdot \mathfrak{N}(\mathfrak{a})^2.$$

Aus (75) folgt wegen  $\text{ggT}(p, \ell) = 1$  also  $s \equiv_2 (p-2)N$  und  $k_\zeta \equiv_2 0$ . Aus  $p$  ungerade und  $k_1 + k_\zeta = k$  folgen die anderen Behauptungen.  $\square$

**KOROLLAR 4.1.9.** *Sei  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell$  und  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus vom Typ  $p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$ . Es bezeichne  $f^+(\ell)$  den Trägheitsgrad von  $\ell\mathfrak{o}$ . Dann ist  $2f^+(\ell)$  ein Teiler von  $k_\zeta$ .*

**BEWEIS.** Dies ist eine direkte Folgerung aus Satz 3.1.5, denn  $|d_E| = p^{p-2}$ , also  $\nu_\ell(d_E) = 0$ .  $\square$

Zusammenfassend hat man also gezeigt, dass  $n_\zeta$  ein Vielfaches von  $p-1$  ist, wenn es sich bei  $\sigma \in O(L)$  um einen Automorphismus vom Typ  $p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$  handelt. Zudem ist  $k_\zeta$  ein Vielfaches von  $2f^+(\ell)$  und es gilt  $s \equiv_2 N$ . Dies schränkt also die möglichen Typen eines Automorphismus ein.

Zudem muss für die Gitter  $L_1$  und  $L_\zeta$  als Teilgitter von  $L$  folgende triviale Tatsache gelten:

**LEMMA 4.1.10.** *Sei  $L$  ein Gitter und seien  $L_1$  und  $L_\zeta$  wie oben. Dann gilt*

$$\min(L_1) \geq \min(L) \quad \text{und} \quad \min(L_\zeta) \geq \min(L).$$

$\square$

Für jeden potenziellen Typ eines Automorphismus kann also die Zentrumsdichte von  $L_1$  bzw.  $L_\zeta$  nach unten abgeschätzt werden. Liegt diese oberhalb der oberen Schranke (vgl. [CE03] bzw. Anhang A), so ist der entsprechende Typ auszuschließen. Eine Liste der verbleibenden möglichen Typen und damit insbesondere eine Liste der möglichen Primzahlordnungen von Automorphismen erhält man also wie folgt:

---

**Algorithmus 4** Mögliche Typen von Automorphismen.

---

**Eingabe:**  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$  quadratfrei,  $d_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \mathbb{N}$ .

**Ausgabe:** Alle möglichen Typen von Automorphismen eines geraden  $n$ -dimensionalen Gitters mit Stufe  $\ell$ , Determinante  $d_0$  und Minimum  $\geq \mu$

$$\mathcal{N} := \{N(p-1) \mid 1 \leq N \leq \lfloor \frac{n}{p-1} \rfloor\}.$$

**for**  $n_\zeta \in \mathcal{N}$  **do**

$$n_1 := n - n_\zeta$$

$$\mathcal{K} := \{\kappa \mid 0 \leq \kappa \leq \min(k, n_\zeta), 2f^+(\ell) \mid \kappa\}$$

$$\mathcal{S} := \{s \in \mathbb{N} \mid 0 \leq s \leq \min(n_1, \frac{n_\zeta}{p-1}), s \equiv_2 \frac{n_\zeta}{p-1}\}$$

**for**  $s \in \mathcal{S}$  und  $k_\zeta \in \mathcal{K}$  **do**

$$k_1 := k - k_\zeta$$

$$\delta_1 := (\frac{\sqrt{\mu}}{2})^{n_1} \cdot (p^s \cdot \ell^{k_1})^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta_\zeta := (\frac{\sqrt{\mu}}{2})^{n_\zeta} \cdot (p^s \cdot \ell^{k_\zeta})^{-\frac{1}{2}}$$

Falls  $\delta_1$  und  $\delta_\zeta$  unterhalb der zulässigen oberen Schranke, gib folgenden möglichen Typ aus

$$p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$$

**end for**

**end for**

---

**BEISPIEL 4.1.11.** Sei  $L$  ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{16}(5^{+8})$  und  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 7. Jeder solche Automorphismus  $\sigma$  induziert wie oben beschrieben eine Zerlegung  $V = V_1 \perp V_\zeta$ , wobei die Dimension  $n_\zeta = \dim_{\mathbb{Q}}(V_\zeta)$  ein Vielfaches von  $7-1=6$  ist. Somit

folgt also  $n_\zeta \in \{6, 12\}$ . Folglich ist das Gitter  $L_\zeta$  ebenfalls entweder 6- oder 12-dimensional, also als Gitter über  $\mathfrak{D}$  entweder 1- oder 2-dimensional und dementsprechend ist  $n_1$  entweder 10 oder 4.

Das Ideal  $\mathfrak{q} := 5\mathfrak{o}$  ist ein Primideal von  $\mathfrak{o}$ , also gilt für den Trägheitsgrad  $f^+(5) = 3$ . Nach Korollar 4.1.9 ist also  $k_\zeta$  durch  $2 \cdot 3 = 6$  teilbar. Da  $0 \leq k_\zeta \leq \min(8, n_\zeta)$  und  $0 \leq k_1 \leq \min(8, n_1)$  sowie  $k_1 + k_\zeta = 8$  gilt, folgt also entweder  $k_\zeta = 0$  und  $k_1 = 8$  oder  $k_\zeta = 6$  und  $k_1 = 2$ .

Des Weiteren ist wie oben gesehen der Rang  $N$  von  $L_\zeta$  über  $\mathfrak{D}$  kleiner oder gleich 2. Demnach ist auch  $s \leq 2$ .

Ist  $n_\zeta = 6$  bzw.  $N = 1$ , so bleibt wegen  $s \equiv_2 N = 1$  nur der Fall  $s = 1$ . Ist  $k_\zeta = 0$ , so wäre  $L_\zeta$  ein Gitter der Dimension 6 mit Minimum  $\geq 6$  und Determinante 7 und besäße damit eine Dichte von mindestens 1.27, welche oberhalb der Schranke von  $\approx 0.08$  liegt. Ist  $k_\zeta = 6$ , so wäre  $L_1$  ein Gitter der Dimension  $n_1 = 10$  mit Minimum  $\geq 6$  und Determinante  $5^2 \cdot 7$  und besäße eine Dichte von mindestens 0.57, welche ebenfalls über der oberen Schranke von  $\approx 0.05$  liegt.

Somit bleibt also der Fall  $n_\zeta = 12$  bzw.  $N = 2$ . In diesem Fall muss notwendig  $k_\zeta = 6$  gelten, denn anderenfalls wäre  $k_1 = 8 > 4 = n_1$ . Wegen  $s \equiv_2 N$  ist hier also  $s \in \{0, 2\}$ . Im Fall  $s = 0$  wäre  $L_1$  ein 4-dimensionales Gitter mit Minimum  $\geq 6$  und Determinante  $5^2$  und besäße somit eine Dichte von mindestens 0.45, welche auch in diesem Fall über der Schranke von  $\approx 0.13$  läge.

Somit ist also jeder Automorphismus  $\sigma \in O(L)$  der Ordnung 7 vom verbleibenden möglichen Typ  $7 - (4, 12) - 2 - (2, 6)$ .  $\blacksquare$

#### 4.1.3. Die Geschlechter von $L_1$ und $L_\zeta$ .

BEMERKUNG 4.1.12. Ist  $L$  ein gerades Gitter der Stufe  $\ell = 1$  und damit unimodular, so besitzen die Gitter  $L_1$  und  $L_\zeta$  jeweils die Stufe  $p$  bzw. sind  $p$ -elementar. Da es für eine Primzahl  $p > 2$  zu gegebener Dimension und Determinante genau ein Geschlecht  $p$ -elementarer Gitter (vgl. [CS93] §15 Thm. 13), stellt sich in diesem Fall die Frage nach dem genauen Geschlecht von  $L_1$  und  $L_\zeta$  nicht.  $\blacksquare$

Ist  $\ell$  eine Primzahl, so gibt es abgesehen von wenigen Ausnahmen zwei denkbare Geschlechter (auch, wenn  $\ell = 2$  ist, da sowohl  $L_1$  als auch  $L_\zeta$  quadratfreie Stufe besitzen und somit total gerade sind). Im Weiteren soll nun gezeigt werden, dass die Geschlechter von  $L_1$  und  $L_\zeta$  durch den Typ des Automorphismus bereits eindeutig bestimmt sind.

Die Geschlechtssymbole von  $L_1$  bzw.  $L_\zeta$  haben zunächst die Form

$$(76) \quad L_1 \in \Pi_{n_1}(p^{\delta_1 s} \ell^{\varepsilon_1 k_1}) \quad \text{und} \quad L_\zeta \in \Pi_{n_\zeta}(p^{\delta_\zeta s} \ell^{\varepsilon_\zeta k_\zeta})$$

für gewisse  $\delta_1, \varepsilon_1$  sowie  $\delta_\zeta, \varepsilon_\zeta$  aus  $\{\pm 1\}$ . Es genügt dabei, das Geschlechtssymbol von  $L_\zeta$  zu berechnen, denn:

LEMMA 4.1.13. *Seien  $L$  ein Gitter im Geschlecht  $\Pi_n(\ell^{\varepsilon k})$  und  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus vom Typ  $p - (n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$ . Aus dem Geschlechtssymbol von  $L_\zeta$  kann das von  $L_1$  berechnet werden. Genauer gilt mit den Bezeichnungen aus (76):*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_\zeta \cdot \varepsilon \\ \delta_1 &= (-1)^{\frac{s(p-1)}{2}} \cdot \delta_\zeta \end{aligned}$$

BEWEIS. Zunächst ist  $\varepsilon_1 \varepsilon_\zeta = \varepsilon$ , denn die orthogonale Summe der beiden Jordan-Zerlegungen an der Stelle  $\ell$  von  $L_1$  und  $L_\zeta$  ergibt eine von  $L$ , da  $[L : M] = p^s$  und somit  $L_\ell = M_\ell = (L_1)_\ell \perp (L_\zeta)_\ell$  gilt.

Aufgrund der Konstruktion muss das Gitter  $M = L_1 \perp L_\zeta$  mit  $L$  ein ganzzahliges Obergitter vom Index  $p^s$  besitzen. Demnach muss also auch  $M_p$  lokal ein ganzzahliges Obergitter vom Index  $p^s$  besitzen. Die lokale Diskriminantengruppe  $M_p^\# / M_p$  zusammen mit der Diskriminantenform

$\bar{b}(x+M_p, y+M_p) := pb(x, y) + p\mathbb{Z}_p$  ist in diesem Fall ein  $2s$ -dimensionaler quadratischer  $\mathbb{F}_p$ -Vektorraum. Bekanntlich korrespondiert ein ganzzahliges Obergitter von  $M_p$  vom Index  $p^s$  gerade zu einem  $s$ -dimensionalen total isotropen Unterraum von  $M_p^\# / M_p$ . Somit muss  $M_p^\# / M_p$  notwendig hyperbolisch sein.

Sei  $\langle p, \dots, p, p\Delta_1 \rangle$  die  $p$ -modulare Komponente von  $L_1$ , wobei  $\Delta_1$  entsprechend des Geschlechtssymbols eine Einheit ist, welche ein Quadrat ist, wenn  $\delta_1 = 1$  und ein Nicht-Quadrat, falls  $\delta_1 = -1$ . Wie man sich leicht überlegt, gilt  $(L_1)_p^\# / (L_1) \cong \langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{\Delta}_1 \rangle$ , wobei  $\bar{\Delta}_1 := \Delta_1 + p\mathbb{Z}_p$ .

Völlig analog ist  $(L_\zeta)_p^\# / (L_\zeta) \cong \langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{\Delta}_\zeta \rangle$ , wenn  $\langle p, \dots, p, p\Delta_\zeta \rangle$  die  $p$ -modulare Komponente von  $L_\zeta$  ist. Daraus ergibt sich

$$M_p^\# / M_p \cong (L_1)_p^\# / (L_1) \perp (L_\zeta)_p^\# / (L_\zeta) \cong \langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{\Delta}_1 \rangle \perp \langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{\Delta}_\zeta \rangle \cong \langle \bar{1}, \dots, \bar{1}, \bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_\zeta \rangle.$$

Da die Dimension und die Determinante (als Quadratklasse) bereits die Isometrieklasse eines regulären quadratischen Raumes über einem endlichen Körper eindeutig festlegen und diese Form notwendig hyperbolisch sein muss, folgt  $\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_\zeta \mathbb{F}_p^{*2} = (-\bar{1})^s \mathbb{F}_p^{*2}$ .

Nach dem lokalen Quadratesatz sind  $\Delta_1$  und  $\Delta_\zeta$  genau dann in der selben Quadratklasse (d.h.  $\delta_1 = \delta_\zeta$ ), wenn  $\bar{\Delta}_1 \bar{\Delta}_\zeta$  ein Quadrat ist, also wenn  $(-1)^s$  ein Quadrat modulo  $p$  ist. Dies wiederum ist genau dann der Fall, wenn das Legendre-Symbol  $\left(\frac{-1}{p}\right)^s = 1$  ist. Mit  $\left(\frac{-1}{p}\right)^s = (-1)^{\frac{s(p-1)}{2}}$  folgt die Behauptung.  $\square$

**SATZ 4.1.14.** *Das Geschlecht von  $L_\zeta$  (als  $\mathbb{Z}$ -Gitter) ist bereits durch den Typ von  $\sigma$  festgelegt. Genauer gilt für das Geschlechtssymbol  $\Pi_{n_\zeta}(p^{\delta_1 s} \ell^{\varepsilon_\zeta k_\zeta})$  von  $L_\zeta$ :*

$$\delta_\zeta = (-1)^{\frac{k_\zeta}{f(\ell)} + \frac{p-1}{2} \left( \binom{N+1}{2} + \binom{s}{2} \right)}$$

Ist  $\ell \neq 2$ , dann ist

$$\varepsilon_\zeta = (-1)^{\frac{k_\zeta}{f(\ell)} + \frac{\ell-1}{2} \binom{k_\zeta}{2}}.$$

Ist anderenfalls  $\ell = 2$ , so lässt sich  $\varepsilon_\zeta$  anhand folgender Gleichung bestimmen:

$$n_\zeta + s(p-1) + \begin{cases} 0 & \delta_\zeta = +1 \\ 4 & \delta_\zeta = -1 \end{cases} \equiv_8 \begin{cases} 0, & \text{falls } \varepsilon_\zeta = +1 \\ 4, & \text{falls } \varepsilon_\zeta = -1 \end{cases}$$

**BEWEIS.** Wie man leicht anhand des Geschlechtssymbols bzw. der Jordan-Zerlegung von  $L_\zeta$  an der Stelle  $p$  nachrechnet, gilt  $s_p(L_\zeta) = \delta_\zeta \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2} \binom{s}{2}}$ . Da  $L_\zeta$  ein Gitter auf  $V_\zeta$  ist, muss also  $s_p(V_\zeta) = s_p(L_\zeta)$  gelten. Aus Lemma 3.6.5 folgt die erste Behauptung. Analog folgt für  $\ell \neq 2$  die zweite Behauptung ebenfalls aus Lemma 3.6.5 zusammen mit  $s_\ell(L_\zeta) = \delta_\zeta \cdot (-1)^{\frac{\ell-1}{2} \binom{k_\zeta}{2}}$ .

Ist  $\ell = 2$  und  $\delta_\zeta$  bereits berechnet, so kann  $\varepsilon_\zeta$  mit Hilfe der Oddity-Formel (vgl. [CS93] §15 7.7) bestimmt werden. Mit den hier verwendeten Bezeichnungen lässt sich die Oddity (modulo 8) einerseits berechnen als

$$\text{oddity}(L_\zeta) \equiv_8 n_\zeta + s(p-1) + \begin{cases} 0 & \delta_\zeta = +1 \\ 4 & \delta_\zeta = -1 \end{cases}$$

und andererseits als

$$\text{oddity}(L_\zeta) \equiv_8 \begin{cases} 0 & \text{falls } \varepsilon_\zeta = +1 \\ 4 & \text{falls } \varepsilon_\zeta = -1. \end{cases}$$

Somit folgt genau die Behauptung.  $\square$

Zusammenfassend erhält man aus Lemma 4.1.13 und Satz 4.1.14:

KOROLLAR 4.1.15. *Die Geschlechter von  $L_1$  und  $L_\zeta$  (als  $\mathbb{Z}$ -Gitter) sind durch den Typ des Automorphismus  $\sigma$  eindeutig bestimmt.*  $\square$

BEISPIEL 4.1.16. (Fortsetzung) Wie bereits in Beispiel 4.1.11 gesehen, ist jeder Automorphismus der Ordnung 7 eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{16}(5^{+8})$  vom Typ  $7-(4, 12)-2-(2, 6)$ . Mit Satz 4.1.14 können nun die Geschlechtssymbole von  $L_1$  und  $L_\zeta$  berechnet werden. Es ist  $L_1 \in \text{II}_4(5^{-2} 7^{-2})$  und  $L_\zeta \in \text{II}_{12}(5^{-6} 7^{-2})$ .

Das Geschlecht  $\text{II}_4(5^{-2} 7^{-2})$  umfasst genau sieben Klassen, davon drei mit Minimum 2, zwei mit Minimum 4 und jeweils eines mit Minimum 6 bzw. 8. Das Gitter  $L_1$  muss wegen  $\min(L) = 6$  also isometrisch zu einem der letzteren beiden sein, d.h.:

$$L_1^{(1)} \cong \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 & 0 \\ -3 & 6 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & -1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \text{ oder } L_1^{(2)} \cong \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & -4 \\ 1 & 8 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & 8 & -3 \\ -4 & -4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Das Geschlecht  $\text{II}_{12}(5^{-6} 7^{-2})$  besitzt ein Maß von  $\approx 1740472.18$ . Eine vollständige Klassifikation scheint daher unmöglich. Im folgenden Abschnitt soll jedoch erklärt werden, wie die hermitesche Struktur von  $L_\zeta$  benutzt werden kann, um gezielt nur diejenigen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{12}(5^{-6} 7^{-2})$  zu bestimmen, welche einen Automorphismus der Ordnung 7 besitzen.  $\blacksquare$

**4.1.4. Weitere Bedingungen an  $L_1$  und  $L_\zeta$ .** Das folgende Lemma liefert zunächst noch eine weitere notwendige Bedingung an ein potenzielles Gitter  $L_1$ , sofern die Thetareihe von  $L$  bekannt ist:

LEMMA 4.1.17. *Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung  $p$  und  $L_1$  das zugehörige Fixgitter, so sind die Thetareihen von  $L$  und  $L_1$  kongruent modulo  $p$ :*

$$\theta_L \equiv_p \theta_{L_1}$$

*D.h. die Koeffizienten in einer  $q$ -Entwicklung sind jeweils kongruent modulo  $p$ . Insbesondere muss die Thetareihe von  $L$  kongruent zu 1 modulo  $p$  sein, wenn ein Automorphismus fixpunktfrei auf  $L$  operiert.*

BEWEIS. Zunächst operiert die Untergruppe  $\langle \sigma \rangle \subseteq O(L)$  der Ordnung  $p$  auf jeder Schicht  $L_m$  von Vektoren gleicher Quadratlänge in  $L$ , d.h. jede solche Schicht  $L_m$  zerfällt in Bahnen der Mächtigkeit 1 oder  $p$ . Die Vektoren  $x \in L_m$  mit Bahnenlänge 1 sind genau die Vektoren der Quadratlänge  $m$  im Fixgitter  $L_1$ . Somit muss sich die Mächtigkeit von  $L_m$  um ein Vielfaches von  $p$  von der Anzahl der Vektoren der Quadratlänge  $m$  im Fixgitter unterscheiden. Es folgt die Aussage.  $\square$

BEISPIEL 4.1.18. (Fortsetzung) Die Thetareihen der in Beispiel 4.1.16 bestimmten Gitter  $L_1^{(1)}$  und  $L_1^{(2)}$  lauten

$$\begin{aligned} \theta_{L_1^{(1)}} &= 1 + 6q^3 + 6q^4 + 12q^6 + O(q^7) \equiv_7 1 + 6q^3 + 6q^4 + 5q^6 + O(q^7) \text{ und} \\ \theta_{L_1^{(2)}} &= 1 + 18q^4 + 6q^5 + O(q^7) \equiv_7 1 + 4q^4 + 6q^6 + O(q^7), \end{aligned}$$

während die extremale Modulform wie folgt aussieht:

$$f_{\mathcal{M}} = 1 + 2400q^3 + 10800q^4 + 60480q^5 + 223200q^6 + O(q^7) \equiv_7 1 + 6q^3 + 6q^4 + 5q^6 + O(q^7)$$

Folglich scheidet also  $L_1^{(2)}$  als mögliches Gitter  $L_1$  aus und es verbleibt  $L_1^{(1)}$ .  $\blacksquare$

Es soll nun - wie angekündigt - das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  bestimmt werden. Das Ideal  $\ell\mathfrak{o}$  wird im Folgenden *zerlegt* bzw. *träge* genannt, wenn ein Primteiler  $\mathfrak{q} \mid \ell$  zerlegt bzw. träge ist. Da  $E/F$  eine Galoiserweiterung ist, ist diese Definition unabhängig von der Wahl von  $\mathfrak{q}$ .

SATZ 4.1.19. Sei  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus vom Typ  $p-(n_1, n_\zeta) - s - (k_1, k_\zeta)$ . Das Geschlecht der hermiteschen Struktur von  $L_\zeta$ , welche durch  $\sigma$  induziert wird, ist für  $\mathfrak{q} \in \Omega_F$  von der Form

$$L_{\mathfrak{q}} \cong \begin{cases} \mathbb{H}(2-p) \perp \dots \perp \mathbb{H}(2-p) \perp \underbrace{\langle \pi^{\frac{3-p}{2}}, \dots, \pi^{\frac{3-p}{2}} \Delta \rangle}_{s\text{-dimensional}} & \text{falls } \mathfrak{q} = \mathfrak{p} \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle \perp \underbrace{\langle \pi, \dots, \pi \rangle}_{k_{\mathfrak{q}}\text{-dimensional}} & \text{falls } \mathfrak{q} \mid \ell \\ \langle 1, \dots, 1 \rangle & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei  $\mathfrak{N}(\prod_{\mathfrak{q} \mid \ell} \mathfrak{q}^{k_{\mathfrak{q}}} \mathfrak{D}) = \ell^{k_\zeta}$  gilt und  $\Delta$  eine Einheit ist, welche eine Nicht-Norm ist, genau dann, wenn  $\ell$  träge und  $\sum_{\mathfrak{q} \mid \ell} k_{\mathfrak{q}}$  ungerade ist.

BEWEIS. Da die Stufe des Gitters  $L_\zeta$  ein Teiler von  $p\ell$  ist, gilt  $\ell L_\zeta^\# \subseteq \frac{1}{p} L_\zeta \cap L_\zeta^\# = L_\zeta^{\# \cdot p}$ . Wegen Lemma 4.1.4 c) folgt also  $\mathfrak{P} L_\zeta^\# \subseteq \mathfrak{P} L_\zeta^{\# \cdot p} \subseteq L_\zeta$ . Da außerdem  $L_\zeta$  ein ganzzahliges Gitter ist, gilt  $L_\zeta \subseteq L_\zeta^\#$  und aus  $L_\zeta^\# = \mathfrak{D}_E^{-1} L_\zeta^*$  zusammen mit  $\mathfrak{D}_E^{-1} = \mathfrak{P}^{2-p}$  folgt schließlich

$$(77) \quad \mathfrak{P}^{3-p} \ell L_\zeta^* \subseteq L_\zeta \subseteq \mathfrak{P}^{2-p} L_\zeta^*.$$

Jede Stelle  $\mathfrak{q} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$  ist unverzweigt in  $E/F$ . Gilt weiter  $\mathfrak{q} \nmid \ell$ , so folgt aus (77) leicht  $(L_\zeta)_\mathfrak{q}^* = (L_\zeta)_\mathfrak{q}$ , d.h.  $(L_\zeta)_\mathfrak{q}$  ist unimodular und damit gilt:

$$(78) \quad (L_\zeta)_\mathfrak{q} \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle$$

Ist  $\mathfrak{q}$  zerlegt in  $E/F$ , so ist  $\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2$  ein Quadrat an der Stelle  $\mathfrak{q}$  und somit ist  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{q} = 1$ . Ist  $\mathfrak{q}$  träge in  $E/F$ , so enthält gemäß (78) die Norm-Restklasse von  $dV_\zeta$  eine Einheit an der Stelle  $\mathfrak{q}$  und damit ist  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{q} = 1$ .

Ist dagegen  $\mathfrak{q} \in \Omega_F$  mit  $\mathfrak{q} \mid \ell$ , so folgt mit (77) zunächst  $\ell(L_\zeta)_\mathfrak{q}^* \subseteq (L_\zeta)_\mathfrak{q}$  und damit besitzt eine Jordan-Zerlegung von  $(L_\zeta)_\mathfrak{q}$  mit einer unimodularen und einer  $\mathfrak{q}$ -modularen Komponente höchstens zwei Komponenten. Genauer ist

$$(79) \quad (L_\zeta)_\mathfrak{q} \cong \langle 1, \dots, 1 \rangle \perp \underbrace{\langle \pi, \dots, \pi \rangle}_{k_{\mathfrak{q}}\text{-dimensional}}$$

mit der Nebenbedingung, dass  $\mathfrak{N}(\prod_{\mathfrak{q} \mid \ell} \mathfrak{q}^{k_{\mathfrak{q}}} \mathfrak{D}) = \ell^{k_\zeta}$  gelten muss. Für den Fall, dass  $\mathfrak{q}$  zerlegt in  $E/F$  ist, folgt genau wie oben  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{q} = 1$ . Ist  $\mathfrak{q}$  träge, so ist  $\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2$  ein Nicht-Quadrat. Da die Erweiterung  $E_{\mathfrak{q}}/F_{\mathfrak{q}}$  unverzweigt ist, ist nach [O'M63] 63:3 der quadratische Defekt von  $\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2$  gleich  $4\mathfrak{a}_{\mathfrak{q}}$ . Mit [O'M63] 63:11a folgt dann  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, \pi)_\mathfrak{q} = -1$ . Wie in (79) gesehen, liegt  $\pi^{k_{\mathfrak{q}}}$  in der Norm-Restklasse von  $dV_\zeta$  an der Stelle  $\mathfrak{q}$  und somit ist schließlich  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{q} = (-1)^{k_{\mathfrak{q}}}$ .

Es verbleibt die Betrachtung der (einzigen) in  $E/F$  verzweigten Stelle  $\mathfrak{p}$ . Hier folgt aus (77), dass  $\mathfrak{P}^{3-p}(L_\zeta)_\mathfrak{p}^* \subseteq (L_\zeta)_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{P}^{2-p}(L_\zeta)_\mathfrak{p}^*$  gilt, d.h. auch in diesem Fall kommen mit  $\mathfrak{P}^{2-p}$ - und  $\mathfrak{P}^{3-p}$ -modularen Komponenten nur zwei Komponenten in einer Jordan-Zerlegung vor. Aus  $\nu_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L_\zeta)) = p^s$  folgt leicht, dass die  $\mathfrak{P}^{3-p}$ -modulare Komponente Dimension  $s$  besitzt, während die  $\mathfrak{P}^{2-p}$ -modulare Komponente die Dimension  $N - s$  besitzt.

Gemäß [Jac62] 8.1. ist die  $\mathfrak{P}^{2-p}$ -modulare Komponente von der Form  $\mathbb{H}(2-p) \perp \dots \perp \mathbb{H}(2-p)$ , während die  $\mathfrak{P}^{3-p}$ -modulare Komponente von der Form

$$\langle \pi^{\frac{3-p}{2}}, \dots, \pi^{\frac{3-p}{2}}, \pi^{\frac{3-p}{2}} \Delta \rangle$$

für eine Einheit  $\Delta$  ist. Somit enthält die Norm-Restklasse von  $dV_\zeta$  die Einheit  $\Delta$  an der Stelle  $\mathfrak{p}$  und es ist  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{p} = (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, \Delta)_\mathfrak{p}$ . Da für alle Stellen  $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$  das Hilbert-Symbol  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_\zeta)_\mathfrak{p}$



oben bereits bestimmt wurde, folgt aufgrund von Hilberts Reziprozitätsgesetz (vgl. [O'M63] 71:18):

$$(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, \Delta)_{\mathfrak{p}} = (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_{\zeta})_{\mathfrak{p}} = \prod_{\substack{\mathfrak{q} \in \Omega_F \\ \mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}}} (\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, dV_{\zeta})_{\mathfrak{q}} = \begin{cases} 1 & \ell\mathfrak{o} \text{ zerlegt} \\ (-1)^{\sum_{\mathfrak{q}|\ell} k_{\mathfrak{q}}} & \ell\mathfrak{o} \text{ träge} \end{cases}$$

Dabei können im (unendlichen) Produkt die unendlichen Stellen vernachlässigt werden, denn es ist  $(\rho(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2), \rho(dV_{\zeta}))_{\infty} = 1$  für jede Einbettung  $\rho : F \rightarrow \mathbb{R}$ , da  $dV_{\zeta}$  total positiv ist.

Mit [O'M63] 63:10 folgt, dass  $\Delta$  eine Norm ist genau dann, wenn  $(\zeta^2 + \bar{\zeta}^2 - 2, \Delta)_{\mathfrak{p}} = 1$ . Mit obiger Gleichung folgt exakt die Behauptung.  $\square$

#### BEMERKUNGEN 4.1.20.

(i) Genau wie in Korollar 3.3.11 zeigt der obige Satz 4.1.19, dass es bei gegebenem Typ eine 1:1-Korrespondenz gibt zwischen möglichen hermiteschen Geschlechtern von  $L_{\zeta}$  und ganzen  $\mathfrak{o}$ -Idealen  $\mathfrak{a}$  mit  $a = \prod_{\mathfrak{q}|\ell} \mathfrak{q}^{k_{\mathfrak{q}}}$  und:

1.  $k_{\mathfrak{q}} \leq N$
2.  $\mathfrak{N}(\mathfrak{a}\mathfrak{D}) = \ell^{k_{\zeta}}$

Das dem Ideal  $\mathfrak{a}$  entsprechende Geschlecht wird im Folgenden mit  $\mathfrak{G}_{\zeta}(\mathfrak{a})$  bezeichnet. Insbesondere ist im Fall, dass  $\ell\mathfrak{o}$  ein Primideal von  $\mathfrak{o}$  ist, das hermitesche Geschlecht des Gitters  $L_{\zeta}$  durch den Typ des Automorphismus festgelegt.

(ii) Das  $\mathbb{Z}$ -Gitter  $L_{\zeta}$  kann weitere hermitesche Strukturen besitzen, deren Geschlechter nicht von der Form wie in Satz 4.1.19 sind. Diese können dann jedoch nicht durch den Automorphismus  $\sigma$  von  $L$  induziert sein.  $\blacksquare$

Ist  $s = 0$ , so kann das Maß eines hermiteschen Geschlechts  $\mathfrak{G}_{\zeta}(\mathfrak{a})$  mit den Mitteln der Abschnitte 3.3.2 und 3.3.3 berechnet werden (vgl. Korollar 3.3.16).

Ist  $s > 0$ , so müssen zunächst die Darstellungsdichten für ein Gitter  $L$  aus dem Geschlecht  $\mathfrak{G}_{\zeta}(\mathfrak{a})$  an der (verzweigten) Stelle  $\mathfrak{p}$  berechnet werden. Ist  $s$  gerade (und nach Prop. 4.1.8 damit auch  $N$ ), so erhält man mit [GY00] Prop. 6.3.9 und Thm. 7.3

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(L_{\zeta}) = 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{2-p}{2}N^2 + \frac{N}{2} + \frac{s(s-1)}{2}} (1 \pm \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{s}{2}}) \prod_{j=1}^{s/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) \prod_{j=1}^{(N-s)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}),$$

wobei das Vorzeichen im Faktor  $(1 \pm \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-\frac{s}{2}})$  genau dann ein „-“ ist, wenn  $(-1)^{\frac{s(s+1)}{2}} \Delta$  ein Quadrat modulo  $\mathfrak{p}$  ist.

Im Fall  $s$  ungerade (und  $N$  ungerade) gilt ebenfalls mit [GY00] Prop. 6.3.9 und Thm. 7.3:

$$\alpha_{\mathfrak{p}}(L_{\zeta}) = 2\mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{\frac{2-p}{2}N^2 + \frac{N}{2} + \frac{s(s-1)}{2}} \prod_{j=1}^{(s-1)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j}) \prod_{j=1}^{(N-s)/2} (1 - \mathfrak{N}(\mathfrak{p})^{-2j})$$

Zusätzlich ändert sich das Volumenideal um den Faktor  $\mathfrak{P}^s$  im Fall  $s$  gerade bzw.  $\mathfrak{P}^{s-1}$  im Fall  $s$  ungerade. Da die Norm  $\mathfrak{N}(\mathfrak{v}L_{\zeta})$  des Volumenideals mit Potenz  $\frac{N}{2}$  in die Maßformel (vgl. Theorem 3.3.12) eingeht, erhält man insgesamt wegen  $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}) = p$  den folgenden zusätzlichen Korrekturfaktor für die Stelle  $\mathfrak{p}$ :

$$\text{korr}_N^E(\mathfrak{p}^s) := \begin{cases} 1 & s = 0 \\ p^{\frac{s-1}{2}(N-s)} \frac{\prod_{j=(N-s)/2+1}^{(N-1)/2} (1-p^{-2j})}{\prod_{j=1}^{(s-1)/2} (1-p^{-2j})} & s \geq 1, s \text{ ungerade} \\ p^{\frac{s}{2}(N-s+1)} \frac{\prod_{j=(N-s)/2+1}^{N/2} (1-p^{-2j})}{2(1 \pm p^{-\frac{s}{2}}) \prod_{j=1}^{s/2-1} (1-p^{-2j})} & s \geq 2, s \text{ gerade} \end{cases}$$

Dabei ist das Vorzeichen im Fall  $s \geq 2$ ,  $s$  gerade, genau wie oben erklärt zu wählen. Als Gesamtmaß erhält man also:

SATZ 4.1.21. *Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{a})$  mit  $\mathfrak{a} = \prod_{q|\ell} \mathfrak{q}^{k_q}$  lautet:*

$$\text{Maß}(\mathfrak{G}_\zeta(\mathfrak{a})) = \text{std}_N^E \cdot \text{korr}_N^E(\mathfrak{p}^s) \cdot \prod_{q|\ell} \text{korr}_N^E(\mathfrak{q}^{k_q})$$

□

BEISPIEL 4.1.22. (Fortsetzung) Wie bereits weiter oben bemerkt ist das Ideal  $5\mathfrak{o}$  prim. Also ist das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  durch den Typ  $7-(4, 12)-2-(2, 6)$  festgelegt. Dieses Geschlecht besitzt das Maß  $\frac{62}{147}$  und umfasst genau acht Klassen, aufgefasst als  $\mathbb{Z}$ -Gitter (mittels Spurkonstruktion) besitzt genau eines dieser Gitter ein Minimum 2, fünf das Minimum 4 und die folgenden zwei Gitter das Minimum 6:

$$L_\zeta^{(1)} \cong \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3\zeta^4 - 3\zeta^3 + 6 & -\zeta^5 - \zeta^3 - 5\zeta^2 - 3\zeta - 4 \\ -2\zeta^5 + 2\zeta^4 + 3\zeta^3 + 2\zeta^2 + 3\zeta - 1 & -3\zeta^4 - 3\zeta^3 + 6 \end{pmatrix}$$

$$L_\zeta^{(2)} \cong \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -3\zeta^5 - 3\zeta^4 - 3\zeta^3 - 3\zeta^2 + 5 & -\zeta^5 - \zeta^4 - \zeta^2 - 3\zeta - 1 \\ 2\zeta^5 + 3\zeta^4 + 2\zeta^3 + 2\zeta^2 + 3\zeta + 2 & 3\zeta^5 + 3\zeta^2 + 8 \end{pmatrix}$$

Konstruiert man nun Obergitter von  $M^{(1)} := L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(1)}$  und  $M^{(2)} := L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(2)}$  vom Index  $7^2$ , so erhält man bis auf Isometrie jeweils genau ein Gitter der Determinante  $5^8$ , ein extremales mit Minimum 6 und ein weiteres mit Minimum 4. ■

Die obige Reihe von Beispielen 4.1.11, 4.1.16, 4.1.18 und 4.1.22 zeigt, dass es genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{16}(5^{+8})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 7 gibt. Dieses Ergebnis ist insofern nicht neu, da in [BV01] gezeigt werden konnte, dass überhaupt nur genau ein extremales Gitter in diesem Geschlecht existiert. Es zeigt jedoch, wie man mit Hilfe der oben beschriebenen Methode mit relativ geringem rechnerischen Aufwand das extremale Gitter konstruieren kann.

In dem folgenden Abschnitt soll diese Methode auf solche Geschlechter angewendet werden, in denen noch kein extremales Gitter bekannt ist oder die extremalen Gitter nicht vollständig klassifiziert sind.

## 4.2. Anwendung auf die Quebbemannschen Geschlechter

**4.2.1. Das Geschlecht  $\text{II}_{14}(11^{-7})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist 13. Der Nenner des Maßes dieses Geschlechts lautet  $2^{21} \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11$ . Demnach gibt es in diesem Geschlecht jeweils Gitter mit Automorphismen der Ordnung 3, 5, 7 und 11.

Kein Gitter im Geschlecht von  $L$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung 13, denn es ist  $2f^+(5) = 12$  in  $E = \mathbb{Q}(\zeta_{13})$ .

Sei nun  $L \in \text{II}_{14}(11^{-7})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, also  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 854q^4 + 2184q^5 + 2996q^6 + O(q^7)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_7(\Gamma_*(11), \chi_7)$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 7, so ist dieser vom Typ  $7-(2, 12)-2-(1, 6)$ . Das Fixgitter ist in diesem Fall das Gitter  $L_1^{(1)}$  mit Gram-Matrix  $\begin{pmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 42 \end{pmatrix}$ . Da das Ideal  $11\mathfrak{o}$  prim ist, ist das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  durch den Typ von  $\sigma$  eindeutig festgelegt. Dieses Geschlecht besitzt das Maß  $\frac{333}{98}$  und umfasst exakt 49 Gitter, von denen aufgefasst als  $\mathbb{Z}$ -Gitter genau ein Gitter

das Minimum 2, vier Gitter das Minimum 4, 26 Gitter das Minimum 6 und 18 Gitter  $L_\zeta^{(1)} \dots L_\zeta^{(18)}$  das Minimum 8 besitzen. Bildet man für jedes dieser 18 in Frage kommenden Gitter Obergitter von  $L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(i)}$  vom Index  $7^2$ , so stellt sich heraus, dass jedes dieser Gitter bis auf Isometrie genau ein Obergitter (der Determinante  $11^7$ ) besitzt. Von diesen besitzt wiederum genau eines das Minimum 4, die übrigen 17 jeweils das Minimum 6.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5, so gibt es folgende mögliche Typen:

- Den Typ  $5 - (2, 12) - 1 - (1, 6)$  mit Fixgitter  $L_1 \in \text{II}_2(5^{+1}11^{+1})$ . Dieses Geschlecht enthält genau ein Gitter, nämlich  $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix}$  und damit keines mit Minimum 8 oder größer.
- Den Typ  $5 - (6, 8) - 2 - (3, 4)$  mit einem Gitter  $L_1 \in \text{II}_6(5^{+2}11^{-3})$ . Dieses Geschlecht umfasst genau 98 Gitter, 52 mit Minimum 2, 37 mit Minimum 4 und zehn mit Minimum 6, keines mit Minimum 8 oder größer.

Somit kann  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 5 besitzen.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 3, so gibt es folgende mögliche Typen:

- Den Typ  $3 - (2, 12) - 2 - (1, 6)$  mit einem Fixgitter  $L_1 \in \text{II}_2(3^{-2}11^{-1})$ . Dieses Geschlecht enthält jedoch nur das Gitter  $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 18 \end{pmatrix}$  mit Minimum 6.
- Den Typ  $3 - (4, 10) - 3 - (3, 4)$  mit einem Fixgitter  $L_1 \in \text{II}_4(3^{-3}11^{-3})$ . Die Klassenzahl dieses Geschlechts ist 2. Es enthält ein Gitter mit Minimum 6 und ein Gitter  $L_1^{(1)}$  mit Minimum 10. Für letzteres gilt jedoch

$$\theta_{L_1^{(1)}} \equiv_3 1 + q^5 + 2q^9 + O(q^{11}) \neq 1 + 2q^4 + 2q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + O(q^{11}) \equiv_3 f_{\mathcal{M}}.$$

Nach Lemma 4.1.17 kommt also auch dieses nicht als Fixgitter in Frage.

- Den Typ  $3 - (6, 8) - 2 - (3, 4)$  mit einem Fixgitter  $L_1 \in \text{II}_6(3^{-2}11^{-3})$ . Die Klassenzahl dieses Geschlechts ist 37. Es enthält 23 Gitter mit Minimum 2, zwölf Gitter mit Minimum 4 und zwei Gitter mit Minimum 6, keines mit Minimum 8 oder größer.
- Den Typ  $3 - (6, 8) - 4 - (3, 4)$  mit einem Fixgitter  $L_1 \in \text{II}_6(3^{+4}11^{-3})$ . Die Klassenzahl dieses Geschlechts ist ebenfalls 37 (es handelt sich hierbei um die reskalierten Dualgitter des vorherigen Falls). Es enthält zwölf Gitter mit Minimum 2, zehn Gitter mit Minimum 4 und 14 Gitter mit Minimum 6 sowie genau ein Gitter  $L_1^{(1)}$  mit Minimum 8. Für letzteres gilt jedoch

$$\theta_{L_1^{(1)}} \equiv_3 1 + q^5 + 2q^9 + O(q^{11}) \neq 1 + 2q^4 + 2q^6 + q^7 + q^8 + q^9 + O(q^{11}) \equiv_3 f_{\mathcal{M}}.$$

Aufgrund von Lemma 4.1.17 kommt also auch dieses als Fixgitter nicht in Frage.

- Den Typ  $3 - (10, 4) - 2 - (5, 2)$  mit einem Gitter  $L_\zeta \in \text{II}_4(3^{-2}11^{+2})$ . Die Klassenzahl dieses Geschlechts ist sieben. Es umfasst jeweils drei Gitter mit Minimum 2 und 4 sowie ein Gitter mit Minimum 6, keines mit Minimum 8 oder größer.

Also besitzt  $L$  auch keinen Automorphismus der Ordnung 3. Zusammenfassend ist damit gezeigt:

**SATZ 4.2.1.** *Ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{14}(11^{-7})$  besitzt keinen Automorphismus der Ordnung 3, 5, 7 (und 13).*  $\square$

**4.2.2. Das Geschlecht  $\text{II}_{22}(7^{+11})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 23. Mittels Algorithmus 4 erhält man jedoch schnell, dass es in diesem Geschlecht kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 13, 17, 19 oder 23

gibt. Weiter besitzt das Gitter  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \perp \dots \perp \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$  (11-fache orthogonale Summe) einen Automorphismus der Ordnung  $p$  für jede Primzahl  $p \leq 11$ .

Sei nun  $L \in \text{II}_{22}(7^{+11})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, d.h.  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 4906q^4 + 35904q^5 + O(q^6)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{11}(\Gamma_*(7), \chi_{11})$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5, so ist dieser vom Typ  $5 - (6, 16) - 4 - (3, 8)$ . Dann wäre jedoch das Gitter  $L_1$  ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_6(5^{+4}7^{+3})$  mit Minimum 8 oder größer. Dieses Geschlecht umfasst 28 Gitter, sieben mit Minimum 2, elf mit Minimum 4, sieben mit Minimum 6 und drei Gitter mit Minimum 8. Die Thetareihen dieser drei Gitter lauten:

$$\begin{aligned}\theta_{L_1^{(1)}} &\equiv_5 1 + 3q^4 + 3q^5 + O(q^6) \neq 1 + q^4 + 4q^5 + O(q^6) \equiv_5 f_{\mathcal{M}} \\ \theta_{L_1^{(2)}} &\equiv_5 1 + 2q^5 + O(q^6) \neq 1 + q^4 + 4q^5 + O(q^6) \equiv_5 f_{\mathcal{M}} \\ \theta_{L_1^{(3)}} &\equiv_5 1 + 3q^4 + 4q^5 + O(q^6) \neq 1 + q^4 + 4q^5 + O(q^6) \equiv_5 f_{\mathcal{M}^*}\end{aligned}$$

Wegen Lemma 4.1.17 kommen also auch diese nicht als Fixgitter in Frage.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 11, so ist dieser vom Typ  $11 - (2, 20) - 2 - (1, 10)$ . Da  $7\mathfrak{o}$  prim ist, ist das hermitesche Geschlecht von  $L_{\zeta}$  eindeutig festgelegt. Dieses Geschlecht umfasst 3822 Gitter, von denen 1115 ein Minimum 8 besitzen. Andererseits ist das Fixgitter notwendig  $L_1^{(1)} \cong \begin{pmatrix} 22 & 11 \\ 11 & 44 \end{pmatrix}$ . Bildet man Obergitter von  $M^{(i)} = L_1^{(1)} \perp L_{\zeta}^{(i)}$  für  $i = 1, \dots, 1115$  vom Index 11, so erhält man diverse Gitter mit Minimum 2, 4 oder 6, keines mit Minimum 8 oder größer. Somit besitzt ein extremales Gitter in diesem Geschlecht keinen Automorphismus der Ordnung 11.

**SATZ 4.2.2.** *Ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{22}(7^{+11})$  besitzt keinen Automorphismus der Ordnung 5, 11 (13, 17, 19 und 23).*  $\square$

**4.2.3. Das Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 37. Das Gitter  $18.A_2$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung  $p$  für jede Primzahl  $p \leq 19$ . Weiter zeigt sich, dass im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 23, 29, 31 oder 37 existiert.

Sei nun  $L \in \text{II}_{36}(3^{+18})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, d.h.  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 646380q^4 + 24820992q^5 + O(q^6)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{18}(\Gamma_*(3), \chi_{18})$ . Mittels Algorithmus 4 sieht man schnell, dass  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 11 oder 13 besitzt.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 19, so ist dieser vom Typ  $19 - (0, 36) - 0 - (0, 18)$ , also wäre in diesem Fall  $L_1 = \{0\}$  und  $L_{\zeta} = L$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 17, so ist dieser notwendig vom Typ  $17 - (4, 32) - 2 - (2, 16)$ . Die Geschlechtssymbole dieser Gitter lauten  $L_1 \in \text{II}_4(3^{-2}17^{-2})$  und  $L_{\zeta} \in \text{II}_{32}(3^{-16}17^{-2})$ . Das Geschlecht  $\text{II}_4(3^{-2}17^{-2})$  besitzt die Klassenzahl 12 und enthält genau ein Gitter mit Minimum 8:

$$L_1 \cong \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 & 0 \\ -4 & 8 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Da  $3\mathfrak{o}$  prim ist, ist das hermitesche Geschlecht von  $L_{\zeta}$  eindeutig festgelegt. Allerdings scheint es nicht möglich, dieses vollständig zu klassifizieren.

SATZ 4.2.3.

- a) *Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung 11, 13 (23, 29, 31 und 37).*
- b) *Besitzt ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  einen Automorphismus der Ordnung 17, so ist dieser vom Typ  $17 - (4, 32) - 2 - (2, 16)$  mit einem eindeutig bestimmten Gitter  $L_1$ .*
- c) *Besitzt ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  einen Automorphismus der Ordnung 19, so ist dieser vom Typ  $19 - (0, 36) - 0 - (0, 18)$ , d.h. das Gitter besitzt eine Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{19})$ .  $\square$*

BEMERKUNG 4.2.4. Einen möglichen Kandidaten eines Gitters im Geschlecht  $L_\zeta \in \text{II}_{32}(3^{-16}17^{-2})$  erhält man zum Beispiel, indem man das Gitter  $KP_{36}$  und einen Automorphismus dieses Gitters der Ordnung 17 betrachtet. Ein solcher ist stets vom Typ  $17 - (4, 32) - 2 - (4, 16)$ , wobei das Gitter  $L_\zeta$  dann ebenfalls im Geschlecht  $\text{II}_{32}(3^{-16}17^{-2})$  liegt.

Bildet man nun die orthogonale Summe dieses 32-dimensionalen Gitters mit dem obigen 4-dimensionalen Gitter, so stellt sich heraus, dass dieses bis auf Isomorphie genau ein Obergitter vom Index  $17^2$  besitzt. Dieses ist 3-modular, hat Minimum 6 und die Kusszahl 2448.  $\blacksquare$

Der aufgrund der Dichteschranken zunächst noch denkbare Typ  $7 - (6, 30) - 5 - (0, 18)$  kann nicht eintreten, da das Fixgitter  $L_1$  ein Gitter im Geschlecht von  ${}^7(A_6^\#)$  sein müsste, dieses aber einklassig ist und Minimum 6 besitzt. Es verbleiben folgende mögliche Typen:

Typ	Gen( $L_\zeta$ )	Gen( $L_1$ )
$7 - (12, 24) - 4 - (6, 12)$	$\text{II}_{24}(7^{+4}3^{+12})$	$\text{II}_{12}(7^{+4}3^{+6})$
$7 - (6, 30) - 3 - (6, 12)$	$\text{II}_{30}(7^{+3}3^{+12})$	$\text{II}_6(7^{-3}3^{+6})$
$7 - (6, 30) - 5 - (6, 12)$	$\text{II}_{30}(7^{-5}3^{+12})$	$\text{II}_6(7^{+5}3^{+6})$
$7 - (0, 36) - 0 - (0, 18)$	$\text{II}_{36}(3^{+18})$	—

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5, so erhält man zunächst eine Liste von acht möglichen Typen. Hier scheidet zunächst der Typ  $5 - (8, 28) - 7 - (2, 16)$  aus, da  $L_1$  im Geschlecht  $\text{II}_8(3^{+2}5^{+7})$  liegen müsste, welches aber nur drei Gitter mit Minimum 4 besitzt. Auch der Typ  $5 - (8, 28) - 3 - (6, 12)$  kommt nicht in Frage, da  $L_1$  in  $\text{II}_8(3^{-6}5^{-3})$  liegen müsste, worin es jedoch ebenfalls kein Gitter mit Minimum 8 gibt.

Es verbleiben die folgenden sechs möglichen Typen:

Typ	Gen( $L_\zeta$ )	Gen( $L_1$ )
$5 - (16, 20) - 5 - (10, 8)$	$\text{II}_{20}(5^{+5}3^{+8})$	$\text{II}_{16}(5^{+5}3^{+10})$
$5 - (12, 24) - 6 - (10, 8)$	$\text{II}_{24}(5^{+6}3^{+8})$	$\text{II}_{12}(5^{+6}3^{+10})$
$5 - (12, 24) - 6 - (6, 12)$	$\text{II}_{24}(5^{-6}3^{-12})$	$\text{II}_{12}(5^{-6}3^{-6})$
$5 - (8, 28) - 5 - (6, 12)$	$\text{II}_{28}(5^{-5}3^{-12})$	$\text{II}_8(5^{-5}3^{-6})$
$5 - (8, 28) - 7 - (6, 12)$	$\text{II}_{28}(5^{-7}3^{-12})$	$\text{II}_8(5^{-7}3^{-6})$
$5 - (4, 32) - 4 - (2, 16)$	$\text{II}_{32}(5^4 3^{+16})$	$\text{II}_4(5^{+4}3^{+2})$

In den folgenden Fällen ist zwar ein extremales Gitter bekannt, jedoch nicht eine vollständige Klassifikation aller extremalen Gitter.

**4.2.4. Das Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 31. Der Nenner des Maßes dieses Geschlechts lautet  $2^{63} \cdot 3^{20} \cdot 5^8 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2$ . Demnach gibt es in diesem Geschlecht jeweils Gitter mit Automorphismen der Ordnung 3, 5, 7, 11, 13 und 17. Es zeigt sich, dass es kein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 19, 23, 29 und 31 gibt.

Die sechs bekannten extremalen Gitter besitzen zusammengenommen Automorphismen der Ordnung 3, 5 und 17. Ein extremales Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 7 ist bislang nicht bekannt.

Sei nun  $L$  ein (hypothetisches) extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$ . Zunächst stellt sich heraus, dass  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 11 und 13 besitzt.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 7, so ist dieser notwendig vom Typ  $7 - (8, 24) - 4 - (4, 12)$ . Das Fixgitter wäre in diesem Fall ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_8(2^{+4}7^{+4})$ . Dieses Geschlecht umfasst genau 80 Klassen, von denen genau ein Gitter ein Minimum von 6 besitzt, nämlich das eindeutig bestimmte extremale Gitter der Dimension 8 und Stufe 14, hier mit  $L_1^{(1)}$  bezeichnet. Das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  ist durch den Typ eindeutig festgelegt, da das Ideal  $2\mathfrak{o}$  prim ist. Dieses Geschlecht besitzt das Maß  $\frac{1874275}{345744}$  und die Klassenzahl ist 157. Neben 152 Gittern mit Minimum 4 oder kleiner gibt es genau fünf Gitter mit Minimum 6, von denen als  $\mathbb{Z}$ -Gitter genau 2 isometrisch sind. Als mögliche Kandidaten für  $L_\zeta$  verbleiben somit vier Gitter  $L_\zeta^{(1)}, \dots, L_\zeta^{(4)}$ . Bildet man Obergitter von  $M^{(i)} = L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(i)}$  vom Index  $7^4$ , so entsteht auf diese Weise neben einigen Gittern mit Minimum 2 oder 4 genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$ :

Standard Lattice of rank 32 and degree 32

Determinant: 65536

Factored Determinant:  $2^{16}$

Minimum: 6

Inner Product Matrix:

```
[ 6 -2 -3 0 1 0 -1 0 -1 -1 -1 1 -1 3 -2 -1 0 2 3 -2 -1 -2 -3 -1 0 2 1 1 3 2 0 0]
[-2 6 3 0 0 -2 -2 2 0 2 -2 1 0 -1 3 3 2 1 -3 -1 1 0 2 3 -3 -1 0 1 -2 1 1 0]
[-3 3 6 0 0 -1 -1 -2 3 0 3 1 0 0 -2 3 1 1 -2 -1 0 -2 1 2 2 -3 -1 0 1 -3 -2 1 1]
[ 0 0 0 6 -2 3 -1 0 -2 -3 -2 3 2 -2 0 1 0 -1 1 -1 1 2 -2 -3 0 1 -2 -1 -2 1 -1 -1]
[ 1 0 -1 -2 6 -3 -2 -2 0 -1 2 0 -2 3 -2 1 -2 2 1 0 2 -2 -2 2 -1 0 2 -1 2 -1 2 1]
[ 0 -2 -1 3 -3 6 0 1 0 -2 0 1 0 -1 -1 -2 1 -1 0 -1 -1 1 -1 -3 2 -1 -2 1 -1 1 0 0]
[-1 -2 -2 -1 -2 0 6 -2 1 1 -1 -1 -1 0 -2 0 -2 -1 -1 -1 1 1 1 -1 2 0 0 -2 1 0 -1 -1]
[ 0 2 3 0 -2 1 -2 6 -1 3 0 0 0 0 2 0 1 0 -1 0 -3 0 1 2 -3 0 0 1 -2 0 2 2]
[-1 0 0 -2 0 0 1 -1 6 1 2 0 -1 1 2 0 1 0 -2 0 0 -2 2 0 2 0 2 1 0 -2 -1 2]
[-1 2 3 -3 -1 -2 1 3 1 6 0 -2 -1 -1 3 0 1 -1 -2 1 -2 -1 2 3 -2 0 2 0 -1 -1 1 2]
[-1 -2 1 -2 2 0 -1 0 2 0 6 -1 -1 2 0 0 0 -2 0 2 -2 0 1 0 1 0 1 1 0 -3 0 2]
[ 1 1 0 3 0 1 -1 0 0 -2 -1 6 1 1 -1 0 0 1 0 -1 2 0 -2 -2 0 1 0 1 0 2 0 0]
[-1 0 0 2 -2 0 0 0 -1 -1 -1 1 6 0 1 2 -1 -2 0 3 1 0 0 -1 0 3 -1 -1 0 0 -3 0]
[ 3 -1 -2 -2 3 -1 -2 0 1 -1 2 1 0 6 -2 0 0 2 1 0 0 -3 -1 0 0 1 2 1 3 0 1 1]
[-2 3 3 0 -2 -1 0 2 2 3 0 -1 1 -2 6 3 2 -2 -3 1 -1 -1 3 2 -2 2 2 0 -2 -2 -2 2]
[-1 3 1 1 1 -2 -2 0 0 0 0 0 2 0 3 6 1 -1 -1 1 1 0 1 1 -2 2 1 0 0 0 -2 2]
[ 0 2 1 0 -2 1 -1 1 1 1 0 0 -1 0 2 1 6 -1 -2 -1 -1 0 3 0 1 -1 0 2 -1 2 -1 0]
[ 2 1 -2 -1 2 -1 -1 0 0 -1 -2 1 -2 2 -2 -1 -1 6 1 -2 1 -2 -1 1 -1 -1 0 1 1 1 2 -1]
[ 3 -3 -1 1 1 0 -1 -1 -2 -2 0 0 0 1 -3 -1 -2 1 6 -1 -1 0 -3 -2 0 0 -1 0 1 0 0 -1]
[-2 -1 0 -1 0 -1 1 0 0 1 2 -1 3 0 1 1 -1 -2 -1 6 0 0 1 1 1 2 1 -2 0 -1 -2 -1]
[-1 1 -2 1 2 -1 1 -3 0 -2 -2 2 1 0 -1 1 -1 1 -1 0 6 -1 -1 0 1 0 0 -2 1 1 0 -1]
[-2 0 1 2 -2 1 1 0 -2 -1 0 0 0 -3 -1 0 0 -2 0 0 -1 6 1 -2 1 -2 -3 0 -2 1 0 -2]
[-3 2 2 -2 -2 -1 1 1 2 2 1 -2 0 -1 3 1 3 -1 -3 1 -1 1 6 1 0 -1 0 1 -1 -1 -1 0]
[-1 3 2 -3 2 -3 -1 2 0 3 0 -2 -1 0 2 1 0 1 -2 1 0 -2 1 6 -3 0 1 -1 0 -1 2 1]
[ 0 -3 -3 0 -1 2 2 -3 2 -2 1 0 0 0 -2 -2 1 -1 0 1 1 1 0 -3 6 -1 -1 0 0 1 -2 -1]
[ 2 -1 -1 1 0 -1 0 0 0 0 1 3 1 2 2 -1 -1 0 2 0 -2 -1 0 -1 6 2 -1 2 -1 -3 2]
[ 1 0 0 -2 2 -2 0 0 2 2 1 0 0 -1 2 2 1 0 0 -1 1 0 -3 0 1 -1 2 6 -1 1 -1 0 3]
[ 1 1 1 -1 -1 1 -2 1 1 0 1 1 -1 1 0 0 2 1 0 -2 -2 0 1 -1 0 -1 -1 6 0 1 0 0]
[ 3 -2 -3 -2 2 -1 1 -2 0 -1 0 0 3 -2 0 -1 1 1 0 1 -2 -1 0 0 2 1 0 6 1 -1 0]
[ 2 1 -2 1 -1 1 0 0 -2 -1 -3 2 0 0 -2 0 2 1 0 -1 1 1 -1 -1 -1 -1 -1 1 1 6 0 -1]
[ 0 1 1 -1 2 0 -1 2 -1 1 0 0 -3 1 -2 -2 -1 2 0 -2 0 -1 2 -2 -3 0 0 -1 0 6 0]
[ 0 0 1 -1 1 0 -1 2 2 2 2 0 0 1 2 2 0 -1 -1 1 -1 -2 0 1 -1 2 3 0 0 -1 0 6]
```

Dieses Gitter ist 2-modular und besitzt eine Automorphismengruppe mit  $2^{11} \cdot 3 \cdot 7$  Elementen. Nach Konstruktion ist dieses das einzige extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 7.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 17, so ist dieser vom Typ  $17 - (0, 32) - 0 - (0, 16)$ , d.h.  $L$  besitzt eine Struktur als hermitesches Gitter über  $\mathbb{Q}(\zeta_{17})$ . Diese wurden in Abschnitt 3.6.2 bestimmt. Es gibt mit  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$  genau drei solche extremalen Gitter.

SATZ 4.2.5.

- a) *Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung 11, 13 (19, 23, 29 und 31).*
- b) *Es gibt mit  $CQ_{32}$ ,  $MW_{32}$  und  $MW'_{32}$  genau drei extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 17.<sup>1</sup>*
- c) *Es gibt genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 7.* □

**4.2.5. Das Geschlecht  $\text{II}_{24}(3^{+12})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 23. Der Nenner des Maßes dieses Geschlechts lautet  $2^{43} \cdot 3^{17} \cdot 5^4 \cdot 7^4 \cdot 11^2 \cdot 13^2$ . Demnach gibt es in diesem Geschlecht jeweils Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 3, 5, 7, 11 und 13. Zunächst stellt sich heraus, dass kein Gitter in diesem Geschlecht einen Automorphismus der Ordnung 17, 19 oder 23 besitzt.

Mit dem Gitter  $L_{24.2}$  ist ein extremales Gitter in diesem Geschlecht bekannt. Dieses besitzt eine Automorphismengruppe der Ordnung  $2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13$ . Ein extremales Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 5 ist nicht bekannt.

Sei nun  $L \in \text{II}_{24}(3^{+12})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, also  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 26208q^3 + 530712q^4 + O(q^5)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{12}(\Gamma_*(3), \chi_{12})$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 13, so ist dieser vom Typ  $13 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ , d.h.  $L$  selbst besitzt eine Struktur über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_{13})$ . Diese Gitter wurden in 3.6.2 bestimmt, es folgt  $L \cong L_{24.2}$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 11, so ist dieser vom Typ  $11 - (4, 20) - 2 - (2, 10)$ . Das Ideal  $3\mathfrak{o}$  ist prim, sodass das hermitesche Geschlecht von  $L_{\zeta}$  eindeutig bestimmt ist. Dieses umfasst genau 49 Gitter, eines mit Minimum 2 und 48 Gitter mit Minimum 4, keines mit Minimum 6 oder größer.

Sei nun  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 7. Es verbleiben zunächst drei mögliche Typen:

- Der Typ  $7 - (12, 12) - 2 - (6, 6)$  ist nicht möglich, denn das Ideal  $3\mathfrak{o}$  ist prim, daher ist das hermitesche Geschlecht von  $L_{\zeta}$  festgelegt. Dieses umfasst genau drei Gitter, eines mit Minimum 2 und zwei mit Minimum 4.
- Der Typ  $7 - (6, 18) - 3 - (6, 6)$  ist nicht möglich, denn auch hier ist das hermitesche Geschlecht von  $L_{\zeta}$  festgelegt und enthält 14 Gitter, drei mit Minimum 2 und elf mit Minimum 4, keines mit Minimum 6 oder größer.

<sup>1</sup>In der Gitterdatenbank ist mit  $U_{32}$  (vgl. [LatDB], „U32“) noch ein weiteres Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  aufgeführt. Dieses ist genau wie  $MW_{32}$  nicht 2-modular und besitzt einen Automorphismus der Ordnung 17. Gemäß obigem Satz muss also bei geeigneter Bezeichnung gelten:  $MW_{32} \cong U_{32}$ .

- Der Typ  $7 - (0, 24) - 0 - (0, 12)$ , d.h. das Gitter selbst besitzt in diesem Fall eine Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ . Diese Gitter wurden in Abschnitt 3.6.2 bestimmt. Es gibt bis auf Isometrie genau ein Gitter, nämlich  $L_{24.2}$ .

Folglich besitzt  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 7.

Sei nun  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5. Hier verbleiben zwei mögliche Typen:

- Der Typ  $5 - (4, 20) - 3 - (4, 8)$  ist nicht möglich, denn das Gitter  $L_1$  wäre in diesem Fall ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_4(3^{+4}5^{+3})$ . Dieses Geschlecht ist einklassig und enthält nur das Gitter  $L_1^{(1)} \cong {}^3(\mathbb{A}_4^\#)$ . Dieses besitzt jedoch folgende Thetareihe:

$$\theta_{L_1^{(1)}} = 1 + 10q^6 + O(q^7) \equiv_5 1 + O(q^7) \neq 1 + 3q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 3q^6 + O(q^7) \equiv_5 f_{\mathcal{M}}$$

Wegen Lemma 4.1.17 kommt also auch dieses als Fixgitter nicht in Frage.

- Der Typ  $5 - (8, 16) - 4 - (4, 8)$ : Das Geschlecht von  $L_1$  lautet  $\text{II}_8(3^{+4}5^{+4})$  und enthält 91 Gitter. Genau vier dieser Gitter, bezeichnet mit  $L_1^{(1)}, \dots, L_1^{(4)}$ , besitzen das Minimum 6, alle übrigen das Minimum 2 oder 4. Zwei dieser vier Gitter mit Minimum 6 ( $L_1^{(3)}, L_1^{(4)}$ ) kommen nicht in Frage, denn für deren Thetareihen gilt

$$\theta_{L_1^{(3)}} = 1 + 42^3 + 102q^4 + 114q^5 + O(q^6) \equiv_5 1 + 2q^3 + 2q^4 + 4q^5 + O(q^6)$$

$$\theta_{L_1^{(4)}} = 1 + 24^3 + 192q^4 + 24q^5 + O(q^6) \equiv_5 1 + 4q^3 + 2q^4 + 4q^5 + O(q^6),$$

während für die extremale Modulform gilt  $f_{\mathcal{M}} \equiv_5 1 + 3q^3 + 2q^4 + 4q^5 + O(q^6)$ .

Es bleiben zwei denkbare Gitter  $L_1^{(1)}, L_1^{(2)}$  übrig. Weiter ist das Ideal  $3\mathfrak{o}$  prim, folglich ist das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  festgelegt. Dieses enthält genau 13 Gitter, drei mit Minimum 2, neun mit Minimum 4 und genau eines,  $L_\zeta^{(1)}$ , mit Minimum 6. Durch Bilden von Obergittern  $L_1^{(i)} \perp L_\zeta^{(1)}$  erhält man jedoch jeweils genau zwei Gitter mit Minimum 2.

Aus diesen Gründen hat  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 5.

SATZ 4.2.6.

- Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(3^{+12})$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung 5, 11 (17, 19 und 23).
- Ist  $L \in \text{II}_{24}(3^{+12})$  ein extremales Gitter und besitzt  $L$  einen Automorphismus der Ordnung 7 oder 13, so gilt  $L \cong L_{24.2}$ . □

**4.2.6. Das Geschlecht  $\text{II}_{20}(7^{+10})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 19. Der Nenner des Maßes dieses Geschlechts lautet  $2^{35} \cdot 3^{10} \cdot 5^4 \cdot 7^3 \cdot 11^2$ . Mit dem Gitter  $L_{20}$  ist ein extremales Gitter in diesem Geschlecht bekannt. Dieses besitzt eine Automorphismengruppe der Ordnung  $2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$ .

Man kann leicht zeigen, dass es in diesem Geschlecht kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 13, 17 oder 19 gibt.

Sei nun  $L \in \text{II}_{20}(7^{+10})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, d.h.  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 6160q^4 + 27104q^5 + O(q^6)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{10}(\Gamma_*(7), \chi_{10})$ .

Besitzt  $L$  einen Automorphismus der Ordnung 11, so ist dieser vom Typ  $11 - (0, 20) - 0 - (0, 10)$ , d.h. das Gitter  $L$  selbst besitzt eine Struktur über  $\mathbb{Q}(\zeta_{11})$ . Diese wurden in Abschnitt 3.6.2 bestimmt. Es zeigt sich, dass es genau ein solches Gitter gibt, nämlich das Gitter  $L_{20}$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5, so verbleiben zwei mögliche Typen:



- Der Typ  $5 - (4, 16) - 2 - (2, 8)$  ist nicht möglich, denn das Gitter  $L_1$  wäre in diesem Fall ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_4(5^{+2}7^{+2})$ . Dieses Geschlecht umfasst sieben Gitter, von denen sechs ein Minimum von 6 oder kleiner besitzen und genau ein Gitter  $L_1^{(1)}$  das Minimum 8. Dieses Gitter besitzt jedoch die Thetareihe

$$\theta_{L_1^{(1)}} = 1 + 18q^4 + 6q^5 + O(q^6) \equiv_5 1 + 3q^4 + q^5 + O(q^6),$$

während für die extremale Modulform gilt  $f_{\mathcal{M}} \equiv_5 1 + 4q^5 + O(q^6)$ .

- Der Typ  $5 - (4, 16) - 4 - (2, 8)$ : Das Geschlecht des Gitters  $L_1$  lautet in diesem Fall  $\text{II}_4(5^{+4}7^{+2})$ . Dieses Geschlecht ist einklassig und enthält genau ein Gitter  $L_1^{(1)}$  mit Minimum 10. Da das Ideal  $7\mathfrak{o}$  prim ist, ist das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  durch den Typ eindeutig festgelegt. Dieses umfasst genau 1190 Gitter, von denen 241 Gitter  $L_\zeta^{(1)}, \dots, L_\zeta^{(241)}$  ein Minimum von 8 oder größer besitzen. Bildet man Obergitter von  $L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(i)}$  vom Index  $5^4$ , so erhält man auf diese Weise mit dem Gitter  $L_{20}$  genau ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(7^{+10})$ .

Als Ergebnis kann man festhalten:

**SATZ 4.2.7.** *Ist  $L \in \text{II}_{20}(7^{+10})$  ein extremales Gitter und besitzt  $L$  einen Automorphismus der Ordnung 5 oder 11, so gilt  $L \cong L_{20}$ .* □

**4.2.7. Das Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist 19. Der Nenner des Maßes des Geschlechts lautet  $2^{33} \cdot 3^{12} \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 13$ . Demnach gibt es in diesem Geschlecht Gitter mit Automorphismen der Ordnung 3, 5, 7 und 13. Es zeigt sich, dass im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$  kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 17 oder 19 existiert. Zudem folgt wegen  $(\frac{-5}{11}) = -1$  mit Korollar 3.6.8, dass es in diesem Geschlecht kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 11 gibt.

Mittels einer heuristischen Suche im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$  wurde in Zusammenarbeit mit Gilles Bellot folgendes extremale Gitter gefunden:

```

Standard Lattice of rank 20 and degree 20
Determinant: 9765625
Factored Determinant: 5^10
Minimum: 6
Inner Product Matrix:
[ 6  2  2 -1 -3 -1 -2  1  0  1 -1 -2 -3 -1  2  1  1  1  2  3]
[ 2  6 -1  2 -3  1 -1  2  3  2 -3  0 -3  1  1  1 -2  0  0  3]
[ 2 -1  6 -3 -1 -3 -2 -3 -2  2  0 -1  1  2  0 -2  3 -2  2  1]
[-1  2 -3  6 -1  0  1  2  1 -1  0  0  0 -2  0 -1 -1 -1 -1  0]
[-3 -3 -1 -1  6  2  1  1 -3  0  3  2  3  1 -3  0  0  1 -2 -2]
[-1  1 -3  0  2  6  2  1  1  0  1  1  0  0  0  3 -3  3  0  0]
[-2 -1 -2  1  1  2  6  0  0 -3  1  3  3 -2 -2  2  0  2 -1  0]
[ 1  2 -3  2  1  1  0  6  0  1  0  1 -1  0 -1  2 -2  2 -1  1]
[ 0  3 -2  1 -3  1  0  0  6 -1 -2  0 -3  0  1  0 -3  0 -1  2]
[ 1  2  2 -1  0  0 -3  1 -1  6 -2 -2 -1  3  0  0 -1 -1  0  1]
[-1 -3  0  0  3  1  1  0 -2 -2  6  2  3  0 -1 -1  0  0  1 -2]
[-2  0 -1  0  2  1  3  1  0 -2  2  6  3  1 -3  1  0  0 -1 -1]
[-3 -3  1  0  3  0  3 -1 -3 -1  3  3  6  1 -3 -1  1 -1  0 -2]
[-1  1  2 -2  1  0 -2  0  0  3  0  1  1  6  0 -1  0 -1 -1  0]
[ 2  1  0  0 -3  0 -2 -1  1  0 -1 -3 -3  0  6  1  0  0  1  1]
[ 1  1 -2 -1  0  3  2  2  0  0 -1  1 -1 -1  1  6 -1  3  1  1]
[ 1 -2  3 -1  0 -3  0 -2 -3 -1  0  0  1  0  0 -1  6  0  0 -1]
[ 1  0 -2 -1  1  3  2  2  0 -1  0  0 -1 -1  0  3  0  6 -1  1]
[ 2  0  2 -1 -2  0 -1 -1 -1  0  1 -1  0 -1  1  1  0 -1  6 -1]
[ 3  3  1  0 -2  0  0  1  2  1 -2 -1 -2  0  1  1 -1  1 -1  6]

```

Dieses ist nicht 5-modular, sodass streng genommen mit dem reskalierten Dualgitter noch ein weiteres extremales Gitter bekannt ist. Beide Gitter besitzen eine triviale Automorphismengruppe, d.h. mit  $\pm \text{Id}$  genau zwei Automorphismen. Weitere extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$  sind bislang nicht bekannt.

Sei nun  $L$  ein (hypothetisches) extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$ , also  $\theta_L = 1 + 1740q^3 + 22590q^4 + O(q^5)$ . Wie in Algorithmus 4 beschrieben, stellt sich schnell heraus, dass  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 13 besitzt.

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 7, so ist dieser gemäß Algorithmus 4 vom Typ  $7 - (8, 12) - 2 - (4, 6)$ . Dann wäre  $L_1 \in \text{II}_8(5^{+4}7^{-2})$  ein Gitter mit Minimum 6. Das Geschlecht enthält insgesamt 336 Gitter, 242 Gitter mit Minimum 2 und 94 Gitter mit Minimum 4, keines mit Minimum 6.

Festhalten lässt sich also in diesem Fall:

**SATZ 4.2.8.** *Ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{-10})$  besitzt keinen Automorphismus der Ordnung 7 (11, 13, 17 und 19).*  $\square$

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 5, so sind die Ergebnisse des obigen Kapitels größtenteils nicht anwendbar. Jedoch ist klar, dass ein solcher Automorphismus nicht fixpunktfrei operieren kann, da in diesem Fall die Determinante des Gitters  $L = L_\zeta$  die Quadratklasse  $5\mathbb{Q}^{*2}$  besäße und somit nicht gleich  $5^{10}$  sein könnte.

**4.2.8. Das Geschlecht  $\text{II}_{24}(5^{+12})$ .** Die größtmögliche Primzahlordnung eines Automorphismus eines Gitters in diesem Geschlecht ist zunächst 23. Der Nenner des Maßes dieses Geschlechts lautet  $2^{43} \cdot 3^{16} \cdot 5^7 \cdot 7^4 \cdot 11^2$ . Mit dem Gitter  $(C_2, J_2YSL(2, 5)) : C_2$  ist ein extremales Gitter in diesem Geschlecht bekannt. Dieses besitzt eine Automorphismengruppe der Ordnung  $2^{11} \cdot 3^4 \cdot 5^3 \cdot 7$ .

Man kann leicht zeigen, dass es in diesem Geschlecht kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 17, 19 oder 23 gibt. Zudem folgt wegen  $\left(\frac{-5}{13}\right) = -1$  mit Korollar 3.6.8, dass es zudem in diesem Geschlecht auch kein Gitter mit einem Automorphismus der Ordnung 13 gibt.

Sei nun  $L \in \text{II}_{24}(5^{+12})$  ein (hypothetisches) extremales Gitter, d.h.  $\theta_L = f_{\mathcal{M}} = 1 + 37800q^4 + 241920q^5 + O(q^6)$  mit  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{12}(\Gamma_*(5), \chi_{12})$ .

Ist  $\sigma \in O(L)$  ein Automorphismus der Ordnung 11, so ist dieser vom Typ  $11 - (4, 20) - 2 - (2, 10)$ . Das Gitter  $L_1$  ist in diesem Fall ein Gitter im Geschlecht  $\text{II}_4(5^{+2}11^{+2})$ . Dieses umfasst genau zwölf Gitter, vier Gitter mit Minimum 2, vier Gitter mit Minimum 4, zwei Gitter mit Minimum 6 und zwei Gitter mit Minimum 8. Eines dieser beiden Gitter besitzt die folgende Thetareihe:

$$1 + 8q^4 + 4q^5 + O(q^6) \equiv_{11} 1 + 8q^4 + 4q^5 + O(q^6) \neq 1 + 4q^4 + 8q^5 + O(q^6) \equiv f_{\mathcal{M}}$$

Daher verbleibt ein mögliches Gitter  $L_1^{(1)}$ . Da das Ideal  $5\mathfrak{o}$  prim ist, ist das hermitesche Geschlecht von  $L_\zeta$  festgelegt. Dieses umfasst 595 Gitter, eines mit Minimum 2, 78 mit Minimum 4, 515 mit Minimum 6 und genau ein Gitter  $L_\zeta^{(1)}$  mit Minimum 8.

Bildet man nun Obergitter von  $L_1^{(1)} \perp L_\zeta^{(1)}$  vom Index  $11^2$ , so erhält man genau ein Gitter mit Minimum 6 und Kusszahl 1584. Folglich besitzt  $L$  keinen Automorphismus der Ordnung 11.

**SATZ 4.2.9.** *Kein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{24}(5^{+12})$  besitzt einen Automorphismus der Ordnung 11 (13, 17, 19, 23).*  $\square$

## Fazit & Ausblick

In dieser Arbeit konnte ein weiteres extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  konstruiert werden, welches eine weitere Kugelpackung liefert, die ebenso dicht ist wie die bislang dichteste bekannte Packung in Dimension 32. Weiter konnte gezeigt werden, dass dieses Gitter das (bis auf Isometrie) einzige extremale Gitter in seinem Geschlecht mit einem Automorphismus der Ordnung 7 ist.

Darüber hinaus konnten alle extremalen Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  mit einem Automorphismus der Ordnung 17 klassifiziert werden. Gleiches gelang für gewisse Primzahlen in einigen anderen Geschlechtern. Die Ergebnisse legen unter anderem die Vermutung nahe, dass die Gitter  $L_{24,2}$ ,  $(C_2.J_2YSL(2,5)) : C_2$  und  $L_{20}$  jeweils in ihren Geschlechtern  $\text{II}_{24}(3^{+12})$ ,  $\text{II}_{24}(5^{+12})$  bzw.  $\text{II}_{20}(7^{+10})$  die einzigen extremalen Gitter sind.

Des Weiteren konnten mittels Tensorprodukten über dem Ring  $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}]$  einige weitere extremale Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{48}(2^{+24})$  konstruiert werden. Außerdem wurden alle extremalen Gitter bis Dimension  $< 48$  mit Struktur als Ideal-Gitter über Kreisteilungskörpern klassifiziert und einige weitere extremale Gitter mittels mehrdimensionaler Strukturen über Kreisteilungskörpern konstruiert. Insgesamt wurden dabei auch viele bekannte extremale Gitter auf zum Teil anderen Wegen konstruiert.

Die Bestimmung der möglichen Geschlechter hermitescher Strukturen von (z.B.) extremalen Gittern und die exakte Berechnung der Maße dieser Geschlechter erfolgte dabei in einer solchen Allgemeinheit, dass dies nun auch für andere CM-Körper als die in dieser Arbeit behandelten imaginär-quadratischen Zahlkörper und Kreisteilungskörper möglich ist. Interessant wäre beispielsweise die Frage, inwieweit biquadratische oder auch andere Zahlkörper zur Konstruktion extremaler Gitter geeignet sind.

Auf der anderen Seite konnte als weiteres Resultat die Nicht-Existenz eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{24}(7^{+12})$  gezeigt werden.

Eine aktualisierte Tabelle bekannter extremaler Gitter mit allen Ergebnissen dieser Arbeit ist online unter <http://www.mathematik.tu-dortmund.de/~mjuergen> zu finden.

Die ursprüngliche Motivation dieser Arbeit und der noch immer interessanteste offene Fall war und ist die Frage nach der Existenz eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$ , da ein solches dichter als das dichteste bislang bekannte Gitter in Dimension 36 wäre. Für diesen Fall konnte zumindest gezeigt werden, dass die Fourier-Koeffizienten der extremalen Modulform  $f_{\mathcal{M}} = 1 + 646380q^4 + O(q^5)$  nicht-negativ sind und es damit keinen „trivialen“ Grund gibt, der die Existenz eines extremalen Gitters ausschließt.

Auch die Ergebnisse aus Kapitel 2 gaben keinen Hinweis darauf, dass ein solches Gitter nicht existieren könnte. Die Tatsache, dass ein extremales Gitter von seinen Minimalvektoren erzeugt sein muss, ist eine eher erwartbare Eigenschaft und die Liste der verbleibenden möglichen Konfigurationsanzahlen ergibt keine Widersprüche.

Die Methoden aus Kapitel 3 und 4 sind aufgrund von zu hohem Rechenaufwand in diesem Fall ohne Weiteres nicht anwendbar. Insbesondere konnte bislang nicht geklärt werden, ob ein extremales

Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  einen Automorphismus der Ordnung 17 oder 19 besitzen kann. Als Idee könnte man versuchen, die Bestimmung hermitescher Strukturen über Kreisteilungskörpern mit der Nachbarmethode wie folgt zu kombinieren: Zu jedem  $\mathbb{Z}$ -Gitter werden zunächst alle hermiteschen Strukturen bestimmt. Mit Hilfe von Nachbarn werden aus diesen Strukturen neue Gitter berechnet, von denen anschließend wiederum nur die Spurgitter auf Isometrie getestet und gegebenenfalls abgespeichert werden. Einem  $\mathbb{Z}$ -Gitter wird als Beitrag zum Maß die Summe  $\sum |U(L_\sigma)|^{-1}$  über alle hermiteschen Strukturen  $L_\sigma$  von  $L$  zugewiesen. Auf diese Weise ergeben die Maßformeln aus Kapitel 3 ein Abbruchkriterium. Diese Vorgehensweise würde dann einen Vorteil bringen, wenn viele  $\mathbb{Z}$ -Gitter jeweils viele hermitesche Strukturen besitzen und damit einen großen Beitrag zum Maß leisten. Diese Idee soll in naher Zukunft angegangen und umgesetzt werden.

Die Frage nach der Existenz eines extremalen Gitters im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  bleibt also weiterhin ein offenes Problem und es ist nach wie vor schwierig einzuschätzen, ob ein solches Gitter existiert oder nicht. Spätestens seit bekannt ist, dass ein extremales gerades unimodulares Gitter in Dimension 72 existiert, muss man die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass es auch ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  gibt. Bis dahin war man eher von dessen Nicht-Existenz ausgegangen: „*The cases  $\ell = 1, 3, 7$  in dimensions 72, 36, 18, respectively are the most fascinating ones, since here extremal lattices would be more dense than all known lattices in these dimensions. We suspect that they do not exist.*“ ([SSP99]) oder auch „[...] *tends to confirm the widely held opinion that extremal lattices of level respectively 1, 3, 7 and dimension 72, 36, 18 do not exist*“ ([Cou00]).

Die verwendeten Konstruktionsmethoden - insbesondere im letzten Abschnitt - setzen voraus, dass extremale Gitter eine „große“ Automorphismengruppe bzw. zumindest einen Automorphismus „großer“ (Primzahl-)Ordnung besitzen. Bei einer heuristischen Suche nach extremalen Gittern mit dem Computer ist es zusammen mit Gilles Bellot gelungen, ein extremales Gitter im Geschlecht  $\text{II}_{20}(5^{+10})$  zu finden, dessen Automorphismengruppe trivial ist, d.h. mit  $\pm \text{Id}$  genau zwei Automorphismen besitzt. Solche Gitter scheinen nicht mit „sinnvollen“ Methoden konstruierbar, sondern nur per Zufallssuche mit dem Computer zu finden zu sein. Man muss damit rechnen, dass auch in den Geschlechtern  $\text{II}_{14}(11^{-7})$  oder  $\text{II}_{22}(7^{+11})$  solche Gitter existieren.

Ist die Existenz eines solchen „Zufallsgitters“ auch im Geschlecht  $\text{II}_{36}(3^{+18})$  nicht auszuschließen und gibt es kein extremales Gitter mit mehr Symmetrie, so scheint das Problem in Anbetracht der Größe des Geschlechts praktisch kaum entscheidbar zu sein: Selbst unter der optimistischen Annahme, dass der Computer 1 Milliarde Gitter pro Sekunde ohne Wiederholungen betrachten könnte, würde man weitaus länger brauchen als das Universum alt ist (ca. 13,7 Milliarden Jahre), um auch nur einen nennenswerten Teil wie 1% dieses Geschlechts durchzugehen. Eine heuristische Suche nach einem extremalen Gitter in diesem Geschlecht ist also völlig aussichtslos.

Obwohl bekanntlich mit wachsender Dimension die Mehrheit der Gitter in einem Geschlecht eine triviale Automorphismengruppe besitzen, so bleibt trotzdem zumindest die Hoffnung, dass extremale Gitter in interessanten Geschlechtern (etwa im Hinblick auf das Kugelpackungsproblem) eine gewisse Symmetrie und damit eine nicht-triviale Automorphismengruppe besitzen. Zumindest scheinen dies die bekannten Beispiele extremaler Gitter wie etwa im Geschlecht  $\text{II}_{32}(2^{+16})$  zu belegen.





## Literaturverzeichnis

- [Abd04] K. Abdukhalikov, *Unimodular hermitian lattices in dimension 13*, Journal of Algebra **272**(1) (2004), 186–190.
- [AL70] A.O.L. Atkin and J. Lehner, *Hecke operators on  $\Gamma_0(m)$* , Mathematische Annalen **185**(2) (1970), 134–160.
- [Ara33] H. Aramata, *Über die Teilbarkeit der Dedekindschen Zetafunktion*, Proceedings of the Imperial Academy **9**(2) (1933), 31–34.
- [AS09] K. Abdukhalikov and R. Scharlau, *Unimodular lattices in dimensions 14 and 15 over the Eisenstein integers*, Mathematics of Computation **78**(265) (2009), 387–403.
- [Bac95] C. Bachoc, *Voisinage au sens de Kneser pour les réseaux quaternioniens*, Commentarii Mathematici Helvetici **70**(1) (1995), 350–374.
- [Bac97] ———, *Applications of coding theory to the construction of modular lattices*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **78**(1) (1997), 92–119.
- [BCP97] W. Bosma, J. Cannon, and C. Playoust, *The Magma algebra system I: The user language*, Journal of Symbolic Computation **24**(3) (1997), 235–265.
- [BF84] E. Bayer-Fluckiger, *Definite unimodular lattices having an automorphism of given characteristic polynomial*, Commentarii mathematici Helvetici **59** (1984), 509–538.
- [BF99] ———, *Lattices and number fields*, Contemporary Mathematics **241** (1999), 69–84.
- [BN97] C. Bachoc and G. Nebe, *Classification of two genera of 32-dimensional lattices of rank 8 over the Hurwitz order*, Experimental Mathematics **6**(2) (1997), 151–162.
- [BN02] ———, *Zonal functions for the unitary groups and applications to hermitian lattices*, Journal of Number Theory **96**(1) (2002), 55–75.
- [Bum04] D. Bump, *Lie groups*, Springer, New York, 2004.
- [BV01] C. Bachoc and B. Venkov, *Modular forms, lattices and spherical designs*, Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires: Autour des travaux de Boris Venkov (J. Martinet, ed.), vol. 37, L’Enseignement Mathématique, 2001, pp. 87–111.
- [CCN+85] J.H. Conway, R.T. Curtis, S.P. Norton, R.A. Parker, and R.A. Wilson, *Atlas of finite groups: maximal subgroups and ordinary characters for simple groups*, Clarendon, Oxford, 1985.
- [CE03] H. Cohn and N.D. Elkies, *New upper bounds on sphere packings I*, Annals of Mathematics **157** (2003), 689–714.
- [Cho12] S. Cho, *Group schemes and local densities of ramified hermitian lattices in residue characteristic 2*, arXiv:1210.7894 (2012).
- [CK09] H. Cohn and A. Kumar, *Optimality and uniqueness of the Leech lattice among lattices*, Annals of mathematics **170**(3) (2009), 1003–1050.
- [CN13] R. Coulangeon and G. Nebe, *Dense lattices as hermitian tensor products*, Contemporary Mathematics **587** (2013), 47–57.
- [Cou00] R. Coulangeon, *Tensor products of hermitian lattices*, Acta Arithmetica **XCII.2** (2000), 115–130.
- [CS93] J.H. Conway and N.J.A. Sloane, *Sphere packings, lattices and groups. 2. ed.*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290, Springer, New York u.a., 1993.
- [Deu35] M. Deuring, *Algebren*, Springer, Berlin, 1935.
- [Deu50] ———, *Die Anzahl der Typen von Maximalordnungen einer definiten Quaternionenalgebra mit primem Grundzahl*, Jahresbericht DMV **54** (1950), 24–41.
- [DGS77] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel, *Spherical codes and designs*, Geometriae Dedicata **6**(3) (1977), 363–388.
- [DK03] T. Dern and A. Krieg, *Graded rings of hermitian modular forms of degree 2*, manuscripta mathematica **110**(2) (2003), 251–272.

- [Ebe02] W. Ebeling, *Lattices and codes: a course partially based on lectures by F. Hirzebruch. 2. rev. ed.*, Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg+Teubner, Braunschweig u.a., 2002.
- [Elk94] N.D. Elkies, *Mordell-Weil lattices in characteristic 2: I. Construction and first properties*, International Mathematical Research Notices **8** (1994), 343–361.
- [Fei78] W. Feit, *Some lattices over  $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$* , Journal of Algebra **52**(1) (1978), 248–263.
- [Frö83] A. Fröhlich, *Galois module structure of algebraic integers*, Springer, Berlin, 1983.
- [Ger70] L.J. Gerstein, *Integral decomposition of hermitian forms*, American Journal of Mathematics (1970), 398–418.
- [Ger08] ———, *Basic quadratic forms*, American Mathematical Society, 2008.
- [GY00] W.T. Gan and J.-K. Yu, *Group schemes and local densities*, Duke Mathematical Journal **105**(3) (2000), 497–524.
- [Hel12] T. Helle, *Sphärische Polynome und ihre Anwendung auf Gitter kleiner Stufe*, Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2012.
- [Hen09] M. Hentschel, *On hermitian theta series and modular forms*, Ph.D. thesis, RWTH Aachen, 2009.
- [HK89] K. Hashimoto and H. Koseki, *Class numbers of definite unimodular hermitian forms over the rings of imaginary quadratic fields*, Tohoku Mathematical Journal, Second Series **41**(1) (1989), 1–30.
- [Hof91] D.W. Hoffmann, *On positive definite hermitian forms*, manuscripta mathematica **71**(1) (1991), 399–429.
- [Hof13] B. Hoffmann, *Eine Maßformel für hermitesche ZG-Gitter*, Ph.D. thesis, Technische Universität Dortmund, 2013.
- [Iya69] K. Iyanaga, *Class numbers of definite hermitian forms*, Journal of the Mathematical Society of Japan **21**(3) (1969), 359–374.
- [Jac62] R. Jacobowitz, *Hermitian forms over local fields*, American Journal of Mathematics **84**(3) (1962), 441–465.
- [JR11] P. Jenkins and J. Rouse, *Bounds for coefficients of cusp forms and extremal lattices*, Bulletin of the London Mathematical Society **43**(5) (2011), 927–938.
- [JS06] J.C. Jantzen and J. Schwermer, *Algebra*, Springer, Berlin u.a., 2006.
- [Kö11] G. Köhler, *Eta products and theta series identities*, Springer, Berlin u.a., 2011.
- [KL07] M.-H. Kim and S.-G. Lim, *Square classes of totally positive units*, Journal of Number Theory **125**(1) (2007), 1–6.
- [KM02] M. Kitazume and A. Munemasa, *Even unimodular gaussian lattices of rank 12*, Journal of Number Theory **95** (1) (2002), 77–94.
- [Kne57] M. Kneser, *Klassenzahlen definiter quadratischer Formen*, Archiv der Mathematik **8**(4) (1957), 241–250.
- [Kne02] ———, *Quadratische Formen: Neu bearbeitet und herausgegeben in Zusammenarbeit mit Rudolf Scharlau*, Springer, Berlin u.a., 2002.
- [Kom09] S.D. Kominers, *Configurations of extremal even unimodular lattices*, International Journal of Number Theory **5**(3) (2009), 457–464.
- [KP92] F. R. Kschischang and S. Pasupathy, *Some ternary and quaternary codes and associated sphere packings*, IEEE Transactions on Information Theory **38**(2) (1992), 227–246.
- [Lan94] S. Lang, *Algebraic number theory. 2. ed.*, Springer, New York u.a., 1994.
- [Mil69] J. Milnor, *On isometries of inner product spaces*, Inventiones mathematicae **8**(2) (1969), 83–97.
- [Min87] H. Minkowski, *Zur Theorie der positiven quadratischen Formen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **101** (1887), 196–202.
- [Miy89] T. Miyake, *Modular forms*, Springer, Berlin u.a., 1989.
- [MOS75] C.L. Mallows, A.M. Odlyzko, and N.J.A. Sloane, *Upper bounds for modular forms, lattices, and codes*, Journal of Algebra **36**(1) (1975), 68–76.
- [Neb96] G. Nebe, *Finite subgroups of  $GL_{24}(\mathbb{Q})$* , Experimental Mathematics **5**(3) (1996), 163–195.
- [Neb98] ———, *Some cyclo-quaternionic lattices*, Journal of Algebra **199** (1998), 472–498.
- [Neb99] ———, *Orthogonale Darstellungen endlicher Gruppen und Gruppenringe*, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, Aachen, 1999.
- [Neb12] ———, *An even unimodular 72-dimensional lattice of minimum 8*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **673** (2012), 237–247.
- [Neb13] ———, *On automorphisms of extremal even unimodular lattices*, International Journal of Number Theory **9**(08) (2013), 1933–1959.
- [Neb14] ———, *A fourth extremal even unimodular lattice of dimension 48*, Discrete Mathematics **331** (2014), 133–136.
- [Neu92] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Heidelberg, 1992.



- [NP95] G. Nebe and W. Plesken, *Finite rational matrix groups*, vol. 556, American Mathematical Society, 1995.
- [LatDB] G. Nebe and N.J.A. Sloane, *A catalogue of lattices*, <http://www.math.rwth-aachen.de/~Gabriele.Nebe/LATTICES/>.
- [NV96] G. Nebe and B. Venkov, *Nonexistence of extremal lattices in certain genera of modular lattices*, *Journal of Number theory* **60** (1996), 310–317.
- [O'M63] O.T. O'Meara, *Introduction to quadratic forms*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 117, Springer, Berlin u.a., 1963.
- [Pre12] R. Preuss, *Modulformen und Designeigenschaften von Gittern kleiner Stufe*, Diplomarbeit, Technische Universität Dortmund, 2012.
- [PS97] W. Plesken and B. Souvignier, *Computing isometries of lattices*, *Journal of Symbolic Computation* **24(3)** (1997), 327–334.
- [Que81] H.-G. Quebbemann, *Zur Klassifikation unimodularer Gitter mit Isometrie von Primzahlordnung*, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **326** (1981), 158–170.
- [Que84] ———, *A construction of integral lattices*, *Mathematica* **31** (1984), 137–140.
- [Que87] ———, *Lattices with theta functions for  $G(\sqrt{2})$  and linear codes*, *Journal of Algebra* **105(2)** (1987), 443–450.
- [Que92] ———, *Unimodular lattices with isometries of large prime order II*, *Mathematische Nachrichten* **156(1)** (1992), 219–224.
- [Que95] ———, *Modular lattices in Euclidean spaces*, *Journal of Number Theory* **54(2)** (1995), 190–202.
- [Que97] ———, *Atkin-Lehner eigenforms and strongly modular lattices*, *L'Enseignement Mathématique* **43** (1997), 55–66.
- [RS98] E.M. Rains and N.J.A. Sloane, *The shadow theory of modular and unimodular lattices*, *Journal of Number Theory* **73(2)** (1998), 359–389.
- [Sch85] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer, Berlin u.a., 1985.
- [Sch98] A. Schiemann, *Classification of hermitian forms with the neighbour method*, *Journal of Symbolic Computation* **26(4)** (1998), 487–508.
- [Sch13] R. Scharlau, *The extremal lattice of dimension 14, level 7 and its genus*, *Diophantine methods, lattices, and arithmetic theory of quadratic forms* (W.K. Chan et al., eds.), vol. 587, *Contemporary Mathematics*, 2013, pp. 167–184.
- [Ser79] J.P. Serre, *Local fields*, Springer, New York, 1979.
- [SH98] R. Scharlau and B. Hemkemeier, *Classification of integral lattices with large class number*, *Mathematics of Computation* **67(222)** (1998), 737–749.
- [Shi64] G. Shimura, *Arithmetic of unitary groups*, *Annals of Mathematics* (1964), 369–409.
- [Sie35] C.L. Siegel, *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, *Annals of Mathematics, Second Series* **36(3)** (1935), 527–606.
- [SSP99] R. Scharlau and R. Schulze-Pillot, *Extremal lattices*, *Algorithmic algebra and number theory* (B.H. Matzat et al., eds.), Springer, Berlin, Heidelberg, 1999, pp. 139–170.
- [Ste10] W.A. Stein, *Modular forms, a computational approach*, American Mathematical Society, 2010.
- [Van10] S. Vance, *A Mordell inequality for lattices over maximal orders*, *Transactions of the American Mathematical Society* **362(7)** (2010), 3827–3839.
- [Ven01] B. Venkov, *Réseaux et designs sphériques*, *Réseaux euclidiens, designs sphériques et formes modulaires: Autour des travaux de Boris Venkov* (J. Martinet, ed.), vol. 37, *L'Enseignement Mathématique*, 2001, pp. 10–86.
- [Vig80] M.F. Vignéras, *Arithmétique des algèbres de quaternions*, Springer, Berlin u.a., 1980.
- [Vil93] N.J. Vilenkin, *Representation of Lie groups and special functions*, Kluwer Academic Press, 1993.
- [Was82] L.C. Washington, *Introduction to cyclotomic fields*, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 83, Springer, New York u.a., 1982.
- [Zag81] D.B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Zahlkörper*, Springer, Berlin u.a., 1981.



ANHANG A

Dichte Kugelpackungen und obere Schranken

$n$	Gitter $L$	$\det(L)$	$ O(L) $	$\min(L)$	Zentrumsdichte	
					$\delta(L)$	Schranke
1	$\Lambda_1 \cong \mathbb{Z}$	1	2	1	$\frac{1}{2} = 0.5$	0.5
2	$\Lambda_2 \cong \mathbb{A}_2$	3	$2^2 \cdot 3$	2	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.28868$	0.28868
3	$\Lambda_3 \cong \mathbb{A}_3$	$2^2$	$2^4 \cdot 3$	2	$\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0.17678$	0.18616
4	$\Lambda_4 \cong \mathbb{D}_4$	$2^2$	$2^7 \cdot 3^2$	2	$\frac{1}{8} = 0.125$	0.13126
5	$\Lambda_5 \cong \mathbb{D}_5$	$2^2$	$2^8 \cdot 3 \cdot 5$	2	$\frac{1}{8\sqrt{2}} \approx 0.08839$	0.09975
6	$\Lambda_6 \cong \mathbb{E}_6$	3	$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5$	2	$\frac{1}{8\sqrt{3}} \approx 0.07217$	0.08084
7	$\Lambda_7 \cong \mathbb{E}_7$	2	$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	2	$\frac{1}{16} = 0.0625$	0.06933
8	$\Lambda_8 \cong \mathbb{E}_8$	1	$2^{15} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	2	$\frac{1}{16} = 0.0625$	0.06251
9	$\Lambda_9$	$2^9$	$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	4	$\frac{1}{16\sqrt{2}} \approx 0.04419$	0.05900
10	$\Lambda_{10}$	$2^8 \cdot 3$	$2^{15} \cdot 3^3$	4	$\frac{1}{16\sqrt{3}} \approx 0.03608$	0.05804
11	$K_{11}$	$2^2 \cdot 3^5$	$2^9 \cdot 3^4 \cdot 5$	4	$\frac{1}{18\sqrt{3}} \approx 0.03207$	0.05932
12	$K_{12} \cong CT_{12}$	$3^6$	$2^{10} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7$	4	$\frac{1}{27} \approx 0.03704$	0.06279
13	$K_{13}$	$2^2 \cdot 3^5$	$2^9 \cdot 3^5 \cdot 5$	4	$\frac{1}{18\sqrt{3}} \approx 0.03207$	0.06870
14	$\Lambda_{14}$	$2^8 \cdot 3$	$2^{15} \cdot 3^3$	4	$\frac{1}{16\sqrt{3}} \approx 0.03608$	0.07750
15	$\Lambda_{15}$	$2^9$	$2^{17} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	4	$\frac{1}{16\sqrt{2}} \approx 0.04419$	0.08999
16	$\Lambda_{16} \cong BW_{16}$	$2^8$	$2^{21} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$	4	$\frac{1}{16} = 0.0625$	0.10738
17	$\Lambda_{17}$	$2^8$	$2^{19} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$	4	$\frac{1}{16} = 0.0625$	0.13150
18	$\Lambda_{18}$	$2^6 \cdot 3$	$2^{17} \cdot 3^5 \cdot 5$	4	$\frac{1}{8\sqrt{3}} \approx 0.07217$	0.16503
19	$\Lambda_{19}$	$2^7$	$2^{19} \cdot 3^2 \cdot 5$	4	$\frac{1}{8\sqrt{2}} \approx 0.08839$	0.21202
20	$\Lambda_{20}$	$2^6$	$2^{21} \cdot 3^3 \cdot 5$	4	$\frac{1}{8} = 0.125$	0.27855
21	$\Lambda_{21}$	$2^5$	$2^{19} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7$	4	$\frac{1}{4\sqrt{2}} \approx 0.17678$	0.37389
22	$\Lambda_{22}$	$2^2 \cdot 3$	$2^{17} \cdot 3^7 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$	4	$\frac{1}{2\sqrt{3}} \approx 0.28868$	0.51231
23	$\Lambda_{23}$	$2^2$	$2^{19} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	4	$\frac{1}{2} = 0.5$	0.71601
24	$\Lambda_{24} \cong Leech$	1	$2^{22} \cdot 3^9 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 23$	4	1 = 1.0	1.01998
25	$\Lambda_{25}$	$2^{26}$	$2^{23} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 23$	8	$\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.70711$	1.48001
26	$\Lambda_{26}$	$2^{26} \cdot 3$	$2^{23} \cdot 3^4 \cdot 5$	8	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$	2.18614
	$T_{26}$	3	$2^{13} \cdot 3^5 \cdot 7^2 \cdot 13$	4	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$	

$n$	Gitter $L$	$\det(L)$	$\min(L)$	Zentrumsdichte	
				$\delta(L)$	Schranke
27	$\mathcal{B}_{27}$	$2^{27} \cdot 3$	8	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$	3.28537
28	$\mathcal{B}_{28}$	$2^{28} \cdot 3$	8	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$	5.02059
29	$\mathcal{B}_{29}$	$2^{29} \cdot 3$	8	$\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.57735$	7.79782
30	$\mathcal{Q}_{30}$	$2^{14} \cdot 3^3$	6	$\frac{3^{14}}{2^{22}\sqrt{3}} \approx 0.6584$	12.30390
31	$\mathcal{Q}_{31}$	$2^{16} \cdot 3$	6	$\frac{3^{15}}{2^{23}\sqrt{2}} \approx 1.2095$	19.71397
32	$\mathcal{Q}_{32}$ (u.A.)	$2^{16}$	6	$\frac{3^{16}}{2^{24}} \approx 2.5658$	32.06222
33	$\mathcal{Q}_{33}$	$2^{16}$	6	$\frac{3^{17}}{2^{25}\sqrt{3}} \approx 2.2220$	52.90924
34	$\mathcal{Q}_{34}$	$2^{16} \cdot 3$	6	$\frac{3^{17}}{2^{25}\sqrt{3}} \approx 2.2220$	88.55925
35	$\mathcal{B}_{35}$	$2^{32}$	8	$2\sqrt{2} \approx 2.8284$	150.29783
36	$KP_{36}$	$3^{20}$	8	$\frac{2^{18}}{3^{10}} \approx 4.4394$	258.5499

TABELLE A.1. Die jeweils dichtesten bekannten Gitter in Dimension  $\leq 36$  (vgl. [LatDB]) sowie die zur Zeit beste obere Schranke an die Zentrumsdichte (siehe [CE03]).

## Symbolverzeichnis

**In Kapitel 1:**

$(V, b)$	euklidischer Vektorraum
$\det(x_1, \dots, x_n)$	Determinante der Gram-Matrix in Basis $x_1, \dots, x_n$
$\det(L)$	Determinante von $L$
$O(L)$	orthogonale Gruppe von $L$
$\min(L), \text{Min}(L)$	Minimum bzw. Minimalvektoren von $L$
$L_m$	Schicht der Vektoren in $x \in L$ mit $b(x, x) = m$
$L^\sharp$	Dualgitter von $L$ (bzgl. $b$ )
$T(L)$	Diskriminantengruppe von $L$
$\mathbb{Q}_p, \mathbb{Z}_p$	(ganze) $p$ -adische Zahlen
$V_p, L_p$	Komplettierung von $V$ bzw. $L$
$dL_p$	Determinante von $L_p \in \{0\} \cup \mathbb{Q}_p^*/\mathbb{Z}_p^{*2}$
$(a, b)_p$	Hilbert-Symbol an der Stelle $p$
$s_p(V)$	Hasse-Invariante von $V$ bei $p$
$\nu_p(a)$	Exponent von $p$ in Primfaktorzerlegung von $a$
$\ell$	Stufe von $L$
$L^\natural$	reskaliertes Dual $\sqrt{\ell}L^\sharp$
$L^{\sharp, p}$	partielles Dualgitter $\frac{1}{p}L \cap L^\sharp$
$L^{\natural, p}$	reskaliertes partielles Dual $\sqrt{p}L^{\sharp, p}$
$L_0$	(stark) modulares Gitter kleinstmöglicher Dimension
$\theta_L$	Thetareihe von $L$
$ _k$	Strickoperator zum Gewicht $k$
$\mathcal{M}_k(\Gamma, \chi)$	Modulformen vom Gewicht $k$ , zur Gruppe $\Gamma$ und Charakter $\chi$
$\mathcal{S}_k(\Gamma, \chi)$	Spitzenformen vom Gewicht $k$ , zur Gruppe $\Gamma$ und Charakter $\chi$
$\Gamma_0(\ell)$	Hauptkongruenzuntergruppe
$\chi_k$	Charakter $(\frac{-\ell}{d})^k$
$W_p$	Fricke-Involution bzw. Atkin-Lehner Operator
$\Gamma_*(\ell)$	Normalisator von $\Gamma_0(\ell)$ in $SL_2(\mathbb{R})$
$\sigma_0(\ell), \sigma_1(\ell)$	Anzahl bzw. Summe der Teiler von $\ell$
$k_0$	Gewicht von $\theta_{L_0}$ , halbe Dimension von $L_0$
$k_1$	$\frac{12\sigma_0(\ell)}{\sigma_1(\ell)}$
$[a]$	$a$ abgerundet zur nächstkleineren ganzen Zahl
$\Delta(L), \delta(L)$	Kugelpackungs- bzw. Zentrumsdichte von $L$

**In Kapitel 2:**

$(\cdot, \cdot)$	Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{F}_{n,d}$	Menge der homogenen Polynome in $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ vom Grad $d$
$[\cdot, \cdot]$	Skalarprodukt auf $\mathcal{F}_{n,d}$

$\Delta$	Laplace-Operator
$\text{Harm}_{n,d}$	Raum der harmonischen Polynome
$\text{Zon}_{n,d}^\alpha$	Raum der bzgl. $\alpha$ zonalen Polynome
$P_d^\alpha$	Gegenbauerpolynom
$\theta_{L,P}$	Thetareihe mit sphärischen Koeffizienten
$n_{2m,i}(\alpha), n_{2m,i}^\natural(\alpha)$	Konfigurationsanzahlen
$\mathcal{S}_{s,a}$	System zu $s$ Schichten und einem Vektor $\alpha$ mit $(\alpha, \alpha) = a$
$\mathcal{P}_{s,a}$	Polytop mit ganzzahligen Lösungen von $\mathcal{S}_{s,a}$
<b>In Kapitel 3:</b>	
$E, F$	CM-Körper bzw. maximal reeller Teilkörper
$\mathfrak{D}, \mathfrak{o}$	Ganzheitsring von $E$ bzw. $F$
$d_E, d_F$	Diskriminante von $E$ bzw. $F$
$\mathfrak{D}_{E/F}$	Diskriminantenideal von $E/F$
$\mathfrak{D}_E, \mathfrak{D}_F$	Differente von $E$ bzw. $F$
$\mathfrak{D}_{E/F}$	Differente der Erweiterung $E/F$
$\mathfrak{P}, \mathfrak{p}$	Primideal von $E$ bzw. $F$
$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$	(gebrochene) $\mathfrak{D}$ -Ideale
$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \dots$	(gebrochene) $\mathfrak{o}$ -Ideale
$\mathfrak{N}(\mathfrak{A}), \mathfrak{N}(\mathfrak{a})$	Idealnorm $ \mathfrak{D}/\mathfrak{A} $ von $\mathfrak{A}$ bzw. $ \mathfrak{o}/\mathfrak{a} $ von $\mathfrak{a}$
$\nu_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{A})$	Exponent von $\mathfrak{P}$ in Zerlegung von $\mathfrak{A}$
$\text{Cl}_E$	Klassengruppe von $E$
$(V, h)$	hermitescher $E$ -Vektorraum
$N$	Dimension von $V$ über $E$
$L$	$\mathfrak{D}$ -Gitter
$\text{rk}(L)$	Rang von $L$
$U(L)$	hermitesche Automorphismengruppe von $L$
$L^*$	hermitesches Dualgitter von $L$ (bzgl. $h$ )
$\mathfrak{s}L, \mathfrak{n}L, \mathfrak{v}L$	Skalen-, Norm- und Volumenideal von $L$
$\text{Tr}_{\mathbb{Q}}^E, N_{\mathbb{Q}}^E$	Spur und Norm von $E/\mathbb{Q}$
$b_h$	Spurform zu $h$
$b_\alpha$	Spurform zur 1-dimensionalen Form $\alpha x \bar{y}$
$I(\mathfrak{A}, \alpha)$	Ideal-Gitter zu Ideal $\mathfrak{A}$ und $\alpha \in F$
$L(\mathfrak{A}, \alpha)$	Spurgitter zu $I(\mathfrak{A}, \alpha)$
$\text{sign}$	Signumsfunktion (Vorzeichen)
$\Sigma(\alpha)$	Vorzeichenvektor $(\text{sign}(\rho(\alpha)))_{\rho: F \hookrightarrow \mathbb{R}} \in \{\pm 1\}^{[F:\mathbb{Q}]}$
$\gg 0$	total positiv
$\mathcal{A}$	Repräsentanten von $\text{Cl}_E$ (ggf. modulo Galoisgruppe)
$\mathcal{B}$	$\{\ell \mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D} \mid \mathfrak{B} \text{ ein } \mathfrak{D}\text{-Ideal mit } \mathfrak{N}(\mathfrak{B}) = d_0\}$
$\mathcal{E}$	Repräsentanten von $\mathfrak{o}^*/\mathfrak{o}^{+2}$
$\mathcal{E}^+$	Repräsentanten von $\{\varepsilon N_F^E(\mathfrak{D}^*) \mid \varepsilon \gg 0\}$
$\Omega_F$	Menge der Stellen von $F$
$F_{\mathfrak{p}}, E_{\mathfrak{P}}$	Komplettierungen von $F$ an $\mathfrak{p}$ bzw. $E$ an $\mathfrak{P}$
$E_{\mathfrak{p}}$	Komplettierung $F_{\mathfrak{p}} \otimes_F E$
$V_{\mathfrak{p}}, L_{\mathfrak{p}}$	Komplettierung von $V$ bzw. $L$ bei $\mathfrak{p}$
$\pi, \Pi$	Uniformisierendes an der Stelle $\mathfrak{p}$ bzw. $\mathfrak{P}$

$\mathfrak{d}_{\mathfrak{p}}(\varepsilon)$	quadratischer Defekt von $\varepsilon$ bei $\mathfrak{p}$
$\mathbb{H}(i)$	(skalierte) hyperbolische Ebene $\begin{pmatrix} 0 & \Pi^i \\ \bar{\Pi}^i & 0 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{a})$	zu $\mathfrak{a}$ korrespondierendes Geschlecht vom Rang $N$ über dem Körper $E$
$\mathfrak{G}_N^E(\alpha)$	das Geschlecht $\mathfrak{G}_N^E(\alpha\mathfrak{o})$
$\mathfrak{G}_N^E$	das Geschlecht $\mathfrak{G}_N^E(\mathfrak{o})$
$\alpha_{\mathfrak{p}}(L)$	Darstellungsdichte von $L$ an der Stelle $\mathfrak{p}$
$\zeta_K(s)$	Dedekindsche Zetafunktion zum Körper $K$
$\chi_{E/F}$	Verallgemeinerung des Kronecker-Charakters
$L(s, \chi_{E/F})$	$L$ -Reihe zum Charakter $\chi_{E/F}$
$\Gamma(s)$	Gamma-Funktion
$t$	Anzahl der in der Erweiterung $E/F$ verzweigten Stellen $\mathfrak{p} \in \Omega_F$
$\text{std}_N^E$	$N$ -dimensionales Standardmaß über dem Körper $E$
$\mathcal{X}_m$	Menge (Gruppe) der Dirichlet-Charaktere modulo $m$
$\hat{\chi}$	assoziierter primitiver Charakter von $\chi$
$\mathcal{X}_K$	zu $K$ assoziierte Untergruppe von $\mathcal{X}_m$
$\mathcal{X}_K^0, \mathcal{X}_K^1$	Teilmenge von $\mathcal{X}_K$ der geraden bzw. ungeraden Charaktere
$B_{j,\chi}$	verallgemeinerte Bernoulli-Zahl
$L(x, \mathfrak{P})$	$\mathfrak{P}$ -Nachbar von $L$ zum Vektor $x$
$(\alpha, \beta)_{\mathfrak{p}}$	Hilbert-Symbol an der Stelle $\mathfrak{p}$
$\mathfrak{U}_N^E$	Geschlecht unimodularer Gitter vom Rang $N$ über $E$
$Q$	Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$
$d_Q$	Diskriminante von $Q$
$\mathbb{Q}_{\ell, \infty}$	definite Quaternionenalgebra über $\mathbb{Q}$ mit Diskriminante $\ell$
$\mathfrak{M}$	Maximalordnung von $Q$
$\mathfrak{D}_{\mathfrak{M}}$	Differente zu $\mathfrak{M}$
$L$	$\mathfrak{M}$ -Gitter
$d_L$	Diskriminante von $L$
$\mathfrak{U}_N^{\mathfrak{M}}$	Geschlecht unimodularer $\mathfrak{M}$ -Gitter vom Rang $N$
<b>In Kapitel 4:</b>	
$E, F$	$\mathbb{Q}(\zeta_p), \mathbb{Q}(\zeta_p + \bar{\zeta}_p)$
$\Phi_m$	$m$ -tes Kreisteilungspolynom
$m_{\sigma}$	Minimalpolynom von $\sigma$
$\sigma$	Automorphismus von $L$ der Ordnung $p$
$\mathfrak{P}, \mathfrak{p}$	$(1 - \zeta_p)\mathfrak{D}, (1 - \zeta_p)(1 - \bar{\zeta}_p)\mathfrak{D}$
$V_1, V_{\zeta}$	Kern( $\Phi_1(\sigma)$ ) bzw. Kern( $\Phi_p(\sigma)$ )
$n_1, n_{\zeta}$	Dimensionen von $V_1$ bzw. $V_{\zeta}$
$N$	$\frac{n_{\zeta}}{p-1}$ , Dimension von $V_{\zeta}$ über $\mathbb{Q}(\zeta_p)$
$\pi_1, \pi_{\zeta}$	Orthogonalprojektionen auf $V_1$ bzw. $V_{\zeta}$
$L$	Gitter der Stufe $\ell$ (Primzahl) und Determinante $\ell^k$
$L_1, L_{\zeta}$	$V_1 \cap L$ bzw. $V_{\zeta} \cap L$
$s$	$\nu_p(\det(L_1)) = \nu_p(\det(L_{\zeta}))$
$k_1, k_{\zeta}$	$\nu_{\ell}(\det(L_1))$ bzw. $\nu_{\ell}(\det(L_{\zeta}))$
$\varepsilon$	Vorzeichen von $\ell$ im Geschlechtssymbol $\Pi_n(\ell^{\varepsilon k})$ von $L$
$\delta_1, \varepsilon_1$	Vorzeichen von $p$ bzw. $\ell$ im Geschlechtssymbol $\Pi_{n_1}(p^{\delta_1 s} \ell^{\varepsilon_1 k_1})$ von $L_1$
$\delta_{\zeta}, \varepsilon_{\zeta}$	Vorzeichen von $p$ bzw. $\ell$ im Geschlechtssymbol $\Pi_{n_{\zeta}}(p^{\delta_{\zeta} s} \ell^{\varepsilon_{\zeta} k_{\zeta}})$ von $L_{\zeta}$





## Beschreibung einiger Magma-Funktionen

- IsModular(L) : Lat -> BoolElt**  
 Testet, ob das Gitter  $L$  modular ist.
- IsStronglyModular(L) : Lat -> BoolElt**  
 Testet, ob das Gitter  $L$  stark modular ist.
- ModularLattice(n,l) : RngIntElt, RngIntElt -> Lat**  
 Konstruiert ein  $n$ -dimensionales  $\ell$ -modulares Gitter für eine Primzahl  $\ell$ .
- ExtremalModularForm(k,l) : RngIntElt, RngIntElt -> RngSerPowElt**  
 Berechnet für die Quebbemannschen Stufen  $\ell \in \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 11, 14, 15, 23\}$  die extreme Modulform in  $\mathcal{M}_k(\Gamma_*(\ell), \chi_k)$ .
- Superlattices(L,p,s) : Lat, RngIntElt, RngIntElt -> SeqEnum[Lat]**  
 Berechnet eine Liste aller ganzzahligen Obergitter von  $L$  vom Index  $p^s$  mit  $p$  Primzahl.
- LengthPolynomial(L,p) : Lat, RngIntElt -> RngUPolElt**  
 Berechnet das Längenzählerpolynom von  $L$  zur Primzahl  $p$ .
- VectorConfigurations(L,s,a) : Lat, RngIntElt, RngIntElt**  
 Berechnet alle Konfigurationsanzahlen  $n_{m,i}(\alpha)$  in den ersten  $s$  Schichten für  $L$  und einen Vektor  $\alpha \in L$  mit  $(\alpha, \alpha) = a$ .
- PossibleConfigurations(n,l,s,a) : RngIntElt, RngIntElt, RngIntElt, RngIntElt**  
 Berechnet alle möglichen Konfigurationsanzahlen  $n_{m,i}(\alpha)$  in den ersten  $s$  Schichten für ein Gitter  $L$  der Stufe  $\ell$ , Dimension  $n$  und Determinante  $\ell^{n/2}$  und einen Vektor  $\alpha \in L$  mit  $(\alpha, \alpha) = a$ .
- HermLattice(H) : AlgMatElt -> HermLat**  
 Gibt das (freie) hermitesche Gitter mit der Gram-Matrix  $H$  bzgl. der Standardbasis zurück.
- HermLattice(E,N,l) : FldNum, RngIntElt, RngIntElt -> HermLat**  
 Gibt ein Gitter im Hauptgeschlecht  $\mathfrak{O}_N^E(\ell^{N/2})$  zurück. Der Körper  $E$  muss dabei entweder ein imaginär-quadratischer Zahlkörper oder ein  $p$ -ter Kreisteilungskörper für eine Primzahl  $p$  sein.
- SteinitzClass(L) : HermLat -> RngOrdFracIdl**  
 Berechnet die Steinitz-Klasse des Gitters  $L$ .
- ScaleIdeal(L) : HermLat -> RngOrdFracIdl**  
 Berechnet das Skalenideal von  $L$ .
- NormIdeal(L) : HermLat -> RngOrdFracIdl**  
 Berechnet das Normideal von  $L$ .
- VolumeIdeal(L) : HermLat -> RngOrdFracIdl**  
 Berechnet das Volumenideal von  $L$ .
- TransferLattice(L) : HermLat -> Lat**  
 Berechnet das Spurgitter von  $L$ .

**IdealLattices**( $d_0, E$ ) **RngIntElt**, **FldNum**  $\rightarrow$  **SeqEnum**  
 Berechnet eine Liste aller Ideal-Gitter der Determinante  $d_0$  über dem Körper  $E$ .

**StandardMass**( $E, N$ ) : **FldNum**, **RngIntElt**  $\rightarrow$  **FldRatElt**  
 Das  $N$ -dimensionale Standardmaß  $\text{std}_N^E$  über dem Körper  $E$ .

**Mass**( $E, N, a$ ) : **FldNum**, **RngIntElt**, **RngOrdId1**  $\rightarrow$  **FldRatElt**  
 Das Maß des Geschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(a)$ .

**Mass**( $E, N, 1$ ) : **FldNum**, **RngIntElt**, **RngIntElt**  $\rightarrow$  **FldRatElt**  
 Das Maß des Hauptgeschlechts  $\mathfrak{G}_N^E(\ell^{N/2})$ .

**Neighbour**( $L, P, x$ ) : **HermLat**, **RngOrdId1**, **ModTupFldElt**  $\rightarrow$  **HermLat**  
 Berechnet den Nachbar  $L(x)$  an der Stelle  $\mathfrak{P}$ .

**Neighbours**( $L, P$ ) : **HermLat**, **RngOrdId1**  $\rightarrow$  **SeqEnum**[**HermLat**]  
 Berechnet alle  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn von  $L$ .

**GenusRepresentatives**( $L$ ) : **HermLat**  $\rightarrow$  **SeqEnum**  
 Berechnet die sukzessiven  $\mathfrak{P}$ -Nachbarn von  $L$ .

**HermitianStructures**( $L, m$ ) : **Lat**, **RngIntElt**  $\rightarrow$  **SeqEnum**  
 Berechnet zu gegebenem Gitter  $L$  alle hermiteschen Strukturen über dem Körper  $\mathbb{Q}(\zeta_m)$ .

**PossibleTypes**( $n, l, k, \mu$ ) : **RngIntElt**, **RngIntElt**, **RngIntElt**, **RngIntElt**  
 Gibt eine Liste aller möglichen Typen von Automorphismen eines  $n$ -dimensionalen Gitters  $L$  der Stufe  $\ell$  und Determinante  $\ell^k$  mit Minimum  $\geq \mu$  aus.

**AutomorphismTypes**( $L$ ) : **Lat**  
 Gibt eine Liste aller Typen von Automorphismen des Gitters  $L$  aus.