Vera LANDGRAF, Bamberg

Die Pilotstudie des Projekts ‚Anschauliches Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule' (schauMal)

Beweisen ist ein wesentliches und charakteristisches Element mathematischen Handelns. In den Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe werden im Rahmen der allgemeinen, prozessbezogenen Kompetenz *Argumentieren* Begründungen für Ergebnisse von den Kindern eingefordert (KMK, 2004).

Im Forschungsprojekt schauMal wird anschauliches Beweisen im Mathematikunterricht der Grundschule thematisiert. Im Beitrag werden theoretische Grundlagen und die Pilotstudie des Projekts vorgestellt.

Theoretische Grundlagen

In der Fachmathematik besteht Konsens darüber, was als Beweisen angesehen und akzeptiert wird. Im mathematischen Sinn wird darunter ein deduktiver Vorgang verstanden, bei dem eine Behauptung auf Basis von Axiomen und bereits bewiesenen Sätzen nach spezifischen Regeln geschlussfolgert wird (Jahnke & Ufer, 2015). In der Mathematikdidaktik dagegen gibt es keine einhellige Meinung, welche Tätigkeiten als Beweisen anerkannt werden (Brunner, 2016; Hanna & Jahnke, 1996). Zudem wird in fachdidaktischer Literatur darauf hingewiesen, dass formal-deduktive Beweise sich nur wenig für den Einsatz im schulischen Kontext eignen (z. B. Brunner, 2016). Insbesondere im Grundschulbereich ist ein Einsatz von formal-deduktiven Beweisen nicht denkbar, auch deshalb, da die Kinder noch nicht über die formale Sprache der Algebra verfügen (Krauthausen & Scherer, 2007; Söbbeke & Welsing, 2017).

Beweise, die für die Grundschule geeignet sind und auf die in diesem Projekt fokussiert wird, sind inhaltlich-anschauliche Beweise nach Wittmann & Müller (1988), im englischsprachigen Raum auch als representation-based proof bezeichnet (Russel et al., 2011). Diese Beweise werden u. a. mit Darstellungsmitteln, beispielsweise an Punktmustern, durchgeführt. Wesentlich sind dabei nicht die Anzahlen von Punkten, sondern die anschauliche Demonstration einer allgemein ausführbaren Operation an allen derartigen Punktmustern (Wittmann & Ziegenbalg, 2004; Wittmann, 2014). Anschauliches Beweisen eignet sich insbesondere für die Grundschule, da die Mittel (Zeichnungen oder didaktisches Material), mit denen sie erbracht werden, den Kindern meist bereits bekannt und zugänglich sind (u. a. Wittmann, 2014; Schwarzkopf, 2017; Söbbeke & Welsing, 2017).

Darstellungsmittel nehmen bei anschaulichen Beweisen die Funktion eines Argumentations- bzw. Beweismittels ein (Krauthausen & Scherer, 2007). An ihnen können Beziehungen und arithmetische Strukturen sichtbar gemacht werden (u.a. Dreyfus et al., 2012). Dadurch wird es bereits Grundschulkindern ermöglicht, über Strukturen nachzudenken und zu sprechen (Söbbeke & Nührenbörger, 2016). Insbesondere können Darstellungsmittel zur argumentativen Absicherung von allgemeinen Gesetzmäßigkeiten (Lengnink et al., 2014) also für anschauliche Beweise genutzt werden. Die Auswahl und Bereitstellung didaktischen Materials ist folglich nicht beliebig, sondern beeinflusst die Möglichkeiten der Handlungs- und Denkwege. Für die Pilotstudie ergibt sich daraus die Forschungsfrage:

Welche Darstellungsmittel eignen sich für den Einsatz bei den im Projekt geplanten anschaulichen Beweisaufgaben?

Pilotuntersuchung

Die Pilotuntersuchung fand im Juli 2018 statt. Erprobt wurden drei verschiedene Darstellungsmittel von jeweils zwei Kindern (2. Schuljahr). In sechs Einzelsitzungen wurden die Darstellungsmittel am Thema Teilbarkeit von Produkten evaluiert. Das Leitfadeninterview war in drei Phasen unterteilt: In der ersten Phase wurde der Umgang mit dem Darstellungsmittel sichergestellt. In der zweiten Phase wurde das Material für Beweise selbständig eingesetzt. In der dritten Phase wurde ein Transfer auf weitere, analoge Aufgaben erwartet. Getestet wurden u.a. Wendeplättchen und Kästchenpapier (inkl. Stifte zum Einzeichnen und einer Schere zum Auseinanderschneiden).

Beispiel Aaron

Aaron testete das Kästchenpapier. Im folgenden Ausschnitt aus der zweiten Phase des Interviews soll er nachzuweisen, dass $3 \cdot 2$ durch 2 teilbar ist. Er argumentiert anhand seiner selbst erstellten Darstellung: einem ausgeschnittenen Rechteck mit Kantenlänge drei und zwei.

A Mhm 2 (3 Sek) Da sieht man hier die 2. *[tippt einzeln mit dem Zeigefinger auf die Kästchen der ersten Zeile des ausgeschnittenen Rechtecks; tippt einzeln mit dem Zeigefinger auf die Kästchen der untersten Zeile.]*
Also hier *[tippt einzeln mit dem Zeigefinger auf die zwei Kästchen der ersten Zeile und stoppt danach kurz]* hier *[tippt einzeln mit dem Zeigefinger einzeln auf die zwei Kästchen der mittleren Zeile und stoppt danach kurz]* und hier. *[tippt mit dem Zeigefinger einzeln auf die zwei Kästchen der untersten Zeile und stoppt danach kurz]*
Da sieht man dreimal die 2. *[fährt mit seinem Zeigefinger die erste Zeile entlang; fährt mit seinem Zeigefinger die mittlere Zeile entlang; fährt mit seinem Zeigefinger die unterste Zeile entlang.]*

Um Teilbarkeiten in seinen Darstellungen zu zeigen, entwickelt Aaron vielfältige Strategien. Drei dieser Strategien setzt er bei dieser Rechtecksdarstellung $3 \cdot 2$ ein.

Direkt zu Beginn seiner Bearbeitung sagt er, dass hier die 2 ist (Z. 1). Dazu tippt er mit seinem Zeigefinger jeweils einzeln in die Kästchen der ersten Zeile seiner Darstellung. Anschließend tippt er erneut einzeln mit dem Zeigefinger in die zwei Kästchen der untersten Zeile (Z. 3-4). Es kann festgestellt werden, dass Aaron die Teilbarkeit durch 2 für sich so übersetzt, 2 in der Darstellung wiederzufinden. In seinem ersten Zugang identifiziert er die 2 als zwei Einzelobjekte (einzelnes Tippen). Diese Vorgehensweise wird im Projekt als *Zählen von Einzelobjekten* bezeichnet.

Bei seiner zweiten Strategie tippt er erneut einzeln in die Kästchen. Allerdings ändert sich hier seine Vorgehensweise. Immer nach zwei Kästchen hält er kurz inne, bevor er in die nächsten zwei Kästchen tippt. So verfährt er von der ersten Zeile abwärts bis zur untersten Zeile (Z. 4-8). Diese Strategie wird im Projekt *rhythmisiertes Zählen von Einzelobjekten* genannt.

Bei der dritten Strategie, die Aaron einsetzt, ändert sich seine Sichtweise wesentlich. Er fährt mit dem Zeigefinger über gesamte Zeilenlängen (Z. 9-11). Er scheint die 2 nun nicht mehr als Menge von Einzelobjekten zu betrachten, sondern als Länge. Daher wird diese dritte Vorgehensweise als *Längensichtweise* bezeichnet.

An Aarons Beispiel konnte hier exemplarisch gezeigt werden, dass das erprobte Material Kästchenpapier für den Nachweis von Teilbarkeiten eine besondere Vielfalt von individuellen Strategien und unterschiedliche Vorgehensweise zulässt.

Ergebnisse

In der Pilotstudie hat sich ergeben, dass sich insbesondere das Kästchenpapier als Material für den Einsatz bei den im Projekt geplanten anschaulichen Beweisaufgaben eignet. Zum einen bietet es die Möglichkeit, Produkte als Rechtecke anschaulich darzustellen. Schon beim Handlungsprozess des Ausschneidens werden die Faktoren als Kantenlänge fokussiert. Außerdem können mögliche weitere Teiler durch Zerschneiden des Rechtecks explizit sichtbar gemacht werden. Insgesamt liegt die Stärke des Darstellungsmittels insbesondere darin, vielfältige und ganz individuelle Bearbeitungswege und damit auch unterschiedliche Argumentationsoptionen auf dem Weg zum anschaulichen Beweisen zu ermöglichen. Aus diesen Gründen wird in der Hauptstudie Kästchenpapier als Darstellungsmittel eingesetzt.

Literatur

Brunner, E. (2016). Beweistypen: Ihre unterschiedlichen kognitiven Anforderungen und ihr didaktisches Potenzial. In Institut für Mathematik und Informatik der Pädagogischen Hochschule Heidelberg (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016* (Bd. 3, S. 1103-1106). Münster: WTM-Verlag.

Dreyfus, T., Nardi, E. & Leikin, R. (2012). Forms of Proof and Proving in the Classroom. In G. Hanna & M. de Villiers (Hrsg.), *Proof and Proving in Mathematics Education. The 19th ICMI Study* (New ICMI Study Series, vol. 15, S. 191–213). Dordrecht: Springer Netherlands.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (1996). Proof and Proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education. Part 2* (Kluwer International Handbooks of Education, vol. 4, pp. 877–908). Dordrecht: Springer.

Jahnke, H. N. & Ufer, S. (2015). Argumentieren und Beweisen. In R. Bruder (Hrsg.), *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 331–356). Berlin: Springer Spektrum.

KMK (Kultusministerkonferenz) (Hrsg.) (2004*). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004.* Abgerufen von https://www.kmk.org/fileadmin/veroeffentlichungen_beschluesse/2004/2004_10_15-Bildungsstandards-Mathe-Primar.pdf (17.12.2018).

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2007). *Einführung in die Mathematikdidaktik* (Mathematik Primar- und Sekundarstufe, 3. Auflage). München: Spektrum Akad. Verl.

Lengnink, K., Meyer, M. & Siebel, F. (2014). MAT(H)Erial. *Praxis der Mathematik in der Schule, 56*, 2–8.

Russell, S. J., Schifter, D. & Bastable, V. (2011). *Connecting arithmetic to algebra. Strategies for building algebraic thinking in the elementary grades*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Schwarzkopf, R. (2017). Erst einmal rechnen lernen? Von der Notwendigkeit algebraischen Denkens im Arithmetikunterricht. *Die Grundschulzeitschrift, 31,* 18–23.

Söbbeke, E., & Nührenbörger, M. (2016). Anschauliche Sprachförderung in der Grundschule: Sprache und Mathematiklernen? *Mathematik Differenziert,* (2), 10–13.

Söbbeke, E., & Welsing, F. (2017). Allgemein denken mit konkretem Material?: Erforschen und Verallgemeinern mithilfe von Anschauungsmitteln. *Die Grundschulzeitschrift*, *31* (306), 36–41.

Wittmann, E. C. (2014). Operative Beweise in der Schul- und Elementarmathematik. *mathematica didactica, 37,* 213–232.

Wittmann, E. C. & Müller, G. (1988). Wann ist ein Beweis ein Beweis? In P. Bender (Hrsg.), *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis. Festschrift für Heinrich Winter* (S. 237–257). Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. C. & Ziegenbalg, J. (2004). Sich Zahl um Zahl hochhangeln. In G. N. Müller, H. Steinbring & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Arithmetik als Prozess* (S. 35–54). Seelze: Klett/Kallmeyer.