

# **Verdünnte Strömung in Spalten von Vakuumpumpen mit bewegter Berandung**

Zur Erlangung des akademischen Grades eines

**Dr.-Ing.**

von der Fakultät Maschinenbau

der Technischen Universität Dortmund

genehmigte Dissertation

**Dipl.-Ing. Christopher Huck**

aus

Dortmund

Tag der mündlichen Prüfung: 28.04.2020

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer

2. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle

**Dortmund, 2020**



# Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner wissenschaftlichen Tätigkeit am Fachgebiet Fluidtechnik der Technischen Universität Dortmund. Die Anfertigung dieser Arbeit ist nur durch die vielfältige Unterstützung von vielen Seiten möglich geworden. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle bedanken.

Für die grundlegende Idee des Forschungsvorhabens gilt dem Leiter des Fachgebiet Fluidtechnik, Herrn Prof. Dr.-Ing. Andreas Brümmer, mein besonderer Dank. Zahlreiche konstruktive Gespräche und Anregungen haben maßgeblich zu einem erfolgreichen Abschluss der vorliegenden Arbeit beigetragen. Die große Freiheit der eigenen inhaltlichen Gestaltung sowie die persönliche Betreuung werden mir stets in besonderer Erinnerung bleiben. Herrn Prof. Dr.-Ing. Martin Böhle danke ich für die Übernahme des Koreferats.

Ein großer Dank gilt den MitarbeiterInnen des Fachgebiet Fluidtechnik, die mich in all den Jahren begleitet haben. Die praktische Begleitung bei den Versuchsaufbauten, inhaltliche Diskussionen sowie die moralische Unterstützung können gar nicht hoch genug eingeschätzt werden. Timo Jünemann danke ich für viele Stunden kritischen Mitdenkens. Im Besonderen möchte ich Heiko Pleskun für seine langjährige Tätigkeit als studentische Hilfskraft und die wertvolle Unterstützung auf der Zielgeraden danken. Allen danke ich für sieben tolle, lehrreiche und unvergessliche Jahre am Fachgebiet Fluidtechnik.

Nicht zuletzt gilt ein großer Dank meiner Familie. Meinen Eltern für Ihre stetige Unterstützung und allen Freiheiten während meines gesamten Werdegangs. Ganz besonders danke ich meinen Liebsten, Jaqueline und Finja, für das mir entgegengebrachte Verständnis, die bedingungslose Unterstützung und die schönste Ablenkung, die ich mir vorstellen kann.

Dortmund im Juli 2020

Christopher Huck



# Übersicht

In der vorliegenden Arbeit wird die verdünnte Strömung in Spalten von Vakuumpumpen diskutiert. Die durch eine Druckdifferenz (Poiseuille-Strömung), eine bewegte Berandung (Couette-Strömung) oder eine Temperaturdifferenz (thermische Kriechströmung) erzeugten Strömungen, welche isoliert oder kombiniert betrachtet werden, sind Gegenstand der Untersuchungen. Im Rahmen der Arbeit wird eine eindimensionale Theorie validiert, welche diese drei Strömungsarten in einem weiten Bereich der Gasverdünnung abbilden kann. Dafür werden sowohl Simulationen mithilfe der DSMC-Methode (Direct Simulation Monte Carlo), die das Gas auf Ebene der Teilchen modelliert, als auch experimentelle Untersuchungen herangezogen. Insgesamt werden zwei verschiedene Spaltgeometrien betrachtet. Der planparallele Spalt, welcher aus zwei zueinander parallele Konturen gebildet wird und der Radiuspalt, welcher aus einer planen Kontur und einer Kontur mit Radius besteht.

Um allgemeingültige Ergebnisse zu erhalten, werden die zur Beschreibung der Strömung notwendigen dimensionslosen Kennzahlen identifiziert. Hierbei wird davon ausgegangen, dass in jedem Querschnitt in Strömungsrichtung ein vollständiger Wärmeaustausch zwischen Gas und Wand stattfindet. Die so ermittelten Kennzahlen können im weiteren Verlauf umfangreich variiert werden.

Für die experimentellen Untersuchungen werden zwei geeignete Spaltmodellbauten vorgestellt. Ein Spaltmodell kann zur Messung des Massenstroms einer reinen Poiseuille-Strömung genutzt werden. Ein weiteres Modell dient zur Messung des Massenstroms aufgrund einer kombinierten Couette-Poiseuille Strömung, bei welchem auch ein Konzept zur Bestimmung der Massenströme weiterer Spalte vorgestellt wird, die aufgrund der notwendigen bewegten Berandung entstehen.

Anschließend wird eine umfangreiche experimentelle Untersuchung der Spaltströmung unter Variation der dimensionslosen Kennzahlen durchgeführt. Ein Vergleich der Ergebnisse mit den Simulationsergebnissen der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode ergibt über einen weiten Bereich der Gasverdünnung eine gute Übereinstimmung. Abweichungen finden sich im Bereich der Kontinuumsströmung zwischen eindimensionaler Theorie und dem Experiment.

Die bei der eindimensionalen Theorie getroffenen Annahmen und Vereinfachungen zur Berechnung der Strömung werden nachfolgend dahingehen untersucht, in welchem Bereich der dimensionslosen Kennzahlen die eindimensionale Theorie gute Ergebnisse liefert. Die Einsatzgrenzen der eindimensionalen Theorie werden mit einer über die experimentellen Untersuchungen hinausgehenden Variation der dimensionslosen Kennzahlen ermittelt. Zur Beurteilung der Abbildungsgüte der eindimensionalen Theorie werden die Simulationsergebnisse der DSMC-Methode herangezogen und auf diesem Weg können erfolgreich Kriterien für die Einsatzgrenzen herausgearbeitet werden.

# Abstract

In the present work the rarefied gas flow in clearances of vacuum pumps is discussed. The flow, which can be caused by a pressure difference (Poiseuille flow), a moving boundary (Couette flow), a temperature difference (thermal creep flow) or a combination of these flow types, is considered. In this work a one dimensional theory is validated, which is able to reproduce these three flow types in a wide range of gas rarefaction. For this purpose the DSMC-method (Direct Simulation Monte Carlo), which models the gas by means of particles, is used as well as experimental investigations. Two different clearance geometries are considered. A plane clearance, which is formed by two parallel contours and a radius-clearance, which is formed by a plane contour and a contour with a radius.

To achieve an universal description of the flow, the necessary nondimensional numbers are identified. For this, the assumption is made, that a complete heat exchange between gas and boundary is conducted for every cross section along the flow. A large variation of the identified nondimensional numbers is performed further on.

Two appropriate clearance setups are presented for the experimental investigations. One setup can be used to measure the mass flow of a Poiseuille flow. A further setup is used to measure the mass flow of a combined Couette Poiseuille flow. This includes a concept for the determination of the mass flow of additional clearances, which are necessary due to a moving boundary.

A comprehensive experimental investigation of the clearance flow varying the non-dimensional numbers is conducted. Comparing the experimental results with results found by the one dimensional theory and the DSMC-method a good agreement can be found over a wide range of gas rarefaction. A discrepancy can be found in the continuum flow range between one dimensional theory and experiment.

Assumptions and simplifications, which are made for the one dimensional theory, are investigated in order to find the range of nondimensional numbers in which the one dimensional theory can be used. The limits of use of the one dimensional theory are determined by an additional variation of the nondimensional numbers, which goes beyond the experimental investigations. To evaluate the results of the one dimensional

theory, simulations by the DSMC-method are used. Thus, criteria for the limits of use of the one dimensional theory can be presented successfully.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Trockenlaufende Verdrängervakuumpumpen . . . . .	2
1.1.1	Einordnung der Bauarten . . . . .	2
1.1.2	Arbeitsprinzip . . . . .	5
1.1.3	Simulation . . . . .	7
1.2	Spaltströmung in Vakuumpumpen . . . . .	9
1.3	Stand der Wissenschaft . . . . .	10
1.3.1	Methoden zur Berechnung von Spaltströmungen . . . . .	10
1.3.2	Untersuchungen zu elementaren Strömungsproblemen . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Zielsetzung und Vorgehensweise</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>Grundlagen der Spaltströmung</b>	<b>19</b>
3.1	Erhaltungsgleichungen . . . . .	19
3.1.1	Kontinuumsmechanik . . . . .	19
3.1.2	Kinetische Gastheorie . . . . .	22
3.2	Dimensionslose Kennzahlen . . . . .	24
3.2.1	$\Pi$ -Theorem . . . . .	24
3.2.2	Einordnung der Spaltströmung . . . . .	27
<b>4</b>	<b>DSMC-Methode</b>	<b>32</b>
4.1	Einordnung der DSMC-Methode . . . . .	32
4.2	Algorithmus der DSMC-Methode . . . . .	33
4.2.1	Bewegung der Teilchen . . . . .	35
4.2.2	Randbedingungen . . . . .	36
4.2.3	Intermolekulare Kollisionen . . . . .	39
4.2.4	Berechnung makroskopischer Größen . . . . .	42
<b>5</b>	<b>Eindimensionale Theorie</b>	<b>44</b>
5.1	Ansatz . . . . .	45
5.2	Bestimmung der Flussraten . . . . .	47
5.2.1	Kontinuums- und Schlupfströmung . . . . .	47

5.2.2	Übergangsströmung . . . . .	49
5.2.3	Freie Molekularströmung . . . . .	51
5.3	Modell und Simulationsablauf . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Experimentelle Untersuchungen</b>	<b>56</b>
6.1	Versuchsaufbau und Methodik . . . . .	56
6.1.1	Messtechnik . . . . .	57
6.1.2	Methoden zur Ermittlung des Massenstroms . . . . .	59
6.2	Spaltmodell mit statischer Berandung . . . . .	61
6.2.1	Untersuchte Konturen . . . . .	63
6.2.2	Äußere Leckage . . . . .	63
6.2.3	Messunsicherheit . . . . .	65
6.2.4	Vergleich der Messmethoden für den Spaltmassenstrom . . . . .	66
6.3	Spaltmodell mit bewegter Berandung . . . . .	67
6.3.1	Äußere Leckagen . . . . .	69
6.3.2	Innere Leckagen . . . . .	70
6.3.3	Messunsicherheit . . . . .	71
6.3.4	Vergleich der Messmethoden für den Spaltmassenstrom . . . . .	72
6.3.5	Erweiterung des Messbereichs . . . . .	73
<b>7</b>	<b>Validierung der Simulationswerkzeuge</b>	<b>76</b>
7.1	Modell der eindimensionalen Theorie . . . . .	76
7.2	Modell der DSMC-Methode . . . . .	78
7.2.1	Aufbau der Modelle . . . . .	78
7.2.2	Variation der Simulationsparameter . . . . .	81
7.2.3	Dynamische Vernetzung . . . . .	82
7.2.4	Variation der Teilchen-Wandinteraktion . . . . .	84
7.2.5	Simulierte Spaltlänge für den Radiusspalt . . . . .	88
7.3	Ergebnisse der statischen Berandung . . . . .	90
7.3.1	Variation des Längen zu Höhenverhältnisses . . . . .	90
7.3.2	Variation des Radius zu Höhenverhältnisses . . . . .	94
7.3.3	Variation des Druckverhältnisses . . . . .	95
7.3.4	Variation des Breiten zu Höhenverhältnisses . . . . .	98
7.4	Ergebnisse der bewegten Berandung . . . . .	99
7.4.1	Variation der normierten Berandungsgeschwindigkeit . . . . .	99
7.4.2	Variation des Druckverhältnisses . . . . .	101
7.4.3	Variation des Radius zu Höhenverhältnisses . . . . .	107
7.5	Ergebnisse der thermischen Kriechströmung . . . . .	111
7.6	Fazit der Validierung . . . . .	113
<b>8</b>	<b>Grenzen der eindimensionalen Theorie</b>	<b>117</b>

---

8.1	Knudsenzahl . . . . .	117
8.2	Normierte Berandungsgeschwindigkeit . . . . .	121
8.3	Druckverhältnis . . . . .	123
8.4	Temperaturverhältnis . . . . .	125
8.5	Längen zu Höhenverhältnis . . . . .	129
8.6	Radius zu Höhenverhältnis . . . . .	130
8.7	Variation der Gastemperatur . . . . .	132
8.8	Fazit zur Ermittlung der Grenzen . . . . .	135
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>138</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>141</b>
	<b>Anhang</b>	<b>150</b>
<b>A</b>	<b>Flussraten</b>	<b>150</b>
<b>B</b>	<b>Messaufbauten</b>	<b>152</b>
<b>C</b>	<b>Simulierte Spaltlänge beim Radiusspalt</b>	<b>154</b>
<b>D</b>	<b>Messergebnisse</b>	<b>155</b>
D.1	Statische Berandung . . . . .	155
D.2	Bewegte Berandung . . . . .	159

# Symbol und Abkürzungsverzeichnis

## Symbole

Lateinische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\vec{a}$	$m s^{-2}$	Strömungsbeschleunigungsvektor siehe Gleichung 3.2
$A$	$m^2$	Fläche
$b$	$m$	Spaltbreite
$c$	$m s^{-1}$	translatorische Molekül- oder Teilchengeschwindigkeit
$\vec{c}$	$m s^{-1}$	translatorischer Molekül- oder Teilchengeschwindigkeitsvektor
$c'$	$m s^{-1}$	Differenz zwischen translatorischer Molekül-/Teilchengeschwindigkeit und Strömungsgeschwindigkeit siehe Gleichung 4.7
$c_{rel}$	$m s^{-1}$	Relativgeschwindigkeit zwischen Molekülen/Teilchen
$C_0$	–	normierter Massenstrom
$d$	$m$	Durchmesser
$\vec{e}$	–	Einheitsvektor
$E$	$J$	Energie eines Moleküls siehe Gleichung 4.14
$f$	$s m^{-1}$	Verteilungsdichtefunktion der Molekül-/Teilchengeschwindigkeit
$f_0$	$s m^{-1}$	Verteilungsdichtefunktion der Maxwell-Boltzmann-Verteilung siehe Kapitel 3.1.2
$\vec{f}$	$m s^{-2}$	massenspezifische Kraft siehe Gleichung 3.2
$F_N$	–	Anzahl der identischen Moleküle pro Teilchen siehe Gleichung 4.1
$h$	$m$	Spalthöhe
$h$	$s m^{-1}$	Störfunktion siehe Gleichung 5.20
$k$	$J K^{-1}$	Boltzmann-Konstante $k = 1,38064852 \cdot 10^{-23}$
$Kn$	–	Knudsenzahl
$l_{char}$	$m$	charakteristische Länge siehe Gleichung 1.1

$L$	$m$	Spaltlänge
$m$	$kg$	Masse
$\dot{m}$	$kg\ s^{-1}$	Spaltmassenstrom
$n$	$m^{-3}$	Teilchenanzahldichte
$N$	–	Teilchenanzahl
$\dot{N}$	$s^{-1}$	Teilchenstrom
$N_{Koll}$	–	Kollisionsanzahl siehe Gleichung 4.16
$p$	$kg\ m^{-1}\ s^{-2}$	Druck
$\dot{p}$	$kg\ m^{-1}\ s^{-3}$	Druckrate
$P$	–	Kollisionswahrscheinlichkeit zweier Teilchen
$Q$	–	Flussrate
$R$	$m$	Spaltradius
$R_f$	–	gleichverteilte Zufallszahl im Bereich 0 bis 1
$R_s$	$J\ kg^{-1}\ K^{-1}$	spezifische Gaskonstante
$R_z$	$\mu m$	mittlere Rauheit einer Oberfläche
$Re$	–	Reynoldszahl
$Re_U$	–	Umfangsreynoldszahl
$t$	$s$	Zeit
$T$	$K$	Temperatur
$T_S$	$K$	Sutherlandkonstante siehe Tabelle 3.1
$\vec{u}$	$m\ s^{-1}$	Strömungsgeschwindigkeit
$\tilde{u}$	–	dimensionslose Strömungsgeschwindigkeit siehe Gleichung 5.4
$u_0$	–	normierte Berandungsgeschwindigkeit
$u_B$	$m\ s^{-1}$	Berandungsgeschwindigkeit
$U$	–	absolute Unsicherheit einer Größe siehe Gleichung 6.4
$V$	$m^3$	Volumen
$W$	$m\ s^{-1}$	Gewichtung siehe Gleichung 5.19
$x$	$m$	Ortskoordinate
$\vec{x}$	$m$	Ortsvektor
$y$	$m$	Ortskoordinate
$\tilde{y}$	–	dimensionslose y-Koordinate (auf Spalthöhe $h$ bezogen) siehe Gleichung 5.5
$z$	$m$	Ortskoordinate
$\tilde{z}$	–	dimensionslose z-Koordinate (auf Spalthöhe $h$ bezogen) siehe Gleichung 5.5

## Griechische Buchstaben

Symbol	Einheit	Bedeutung
$\alpha$	–	Akkomodationskoeffizient
$\alpha$	–	Neigungswinkel einer Berandung siehe Tabelle 3.4
$\beta$	$s\ m^{-1}$	Kehrwert der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit siehe Gleichung 3.10
$\Gamma$	–	Gamma-Funktion: $\Gamma(j) = \int_0^{\infty} x^{(j-1)} \exp(-x) dx$ siehe Gleichung 4.13
$\delta$	–	Verdünnungsfaktor
$\Delta$	–	Differenz, Inkrement
$\theta$	–	Strömungswinkel siehe Abbildung 4.3
$\kappa$	–	Isentropenexponent eines Gases
$\lambda$	$m$	mittlere freie Weglänge siehe Gleichung 7.1
$\mu$	$kg\ m^{-1}\ s^{-1}$	Viskosität
$\nu$	$s^{-1}$	Relaxationsfrequenz siehe Gleichung 5.18
$\xi$	–	Anzahl innerer Freiheitsgrade eines Moleküls siehe Tabelle 7.3
$\xi$	–	dimensionsloser Gradient siehe Gleichungen 5.1 und 5.2
$\Pi$	–	Druckverhältnis
$\rho$	$kg\ m^{-3}$	Dichte
$\sigma$	$m^2$	Kollisionsquerschnitt siehe Gleichung 3.7
$\sigma_t$	$m^2$	totaler Kollisionsquerschnitt siehe Gleichung 4.11
$\sigma_P$	–	viskoser Schlupfkoeffizient siehe Gleichung 5.9
$\sigma_T$	–	thermischer Schlupfkoeffizient siehe Gleichung 5.10
$\omega$	–	Viskositätsindex siehe Tabelle 7.3
$\Omega$	–	Raumwinkel siehe Gleichung 3.7

## Abkürzungen und Indizes

Abkürzung	Bedeutung
<i>alt</i>	alter Wert
<i>A</i>	Austritt
<i>Aus</i>	ausströmend
<i>B</i>	Berandung
<i>C</i>	Couette
<i>e</i>	einfallender Wert
<i>E</i>	Eintritt
<i>Ein</i>	einströmend

---

<i>g</i>	Wert bezogen auf alle Freiheitsgrade eines Moleküls
<i>ges</i>	gesamt
<i>G</i>	Wert des Gehäusespaltes
<i>i</i>	Wert bezogen auf die inneren Freiheitsgrade eines Moleküls
<i>krit</i>	kritische Strömung
<i>Koll</i>	Kollision
<i>lok</i>	lokale Größe
<i>max</i>	maximaler Wert
<i>M</i>	gemessener Wert
<i>Mol</i>	Molekül
<i>neu</i>	neuer Wert
<i>NTC</i>	no time counter
<i>p</i>	Eigenschaft eines Moleküls der Sorte p
<i>pq</i>	Eigenschaft eines Molekülpaars der Sorte p und q
<i>P</i>	Druck
<i>P</i>	Poiseuille
<i>q</i>	Eigenschaft eines Moleküls der Sorte q
<i>r</i>	reflektierter Wert
<i>red</i>	reduzierter Wert
<i>ref</i>	Referenzwert
<i>R</i>	Referenzwert
<i>R2</i>	Wert des Rezipienten R2 (vgl. Abbildung 6.1)
<i>tr</i>	Wert bezogen auf die translatorischen Freiheitsgrade eines Moleküls
<i>T</i>	thermische Kriechströmung
<i>x, y, z</i>	Koordinatenrichtungen
<i>Z</i>	Zelle/ Kollisionszelle
<i>Z</i>	Zähigkeit
1	Feldmolekül
*	Postkollision



# Kapitel 1

## Einleitung

Heute spielt die Vakuumtechnik sowohl im Bereich der Forschung als auch in der industriellen Anwendung eine zentrale Rolle. Der Begriff *Vakuum* ist aus dem lateinischen *vacuus*, übersetzt *entblößt, frei, leer* abgeleitet und beschreibt in der Physik einen Raum unter der Abwesenheit von Materie. Technisch kann ein absolutes Vakuum (eine Teilchenanzahldichte von null) allerdings nicht erzeugt werden. Eine Definition findet sich in der entsprechenden DIN-Norm 28400 Teil 1:

”Vakuum heißt der Zustand eines Gases, wenn in einem Behälter der Druck des Gases und damit die Teilchenanzahldichte niedriger ist als außerhalb oder wenn der Druck des Gases niedriger ist als 300 mbar, d.h. kleiner als der niedrigste auf der Erdoberfläche vorkommende Atmosphärendruck.” [Dinb]

Der Druckbereich technisch erzeugbarer Vakua erstreckt sich über mehr als 15 Dekaden ( $10^5 - 10^{-10} Pa$ ), sodass sich eine Einteilung in verschiedene Vakuumbereiche in Abhängigkeit des Druckes etabliert hat. Diese gliedern sich in das Grob- ( $10^5 - 10^2 Pa$ ), Fein- ( $10^2 - 10^{-1} Pa$ ), Hoch- ( $10^{-1} - 10^{-5} Pa$ ) und Ultrahochvakuum ( $< 10^{-5} Pa$ ) [Dina].

Die Anwendungsbereiche sind vielfältig und haben die Entwicklung leistungsfähiger Vakuumpumpen voran getrieben. Der Begriff der *Pumpe*, welche üblicherweise inkompressible Medien fördert, ist irreführend, da die Vakuumpumpe im eigentlichen Sinne ein Kompressor für verdünnte Gase ist. Die Begründung ist historisch bedingt, da Wasserpumpen den Ursprung der ersten Vakuumpumpe darstellen [Jou10c]. Anwendungsbereiche in der Forschung erstrecken sich über die Elementarteilchenphysik, Massenspektroskopie, Materialforschung und Weltraumsimulationen, um nur wenige zu nennen [Jou10b]. Beispiele der industriellen Anwendung finden sich im Bereich der Metallurgie, Medizintechnik, Trocknung und Entgasung, Lebensmittelindustrie und der Halbleiterindustrie [Jou10b].

In der jüngeren Vergangenheit ist insbesondere die Weiterentwicklung von trockenlaufenden Vakuumpumpen vorangetrieben worden. Der wesentliche Vorteil dieser Vaku-

umpumpen besteht darin, dass eine Verunreinigung des Arbeitsgases mit Hilfsfluiden vermieden wird. Gleichzeitig besteht der Hauptverlustmechanismus in den für das Betriebsverhalten schädlichen Spaltströmungen. Die Kenntnis dieser Spaltströmungen ist für die Simulation des Betriebsverhaltens somit von großer Wichtigkeit. Der Fokus der vorliegenden Arbeit liegt auf der Betrachtung von Spaltströmungen in trockenlaufenden Verdrängervakuumpumpen. Der weite Druckbereich technisch erzeugbarer Vakua zeigt, dass mitunter Gasströmungen bei extrem geringen Dichten betrachtet werden müssen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von verdünnten Gasströmungen. Die Kennzahl zur Quantifizierung der Gasverdünnung ist die Knudsenzahl

$$Kn = \frac{\lambda}{l_{char}}, \quad (1.1)$$

die das Verhältnis aus mittlerer freier Weglänge  $\lambda$  und einer charakteristischen Länge  $l_{char}$  darstellt. Die mittlere freie Weglänge kennzeichnet den statistischen Weg, den ein Molekül im Raum zwischen der Interaktion mit zwei anderen Molekülen zurücklegt. Als charakteristische Länge wird üblicherweise die kleinste geometrische Ausdehnung gewählt, welche bei einer Spaltströmung die Spalthöhe ist. Eine Einteilung der Strömung in Abhängigkeit der Knudsenzahl wird in Kapitel 3.2.2 durchgeführt.

Im Folgenden werden trockenlaufende Verdrängervakuumpumpen zunächst bezüglich Bauart und Wirkungsweise eingeordnet. Anhand einer Schraubenvakuumpumpe wird das Arbeitsspiel mit dem wichtigsten Verlustmechanismus, der Spaltströmung, erläutert. Die Notwendigkeit der Bestimmung der Spaltmassenströme wird anhand einer Zusammenfassung der üblichen Methoden zur Simulation trockenlaufender Vakuumpumpen motiviert. Abschließend wird der Stand der Wissenschaft zu Spaltströmungen in Vakuumpumpen aufgezeigt.

## 1.1 Trockenlaufende Verdrängervakuumpumpen

### 1.1.1 Einordnung der Bauarten

Für die technische Erzeugung von Vakua stehen in der heutigen Zeit verschiedene Vakuumpumpen zur Verfügung, wobei der erreichbare Druckbereich im Wesentlichen vom Wirkprinzip und der Bauart abhängig ist. Eine Kategorisierung von Vakuumpumpen nach dem Wirkprinzip wird in **Abbildung 1.1** gezeigt. Die DIN-Norm 28400 Teil 2 [Dina] teilt Vakuumpumpen zunächst nach dem Wirkprinzip einer Gastransfer- und einer gasbindenden Vakuumpumpe ein. Die gasbindende Vakuumpumpe arbeitet nach dem Prinzip der Sorption oder Kondensation des zu fördernden Mediums an festen Oberflächen. Die Gastransfervakuumpumpe wird in zwei weitere Kategorien untergliedert. Eine Kategorie repräsentiert die Verdrängervakuumpumpe, gekennzeichnet durch einen gekapselten Arbeitsraum, dessen Größe sich während eines Arbeitsspiels zyklisch än-

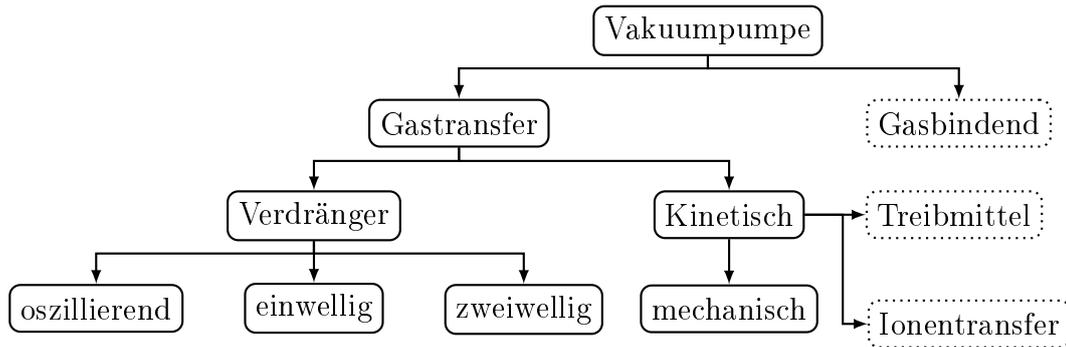


Abbildung 1.1: Kategorisierung von Vakuumpumpen nach dem Wirkprinzip. Nach [Dina] und [Jou10b]

dert. Die zweite Kategorie besteht aus den kinetischen Vakuumpumpen, gekennzeichnet durch einen offenen Arbeitsraum, bei welchen die Energiewandlung durch eine Impulsänderung des Gases herbeigeführt wird. Die weitere Einteilung wird entsprechend der Bauart der Vakuumpumpe durchgeführt.

Grundsätzlich existieren Vakuumpumpen mit und ohne einem Hilfsfluid, das mit dem zu fördernden Gas in Kontakt kommt. Bei diesen Hilfsfluiden handelt es sich häufig um Öl oder Wasser, das zur Kühlung des zu fördernden Gases und Abdichtung interner Spaltverbindungen dient. Wesentliche Nachteile ergeben sich durch eine mögliche Rückströmung in den Ansaugstutzen und somit der Verunreinigung der Vakuummkammer oder einer möglichen Verunreinigung des Hilfsfluides, wenn Prozessgase oder Partikel gefördert werden müssen [Jou10d]. Seit den 1980er Jahren ist zunehmend die Bedeutung der trockenlaufenden Vakuumpumpen insbesondere durch Nachfrage der Halbleiterindustrie gestiegen und besitzen heute einen hohen Marktanteil. Da sich die vorliegende Arbeit mit der Spaltströmung in trockenlaufenden Vakuumpumpen beschäftigt, werden im folgenden Beispiele für verschiedene Bauarten gegeben und in **Abbildung 1.2** in den entsprechenden Vakuumbereich eingeordnet.

Nach Jousten [Jou10b] können Verdrängervakuumpumpen in oszillierende und rotierende Verdrängervakuumpumpen eingeteilt werden, wobei letztere sich durch einen einwelligen oder zweiwelligen Aufbau unterscheiden. Alle hier genannten Verdrängervakuumpumpen, mit Ausnahme der Wälzkolbenpumpe, verringern üblicherweise das Arbeitskammervolumen bevor das Gas ausgeschoben wird und besitzen somit eine innere Verdichtung. Die Membran- und Hubkolbenpumpen besitzen oszillierende Kolben und zumeist einen Schadraum. Haupteinsatzgebiet ist der Bereich des Grobvakuums, wobei niedrige Enddrücke nur durch eine mehrstufige Anordnung erreicht werden können. Beispiele für einwellige Rotationsverdrängervakuumpumpen sind trockenlaufende Drehschieberpumpen, wobei die Schieber aufgrund des fehlenden Öls als Schmiermittel aus einem Verbundwerkstoff mit dem Hauptbestandteil Graphit bestehen [Kos10]. Aufgrund der fehlenden Dichtwirkung eines Schmiermittels werden diese Vakuumpumpen im Bereich des Grobvakuums eingesetzt. Die Scroll-Pumpe wird teilweise bei den

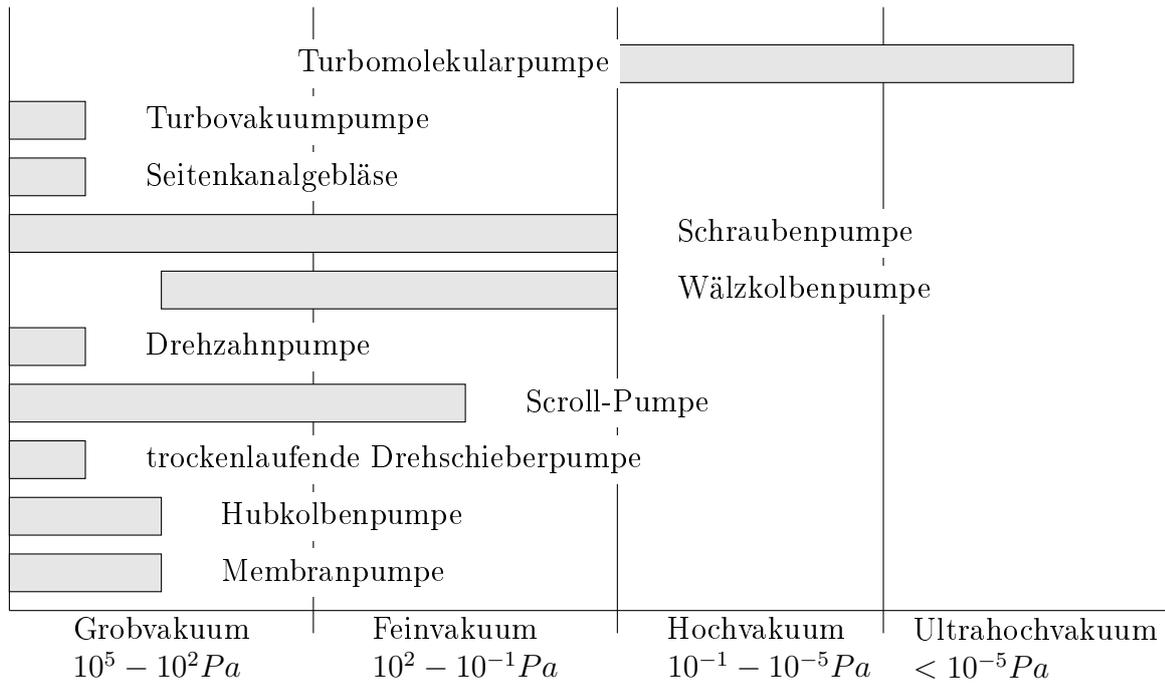


Abbildung 1.2: Verschiedene Bauarten von trockenlaufenden Vakuumpumpen und Zuordnung zum jeweiligen Vakuumbereich. Nach [Dina] und [Jou10b]

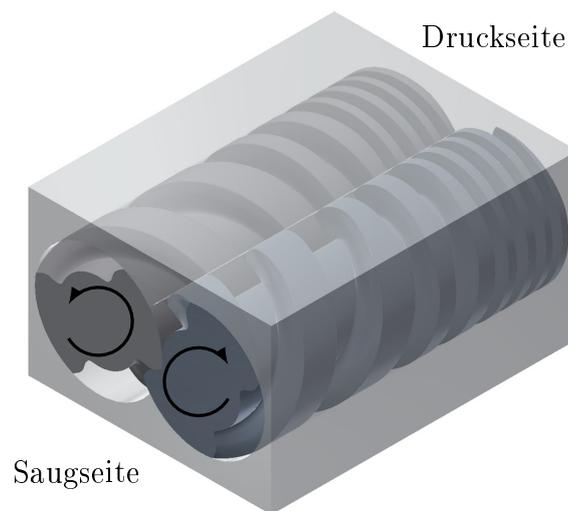
oszillierenden Vakuumpumpen eingeordnet und wird häufig als trockenlaufende Alternative zu nasslaufenden Drehschieberpumpen eingesetzt [Jou10d]. Der Ansaugdruck der Scroll-Pumpe reicht bis in den Bereich des Feinvakuums. Schraubenpumpen, Drehzahnumpen und Wälzkolbenpumpen stellen trockenlaufende zweiwellige Rotationsverdränger dar. Schraubenpumpen zeichnen sich durch Rotorprofile mit einem großen Umschlingungswinkel und somit mehreren in Reihe geschalteter Arbeitskammern aus. Hierdurch wird eine gute Abdichtung erreicht, weshalb Ansaugdrücke bis in den Bereich des Feinvakuums erzielt werden. Aufgrund gesteigerter Möglichkeiten in der Fertigungstechnologie besitzen aktuelle Ausführungen zumeist Rotorprofile mit variabler Steigung, sodass auch diese Pumpenbauart eine innere Verdichtung aufweist. Die Drehzahnpumpe besitzt zwei sichelförmige Rotoren und nur eine geringe Anzahl in Reihe geschalteter Arbeitskammern, sodass diese nur im Bereich des Grobvakuum eingesetzt werden kann. Die Wälzkolbenpumpe besitzt keine innere Verdichtung und ist daher nur für geringe Druckdifferenzen geeignet. Diese Bauart wird hauptsächlich in Kombination mit einer gegen Atmosphäre verdichtenden Vorpumpe kombiniert, um das Gesamtsaugvermögen zu erhöhen.

Die kinetischen Gastransferpumpen werden weiter in mechanische, Treibmittel und Ionentransferpumpen unterteilt. Die Treibmittelpumpen nutzen ein bewegtes Arbeitsmedium (flüssig oder gasförmig) um eine Impulsänderung des zu fördernden Mediums herbei zu führen. Bei der Ionentransferpumpe wird das Gas ionisiert und mittels eines elektrischen Feldes gefördert. Bei den kinetisch mechanischen Gastransferpumpen werden im Bereich des Grobvakuum Seitenkanalgebläse und Turbovakuumpumpen

eingesetzt. Im Bereich des Hoch- und des Ultrahochvakuums werden Turbomolekularpumpen eingesetzt und häufig mit einer Molekularpumpe kombiniert, um den Einsatz bis in den Bereich des Feinvakuums zu ermöglichen.

### 1.1.2 Arbeitsprinzip

Der Aufbau und die Wirkungsweise der Verdrängervakuumpumpen wird am Beispiel einer Schraubenvakuumpumpe erläutert. **Abbildung 1.3** zeigt beispielhaft eine Schraubenvakuumpumpe mit Zykloidenprofil und zwei Zähnen pro Rotor. Die Arbeitskammer



*Abbildung 1.3: Geometrie einer beispielhaften Schraubenvakuumpumpe mit Zykloidenprofil, zwei Zähnen pro Rotor und variabler Steigung.*

mern werden durch die Zahnlückenräume gebildet, die infolge einer Rotation der Rotoren kontinuierlich von der Saug- zur Druckseite gefördert werden. Aufgrund des symmetrischen Profils werden die Arbeitskammern getrennt auf beiden Rotorseiten ausgebildet. Üblicherweise wird ein Synchronisationsgetriebe genutzt, um eine Berührung der Rotoren zu vermeiden.

Das Arbeitsspiel wird in **Abbildung 1.4** gezeigt und unterteilt sich in die Phasen *Ansaugen*, *Transportieren/Verdichten* und *Ausschieben*. Durch die Rotation der Rotoren wird eine Arbeitskammer im Zahnlückenraum ausgebildet, die über die Stirnseite mit der Saugseite verbunden ist. Durch eine kontinuierliche Vergrößerung des Arbeitskammervolumens wird Gas in die Kammer angesaugt. Im weiteren Verlauf schließt die Arbeitskammer von der Saugseite ab und wird axial weiter in Richtung Druckseite transportiert. Das gezeigte Profil weist zusätzlich eine variable Steigung auf, wodurch eine innere Verdichtung des Gases herbeigeführt wird. Erreicht die Arbeitskammer die Druckseite, wird das Gas über die Verbindung auf der Stirnseite ausgeschoben. Das Arbeitsspiel endet, wenn das Kammervolumen null wird. Schraubenvakuumpumpen weisen keinen Schadraum auf.

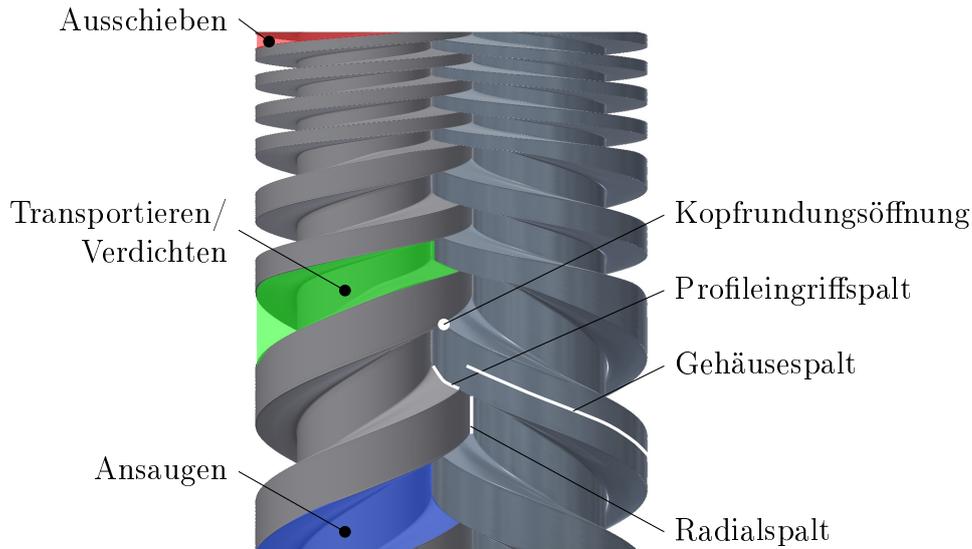


Abbildung 1.4: Kennzeichnung der drei Phasen des Arbeitsspiels sowie der geometrischen Lage der betriebsbedingten Spalte einer beispielhaften Schraubenvakuumpumpe.

Eine Rückströmung des Gases in den betriebsbedingten Spalten stellt den Hauptverlustmechanismus dieser Vakuumpumpen dar und reduziert den theoretisch geförderten Massenstrom. Spalte treten sowohl zwischen beiden Rotoren als auch zwischen Rotoren und Gehäuse auf. Abbildung 1.4 benennt die Spalte und markiert die Position auf dem Profil. Der *Gehäusespalt* vermeidet eine Berührung zwischen Rotor und Gehäuse und erstreckt sich entlang des Rotorzahnkopfes. Die Spalte der Profileingriffslinie beider Rotoren werden aufgrund ihrer geometrischen Lage weiter in *Profileingriffspalt* und *Radialspalt* unterteilt. Der *Radialspalt* befindet sich zwischen Zahnkopf und Zahnfuß und der *Profileingriffspalt* trennt beide Zahnflanken. Im Bereich der Verschneidungskante der Gehäusebohrungen wird durch das Profil der beiden Rotoren die *Kopfrundungsöffnung* gebildet.

Schraubenvakuumpumpen werden üblicherweise als Vorpumpen eingesetzt, welche gegen Atmosphärendruck verdichten. Aufgrund des großen Umschlingungswinkels und der damit einhergehenden Anzahl in Reihe geschalteter Arbeitskammern, können mit diesen Vakuumpumpen sehr große Druckverhältnisse realisiert werden. Üblicherweise liegt der Enddruck - definiert als der Ansaugdruck, bei dem die schädlichen Spaltmassenströme den durch die Kammern geförderten Massenstrom ausgleichen - dieser Bauart im Bereich  $10^{-1} - 1 \text{ Pa}$ . Wird zudem berücksichtigt, dass Spalthöhen in Bereichen weniger zehntel Millimeter liegen, bedeutet dies für die Bestimmung der Spaltmassenströme in Schraubenvakuumpumpen, dass Strömungen in einem großen Bereich der Gasverdünnung betrachtet werden müssen.

### 1.1.3 Simulation

Die Güte einer thermodynamischen Simulation des Betriebsverhaltens von trockenlaufenden Verdrängermaschinen wird maßgeblich durch die Bestimmung der Spaltmassenströme bestimmt. Mit der heute zur Verfügung stehenden Computertechnologie ist es möglich aufwendige 3D-Strömungssimulationen von trockenlaufenden Verdrängermaschinen auf Grundlage der Navier-Stokes Gleichungen durchzuführen. Die Anwendung auf Vakuumpumpen ist jedoch aufgrund der beschriebenen Problematik der Gasverdünnung nur sehr eingeschränkt möglich. Mit zunehmender Knudsenzahl muss auf andere Verfahren zurückgegriffen werden. So wird durch Dechrste und Mieussens [DM16] die Simulation einer Wälzkolbenpumpe auf Grundlage der Boltzmann-Gleichung mittels BGK-Modell beschrieben. Auf diese Weise kann die Druckverteilung in den Arbeitskammern für verschiedene Rotorstellungen bestimmt werden.

Die Auswahl des Berechnungsverfahrens für eine 3D-Strömungssimulation einer Vakuumpumpe ist abhängig vom betrachteten Druckbereich und im Allgemeinen sehr aufwendig. Aus diesem Grund hat sich die Berechnung des thermodynamischen Betriebsverhaltens auf Grundlage eines nulldimensionalen Kammer- oder Stufenmodells durchgesetzt. Die Anwendung eines solchen Kammermodells auf eine mehrstufige Klauenvakuumpumpe wird durch Ioffe et al. aufgezeigt [Iof+95], wobei die Berechnung auf Grundlage der Massen- und Energieerhaltung durchgeführt wird. Es kann gezeigt werden, dass mit einem solchen Modell die Leistungsaufnahme einer mehrstufigen Klauenvakuumpumpe abgebildet werden kann. Li et al. [Li02] wenden ein Kammermodell auf eine trockenlaufende Scroll-Pumpe an, wobei das thermodynamische Betriebsverhalten ebenfalls auf Grundlage der Massen- und Energieerhaltung berechnet wird. Sowohl für die Spalte (radial und axial) als auch für die Einlassfläche wird zur Berechnung der Massenströme die Gasverdünnung in Abhängigkeit der Knudsenzahl berücksichtigt. Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt, dass mit diesem Ansatz sowohl die Leistungsaufnahme als auch der drehzahlabhängige Enddruck der Vakuumpumpe berechnet werden kann. Das berechnete Saugvermögen in Abhängigkeit des Eintrittsdruckes kann ebenfalls qualitativ abgebildet werden. Su et al. [Su+96] berechnen eine Scroll-Pumpe auf Grundlage der Massenerhaltung und einer isothermen Prozessführung. Bei dieser Vakuumpumpe wird von einer berührenden Abdichtung des Axialspaltes ausgegangen. Bei der Ermittlung der Massenströme der Radialspalte wird sowohl die Gasverdünnung als auch eine bewegte Berandung berücksichtigt. Um weiterhin eine gute Abbildung des Betriebsverhaltens sicher stellen zu können, wird zudem die Druckverteilung entlang der Kammer berücksichtigt, die sich durch eine Rückströmung der Spaltmassenströme ergibt. Ein Vergleich des simulierten und gemessenen Enddrucks der Vakuumpumpe zeigt noch Abweichungen. Mithilfe der Simulation kann gezeigt werden, dass der Enddruck sehr stark von der thermischen Ausdehnung der Vakuumpumpe und somit den Spalthöhen abhängt, was zu den relevanten Fehlerquellen zählen kann. Die

Simulation einer Schraubenvakuumpumpe wird durch Ohbayashi et al. beschrieben [Ohb+99]. Die Geometrie des Gehäuse- und Profileingriffspaltes wird durch eine Überlagerung unterschiedlicher Elementargeometrien abgebildet, um so die Spaltmassenströme berechnen zu können. Weiterhin wird eine bewegte Berandung berücksichtigt. Unter Annahme einer isothermen Prozessführung kann so das Saugvermögen in Abhängigkeit des Eintrittsdruckes bestimmt werden und ein Vergleich mit Messungen zeigt eine gute Übereinstimmung. Der drehzahlabhängige Enddruck der Maschine kann ebenfalls gut abgebildet werden. Rohe [Roh05] nutzt ebenfalls ein Stufenmodell, um das vom Eintrittsdruck abhängige Saugvermögen und den drehzahlabhängigen Enddruck zu berechnen. Zur Bestimmung der Spaltmassenströme nutzt Rohe zunächst einen einfachen analytischen Ansatz der Blendenströmung, der jedoch nur unzureichende Ergebnisse liefert. Zur Verbesserung der Abbildung einer verdünnten Spaltströmung nutzt Rohe die durch Wenderott [Wen01] erstellte Messdatenbasis. Wenderott ermittelt für verschiedene Spaltkonturformen den vom Eintrittsdruck abhängigen Spaltmassenstrom im Bereich der Kontinuumsströmung bis zur freien molekularen Strömung. Pfaller [Pfa12] nutzt diesen Ansatz, um Schraubenvakuumpumpen mit einer variablen Steigung zu berechnen. Die Kombination mit einem evolutionären Optimierungsverfahren ermöglicht die Ermittlung optimaler Steigungsverläufe.

Ein allgemeines Kammermodellverfahren zur Berechnung beliebiger Verdrängermaschinen ist am *Fachgebiet Fluidtechnik* der *Technischen Universität Dortmund* entwickelt worden (*KaSim*). Die objektorientierte Modellierungsmethode wird durch Janicki [Jan07] beschrieben, bei welcher eine beliebige Verdrängermaschine durch Abstraktion in Kapazitäten und Verbindungen aufgeteilt und das thermodynamische Betriebsverhalten auf Grundlage der Massen- und Energieerhaltung berechnet werden kann. Kapazitäten können Arbeitskammern, Wärmekapazitäten oder mechanische Kapazitäten darstellen. Verbindungen stellen dabei die Interaktion dieser Kapazitäten in Form von Spalten, Wärmeübergängen oder Kraftangriffsflächen dar. Durch die Nutzung eines Zeitschrittverfahrens kann die Methode auch zur Simulation instationärer Vorgänge genutzt werden. *KaSim* ist insbesondere auch dazu geeignet Verdrängervakuumpumpen zu simulieren. Die durch Wenderott [Wen01] erstellte Messdatenbasis kann genutzt werden, um verdünnte Spaltströmungen ohne bewegte Berandung abzubilden. Stratmann [Str10] greift die durch Wenderott untersuchten Geometrien auf und ermittelt den Durchfluss mithilfe der Testpartikel-Methode, die nur Gültigkeit für eine molekulare Strömung besitzt. Hierbei wird auch die bewegte Berandung berücksichtigt. Unter der Annahme, dass die bewegte Berandung im Kontinuum keinen Einfluss auf den Durchfluss besitzt, schlägt Stratmann [Str10] zudem eine Interpolationsvorschrift für den Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung vor. Weiterhin untersucht Stratmann [Str10] den Effekt der Sorption und Desorption, der insbesondere für Verdrängervakuumpumpen im Feinvakuum eine Rolle spielt. Die vorgeschlagenen Modelle werden am Beispiel einer Wälzkolbenvakuumpumpe und einer Schraubenvakuumpumpe

pe validiert. Nadler [Nad17] nutzt zur Abbildung der Spaltströmung das Modell nach Sharipov [SS98]. Sharipov bestimmt den Massenstrom einer Kanalströmung mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung und das BGK-Modell. Nadler diskutiert auch den Einfluss einer thermischen Kriechströmung. Die Validierung wird anhand einer trockenlaufenden Schraubenmaschine im Blower-Betrieb durchgeführt. Um den Einfluss des Wärmeübergangs auf das thermische Betriebsverhalten beurteilen zu können, werden durch Rohe [Roh05] Wärmeübergangsmodelle vorgeschlagen, wobei eine von der Gasverdünnung abhängige Wärmeleitung des Gases berücksichtigt wird. Die Modelle werden anhand einer Schraubenvakuumpumpe validiert. Sowohl Rohe [Roh05] als auch Nadler [Nad17] nutzen diese Modelle, um eine gekoppelte thermodynamische und thermische Rechnung der jeweiligen betrachteten Vakuumpumpe durchzuführen. Die durch die thermodynamische Berechnung ermittelten Wärmeströme werden dabei für eine transiente strukturmechanische Simulation der Bauteile genutzt. Hieraus ergeben sich eine geänderte Temperaturverteilung und Spalthöhensituation, die für eine erneute thermodynamische Simulation genutzt werden können.

## 1.2 Spaltströmung in Vakuumpumpen

Die gegebene Übersicht zu den Simulationen trockenlaufender Vakuumpumpen zeigt, dass die Bestimmung der Spaltmassenströme eine wichtige Rolle spielt. Zur Abbildung der Spaltströmungen existieren vielfältige Ansätze. Je nach Komplexität des Modells reichen diese von einfachen theoretischen Ansätzen über vollständige mehrdimensionale Simulationen der Strömung bis hin zu umfangreichen Messdatenbasen. Allgemein kann festgestellt werden, dass alle Spalte Verbindungen zwischen Arbeitskammern herstellen und die Spaltmassenströme das Betriebsverhalten der Vakuumpumpen maßgeblich beeinflussen [Str10]. Eine Strömung in Spalten von Vakuumpumpen kann durch verschiedene Wirkmechanismen erzeugt werden, welche nachfolgend aufgelistet werden.

- Die über Spalte miteinander verbundenen Arbeitskammern weisen in der Regel unterschiedliche Drücke auf. Durch den Druckgradienten wird eine Strömung erzeugt, die nach einem französischen Physiker als **Poiseuille-Strömung** benannt wird.
- Durch die Rotation der Rotoren weisen die Berandungen der Spalte unterschiedliche Relativgeschwindigkeiten auf. Hierdurch wird eine Scherströmung erzeugt, die nach einem französischen Physiker auch als **Couette-Strömung** bezeichnet wird.
- Arbeitskammern können zudem unterschiedliche Temperaturen aufweisen. Dies verursacht auch eine Temperaturverteilung in den Bauteilen. Durch einen Temperaturgradienten im Gas wird ebenfalls eine Strömung induziert, die als **ther-**

**mische Kriechströmung** bezeichnet wird.

Die durch einen Konzentrationsunterschied einer Gasmischung hervorgerufene Strömung soll nicht berücksichtigt werden, da von einer homogenen Mischung in allen Arbeitskammern ausgegangen wird. Im Folgenden wird der Stand der Wissenschaft zu verdünnten Spaltströmungen dargelegt. Zunächst wird eine Übersicht über die Methoden zur Berechnung der Strömung gegeben. Anschließend wird auf die oben genannten drei Wirkmechanismen eingegangen.

## 1.3 Stand der Wissenschaft

### 1.3.1 Methoden zur Berechnung von Spaltströmungen

Die Strömung in Vakuumsystemen durch Spalte, Kanäle und Rohre erreicht aufgrund der niedrigen Drücke hohe Knudsenzahlen. Die Betrachtung einer verdünnten Strömung im atmosphärischen Druckbereich kann auch durch sehr kleine geometrische Abmaße erforderlich werden. So kann bei hydrodynamischen Lagern die Schmierfilmdicke des Gases so gering sein, dass eine verdünnte Strömung betrachtet werden muss [Bur58]. In der jüngeren Vergangenheit hat sich durch eine starke Weiterentwicklung von Elektro-Mechanischen-Mikrosystemen MEMS (englisch: Microelectromechanical Systems) ein weiteres großes Anwendungsgebiet ergeben [KBA05]. Insbesondere Prozesse der Strömungs- und Wärmeübertragung spielen in diesen Systemen eine Rolle. Zu den experimentellen Pionierarbeiten zählen die Untersuchungen durch Knudsen [Knu09]. Zu dieser Zeit war bereits bekannt, dass das Hagen-Poiseuille-Gesetz mit zunehmender Gasverdünnung seine Gültigkeit verliert. Knudsen nutzt hierbei einen geeigneten Versuchsaufbau, um den Durchfluss durch Glasrohre für verschiedene Druckbereiche und Gasarten zu bestimmen. Seither ist die Bestimmung der Strömung in Abhängigkeit der nach Knudsen benannten dimensionslosen Kennzahl, der Knudsenzahl, Gegenstand vieler theoretischen und experimentellen Untersuchungen.

Die Literatur bietet unterschiedliche Methoden zur Abbildung verdünnter Strömungen. In der Kontinuumsströmung wird die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen unter Einhaltung einer Haftbedingung zwischen Gas und Wand genutzt, was mit zunehmender Knudsenzahl jedoch keine gute Näherung mehr darstellt. Im Bereich der Schlupfströmung kommt es zu einem nennenswerten Geschwindigkeitsschlupf und Temperatursprung zwischen Gas und Wand. Die Knudsenrenzschicht nimmt zunehmend einen größeren Bereich des Strömungsquerschnitts ein. Zur Abbildung des Geschwindigkeitsschlupfes und des Temperatursprungs existieren Modelle, welche als Randbedingung zur Berechnung der Strömung mittels Navier-Stokes-Gleichungen genutzt werden. Es existieren Modelle erster und höherer Ordnung [KBA05], wobei höhere Ordnungen das Knudsenminimum abbilden sollen. Es bleibt jedoch festzuhalten, dass im Bereich der Übergangsströmung die Navier-Stokes-Gleichungen an Gültigkeit verlieren. In diesem

Bereich muss auf die Boltzmann-Gleichung zur Ermittlung der Strömungsvorgänge zurückgegriffen werden, die das Gas auf Molekülebene beschreibt [Bir94; She05]. Die Lösung dieser Integro-Differentialgleichung wird durch den intermolekularen Kollisionsterm der rechten Seite erschwert, sodass zunächst nur Lösungen für Grenzfälle, wie der molekulare Strömung, oder anderen Vereinfachungen existieren. Im Allgemeinen werden die Verfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichung in deterministische und nicht-deterministische Methoden eingeteilt [Jou10a]. Weiterhin finden sich in der Literatur Ansätze zu Bestimmung der Strömung mithilfe eindimensionaler Methoden. Nachfolgend wird der Stand der Wissenschaft dieser drei Methoden beschrieben.

Zu den deterministischen Methoden gehört die linearisierte Boltzmann-Gleichung [Jou10a], die häufig zur Berechnung der verdünnten Strömung bei kleinen Störungen von der Gleichgewichtsverteilung (Maxwell-Boltzmann Verteilung) genutzt wird [Sha16]. Um den numerischen Aufwand weiter zu reduzieren, wird der intermolekulare Kollisionsterm durch eine geeignete Modellgleichung ersetzt [Jou10a]. Eine mögliche Modellgleichung ist beispielsweise das Bhatnagar-Gross-Krook Modell (BGK-Modell) [BGK54]. Hierbei wird davon ausgegangen, dass durch die intermolekulare Wechselwirkung eine beliebige Verteilungsdichtefunktion eine Relaxation zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung beschreibt [Hä04]. Dieses Modell besitzt Gültigkeit, wenn es sich um schwache Störungen von der Maxwell-Boltzmann-Verteilung handelt. Weiterhin werden Randbedingungen für die Interaktion zwischen Molekül und Wand benötigt. Eine Möglichkeit bietet das Maxwell-Modell [Bir94], das davon ausgeht, dass ein Teil der Moleküle bei der Kollision mit einer Wand vollständig diffus und ein Teil spiegelnd reflektiert werden. Der Akkomodationskoeffizient gibt dabei den Anteil der diffus reflektierten Moleküle an. Die genannten Modelle sind in Kombination mit einem numerischen Verfahren dazu geeignet, Strömungsvorgänge im verdünnten Bereich berechnen zu können.

Cercignani und Daneri [CD63] berechnen mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung mit dem BGK-Modell den Massenstrom einer druckgetriebenen Strömung zwischen zwei parallelen Platten. Das Verfahren besitzt Gültigkeit für kleine Druckgradienten, wie sie für große Spaltlängen auftreten. Ein Vergleich mit Messungen zeigt, dass diese Methode den Knudsenzahlabhängigen Massenstrom abbilden kann. Loyalka und Hamoodi [LH90] nutzen die linearisierte Boltzmann-Gleichung, um die druckgetriebene Strömung in einem Rohr zu berechnen. Ein Vergleich mit den durch Knudsen ermittelten Massenströmen [Knu09] zeigt, dass die Methode das Knudsenminimum abbilden kann. Ein bekanntes Problem des BGK-Modells ist eine fehlerhafte Abbildung der Prandtl-Zahl  $Pr = 1$ , die bei der Betrachtung eines Hartkugelmodells jedoch  $Pr = 2/3$  beträgt [Bir94]. Aus diesem Grund wird durch Shakhov als weitere Modellgleichung das S-Modell vorgeschlagen [Sha68], das eine korrekte Abbildung der Prandtl-Zahl liefert. Sharipov nutzt das Modell in Kombination mit der linearisierten Boltzmann-Gleichung

zur Berechnung der knudsenzahlabhängigen druck- und temperaturgetriebenen Massenströme in einem Rohr [Sha96].

Das durch Cercignani, Lampis und Lord entwickelte Modell (CLL-Modell) greift die Modellierung der Interaktion zwischen Molekül und Wand auf [CL71], [Lor91]. Hierbei werden die tangentialen und die normale Molekülgeschwindigkeitskomponenten unabhängig voneinander betrachtet. Der tangentielle Akkomodationskoeffizient beschreibt den Anteil der diffus reflektierten Moleküle in tangentialer Richtung und der normale Akkomodationskoeffizient den Anteil der diffus reflektierten Moleküle in normaler Richtung. Auf diese Weise kann die kombinierte Betrachtung von Reibung und Wärmeübergang einer Strömung an der Wand verbessert werden. Sharipov nutzt dieses Modell zur Berechnung der Strömung zwischen zwei Platten für verschiedene Akkomodationskoeffizienten mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung und dem S-Modell [Sha02].

Die DSMC-Methode (Direct Simulation Monte Carlo) stellt ein statistisches Verfahren zur Lösung der Boltzmann-Gleichung dar und gehört zu der Gruppe der nicht-deterministischen Verfahren [Bir94]. Eine genauere Beschreibung der Methode, welche auf der Betrachtung von Teilchen basiert, folgt in Kapitel 4. Piekos und Breuer [PB95] berechnen mit der DSMC-Methode den Druckverlauf des planparallelen Spaltes und den Mach-Zahl Verlauf einer Laval-Düse. Das statistische Verfahren zur Bestimmung der Teilchenbewegungen macht es notwendig, dass lange Mittelungsintervalle bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten gewählt werden müssen. Um dem Problem der daraus resultierenden langen Rechenzeiten zu begegnen, kann die durch Fan und Shen [FS01] entwickelte IP-Methode (Information Preservation method) genutzt werden. Hierbei wird für jedes Teilchen neben der Teilchengeschwindigkeit eine Informationsgeschwindigkeit gespeichert, mit der die makroskopischen Größen berechnet werden.

Für die Berechnung von hydrodynamischen Lagern wird durch Fukui und Kaneko [FK87], [FK88] und [FK90] die generalisierte Reynoldsgleichung genutzt. Hierbei wird von einer Superposition aus Poiseuille-, Couette- und thermischer Kriechströmung ausgegangen, wobei der Massenstrom der elementaren Strömungen unabhängig voneinander über einen weiten Bereich der Gasverdünnung bestimmt wird. Das Ziel besteht darin, den Druckverlauf und somit die Tragfähigkeit der hydrodynamischen Lager zu bestimmen. Sowohl Fukui und Kaneko [FK87] als auch Cercignani et al. [CLL05] bestimmen den Poiseuille-Massenstrom mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung für verschiedene Akkomodationskoeffizienten. Alexander et al. [AGA94] nutzen die DSMC-Methode zur Berechnung eines hydrodynamischen Lagers, wobei die Ergebnisse mit den Ergebnissen der Theorie nach Fukui und Kaneko [FK87] eine gute Übereinstimmung aufweisen. Bahukudumbi und Beskok [BB03] nutzen eine Schlupfrandbedingung höherer Ordnung zur Bestimmung der Strömung in einem hydrodynamischen Lager, wobei auch dieses Modell eine gute Übereinstimmung mit den Berechnungen von Alex-

ander et al. [AGA94] und auch Fukui et al. [FK87] besitzt. Zahid et al. [ZYZ07] untersuchen die kombinierte Couette-Poiseuille-Strömung, bei der, im Gegensatz zu der Strömung in hydrodynamischen Lagern, ein Druckverhältnis über den Spalt anliegt. Hierbei werden die Navier-Stokes Gleichungen mit einer Schlupfrandbedingung genutzt, um die Druck- und Geschwindigkeitsverteilung einer mäßig verdünnten Strömung zu berechnen. Sharipov et al. [SFZ05] nutzen die Berechnung einer kombinierten Couette-Poiseuille-Strömung zur Berechnung des Betriebsverhaltens einer Holweck-Pumpe.

Die Literatur bietet weitere Methoden zur Berechnung der verdünnten Strömung in Spalten, welche im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht weiter behandelt werden sollen. Einen guten Überblick bietet die Arbeit von Sharipov und Seleznev [SS98]. Nachfolgend wird der Stand der Wissenschaft bezüglich der elementaren Strömungsprobleme der Poiseuille-Strömung, der Couette-Strömung und der thermischen Kriechströmung beschrieben.

### 1.3.2 Untersuchungen zu elementaren Strömungsproblemen

#### Poiseuille-Strömung:

Die Lösung der linearisierten Boltzmann-Gleichung in Kombination mit einem geeigneten numerischen Verfahren ist Grundlage vieler theoretischer Untersuchungen zur Poiseuille-Strömung, bei welcher der Durchfluss zwischen zwei parallelen Platten in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl bestimmt wird [CD63]. Loyalka et al. [LPS79] berechnen den Massenstrom zwischen zwei Platten für unterschiedliche Akkomodationskoeffizienten des Maxwell-Modells. Cercignani et al. [CLL04] betrachten die Strömung zwischen zwei parallelen Platten, bei der die Platten unterschiedliche Akkomodationskoeffizienten besitzen. Sharipov nutzt die linearisierte Boltzmann-Gleichung zur Ermittlung des Durchflusses bei Kanälen mit endlicher Breite [Sha99b]. Fukui und Kaneko [FK90] nutzen ebenfalls die linearisierte Boltzmann-Gleichung zur Bestimmung des Poiseuille-Massenstroms. Ziel ist die Erstellung einer Datenbank zur Berechnung von hydrodynamischen Lagern. Kosuge und Takata [KT08] erstellen auf Grundlage von Simulationen mit der linearisierten Boltzmann-Gleichung eine Datenbank für die Poiseuille-Strömung, die auch Gasgemische und verschiedene Modelle der intermolekularen Wechselwirkung berücksichtigt. Hierbei wird auch der Fall einer Strömung, die durch einen Konzentrationsunterschied der Gasmischung hervorgerufen wird, abgedeckt.

Mit steigenden Möglichkeiten der Computertechnologie wird auch die DSMC-Methode zunehmend zur Simulation einer Poiseuille-Strömung genutzt. Ikegawa und Kobayashi [IK90] simulieren mit einem 2-dimensionalen Solver die Strömung zwischen zwei parallelen Platten und erzielen eine sehr gute Übereinstimmung verglichen mit den Ergebnissen der linearisierten Boltzmann-Gleichung und Messungen. Xue et al. [XFS00]

und Wang und Li [WL04] zeigen Simulationsergebnisse des Geschwindigkeitsprofils und des Druckverlaufes in Strömungsrichtung für die Strömung zwischen zwei Platten, die mit der DSMC-Methode ermittelt werden. Chong [Cho06] untersucht zudem Platten endlicher Länge und zeigt den Massenstrom in Abhängigkeit des Druckverhältnisses. Weitere Geometrien werden durch Wang und Li [WL04] untersucht, die eine Blende und eine Kanalströmung mit  $90^\circ$  Winkel betrachten. Wu und Tseng [WT01] simulieren eine Laval Düse und einen Kanal mit mehreren Ein- und Austritten. Gegenstand der Untersuchungen ist hier der vom Druckverhältnis abhängige Massenstrom.

Eine theoretische Untersuchung zum Gehäusespalt in Schraubenvakuumpumpen unter Berücksichtigung eines Wärmeübergangs wird durch Müller [Mü13] durchgeführt. Hierbei wird ein eindimensionales Modell auf Grundlage einer kompressiblen Strömung in Spalten mit konstantem Querschnitt beschrieben. Zur Abbildung der Reibung werden Reibbeiwerte ermittelt. Diese berücksichtigen auch Einlaufverluste und den Effekt der Gasverdünnung. Weiterhin kann mit dem Modell der Wärmeübergang auf Grundlage einer inkompressiblen Strömung ermittelt werden. Das vorgeschlagene Modell validiert Müller anhand der planparallelen Spaltkontur nach Wenderott [Wen01]. Gemessene Massen- und Wärmeströme stimmen dabei gut mit dem beschriebenen Modell überein.

Neben theoretischen Untersuchungen zur Poiseuille-Strömung existiert eine Vielzahl experimenteller Arbeiten. Harley et al. [Har+95] ermitteln mit einem geeigneten Versuchsaufbau die Poiseuille-Zahl eines Kanals mit trapezförmigen Querschnitt für Stickstoff, Helium und Argon. Die experimentellen Ergebnisse werden mit den Ergebnissen einer eindimensionalen Theorie verglichen. Turner et al. [Tur+04] ermitteln ebenfalls die Poiseuille-Zahl eines Kanals mit rechteckigem Querschnitt. Die Messergebnisse zeigen eine sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Lösung für eine inkompressible Strömung bei kleinen Reynolds- und Knudsenzahlen. Weiterhin wird der Einfluss der Oberflächenrauheit diskutiert. Ewart et al. [Ewa+07] untersuchen experimentell die Strömung von Helium in einem Kanal. Der Massenstrom wird mit Hilfe der Druckanstiegsmessung in einem Behälter für verschiedene Knudsenzahlen und Druckverhältnisse ermittelt. Bei dieser Methode können Messfehler entstehen, wenn die Zustandsänderung bei der Ermittlung des Druckanstiegs nicht isotherm verläuft. Um diesem Problem zu begegnen, entwickelt Arkilic [ASB97], [Ark97] eine Zwei-Tank Methode, mit welcher der auftretende Messfehler durch einen nicht-isothermen Druckanstieg um mehrere Ordnungen verringert werden kann. Varoutis et al. [Var+09] bestimmen experimentell die Massenströme bei Kanälen mit unterschiedlichen Querschnitten. Veltzke [Vel13] gibt eine gute Übersicht zu den experimentellen Arbeiten auf dem Gebiet der verdünnten Poiseuille-Strömung in Kanälen mit konstantem Querschnitt. Durch Veltzke [Vel13] und Hemadri et al. [Hem+16] wird erstmals der Einfluss eines in strömungsrichtung variablen Querschnitts auf den knudsenzahlabhängigen Massenstrom ermit-

telt. Die experimentelle Untersuchung von Spaltströmungen mit dem direkten Ziel der Übertragung auf Vakuumpumpen wird durch Wenderott beschrieben [Wen01]. Anhand der Verdrängergeometrie kategorisiert Wenderott verschiedene Spaltkonturen, für die experimentell in Abhängigkeit der Knudsenzahl, der Spalthöhe und dem anliegenden Druckverhältnis der Massenstrom bestimmt wird. Die so entstandene Datenbank kann mit Hilfe einer Ähnlichkeitsbetrachtung verallgemeinert werden.

#### Couette-Strömung:

Der Ansatz der linearisierten Boltzmann-Gleichung wird ebenfalls zur Bestimmung der verdünnten Couette-Strömung genutzt. Sone et al. [STO90] bestimmen die Geschwindigkeitsprofile sowie die Scherspannung der ebenen Couette-Strömung in Abhängigkeit der Knudsenzahl. Sowohl Li [Li02] als auch Cercignani et al. [CLL06] untersuchen die ebene Couette-Strömung mit unterschiedlichen Akkomodationskoeffizienten der oberen und unteren Berandung. Sharipov et al. [SCK04] bestimmen die Scherspannung der ebenen Couette-Strömung für Gasgemische aus Edelgasen.

Boulon et al. [BMT99] untersuchen die ebene Couette-Strömung mithilfe der DSMC-Methode in einem Kanal. Hierbei werden die Geschwindigkeitsprofile an verschiedenen Positionen des Kanals in Abhängigkeit der Knudsenzahl gezeigt. Bao et al. [BLS06] berechnen mithilfe der DSMC-Methode den knudsenzahlabhängigen Geschwindigkeits-schlupf und Temperatursprung einer ebenen Couette-Strömung. Die Ergebnisse werden mit weiteren theoretischen Ergebnissen verglichen. White [Whi13] untersucht die zylindrische Couette-Strömung bei unterschiedlichen Akkomodationskoeffizienten mithilfe der DSMC-Methode.

Experimentelle Untersuchungen einer Couette-Strömung sind häufig im Zusammenhang mit der Bestimmung des tangentialen Akkomodationskoeffizienten zu finden. Hierbei findet das Rotorviskositätsmessgerät Anwendung, mit dem die Scherspannung der zylindrischen Couette-Strömung gemessen werden kann [Kuh49]. Hieraus können Größen, wie die Viskosität und der tangentielle Akkomodationskoeffizient, abgeleitet werden [GLS96].

#### thermische Kriechströmung:

Die linearisierte Boltzmann-Gleichung und das BGK-Modell werden durch Kanki und Iuchi [KI73] genutzt, um den Massenstrom einer thermischen Kriechströmung zwischen ebenen Platten zu bestimmen. Weiterhin wird die Relevanz der thermischen Kriechströmung im Vergleich zur Poiseuille-Strömung herausgestellt. Dabei zeigt sich ein deutlicher Einfluss im Bereich großer Knudsenzahlen. Loyalka et al. [LPS79] betrachten ebenfalls zwei ebene Platten, wobei auch der Akkomodationskoeffizient der Berandung variiert wird. Die im Kapitel der Poiseuille-Strömung genannte Datenbank von Kosuge und Takata [KT08] erstreckt sich auch auf die Untersuchung der thermischen Kriechströmung bei Gasgemischen. Aufgrund der nicht korrekten Abbildung der

Prandtl-Zahl bei der Verwendung des BGK-Modells wendet Sharipov das S-Modell auf die thermische Kriechströmung an. Hierbei wird sowohl eine Rohrströmung unter Variation des Akkomodationskoeffizienten betrachtet [Sha96], als auch die Kanalströmung für verschiedene Querschnittsverhältnisse [Sha99a]. Sharipov wendet das CLL-Modell zudem auf eine Rohrströmung [Sha03b] als auch auf die Strömung zwischen parallelen Platten an [Sha02].

Die Messung einer thermischen Kriechströmung von Gasgemischen in einem Rohr wird durch Huang et al. [Hua+99] durchgeführt. Hierbei wird das thermomolekulare Druckverhältnis bestimmt, welches zwischen zwei miteinander verbundenen Behältern unterschiedlicher Temperatur entsteht. Yamaguchi et al. [Yam+14] vermessen das thermomolekulare Druckverhältnis für eine Kanalströmung und unterschiedliche Gase. Der Messaufbau kann zudem genutzt werden, um den Massenstrom einer thermischen Kriechströmung mit identischen Drücken in beiden Behältern zu bestimmen [Yam+16].

# Kapitel 2

## Zielsetzung und Vorgehensweise

Der in Kapitel 1.3 vorgestellte Stand der Wissenschaft zu verdünnten Strömungen in Spalten zeigt, dass eine Vielzahl wissenschaftlicher Untersuchungen in diesem Bereich existieren. Ein Großteil der vorgestellten Arbeiten legen die Grundlage rein theoretischer Betrachtungen oder setzen den Fokus auf verschiedene ingenieurstechnische Anwendungsgebiete. Nur ein kleiner Teil der Arbeiten deckt den Bereich der Spaltströmungen in Vakuumpumpen ab. Primäres Ziel der vorliegenden Arbeit ist daher die Validierung eines Strömungsmodells, das prinzipiell in ein Kammermodellverfahren implementiert werden kann. Darüber hinaus bietet die Literatur für das gesuchte Strömungsmodell eine Reihe geeigneter Ansätze. Ein wichtiges Kriterium stellt eine geringe Rechenzeit dar, da innerhalb eines Kammermodellverfahrens eine Vielzahl von Spaltverbindungen berechnet werden müssen. Aufwändige mehrdimensionale numerische Verfahren (z.B. DSMC-Methode, linearisierte Boltzmann-Gleichung) können zu diesem Zweck nicht genutzt werden. Weiterhin muss es sich um ein numerisch robustes Verfahren handeln, um eine stabile Simulation einer Vakuumpumpe gewährleisten zu können. Das Strömungsmodell soll zudem alle drei in Kapitel 1.2 genannten Wirkmechanismen der Erzeugung einer Spaltströmung berücksichtigen. Das Modell soll dazu genutzt werden können, die Strömung im Bereich der Schlupfströmung, der Übergangsströmung, bis hin zur freien Molekularströmung abzubilden. Weiterhin sollen verschiedene Spaltgeometrien untersucht werden können, was auch einen veränderlichen Querschnitt in Strömungsrichtung beinhaltet.

Um das Ziel der Erstellung eines geeigneten Strömungsmodells zur Abbildung der Strömung in Spalten von Vakuumpumpen erreichen zu können, sollen zunächst die Grundlagen für die Berechnung einer Strömung im verdünnten Bereich erläutert werden (Kapitel 3). Da ein großer Bereich der Gasverdünnung behandelt werden muss, werden neben den Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik die Grundlagen der kinetischen Gastheorie benötigt. Um die Eignung der verschiedenen Strömungsmodelle einschätzen zu können, wird eine Dimensionsanalyse zur Identifizierung aller für die Strömung

wichtigen Kennzahlen durchgeführt. Am Beispiel einer Schraubenvakuumpumpe wird der relevante Wertebereich der Kennzahlen abgeschätzt.

Um Strömungsgrößen im Spalt berechnen zu können, sollen Simulationen mithilfe der DSMC-Methode durchgeführt werden. Diese vielfach validierte Methode zur Simulation verdünnter Strömungen soll dabei behilflich sein ein tieferes Verständnis der an der Strömung relevanten Wirkmechanismen zu erhalten. Die Methode basiert auf einer teilchenorientierten Modellierung der Gasströmung und ist über den gesamten Bereich der Knudsenzahl gültig. Die Grundlagen der Methode und aller beteiligten Modelle werden in Kapitel 4 beschrieben.

Das ausgewählte Strömungsmodell wird in Kapitel 5 beschrieben, welches grundlegend auf eine eindimensionale Theorie nach Fukui und Kaneko [FK87], [FK88], [FK90] und Sharipov [Sha16] zurückgeht.

Ein wichtiger Kernpunkt der Arbeit ist die experimentelle Untersuchung der verdünnten Spaltströmung (Kapitel 6). Hierbei wird in einem ersten Schritt das Spaltmodell nach Wenderott [Wen01] und das Messverfahren beschrieben, für das experimentelle Untersuchungen der Poiseuille-Strömung durchgeführt werden. In der Literatur finden sich keine experimentellen Untersuchungen einer kombinierten Couette-Poiseuille-Strömung, für die weiterhin ein geeigneter Versuchsaufbau beschrieben wird.

Die umfangreiche Validierung der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie wird in Kapitel 7 beschrieben. Es werden systematisch alle identifizierten Kennzahlen im Rahmen der experimentellen Möglichkeiten variiert und umfangreich analysiert. Im Fokus steht neben der Poiseuille-Strömung die Untersuchung der kombinierten Couette-Poiseuille-Strömung. Kennzahlen, die nicht mithilfe der beschriebenen Versuchsmodelle variiert werden können, werden nach Möglichkeit mit experimentellen Ergebnissen aus der Literatur validiert.

Um in einen letzten Schritt die Basis zur Implementierung der eindimensionalen Theorie in ein Kammermodellverfahren zu legen, werden die Grenzen der Modellierung durch eine weitere systematische Variation der Kennzahlen untersucht (Kapitel 8). Aufgrund der Einschränkungen eines experimentellen Aufbaus werden hier die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der DSMC-Methode verglichen. Weiterhin werden die einschränkenden Annahmen der eindimensionalen Theorie untersucht, um so zusätzlich das Potential zur Verbesserung des Modells im Rahmen zukünftiger Forschungsprojekte herauszuarbeiten.

# Kapitel 3

## Grundlagen der Spaltströmung

Um den kompletten Druckbereich der Spaltströmung in Vakuumpumpen sinnvoll abdecken zu können, müssen sowohl die Ansätze der klassischen Kontinuumsmechanik als auch der kinetischen Gastheorie behandelt werden. Während die Ansätze der Kontinuumsmechanik bei zunehmender Gasverdünnung an Gültigkeit verlieren, kann die kinetische Gastheorie prinzipiell über alle Druckbereiche hinweg genutzt werden. Im Weiteren soll die Ähnlichkeitstheorie in Form von dimensionslosen Kennzahlen genutzt werden, um die Ergebnisse dieser Arbeit auf strömungsmechanisch ähnliche Probleme übertragen zu können. Abschließend wird am Beispiel der Schraubenvakuumpumpe eine Abschätzung der zu erwartenden Größenordnungen der dimensionslosen Kennzahlen durchgeführt.

### 3.1 Erhaltungsgleichungen

#### 3.1.1 Kontinuumsmechanik

Die Erhaltungsgleichungen werden allgemein für ein beliebiges infinitesimal kleines 3-dimensionales Fluidelement in einem Strömungsfeld beschrieben und sind zunächst ohne Einschränkungen für eine instationäre, kompressible und reibungsbehaftete Kontinuumsströmung gültig. Es wird davon ausgegangen, dass es sich um ein stetig verlaufendes Strömungsfeld handelt.  $x$ ,  $y$  und  $z$  bilden die drei Raumkoordinatenrichtungen des Fluidelements und die Gleichungen werden in Form einer Vektornotation angegeben. Die Beschreibung der Kinetik entspricht der Betrachtungsweise nach Euler. Für den Zusammenhang von Scherspannung und Schergeschwindigkeit wird im Folgenden von einem Newtonschen Fluid ausgegangen. [Tru89]

#### Massenerhaltung

Die Herleitung der Massenerhaltung geht von einer Bilanzierung der Massenströme über die Grenzen eines ortsfesten Fluidelements und der Änderung der darin enthal-

tenen Masse aus. Hierbei existieren weder Quellen noch Senken in dem betrachteten Fluidelement, sodass Masse weder produziert, noch vernichtet werden kann. Die differentielle Schreibweise der Massenerhaltung ergibt sich zu:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

Hierbei wird die substantielle Änderung der Dichte  $d\rho/dt$  weiter aufgeteilt, sodass der erste Term die lokale Änderung der Masse und der zweite Term die konvektive Änderung der Masse in die drei Raumrichtungen darstellt.

### Impulserhaltung

Eine analoge Bilanzierung kann für die Herleitung der Impulserhaltung durchgeführt werden. Dabei muss die zeitliche Änderung des Impulses eines betrachteten Fluidelements gleich der Summe der angreifenden Kräfte entsprechen (Newtonsche Grundgesetz). Für das Fluidelement geschieht dies üblicherweise unter Verwendung von massenspezifischen Größen:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{f}_P + \vec{f}_Z \quad (3.2)$$

Die substantielle Ableitung der Strömungsgeschwindigkeit  $d\vec{u}/dt$  entspricht der Summe aus spezifischer Druckkraft  $\vec{f}_P$  und spezifischer Zähigkeitskraft  $\vec{f}_Z$ , wobei letztere von der Viskosität des Fluids herrührt [Tru89]. Da in der vorliegenden Arbeit lediglich laminare Strömungen von Gasen behandelt werden, wird auf die Berücksichtigung eines turbulenten Scheinreibungsanteils (vgl. [Tru89]) sowie Volumenkräften in Form der Gewichtskraft verzichtet. Die weitere Ausformulierung der spezifischen Kräfte führt unter Berücksichtigung der Hypothese von Stokes [SG06] auf die differentielle Schreibweise der Impulserhaltung in die drei Raumrichtungen:

$$\begin{aligned} \rho \frac{du_x}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \frac{du_y}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \right] \\ \rho \frac{du_z}{dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \vec{u} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.3)$$

In der Literatur wird diese Gleichung - üblicherweise unter Berücksichtigung einer Volumenkraft - als Navier-Stokesche Bewegungsgleichung bezeichnet.

### Energieerhaltung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird der Ansatz der Kontinuumsmechanik lediglich für eine Strömung genutzt, bei der von einem vollständigem Wärmeübergang zwischen Gas und Wand ausgegangen wird. Die Gastemperatur entspricht so stets

der Wandtemperatur und stellt somit keine weitere Variable dar, die zur Lösung des Gleichungssystems bestimmt werden muss. Auf die Beschreibung der Energieerhaltung wird an dieser Stelle daher verzichtet.

### Zustandsgleichung

Bei Gasen muss eine Änderung der Dichte in Abhängigkeit des Drucks und der Temperatur berücksichtigt werden. Unter Annahme eines idealen Gases stellt diesen Zusammenhang die ideale Gasgleichung

$$p = \rho R_s T \quad (3.4)$$

mit der spezifischen Gaskonstante  $R_s$  her und kann mithilfe der Boltzmann-Konstante  $k$  mit der Teilchenanzahldichte  $n$  beschrieben werden:

$$p = nkT \quad (3.5)$$

### Viskosität

Die Viskosität eines Gases weist im Allgemeinen eine Abhängigkeit von der Temperatur und eine schwache Abhängigkeit vom Druck auf. Bei der Betrachtung der Erhaltungsgleichungen wird die Änderung der Viskosität häufig vernachlässigt und als abschnittsweise konstant angenommen. Zur Betrachtung einer Strömung bei unterschiedlichen Temperaturen ist es jedoch notwendig, eine Abbildung der temperaturabhängigen Viskosität sicher zu stellen. Ein häufig verwendetes Modell, das über einen weiten Temperaturbereich gute Werte liefert, ist das Sutherland-Modell [Sut93]:

$$\mu = \mu_R \left( \frac{T}{T_R} \right)^{3/2} \cdot \frac{T_R + T_S}{T + T_S} \quad (3.6)$$

$\mu_R$  ist die bei der Referenztemperatur  $T_R$  gemessene Referenzviskosität. Die Sutherlandkonstante  $T_S$  ist abhängig vom Gas.

In der vorliegenden Arbeit werden als Gase trockene Luft und Helium betrachtet. Die entsprechenden Konstanten des Sutherlandmodells für beide Gase werden in **Tabelle 3.1** aufgelistet.

*Tabelle 3.1: Gaskonstanten zur Berechnung der Viskosität mithilfe des Sutherlandmodells für Helium [Tru89] und Luft [Whi91]*

Gas	He	Luft
Referenzviskosität $\mu_R$	$1,871 \cdot 10^{-5}$ Pa s	$1,716 \cdot 10^{-5}$ Pa s
Referenztemperatur $T_R$	273 K	273 K
Sutherlandkonstante $T_S$	86 K	111 K

### 3.1.2 Kinetische Gastheorie

#### Boltzmann-Gleichung

Die kinetische Gastheorie beschreibt Gase auf der Ebene einzelner Moleküle. Jedes dieser Moleküle besitzt eine Position  $\vec{x}$  im physikalischen Raum und eine Molekülgeschwindigkeit  $\vec{c}$ . Die Boltzmann-Gleichung stellt eine Bilanzgleichung eines Phasenraumelements dar, das einen 6-dimensionalen Raum beschreibt. Dieser setzt sich aus einem physikalischen Raumelement  $d\vec{x}$  und einem Molekülgeschwindigkeitselement  $d\vec{c}$  zusammen. Mithilfe der Einführung der Verteilungsdichtefunktion (auch: Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion)  $f$  der Teilchengeschwindigkeit kann das Gas statistisch auf Grundlage von Molekülen beschrieben werden.  $Nfd\vec{c}$  gibt dabei die Anzahl der Moleküle  $dN$  im Geschwindigkeitsraum  $\vec{c}$  bis  $\vec{c}+d\vec{c}$  an. Die Boltzmann-Gleichung bildet auf diesem Ansatz die Erhaltungsgleichung, wobei ein Phasenraumelement  $d\vec{c}d\vec{x}$  betrachtet wird. Die Änderung der Anzahl der Moleküle  $\frac{\partial}{\partial t}(nf)d\vec{c}d\vec{x}$  in diesem Phasenraumelement kann dabei grundsätzlich durch drei Mechanismen hervorgerufen werden. Die Konvektion der Moleküle über die Oberfläche des Elementes  $d\vec{x}$  infolge der Molekülgeschwindigkeit  $\vec{c}$ , die Konvektion der Molekülgeschwindigkeit über die Oberfläche des Elementes  $d\vec{c}$  infolge einer Volumenkraft oder der Streuung in bzw. aus dem Element  $d\vec{c}$  infolge der intermolekularen Wechselwirkung. Analog zu den Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik wird auch hier eine Volumenkraft vernachlässigt:

$$\frac{\partial}{\partial t}(nf) + \vec{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}}(nf) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{4\pi} n^2 (f^* f_1^* - f f_1) c_{rel} \sigma d\Omega d\vec{c}_1 \quad (3.7)$$

Der erste Term der linken Seite repräsentiert die Änderung der Anzahl der Moleküle in einem Phasenraumelement mit der Zeit. Der zweite Term stellt die Änderung der Moleküle in einem Raumelement infolge der Molekülgeschwindigkeit dar. Hierbei ist das Oberflächenintegral mithilfe des Gaus'schen Integralsatz in ein Volumenintegral umgeschrieben worden. Die rechte Seite der Gleichung beschreibt die intermolekulare Wechselwirkung. Hierbei ist die grundsätzliche Annahme, dass die Reichweite intermolekularer Kräfte im Vergleich zur mittleren freien Weglänge klein ist und dadurch nur binäre Stöße zwischen Teilchen stattfinden [Hä04] (in der englischen Literatur auch als *dilute gas* bezeichnet [Bir94]). In der Herleitung wird ein beispielhaftes Testmolekül der Geschwindigkeit  $\vec{c}$  und dem differentiellen Kollisionsquerschnitt  $\sigma d\Omega$  betrachtet, das sich mit der Relativgeschwindigkeit  $c_{rel}$  zu Feldmolekülen mit der Geschwindigkeit  $\vec{c}_1$  bewegt. Mithilfe der Teilchenanzahldichte der Feldmoleküle  $nf_1 d\vec{c}_1$  kann so die gesamte Anzahl der Stöße pro Zeit berechnet werden, bei welcher die Geschwindigkeit des Testmoleküls von  $\vec{c}$  in die Postkollisionsgeschwindigkeit  $\vec{c}^*$  gestreut wird (Kollisionsklasse:  $\vec{c}, \vec{c}_1 \rightarrow \vec{c}^*, \vec{c}_1^*$ ). Analog dazu kann die inverse Kollisionsklasse  $\vec{c}^*, \vec{c}_1^* \rightarrow \vec{c}, \vec{c}_1$  aufgestellt werden, sodass sich durch Integration über den gesamten Geschwindigkeitsraum  $\vec{c}_1$

und dem Raumwinkel  $\Omega$  der Kollisionsterm der rechten Seite der Boltzmann-Gleichung ergibt.

### Maxwell-Boltzmann-Verteilung

Für die Betrachtung einer Gasströmung auf molekularer Ebene werden geeignete Modelle für die Beschreibung der Molekülgeschwindigkeiten benötigt. Die Lösung der Boltzmann-Gleichung unter Vernachlässigung von Volumenkräften und einem Gas in Ruhe (Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u} = 0$ ) stellt die Maxwell-Boltzmann-Verteilung auf globaler Ebene dar. Im Allgemeinen wird die Verteilungsdichtefunktion normiert angegeben, sodass gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(c)dc = 1 \quad (3.8)$$

Wird davon ausgegangen, dass die Molekülgeschwindigkeiten in die drei Raumrichtungen  $x, y, z$  normalverteilt sind, kann die Verteilungsdichtefunktion  $f_{0,i}$ , mit  $i \in [x, y, z]$  einer Raumkomponente durch

$$f_{0,i} = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp(-\beta^2 c_i^2) \quad (3.9)$$

beschrieben werden, wobei  $\beta$  den Kehrwert für die betragsmäßig wahrscheinlichste Geschwindigkeit nach der Maxwell-Boltzmann-Verteilung darstellt:

$$\beta = \sqrt{\frac{m_{Mol}}{2kT}} \quad (3.10)$$

Die Wahrscheinlichkeit  $f_0$  einer Molekülgeschwindigkeit  $\vec{c}$  ergibt sich somit aus den Teilwahrscheinlichkeiten der Raumkomponenten:

$$f_0 = f_{0,x} \cdot f_{0,y} \cdot f_{0,z} = \left(\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \cdot \exp(-\beta^2 |\vec{c}|^2) \quad (3.11)$$

Da der Betrag der Molekülgeschwindigkeit entlang einer Kugeloberfläche verläuft, kann die Wahrscheinlichkeit  $f(|\vec{c}|)$  über die Integration von  $f_0$  ermittelt werden:

$$f(|\vec{c}|) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \beta^3 |\vec{c}|^2 \cdot \exp(-\beta^2 |\vec{c}|^2) \quad (3.12)$$

**Abbildung 3.1** zeigt beispielhaft die Verteilungsdichtefunktion einer Raumkomponente  $f_{0,i}$  der Molekülgeschwindigkeit, die einer Normalverteilung entspricht. Weiterhin wird die Maxwell-Boltzmann-Verteilung  $f(|\vec{c}|)$  für den Betrag der Geschwindigkeit mit der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit  $1/\beta$  dargestellt.

Wird auf die Lösung der Boltzmann-Gleichung mithilfe von deterministischen Methoden zurückgegriffen, ist es hilfreich, die Maxwell-Boltzmann-Verteilung auf lokaler Ebe-

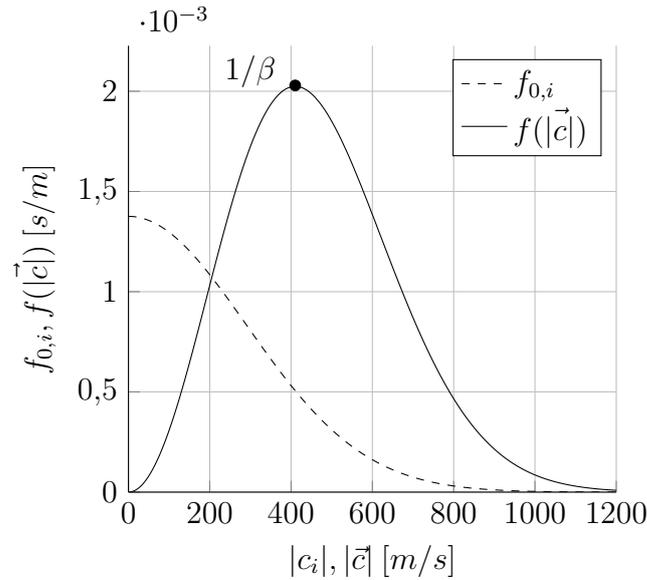


Abbildung 3.1: Verteilungsdichtefunktion  $f_{0,i}$  für die Geschwindigkeit in eine Raumrichtung  $|c_i|$  sowie Verteilungsdichtefunktion  $f(|\vec{c}|)$  für die Geschwindigkeiten mit dem Betrag  $|\vec{c}|$  für Luft bei  $T = 293$  K.

ne zu definieren. Hierbei wird ein großes System in mehrere Untersysteme unterteilt, die sich wiederum in einem lokalen Gleichgewicht befinden und nur kleine Änderungen der Zustandsgrößen zueinander aufweisen [Jou10a]. Die lokale Maxwell-Boltzmann-Verteilung  $f_0^{lok}$  beschreibt ein ruhendes Gas im Relativsystem der Strömung wobei die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  und die Temperatur  $T$  als lokale Größen zu interpretieren sind [Sha16]:

$$f_0^{lok} = \beta^3 \pi^{-3/2} \cdot \exp(-\beta^2 [\vec{c} - \vec{u}]^2) \quad (3.13)$$

## 3.2 Dimensionslose Kennzahlen

Die Nutzung von dimensionslosen Kennzahlen ist in der Strömungsmechanik ein geeignetes Hilfsmittel, um die erforderliche Anzahl an Parametern zur Beschreibung eines strömungsmechanischen Systems zu identifizieren. Weiterhin können so die Ergebnisse allgemeingültig formuliert und mithilfe der geometrischen und physikalischen Ähnlichkeit auf andere Probleme übertragen werden. Im Folgenden werden für die Spaltströmung in Vakuumpumpen die Einflussparameter unter gegebenen Randbedingungen identifiziert und die dimensionslosen Parameter mithilfe des  $\Pi$ -Theorems bestimmt. Weiterhin wird eine Einordnung der Spaltströmung anhand der dimensionslosen Parameter durchgeführt.

### 3.2.1 $\Pi$ -Theorem

Die Identifizierung der dimensionslosen Parameter kann mithilfe des  $\Pi$ -Theorems nach Buckingham [Buc14] durchgeführt werden. Um das betrachtete System vollständig mit

dimensionslosen Parametern beschreiben zu können, müssen zuvor alle Einflussgrößen identifiziert werden. Für die Analyse der Spaltströmung wird die in **Abbildung 3.2** gezeigte Spaltgeometrie zu Grunde gelegt. Zusätzlich werden alle Größen angegeben, die in der Dimensionsanalyse Berücksichtigung finden.

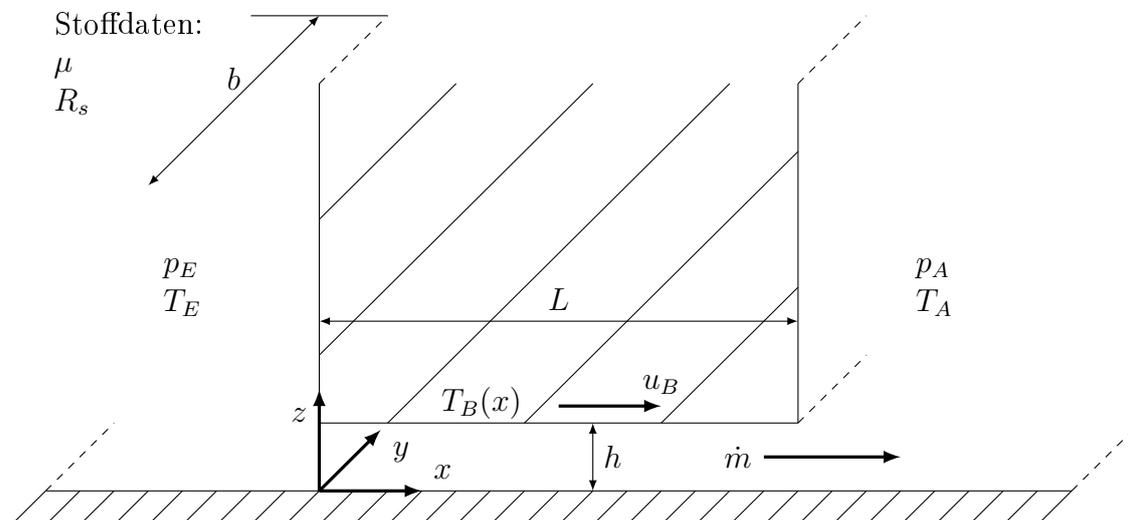


Abbildung 3.2: Beispielhafter Spalt mit charakteristischen geometrischen und physikalischen Größen

Die Geometrie des Spaltes wird durch die minimale Spalthöhe  $h$ , die Spaltlänge  $L$  und die Spaltbreite  $b$  festgelegt. Soll eine Spaltgeometrie mit einem Radius  $R$  betrachtet werden, kann dieser analog zur Spaltlänge  $L$  des planparallelen Spaltes behandelt werden. Grundsätzlich soll für die Dimensionsanalyse die Annahme eines vollständigen Wärmeübergangs zwischen Wand und Strömung angenommen werden. Das Gas nimmt in jedem Querschnitt des Spaltes eine durch die Berandung vorgegebene Temperatur  $T_B(x)$  an. Es wird zusätzlich angenommen, dass alle Berandungen (obere, untere und seitliche Berandung) den gleichen Temperaturverlauf  $T_B(x)$  besitzen. Ein- und Austrittstemperatur entsprechen so den Berandungstemperaturen am Ein- und Austritt ( $T_E = T_B(0) \wedge T_A = T_B(L)$ ) und werden für die Dimensionsanalyse einbezogen.  $p_E$  und  $p_A$  definieren den Ein- und Austrittsdruck am Spalt. Die für die Dimensionsanalyse einer Strömung mit vollständigem Wärmeübergang wichtigen Stoffdaten werden durch die spezifische Gaskonstante  $R_s$  und die Viskosität  $\mu$  gegeben. Die Viskosität ist von der Gastemperatur abhängig und somit keine konstante Stoffgröße. Für die Bestimmung der dimensionslosen Kennzahlen wird diese auf den Eintrittszustand und somit die Eintrittstemperatur  $T_E$  bezogen. Weitere Stoffdaten, wie Wärmekapazität oder Wärmeleitfähigkeit entfallen aufgrund der Betrachtung einer Strömung mit vollständigem Wärmeübergang. Aufgrund der Bewegung der Rotoren wird weiterhin eine Berandungsgeschwindigkeit  $u_B$  berücksichtigt. Die Zielgröße stellt der Spaltmassenstrom  $\dot{m}$  dar, der sich aufgrund der beschriebenen Randbedingungen einstellt.

Die elf beschriebenen Größen enthalten vier Grundeinheiten. Hieraus kann abgelei-

Tabelle 3.2: Dimensionslose Kennzahlen zur Beschreibung einer Spaltströmung mit vollständigem Wärmeübergang

dimensionslose Kennzahlen	Symbol
Knudsenzahl	$Kn$
Druckverhältnis	$\Pi$
Temperaturverhältnis	$T_E/T_A$
Umfangsreynoldszahl	$Re_U$
Längen zu Höhenverhältnis (Radius zu Höhenverhältnis)	$L/h$ $(R/h)$
Breiten zu Höhenverhältnis	$b/h$
Reynoldszahl	$Re$
abgeleitete dimensionslose Kennzahlen	
Verdünnungsfaktor	$\delta$
normierter Massenstrom	$C_0$
normierte Berandungsgeschwindigkeit	$u_0$

tet werden, dass insgesamt sieben dimensionslose Kennzahlen notwendig sind, um die Spaltströmung vollständig zu beschreiben. **Tabelle 3.2** führt die dimensionslosen Kennzahlen auf. Die Geometrie wird durch das Längen zu Höhenverhältnis  $L/h$  und das Breiten zu Höhenverhältnis  $b/h$  beschrieben. Wird ein Spalt betrachtet, bei dem die Kontur durch einen Radius gebildet wird, repräsentiert das Radius zu Höhenverhältnis  $R/h$  den geometrischen Parameter. Das Druckverhältnis  $\Pi$  gibt das am Spalt anliegende Druckgefälle an:

$$\Pi = \frac{p_E}{p_A} \quad (3.14)$$

Analog hierzu gibt das Temperaturverhältnis  $T_E/T_A$  das am Spalt anliegende Temperaturgefälle an. Bei dem Temperaturgefälle muss beachtet werden, dass der Temperaturverlauf  $T_B(x)$  ähnlich sein muss. Analog dazu muss auch der Viskositätsverlauf ähnlich sein. Die bereits in Kapitel 1 eingeführte Knudsenzahl  $Kn$  ist ein Maß für die Gasverdünnung. Mithilfe des Harte-Kugel Modells kann diese mit Bezug auf die Eintrittsgrößen am Spalt bestimmt werden:

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\mu \sqrt{R_s T_E}}{p_E h} \quad (3.15)$$

Die Umfangersreynoldszahl  $Re_U$  dient als dimensionslose Kennzahl zur Beschreibung der Wandgeschwindigkeit. Als Bezugsgröße wird hier üblicherweise die Spalthöhe genutzt:

$$Re_U = \frac{p_E u_B h}{R_s \mu T_E} \quad (3.16)$$

Die Reynoldszahl  $Re$  kann als Ergebnis interpretiert werden, da diese den dimensionslosen Massenstrom angibt. Als Bezugsgröße dient der hydraulische Ersatzdurchmesser. Unter der Annahme, dass die Spaltbreite  $b$  wesentlich größer als die Spalthöhe  $h$  ist,

entspricht der hydraulische Durchmesser der zweifachen Spalthöhe:

$$Re = \frac{2\dot{m}}{\mu b} \quad (3.17)$$

Die sieben genannten Kennzahlen stellen für die Spaltströmung mit vollständigem Wärmeübergang eine geschlossene Beschreibung dar. Neben den beschriebenen dimensionslosen Kennzahlen sind weitere abgeleitete Kennzahlen in der Literatur üblich, welche alternativ genutzt werden können. Neben der Knudsenzahl findet der Verdünnungsfaktor  $\delta$  häufig Anwendung:

$$\delta = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1}{Kn} \quad (3.18)$$

Zur Eliminierung der in der Reynoldszahl und Umfangsreynoldszahl enthaltenen Dichte werden zwei alternative Kennzahlen eingeführt. Wird die Umfangsreynoldszahl mit der Knudsenzahl und dem Faktor  $1/\sqrt{\pi}$  multipliziert, ergibt sich die normierte Berandungsgeschwindigkeit  $u_0$ , die anschaulich das Verhältnis aus Wandgeschwindigkeit  $u_B$  und wahrscheinlichster Molekülgeschwindigkeit  $1/\beta$  (vgl. Kapitel 3.1.2) der Maxwell-Boltzmann-Verteilung darstellt:

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot Re_U \cdot Kn = \frac{u_B}{\sqrt{2R_s T_E}} \quad (3.19)$$

Analog kann die Reynoldszahl mit der Knudsenzahl multipliziert werden und es ergibt sich der normierte Massenstrom  $C_0$ , der anschaulich das Verhältnis aus Spaltmassenstrom und dem Massenstrom einer molekular durchströmten Blende der Fläche  $b \cdot h$  ohne Gegendruck darstellt:

$$C_0 = Re \cdot Kn = \sqrt{2\pi} \frac{\dot{m} \sqrt{R_s T_E}}{p_E b h} \quad (3.20)$$

### 3.2.2 Einordnung der Spaltströmung

Um eine sinnvolle Untersuchung der Spaltströmung unter Ausnutzung der dimensionslosen Kennzahlen durchführen zu können, müssen die zu erwartenden Größenordnungen der Einflussparameter abgeschätzt werden. Auf diese Weise können ebenfalls die Größenordnungen der dimensionslosen Parameter bestimmt werden. Als Grundlage soll eine Schraubenvakuumpumpe dienen, wie sie beispielhaft in Abbildung 1.3 gezeigt ist. Üblicherweise weist ein Rotor eine Anzahl von 5-20 in Reihe geschalteter Kammern auf. Wie bereits beschrieben, können Ansaugdrücke bis in den Bereich des Feinvakuums ( $10^{-1} Pa$ ) erzeugt werden. Unter Annahme eines konstanten Druckverhältnisses pro Kammerverbindung lässt sich für den Gehäusespalt schließen, dass so Druckverhältnisse von bis zu  $\Pi = 16$  auftreten. Tatsächlich können aufgrund einer nicht-linearen Druckverteilung der Kammerdrücke wesentlich größere Druckverhältnisse auftreten [Roh05], [Str10]. Für die Abschätzung des Temperaturverhältnisses

wird zunächst davon ausgegangen, dass die Berandungsoberfläche auf der Saugseite der Schraubenvakuumpumpe Umgebungstemperatur besitzt. Mit Bezug auf die durch Rohe durchgeführten Untersuchungen [Roh05], können Temperaturen in der Größenordnung von  $500\text{ K}$  auf der Druckseite auftreten. Für einen Gehäusespalt sind so unter der Annahme eines konstanten Temperaturverhältnisses pro Kammerverbindung bei 5 Kammern pro Rotor Temperaturverhältnisse von  $T_E/T_A = 1,12$  zu erwarten. Um eine ausreichende Abdichtung erzielen zu können, weisen Schraubenvakuumpumpen üblicherweise sehr geringe Spalthöhen auf, die sich je nach Baugröße im Bereich von zehntel bis hin zu wenigen hundertstel Millimetern erstrecken ( $h \approx 0,05 - 0,3\text{ mm}$ ) [Mü13]. Die Länge des Gehäusespaltes ist im wesentlichen abhängig von der Steigung und dem Durchmesser des Rotors und liegt üblicherweise im Bereich  $L \approx 1 - 40\text{ mm}$ . Hieraus resultieren Längen zu Höhenverhältnisse von  $L/h \approx 3 - 800$ . Der Radialspalt zeigt, dass auch Konturen mit variablem Strömungsquerschnitt betrachtet werden müssen. Der Durchmesser der Rotoren liegt üblicherweise im Bereich von  $40 - 250\text{ mm}$  [Mü13], sodass für den geometrischen Parameter des Radius zu Höhenverhältnisses Werte im Bereich  $R/h \approx 65 - 2500$  zu erwarten sind. Die Breite der Spalte ist üblicherweise um Größenordnungen größer als die Spalthöhe. In Bereichen kleiner Steigung auf der Druckseite der Rotoren kann die Breite des Radialspaltes wenige Millimeter betragen  $b \approx 1\text{ mm}$ . Die Spaltbreite des Gehäusespaltes eines Rotors mit großem Durchmesser hingegen kann sehr große Werte annehmen  $b \approx 500\text{ mm}$ . Hieraus resultieren Breiten zu Höhenverhältnisse von  $b/h \approx 3 - 10000$ .

Knudsenzahl, Reynoldszahl und Umfangsreynoldszahl stellen dimensionslose Kennzahlen dar, mit denen die Strömung kategorisiert werden kann. Die Einteilung der Strömung in Bereiche verschiedener Gasverdünnungen wird in Abhängigkeit der Knudsenzahl durchgeführt. **Tabelle 3.3** gibt die durch Beskok [Bes01] vorgeschlagene Klassifizierung in vier Bereiche an. Unter Berücksichtigung der beschriebenen Bereiche des Druckes und der Spalthöhen bei Schraubenvakuumpumpen sind theoretisch Knudsenzahlen im Bereich von  $Kn \approx 2 \cdot 10^{-4} - 1000$  möglich.

*Tabelle 3.3: Strömungsbereiche in Abhängigkeit der Knudsenzahl und Druckbereich für Luft bei  $293\text{ K}$  und einer Spalthöhe von  $0,3\text{ mm}$ .*

<b>Knudsenzahlbereich</b>	<b>Strömungsbereich</b>	<b>Druckbereich</b>
$Kn < 0,01$	Kontinuumsströmung	$p > 2200\text{ Pa}$
$0,01 < Kn < 0,1$	Schlupfströmung	$220\text{ Pa} < p < 2200\text{ Pa}$
$0,1 < Kn < 10$	Übergangsströmung	$2,2\text{ Pa} < p < 220\text{ Pa}$
$Kn > 10$	freie Molekularströmung	$p < 2,2\text{ Pa}$

Bei kleinen Knudsenzahlen ( $Kn < 0,01$ ) kann die Strömung als Kontinuum betrachtet und mithilfe der Navier-Stokes-Gleichungen berechnet werden. Die Anzahl der Stöße zwischen Molekülen überwiegt gegenüber der Anzahl der Stöße zwischen Molekülen und der Berandung. Im Bereich der Schlupfströmung kann weiterhin in guter Nähe-

nung die klassische Kontinuumsmechanik angewandt werden, es kommt jedoch zunehmend zu einem Geschwindigkeitsschlupf und einem Temperatursprung zwischen Gas und Berandung. Im Bereich der Übergangsströmung kann die klassische Kontinuumsmechanik nicht mehr genutzt werden und zur Beschreibung der Strömung muss auf die Boltzmann-Gleichung zurückgegriffen werden. Die freie Molekularströmung zeichnet sich dadurch aus, dass Stöße zwischen den Molekülen vernachlässigt werden können.

Die Reynoldszahl gibt das Verhältnis aus Trägheits- zu Zähigkeitskräften an und ist als Kennzahl geeignet den Umschlag von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung anzugeben. Bei sehr kleinen Reynoldszahlen wird von einer schleichenden Bewegung der Strömung gesprochen. Hier können die Trägheitsglieder in der Impulserhaltung vernachlässigt werden. **Tabelle 3.4** gibt die verschiedenen Strömungsbereiche in Abhängigkeit der Reynoldszahl an.

*Tabelle 3.4: Strömungsbereiche in Abhängigkeit der Reynoldszahl und Umfangsreynoldszahl.*

Reynoldszahlbereich	Strömungsbereich
$Re > 3000$	turbulente Poiseuille-Strömung
$Re < 3000$	laminare Poiseuille-Strömung
$Re < 1$ $\alpha \cdot Re \ll 1$	schleichende Strömung (für kleine Neigungswinkel $\alpha$ )
$Re_U > 1300$	turbulente Couette-Strömung
$Re_U < 1300$	laminare Couette-Strömung

Schlichting und Gersten [SG06] geben die Grenze zwischen laminarer und turbulenter Strömung einer Poiseuille-Strömung in Abhängigkeit der Reynoldszahl und einer Couette-Strömung in Abhängigkeit der Umfangsreynoldszahl an. Der Umschlagpunkt einer Poiseuille-Strömung liegt im Bereich von  $Re \approx 3000$  und der einer Couette-Strömung im Bereich von  $Re_U \approx 1300$ . Eine schleichende Strömung liegt nach Schlichting und Riegels [SR82] bei Reynoldszahlen kleiner eins vor. Für eine Strömung mit veränderlichen Querschnitt, bei welcher eine Berandung um einen kleinen Neigungswinkel  $\alpha$  verkippt ist, kann nach Spurk und Aksel [SA10] von einer schleichenden Strömung ausgegangen werden, wenn das Produkt aus Reynoldszahl  $Re$  und Neigungswinkel  $\alpha$  klein ist.

Um eine Aussage über die Größenordnung dieser Kennzahlen treffen zu können, soll eine separate Betrachtung von Couette- und Poiseuille-Strömung durchgeführt werden. Die durch Wenderott [Wen01] beschriebenen Messungen am planparallelen Spalt unterschiedlicher Längen können dazu genutzt werden, eine Einordnung der zu erwartenden Reynoldszahl in Abhängigkeit der Knudsenzahl durchzuführen. Alle weiteren Randbedingungen werden mit  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$  und  $b/h = 333,3$  konstant gehalten. Aufgrund des großen Druckverhältnisses handelt es sich hierbei um eine obere Abschätzung der Reynoldszahl. Es liegen Messergebnisse im Bereich der Kontinuums- bis zur Über-

gangsströmung vor. Die für die Couette-Strömung wichtige Umfangsreynoldszahl kann unter der Annahme einer maximalen Berandungsgeschwindigkeits von  $u_B = 100 \text{ m/s}$  und Luft bei  $T_E = 293 \text{ K}$  ebenfalls in Abhängigkeit der Knudsenzahl bestimmt werden. Die Ergebnisse werden in **Abbildung 3.3** dargestellt.

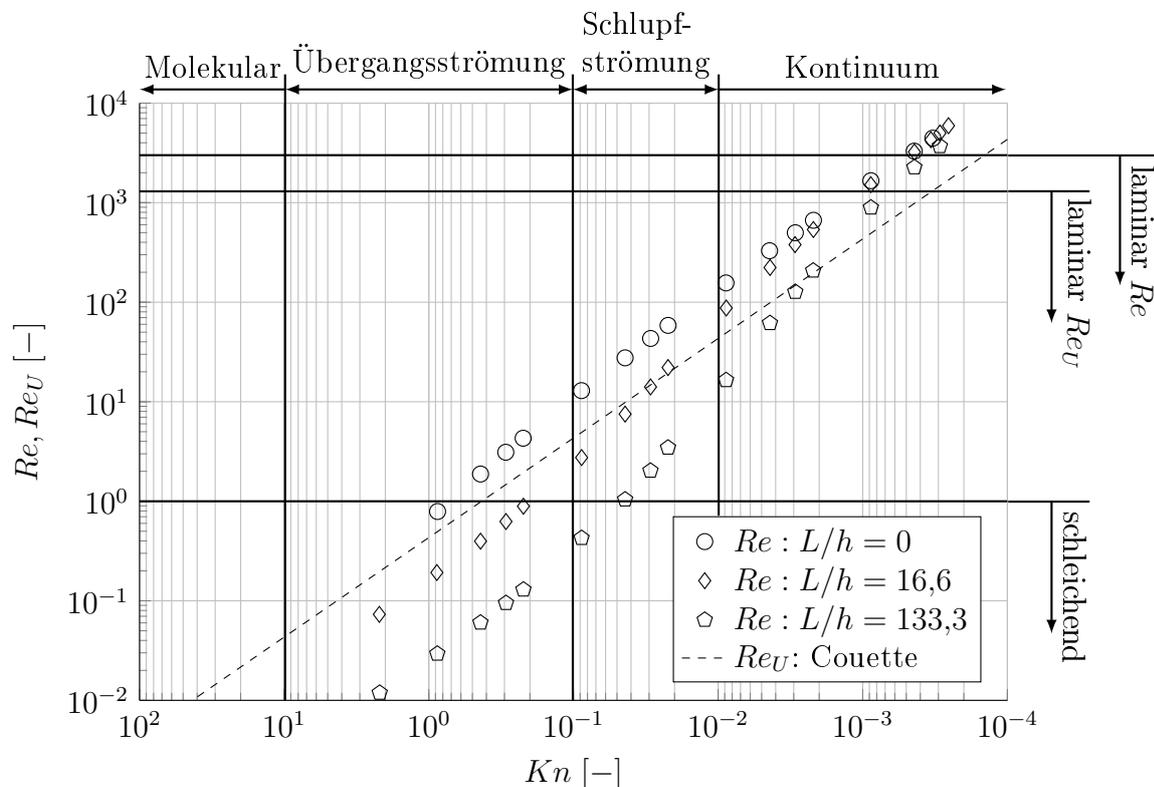


Abbildung 3.3: Reynoldszahl und Umfangsreynoldszahl als Funktion der Knudsenzahl für Luft. Für die Bestimmung der Reynoldszahl werden die Messergebnisse nach Wenderott [Wen01] für verschiedene  $L/h$ -Verhältnisse und  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$  und  $b/h = 333,3$  genutzt. Die Umfangsreynoldszahl wird unter der Annahme einer ebenen Couette-Strömung mit  $u_B = 100 \text{ m/s}$  bei  $T_E = 293 \text{ K}$  bestimmt.

Für die Poiseuille-Strömung zeigt sich eine starke Abhängigkeit der Reynoldszahl von der Knudsenzahl. Mit zunehmender Knudsenzahl nimmt die Gasdichte ab, was wiederum kleine Trägheitskräfte und somit kleine Reynoldszahlen zur Folge hat. Die Strömung wird mit zunehmender Knudsenzahl daher stark von Reibungseffekten beeinflusst. Nur im Bereich sehr kleiner Knudsenzahlen  $Kn < 4 \cdot 10^{-4}$  kann unabhängig von der Spaltlänge eine turbulente Poiseuille-Strömung auftreten, für größere Knudsenzahlen ist eine laminare Strömung zu erwarten. Die Spaltlänge nimmt mit zunehmender Knudsenzahl Einfluss auf die Reynoldszahl. Die Strömung bei einer Blende  $L/h = 0$  kann für Knudsenzahlen  $Kn > 1$  als schleichend betrachtet werden. Ein Spalt großer Länge ( $L/h = 133,3$ ) erreicht für Knudsenzahlen  $Kn > 4 \cdot 10^{-2}$  bereits eine schleichende Strömung. Da bei der Couette Strömung eine hohe Berandungsgeschwindigkeit  $u_B = 100 \text{ m/s}$  und ein Gas bei Umgebungstemperatur  $T_E = 293 \text{ K}$  berücksichtigt

---

wird, handelt es sich ebenfalls um eine obere Abschätzung der Umfangsreynoldszahl. Für Knudsenzahlen  $Kn > 3 \cdot 10^{-3}$  tritt eine turbulente Couette-Strömung auf, sodass auch bei der Couette-Strömung über einen großen Bereich der Knudsenzahl von einer laminaren Strömung ausgegangen werden kann.

# Kapitel 4

## DSMC-Methode

Für die Bestimmung der Spaltströmung in trockenlaufenden Vakuumpumpen muss ein großer Bereich der Knudsenzahl abgedeckt werden. Wie in Kapitel 3.2.2 beschrieben erstreckt sich dieser von der Kontinuumsströmung bis hin zur freien molekularen Strömung. Im Rahmen dieser Arbeit wird dabei auf die DSMC-Methode (Direct Simulation Monte Carlo) zurückgegriffen. In diesem Kapitel erfolgt zunächst eine Einordnung der DSMC-Methode in die Gruppe der numerischen Verfahren zur Berechnung verdünnter Strömungen. Im Weiteren werden der Algorithmus der DSMC-Methode sowie alle benötigten Modelle erläutert. Mit der beschriebenen Methode kann dabei prinzipiell die Strömung eines Gasgemisches berechnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit ist das Software Paket *OpenFOAM* (Version 3.0.0) für alle Simulationen genutzt worden. *OpenFOAM* ist ein „open source“ Projekt, welches eine Vielzahl verschiedener Solver aus dem Bereich der numerischen Strömungsmechanik („Computational Fluid Dynamics“) zur Verfügung stellt [Ope16]. Der Solver *dsmcFoam* bietet hierbei einen leistungsfähigen Algorithmus auf Grundlage der DSMC-Methode, der bereits validiert ist und vielfach angewendet wird [Sca+10], [Whi13], [Pal14], [AGN12]. Der Solver wird im Rahmen dieser Arbeit zur Anpassung an benötigte Randbedingungen für verdünnte Spaltströmungen in Vakuumpumpen modifiziert und weiterentwickelt.

### 4.1 Einordnung der DSMC-Methode

Die Berechnung der Strömungsvorgänge von Flugkörpern beim Wiedereintritt in obere Atmosphärenschichten hat die Entwicklung von geeigneten Berechnungsmethoden vorangetrieben. Niedrige Drücke in diesen Atmosphärenschichten resultieren in großen Knudsen-Zahlen, sodass hier von verdünnten Strömungen ausgegangen werden muss. Eine weitere Eigenschaft dieser Strömungsvorgänge sind die sehr großen Strömungsgeschwindigkeiten ( $Ma \gg 1$ ) [Oer94]. In der jüngeren Vergangenheit wurde durch

die Entwicklung von MEMS (micro-electrical-mechanical systems) ein weiteres Anwendungsgebiet für die Simulation von verdünnten Gasströmungen erschlossen [KBA05]. In diesen Systemen sind häufig Strömungsvorgänge im atmosphärischen Bereich von Interesse. Aufgrund der sehr kleinen Dimensionen werden auch hier große Knudsen-Zahlen erreicht, was die Notwendigkeit der Betrachtung als verdünnte Strömung erklärt.

Die DSMC-Methode geht auf G. A. Bird zurück. In einer ersten Veröffentlichung betrachtet Bird die Relaxation des translatorischen Freiheitsgrades eines Gases zum Gleichgewichtszustand, was der Maxwell-Boltzmann-Verteilung entspricht [Bir63]. Bird nutzt dabei einen probabilistischen Ansatz zur Bestimmung der intermolekularen Interaktion. Es wird gezeigt, dass mit diesem Verfahren - verglichen mit MD-Methoden (Molecular Dynamics) und der analytischen Theorie - eine sehr gute Abbildung der zeitabhängigen Relaxation hin zur Maxwell-Boltzmann-Verteilung erzielt werden kann. Auf dieser Idee aufbauend, hat sich aufgrund steigender Möglichkeiten der Computertechnologie bis heute ein leistungsfähiges Verfahren zur Berechnung verdünnter Gasströmungen entwickelt [Bir94].

Aufgrund des probabilistischen Ansatzes dieser Methode muss zur Abbildung vorgegebener Verteilungsdichtefunktionen auf die Erzeugung von Zufallszahlen zurückgegriffen werden. Hierbei werden sehr häufig Pseudozufallszahlgeneratoren genutzt, welche eine Möglichkeit zur Erzeugung gleichverteilter Zufallszahlen darstellen [Geo09]. Die Generierung von Zufallszahlen beliebiger Verteilungsdichtefunktionen geschieht im Solver *dsmcFoam* mithilfe verschiedener Verfahren, wie der Verwerfungsmethode oder der Polarmethode [Bir94], [Geo09].

## 4.2 Algorithmus der DSMC-Methode

Der Ablauf der DSMC-Methode ist in **Abbildung 4.1** dargestellt und zeigt die wesentlichen Schritte des Algorithmus. Bei der DSMC-Methode wird die Bewegung einzelner Teilchen im physikalischen Raum betrachtet. Aus Gründen der Rechenzeit repräsentiert ein Teilchen eine Vielzahl Moleküle, was durch einen Faktor  $F_N$  wiedergegeben wird:

$$F_N = \frac{\text{Anzahl identischer Moleküle}}{\text{Teilchen}} \quad (4.1)$$

Dieser Faktor wird global für alle Moleküle unterschiedlicher Sorten in einem Gasgemisch gewählt. Für die Berechnung der intermolekularen Kollisionen wird ein Netz benötigt, das zu Beginn in Abhängigkeit der Geometrie definiert werden muss. Der Solver bietet dabei prinzipiell die Möglichkeit strukturierte und unstrukturierte Netze zu nutzen. Da es sich um ein statistisches Verfahren handelt, muss für die Ermittlung der makroskopischen Größen über eine ausreichende Anzahl an Stichproben pro Zelle gemittelt werden (es benötigt eine ausreichende Anzahl an Teilcheninformationen). Dies kann prinzipiell durch eine Ensemble- oder Zeit-Mittelung geschehen [Bir94]. Im Rah-

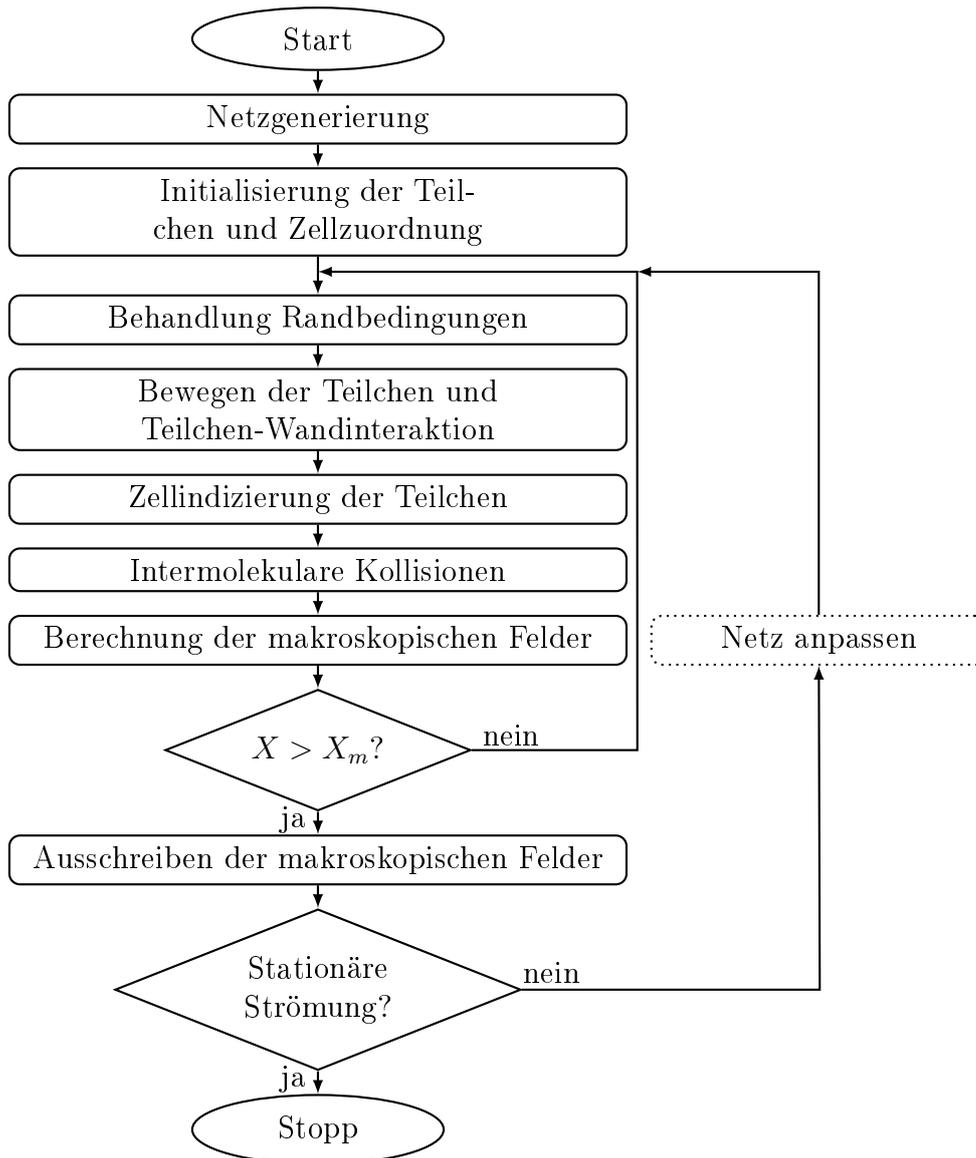


Abbildung 4.1: Ablauf des DSMC-Algorithmus

men dieser Arbeit werden lediglich stationäre Strömungen betrachtet und es wird somit auf zeitgemittelte Größen zurückgegriffen. Zu Beginn einer Simulation muss ein initialer Gaszustand definiert werden, der sich aus Teilchenanzahldichte, Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit zusammensetzt. Aus diesen Informationen werden für jede Zelle Teilchen mit einer Position, translatorischen Geschwindigkeit und inneren Energie initialisiert. Die weiteren Schritte beschreiben den eigentlichen Ablauf der DSMC-Methode für einen Zeitschritt  $\Delta t$ . Ein wichtiger Kernpunkt ist dabei die getrennte Betrachtung der Bewegung der Teilchen und der intermolekularen Kollisionen. Hierzu werden zunächst die Randbedingungen der Teilcheneinströmung behandelt. Neue Teilchen werden gemäß eines vorgegebenen Drucks, einer Temperatur und Strömungsgeschwindigkeit auf den Rändern des Simulationsgebietes initialisiert. Im Weiteren erfolgt die Bewegung der Teilchen gemäß ihrer Geschwindigkeit für einen festen Zeitschritt. Bei einer Kollision zwischen Teilchen und Wand wird die Teilchen-Wandinteraktion

entsprechend einem definierten Modell ausgeführt. Zur Behandlung der intermolekularen Kollisionen muss zunächst die Zellindizierung durchgeführt werden, bei der für jede Zelle die enthaltenen Teilchen identifiziert werden. In Abhängigkeit der Anzahl der enthaltenen Teilchen wird eine weitere Unterteilung der Zelle in acht Kollisionzellen durchgeführt. Die Behandlung der intermolekularen Wechselwirkung wird separat für jede Zelle bzw. Kollisionzelle durchgeführt. In jedem Zeitschritt erfolgt eine Berechnung der makroskopischen Felder (Druck, Temperatur, Strömungsgeschwindigkeit und weitere abgeleitete Größen) auf Grundlage der Teilcheninformationen. Der Ablauf wird für  $X_m$  Zeitschritte wiederholt und die makroskopischen Felder werden innerhalb dieses Schreibintervalls gemittelt. Am Ende des Schreibintervalls werden die makroskopischen Felder sowie Informationen der Teilchen ausgeschrieben und das nächste Schreibintervall startet. Wird die in Kapitel 7.2.3 beschriebene dynamische Vernetzung verwendet, wird das Netz entsprechend der vorgegebenen Teilchenanzahl pro Zelle angepasst. Diese Vorgehensweise wird wiederholt, bis eine stationäre Strömung vorhanden ist. Da es sich bei der DSMC-Methode um eine statistische Methode handelt, kann eine weitere Simulation mit größerem Schreibintervall notwendig sein, um ein statistisches Rauschen zu verringern.

Nachfolgend wird eine detaillierte Beschreibung des hinterlegten Algorithmus gegeben. Aus Gründen der Übersichtlichkeit gliedert sich diese in vier Unterkapitel. Zunächst wird die Bewegung der Teilchen beschrieben (vgl. Kapitel 4.2.1). Die Interaktion der Teilchen mit den Rändern des Simulationsgebietes, das prinzipiell aus einer Berandung oder einer Einström-Randbedingung bestehen können, wird im Kapitel 4.2.2 beschrieben. Die Behandlung der Stöße zwischen zwei Teilchen wird in Kapitel 4.2.3 beschrieben. Die Berechnung der makroskopischen Größen erfolgt gemäß der in Kapitel 4.2.4 gegebenen Gleichungen.

### 4.2.1 Bewegung der Teilchen

Die Bewegung der Teilchen innerhalb der DSMC-Methode findet unter Ausschluss möglicher Volumenkräfte und möglicher Kollisionen mit anderen Teilchen statt. Dies bedeutet, dass keine Kräfte auf die Teilchen wirken, die eine Beschleunigung verursachen. Für einen definierten Zeitschritt  $\Delta t$  wird eine lineare Änderung der Teilchenposition bestimmt:

$$\vec{x}_{neu} = \vec{x}_{alt} + \vec{c} \cdot \Delta t \quad (4.2)$$

Findet innerhalb des Zeitschrittes eine Kollision mit einer festen Berandung statt, wird diese entsprechend des Teilchen-Wandinteraktionsmodells behandelt.

## 4.2.2 Randbedingungen

### Teilchen-Wandinteraktion

Bei einer Kollision von Teilchen mit der Berandung eines Bauteils muss eine Reflexion zurück in das Simulationsgebiet durchgeführt werden. Hierzu existieren verschiedene Modelle, bei denen die Erhaltung von Impuls, Masse und Energie berücksichtigt werden. In der Literatur werden zwei Grenzfälle für die Berechnung der Post-Kollisionsgeschwindigkeit der Teilchen vorgestellt, die spiegelnde und die vollständig diffuse Reflexion. **Abbildung 4.2** zeigt beide Modelle. Für eine spiegelnde Reflexion

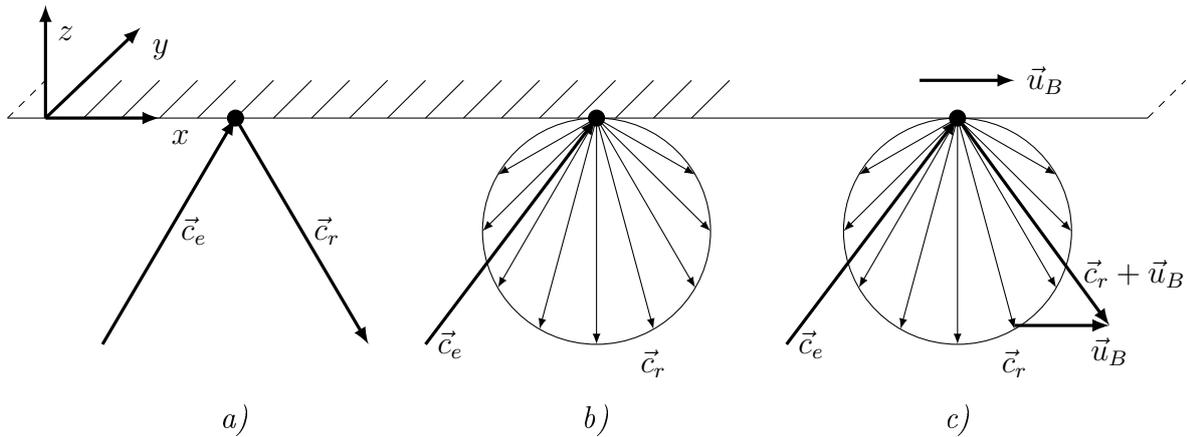


Abbildung 4.2: Modelle für die Teilchen-Wandinteraktion

- a) Spiegelnde Reflexion
- b) Vollständig diffuse Reflexion
- c) Vollständig diffuse Reflexion mit Wandgeschwindigkeit

wird die reflektierte Geschwindigkeit des Teilchens  $\vec{c}_r$  mithilfe der einfallenden Geschwindigkeit  $\vec{c}_e$  berechnet. Der Geschwindigkeitsanteil normal zur Wand  $c_{r,z}$  vollzieht dabei einen Vorzeichenwechsel, wobei die tangentialen Anteile  $c_{r,x}$  und  $c_{r,y}$  unverändert bleiben:

$$\begin{aligned} c_{r,x} &= c_{e,x} \\ c_{r,y} &= c_{e,y} \\ c_{r,z} &= -c_{e,z} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dieses Modell entspricht einer technisch ideal glatten Oberfläche der Berandung, an der ein elastischer Stoß ausgeführt wird. Da der tangentialer Anteil der Teilchengeschwindigkeit zur Wand nicht geändert wird, findet keine Übertragung von Scherkräften zwischen Gas und Wand statt. Weiterhin wird keine Wärme übertragen, da sich der Betrag der Teilchengeschwindigkeit während des Stoßes ebenfalls nicht ändert. Diese Randbedingung kann ebenfalls für die Simulation einer Symmetrie-Randbedingung genutzt werden. Demgegenüber geht die vollständig diffuse Reflexion von der Idee einer

rauen Oberfläche aus, bei der die Teilchen eine Vielzahl von Stößen mit der Berandung ausführen. Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Verteilungsdichtefunktion der reflektierten Teilchen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung gehorcht, wobei die Wandtemperatur angenommen wird. Die Verteilungsdichtefunktionen  $f(c_{r,x})$  und  $f(c_{r,y})$  der reflektierten tangentialen Geschwindigkeitsanteile gehorchen der Normalverteilung (vgl. Gleichung 3.9). Bei der Verteilungsdichtefunktion  $f(c_{r,z})$  des reflektierten normalen Geschwindigkeitsanteils muss beachtet werden, dass hier nur positive Geschwindigkeiten der Normalverteilung betrachtet werden müssen [She05]:

$$\begin{aligned} f(c_{r,x}) &= f_{0,x} \\ f(c_{r,y}) &= f_{0,y} \\ f(c_{r,z}) &= 2\beta^2 c_{r,z} \exp(-\beta^2 c_{r,z}^2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Bei diesem Modell wird entsprechend der Änderung der Teilchengeschwindigkeit Wärme bzw. eine Scherkraft übertragen. Handelt es sich bei der betrachteten Wand um eine bewegte Berandung, muss zusätzlich die Wandgeschwindigkeit  $\vec{u}_B$  berücksichtigt werden. Dazu wird die reflektierte Geschwindigkeit  $\vec{c}_r$  gemäß einer stehenden Berandung mit diffuser Reflexion bestimmt und in einem weiteren Schritt mit der Wandgeschwindigkeit  $\vec{u}_B$  überlagert:

$$\vec{c}_r(\vec{u}_B) = \vec{c}_r + \vec{u}_B \quad (4.5)$$

Das Maxwell-Modell stellt eine Kombination aus beiden Reflexionsmodellen dar. Hierbei wird davon ausgegangen, dass ein Teil der Teilchen spiegelnd und ein Teil diffus reflektiert werden [Bir94]. Innerhalb der DSMC-Methode geschieht dies über die Vorgabe eines Akkomodationskoeffizienten  $\alpha$ , der den Anteil der diffus reflektierten Teilchen angibt.

### Einström-Randbedingung

Um an den Rändern des Strömungsgebietes thermodynamische und strömungsmechanische Größen vorgeben zu können, müssen in jedem Zeitschritt neue Teilchen mit den dazugehörigen Informationen über Position, Geschwindigkeit und innere Energie initialisiert werden. Im rechten Teil von **Abbildung 4.3** wird ein durchströmtes Oberflächenelement mit der Fläche  $A$  und dem Einheitsnormalenvektor  $\vec{e}_n$  gezeigt, welches in der  $yz$ -Ebene des dargestellten Koordinatensystems liegt. Das Element wird mit einer Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  in der  $xy$ -Ebene durchströmt, wobei  $\theta$  den Winkel zwischen Strömungsgeschwindigkeit und Einheitsnormalenvektor der Oberfläche angibt. Im linken Bereich der **Abbildung 4.3** wird diese Betrachtung auf den Rand einer Zelle einer DSMC-Simulation übertragen, die mit der anteiligen Strömungsgeschwindigkeit  $u_x$  durchströmt wird. Der effektive Teilchenstrom über den Rand kann in einen ausströmenden  $\dot{N}_{Aus}$  und einen einströmenden Teilchenstrom  $\dot{N}_{Ein}$  zerlegt werden. Der ausströmende Teilchenstrom ergibt sich aus der Simulation des Strömungsbereiches.

Der einströmende Teilchenstrom muss in Abhängigkeit der gegebenen Randbedingungen ermittelt werden. Allgemein kann der Teilchenstrom  $\dot{N}_{Ein}$  mithilfe der Teilchenan-

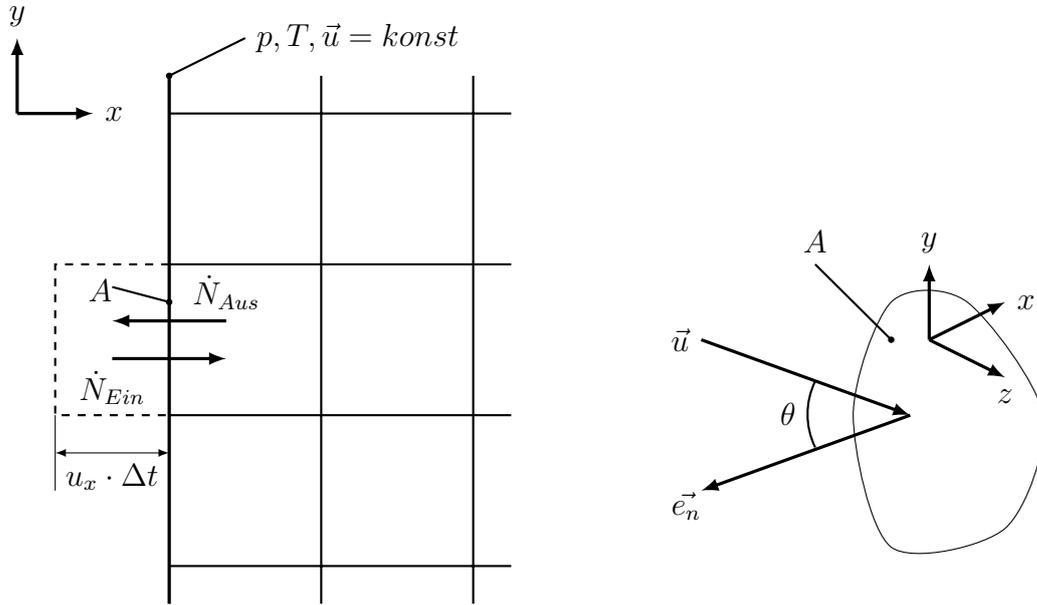


Abbildung 4.3: Größen für die Herleitung der Einströmrandbedingung

zahldichte  $n$  bestimmt werden [Bir94]:

$$\dot{N}_{Ein} = \frac{nu_x A}{F_N} = \frac{nA}{F_N} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} c_x f dc_x dc_y dc_z \quad (4.6)$$

Hierbei beschreibt  $f$  die Verteilungsdichtefunktion der Teilchengeschwindigkeiten am Ort der Zelle. Um nur den einströmenden Anteil  $\dot{N}_{Ein}$  zu betrachten wird für die  $x$ -Komponente nur der positive Anteil der Verteilungsdichtefunktion integriert. Da diese Verteilungsdichtefunktion nicht bekannt ist, wird in das Relativsystem der Strömung gewechselt, um hier auf die bekannte Maxwell-Boltzmann-Verteilung für ein Gas in Ruhe zurückgreifen zu können. Die Zerlegung der Komponenten für das Relativsystem ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} c_x &= c'_x + |\vec{u}| \cdot \cos(\theta) \\ c_y &= c'_y + |\vec{u}| \cdot \sin(\theta) \\ c_z &= c'_z \end{aligned} \quad (4.7)$$

Gleichung 4.6 kann so mithilfe der Maxwell-Boltzmann-Verteilung gelöst werden, sodass unter Vorgabe der Teilchenanzahldichte, Temperatur und der Strömungsgeschwindigkeit der Teilchenstrom  $\dot{N}_{Ein}$  bestimmt werden kann [Bir94]:

$$\dot{N}_{Ein} = \frac{nA}{2F_N \sqrt{\pi} \beta} (\exp(-(\beta|\vec{u}|\cos(\theta))^2) + \sqrt{\pi} \beta |\vec{u}|\cos(\theta) [1 + \operatorname{erf}(\beta|\vec{u}|\cos(\theta))]) \quad (4.8)$$

Die Gaußsche Fehlerfunktion ist gegeben durch:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-\tau^2) d\tau \quad (4.9)$$

Die Vorgabe der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  an einer Einström-Randbedingung erfolgt unter der Annahme einer stationären Strömung. Hierbei wird für jedes Schreibintervall der gemittelte Teilchenstrom durch das Strömungsgebiet ermittelt. Unter der Annahme, dass eine senkrechte Einströmung ( $\theta = 0$ ) an der Einström-Randbedingung vorliegt kann mithilfe der Massenerhaltung und der idealen Gasgleichung der Betrag der Einströmgeschwindigkeit ermittelt werden. Hierbei muss die Gesamtfläche  $A_{ges}$  des Randes benutzt werden:

$$|\vec{u}| = \frac{\dot{N} F_N k T}{p A_{ges}} \quad (4.10)$$

Auf diese Weise kann pro Zeitschritt die Anzahl der einströmenden Teilchen berechnet werden, die auf der Oberfläche der Randzelle initialisiert werden. Die initialisierte Position der Teilchen ist dabei auf der entsprechenden Randzelle gleichverteilt. Für die Geschwindigkeit der Teilchen wird die Maxwell-Boltzmann-Verteilung eines ruhenden Gases angenommen, die mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  linear überlagert wird. Auch hier ist zu beachten, dass bei der Geschwindigkeitskomponente normal zum Flächenelement nur positive Geschwindigkeiten der Normalverteilung betrachtet werden dürfen. Daher ergibt sich eine analoge Verteilungsdichtefunktion, wie sie für die diffuse Reflexion angewendet wird. Die innere Energie der Teilchen wird mit der vorgegebenen statischen Temperatur  $T$  entsprechend der Maxwell-Boltzmann-Verteilung initialisiert.

Die Vorgehensweise lässt sich auf die Betrachtung von Gasgemischen übertragen. Hierbei wird der einströmende Teilchenstrom mit den jeweiligen Anteilen der Teilchenanzahldichten berechnet.

### 4.2.3 Intermolekulare Kollisionen

Die Berechnung der intermolekularen Kollisionen erfolgt auf der Grundannahme, dass nur binäre Stöße der Moleküle untereinander auftreten. Grundlage ist dabei die Berücksichtigung der Impuls- und Energieerhaltung eines binären Stoßes zweier Moleküle. Es existieren verschiedene Modelle, die unterschiedliche Zielsetzungen, wie eine korrekte Abbildung der Viskosität des Gases, bei einer gleichzeitig hohen numerischen Effizienz für eine praktische Umsetzung aufweisen. Das VHS-Modell [Bir80] ("Variable Hard Sphere") wird dabei häufig genutzt, da es im Gegensatz zu dem einfacheren HS-Modell ("Hard Sphere") eine Abhängigkeit des totalen Kollisionsquerschnitts  $\sigma_t$  von der Relativgeschwindigkeit  $c_{rel}$  beider Kollisionspartner besitzt und so eine korrekte Abbildung der temperaturabhängigen Viskosität bietet. Für ein Gasgemisch kann der Kollisions-

querschnitt  $\sigma_t$  für ein Molekül der Sorte  $p$  und ein Molekül der Sorte  $q$  zu

$$\sigma_t = \pi((d_{ref})_{pq})^2 \frac{(2k(T_{ref})_{pq}/(m_{red}c_{rel}^2))^{\omega_{pq}-0.5}}{\Gamma(2.5 - \omega_{pq})} \quad (4.11)$$

berechnet werden [Bir94]. Für den Referenzwert des Moleküldurchmessers  $d_{ref}$  bei einer Referenztemperatur  $T_{ref}$  und des Viskositätsindex  $\omega$  wird jeweils der Mittelwert aus der Sorte  $p$  und  $q$  der an der Interaktion beteiligten Moleküle gebildet.  $m_{red}$  beschreibt die reduzierte Masse beider Moleküle:

$$m_{red} = \frac{m_p m_q}{m_p + m_q} \quad (4.12)$$

Die Gamma-Funktion definiert sich zu:

$$\Gamma(j) = \int_0^{\infty} x^{(j-1)} \exp(-x) dx \quad (4.13)$$

Die Molekülgeschwindigkeiten nach der Interaktion werden bei dem VHS-Modell unter der Annahme eines elastischen Stoßes unter Berücksichtigung der Energie- und Impulserhaltung berechnet. Wesentliches Merkmal des Modells ist dabei, dass die Richtung der relativen Molekülgeschwindigkeit nach dem Stoß gleichverteilt ist.

Die Betrachtung der intermolekularen Wechselwirkung als elastische Stöße besitzt allerdings nur eingeschränkte Gültigkeit. Mehratomige Moleküle besitzen innere Freiheitsgrade, die in der Lage sind Energie zu speichern und mit den translatorischen Freiheitsgraden auszutauschen. Stickstoff und Sauerstoff besitzen als zweiatomige Moleküle neben den drei translatorischen Freiheitsgraden zwei rotatorische Freiheitsgrade. Der dritte rotatorische Freiheitsgrad sowie zwei Vibrationsfreiheitsgrade, die durch eine Schwingung beider Atome zueinander entstehen, werden bei den in dieser Arbeit behandelten Gaszuständen nicht angeregt. Das Larsen-Borgnakke Modell [LB74] des inelastischen Stoßes berücksichtigt diese inneren Freiheitsgrade sowie einen Austausch von Energie zwischen translatorischen und inneren Freiheitsgraden. Das Modell geht davon aus, dass nur ein Anteil der Kollisionen als inelastisch betrachtet wird, um eine realistische Relaxationszeit des Gases in den Gleichgewichtszustand abbilden zu können. Hierzu wird die Relaxations-Kollisionszahl genutzt, wobei der Kehrwert die Wahrscheinlichkeit einer inelastischen Kollision beschreibt. Für inelastische Kollisionen wird die allgemeine Larsen-Borgnakke Verteilungsfunktion zu Grunde gelegt, die durch Bird [Bir94] beschrieben wird. Für den Sonderfall von zwei inneren Freiheitsgraden eines jeden Moleküls kann das Verhältnis der inneren Energie  $E_i$  zur Gesamtenergie  $E_i + E_{tr}$  mit

$$\frac{E_i}{E_i + E_{tr}} = 1 - R_f^{\frac{1}{2.5 - \omega_{pq}}} \quad (4.14)$$

beschrieben werden [Bir94], wobei  $R_f$  eine gleichverteilte Zufallszahl im Bereich von Null bis Eins ist. Die Bestimmung der relativen Teilchengeschwindigkeit  $c_{rel}$  nach dem Stoß wird auch bei einem inelastischen Stoß unter Einhaltung der Energie- und Impulserhaltung nach dem VHS-Modell durchgeführt.

Im Gegensatz zu den MD-Methoden, bei welchen eine deterministische Berechnung der Molekül-Kollisionen durchgeführt wird, werden bei der DSMC-Methode die Kollisionspartner auf statistischer Basis ausgewählt. Dies geschieht bei der DSMC-Methode separat für jede Zelle. Hierzu existieren verschiedene Schemata, die als gemeinsame Grundlage die Abbildung der korrekten Kollisionsanzahl für jeden Zeitschritt und jede Zelle haben. Die Motivation der Weiterentwicklung verschiedener Schemata zur Berechnung der Molekül-Kollisionen liegt dabei häufig in der Steigerung der numerischen Effizienz. Ein häufig angewendetes Schema ist die durch Bird vorgeschlagene NTC-Methode („no time counter“) [Bir89]. Hierbei wird mithilfe der Relativgeschwindigkeit  $c_{rel}$  und des Kollisionsquerschnittes  $\sigma_t$  eines Kollisionspaares das Kollisionsvolumen berechnet. Das Verhältnis des Kollisionsvolumens zum Zellvolumen ergibt die Kollisionswahrscheinlichkeit für dieses Kollisionspaar [Bir94]:

$$P = F_N \sigma_t c_{rel} \Delta t / V_Z \quad (4.15)$$

Mithilfe dieser Kollisionswahrscheinlichkeit und der Auswahl aller  $N(N - 1)/2$  möglichen Kollisionspartner pro Zelle kann so die korrekte Berechnung der intermolekularen Interaktion durchgeführt werden. Der Nachteil liegt darin, dass die Anzahl der zu überprüfenden Kollisionspartner proportional zum Quadrat der Teilchenanzahl ist. Eine effizientere Methode liegt darin, nur einen kleinen Anteil der möglichen Kollisionspartner zu betrachten und die Kollisionswahrscheinlichkeit im gleichen Maße zu erhöhen. Diese Methode erreicht die maximale numerische Effizienz, wenn die Kollisionswahrscheinlichkeit für Kollisionspaare mit maximalem Produkt aus Kollisionsquerschnitt und Relativgeschwindigkeit zu eins wird. Bei der NTC-Methode wird daher für jede Zelle der maximale Wert aus diesem Produkt aufgezeichnet und als Faktor zur Verringerung der betrachteten Kollisionspartner benutzt. Die Anzahl der betrachteten zufällig ausgewählten Kollisionspartner errechnet sich zu [Bir94]:

$$N_{Koll} = \frac{N(N - 1)}{2} F_N \{\sigma_t c_{rel}\}_{max} \Delta t / V_Z \quad (4.16)$$

Hierbei ist  $N$  die aktuelle Teilchenanzahl in der betrachteten Zelle. Entsprechend erhöht sich die Kollisionswahrscheinlichkeit um denselben Faktor [Bir94]:

$$P_{NTC} = \frac{\sigma_t c_{rel}}{\{\sigma_t c_{rel}\}_{max}} \quad (4.17)$$

Da immer nur eine ganzzahlige Anzahl möglicher Kollisionspartner betrachtet werden

kann, wird der verbliebene Bruchteil im nächsten Zeitschritt auf die Anzahl möglicher Kollisionspartner addiert. Auf diese Weise wird im Mittel die richtige Anzahl an möglichen Kollisionen eingehalten.

Der in der vorliegenden Arbeit verwendete DSMC-Solver kann grundsätzlich 3-dimensionale Strömungen behandeln und es wird auf die Nutzung eines Quadernetzes zurückgegriffen. Grundsätzlich können strukturierte und unstrukturierte Netze genutzt werden. Der prinzipielle Aufbau wird in **Abbildung 4.4** dargestellt. Bei der Erstel-

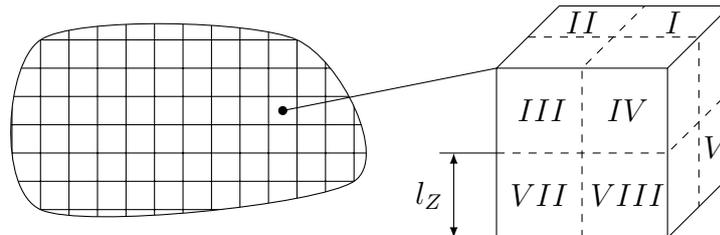


Abbildung 4.4: Aufbau des Quadernetzes mit den dazugehörigen Kollisionszellen pro Zelle.

lung des Netzes ist zu beachten, dass eine adaptive Verfeinerung des Netzes während der Simulation stattfindet. Die durch den Vernetzer erstellten Zellen werden für die Berechnung der intermolekularen Kollisionen in Oktanten unterteilt, sodass acht Subzellen (Kollisionszellen) entstehen. Die Berechnung der intermolekularen Kollisionen erfolgen separat für jeden Oktant, wenn dieser zwei oder mehr Teilchen enthält. Bei nur einem Teilchen wird ein potentieller Kollisionspartner aus der gesamten Zelle gewählt. Durch diese Vorgehensweise besitzt der Solver eine einstufige adaptive Netzverfeinerung. Bei der Variation des Netzes in Kapitel 7.2.2 beschreibt  $l_z$  die Kantenlänge einer Kollisionszelle.

#### 4.2.4 Berechnung makroskopischer Größen

Die aus der Simulation gewonnenen Teilcheninformationen pro Zelle können mithilfe der kinetischen Gastheorie in makroskopische Größen des Gases umgerechnet werden. Pro Zelle werden die Informationen aller enthaltenen Teilchen der Anzahl  $N$  berücksichtigt. Hierbei kann es sich prinzipiell um Teilchen verschiedener Gase handeln. Der Index  $j$  zeigt die Gasart des Teilchens an. Ebenfalls können Moleküle mit einer unterschiedlichen Anzahl innerer Freiheitsgrade  $\xi$  berücksichtigt werden.

$$n = \frac{\sum_{j=1}^N F_N}{V_Z} \quad (4.18)$$

$$\rho = \frac{\sum_{j=1}^N F_N m_{Mol,j}}{V_Z} \quad (4.19)$$

$$\vec{u} = \frac{\sum_{j=1}^N m_{Mol,j} \vec{c}_j}{\sum_{j=1}^N m_{Mol,j}} \quad (4.20)$$

$$T_{tr} = \frac{\rho}{3nk} \left( \frac{F_N \sum_{j=1}^N m_{Mol,j} |\vec{c}_j|^2}{\rho V_Z} - |\vec{u}|^2 \right) \quad (4.21)$$

$$T_i = \frac{2}{k} \frac{\sum_{j=1}^N E_{i,j}}{\sum_{j=1}^N \xi_j} \quad (4.22)$$

$$T_g = \frac{3T_{tr} + \frac{T_i F_N}{nV_Z} \sum_{j=1}^N \xi_j}{3 + \frac{F_N}{nV_Z} \sum_{j=1}^N \xi_j} \quad (4.23)$$

$$p = nkT_{tr} \quad (4.24)$$

Aufgrund eines hohen statistischen Rauschens ist die Auswertung dieser Größen pro Zeitschritt nicht sinnvoll. Um Größen mit einer geringen statistischen Unsicherheit zu erhalten, wird auf zeitgemittelte Größen zurück gegriffen, die innerhalb eines Schreibintervalls gebildet werden (vgl. Abbildung 4.1). Die Bestimmung des Massenstroms durch einen Spalt kann bei der DSMC-Methode direkt über die Betrachtung eines Teilchenstroms geschehen. Hierzu wird sowohl an der Einlassfläche (vgl. Abb. 4.3) als auch an der Auslassfläche der Massenstrom über eine Bilanzierung der Anzahl der einströmenden  $N_{Ein}$  und ausströmenden Teilchen  $N_{Aus}$  pro Schreibintervall gebildet. Wird eine relative Abweichung des einströmenden Massenstroms am Eintritt zum ausströmenden Massenstrom am Austritt von 0,5% unterschritten, wird von einer stationären Strömung ausgegangen.

$$\dot{m} = \frac{F_N}{\Delta t} \left( \sum_{k=1}^{N_{Ein}} m_{Mol,k} - \sum_{h=1}^{N_{Aus}} m_{Mol,h} \right) \quad (4.25)$$

# Kapitel 5

## Eindimensionale Theorie

Die DSMC-Methode stellt ein leistungsstarkes und vielfach validiertes Simulationstool für die Bestimmung der Spaltströmung dar. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass die Methode zum Teil erhebliche Rechenleistung benötigt. In diesem Kapitel wird eine Methode vorgestellt, mit welcher der Massenstrom auf Grundlage eines eindimensionalen Modells bestimmt werden kann. Die Theorie geht dabei auf Arbeiten von Fukui und Kaneko [FK87], [FK88], [FK90] zurück, welche die Reynoldssche Schmierfilmtheorie auf die verdünnte Strömung von Gasen anwenden. Umfangreiche Untersuchungen werden ebenfalls durch Sharipov bereit gestellt [Sha16]. Da ein großer Bereich der Gasverdünnung abgedeckt werden muss, werden Ansätze aus dem Bereich der Kontinuumsmechanik und der kinetischen Gastheorie beschrieben, welche die Couette-, Poiseuille- und thermische Kriechströmung behandeln. Die hieraus ermittelten Flussraten werden für die Simulation der Spaltströmung genutzt.

Für das eindimensionale Modell werden grundsätzliche Annahmen getroffen, die dazu dienen, die in Kapitel 3.1 beschriebenen Erhaltungsgleichungen zu vereinfachen, gleichzeitig die Anwendbarkeit jedoch einschränken. Hierzu zählen auch Erkenntnisse der in Kapitel 3.2.2 durchgeführten Einordnung der dimensionslosen Kennzahlen der Spaltströmung:

- Es wird davon ausgegangen, dass im allgemeinen kleine Machzahlen auftreten. Bei der Beschreibung der Strömung mithilfe der Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik kann daher von einer inkompressiblen Strömung ausgegangen werden. Üblicherweise wird hier eine Grenze von  $Ma < 0,3$  angegeben.
- Bei kleinen Machzahlen kann bei der Beschreibung der Strömung mithilfe der kinetischen Gastheorie weiterhin von kleinen Störungen der Verteilungsdichtefunktion von der Gleichgewichtsverteilung ausgegangen werden. Dies ermöglicht die Linearisierung des Kollisionsterms.
- Es wird davon ausgegangen, dass im allgemeinen Strömungen kleiner Reynolds-

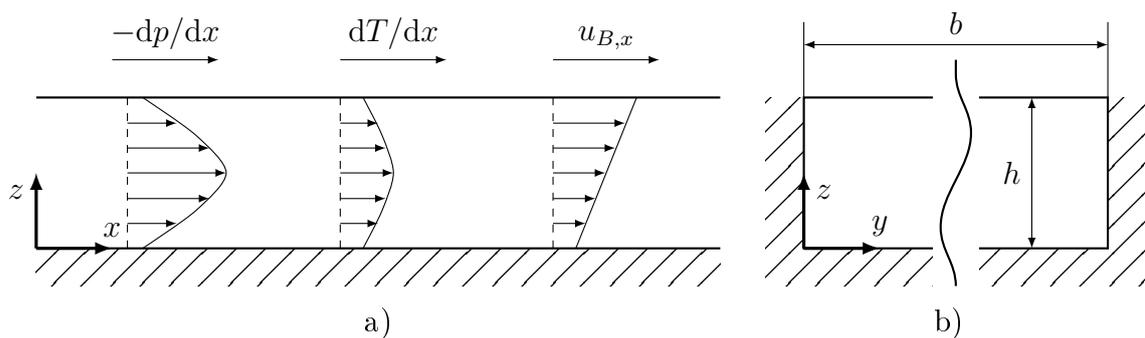
zahlen vorliegen. Es wird weiterhin eine Strömung mit veränderlichem Querschnitt betrachtet, bei der eine Berandung einen Neigungswinkel  $\alpha$  aufweist. Nach der Schmierfilmtheorie können für kleine Neigungswinkel  $\alpha$  und einer inkompressiblen Strömung die konvektiven Terme der Impulserhaltung der Kontinuumsmechanik vernachlässigt werden, wenn gilt:  $\alpha \cdot Re \ll 1$  [SA10]. Es wird auch von einer schleichenden Strömung gesprochen.

- Bei der Impulserhaltung der Kontinuumsmechanik wird davon ausgegangen, dass die Viskosität in jedem Querschnitt des Spaltes konstant ist.
- Es wird von einem vollständigen Wärmeübergang zwischen Wand und Gas ausgegangen. Das Gas nimmt in jedem Querschnitt des Spaltes eine durch die Berandung vorgegebene Temperatur an.
- Es wird eine stationäre Strömung betrachtet.

Im Folgenden wird in Kapitel 5.1 der grundlegende Ansatz der eindimensionalen Theorie beschrieben. Diese basiert auf der Nutzung von dimensionslosen Flussraten, deren Bestimmung in Abhängigkeit des jeweiligen Strömungsbereiches in Kapitel 5.2 beschrieben wird. In Kapitel 5.3 wird das eigentliche Modell sowie der Simulationsablauf der eindimensionalen Theorie erläutert.

## 5.1 Ansatz

**Abbildung 5.1** zeigt die Geometrie des betrachteten Spaltes sowie das dazugehörige Koordinatensystem. Der Spalt wird durch rechteckige Kanalabschnitte der Breite  $b$  und Höhe  $h$  gebildet. Für die Bestimmung des Spaltmassenstroms mithilfe des eindimensio-



*Abbildung 5.1: Geometrie eines Spaltabschnittes quer a) und senkrecht b) zur Strömungsrichtung. Es werden qualitative Strömungsprofile der Poiseuille-, Couette- und thermischen Kriechströmung gezeigt.*

nen Modells soll grundsätzlich davon ausgegangen werden, dass die Länge des Spaltes in Strömungsrichtung wesentlich größer ist, als die Spalthöhe. Auf diesem Weg kann die Annahme getroffen werden, dass Einlaufeffekte in der Strömung vernachlässigt werden

können. Weiterhin kann angenommen werden, dass der lokale dimensionslose Gradient des Drucks  $\xi_P$  und der Temperatur  $\xi_T$  klein sind [SS98], [Sha99a]:

$$\xi_P = \frac{h}{p} \frac{dp}{dx} \quad |\xi_P| \ll 1 \quad (5.1)$$

$$\xi_T = \frac{h}{T} \frac{dT}{dx} \quad |\xi_T| \ll 1 \quad (5.2)$$

Unter der Annahme der kleinen Gradienten kann der Massenstrom mithilfe einer linearen Superposition der Teilmassenströme aus Couette-  $\dot{m}_C$ , Poiseuille-  $\dot{m}_P$  und thermischer Kriechströmung  $\dot{m}_T$  bestimmt werden (vgl. [FK88], [SFZ05]):

$$\dot{m} = \dot{m}_P + \dot{m}_T + \dot{m}_C. \quad (5.3)$$

Zur dimensionslosen Darstellung des Massenstroms werden die dimensionslosen Strömungsgeschwindigkeiten genutzt, die jeweils für die Teilmassenströme aus Poiseuille-, Couette- und thermischer Kriechströmung definiert werden:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{P,x} &= \frac{u_x \beta}{\xi_P} \\ \tilde{u}_{T,x} &= \frac{u_x \beta}{\xi_T} \\ \tilde{u}_{C,x} &= \frac{u_x}{u_{B,x}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Die Flussraten  $Q_P$ ,  $Q_T$  und  $Q_C$  können über die Integration in  $y$  und  $z$  Richtung ermittelt werden:

$$\begin{aligned} Q_P &= \frac{2h}{b} \int_0^{b/h} \int_0^1 \tilde{u}_{P,x} d\tilde{z} d\tilde{y} \\ Q_T &= \frac{2h}{b} \int_0^{b/h} \int_0^1 \tilde{u}_{T,x} d\tilde{z} d\tilde{y} \\ Q_C &= \frac{h}{b} \int_0^{b/h} \int_0^1 \tilde{u}_{C,x} d\tilde{z} d\tilde{y} \quad \text{mit } \tilde{y} = \frac{y}{h} \text{ und } \tilde{z} = \frac{z}{h} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Die Flussraten  $Q_P$  und  $Q_T$  der Poiseuille- und thermischen Kriechströmung sind unabhängig vom lokalen Gradienten. Die Flussrate  $Q_C$  der Couette-Strömung ist unabhängig von der Wandgeschwindigkeit  $u_{B,x}$ . Die Superposition der Teilmassenströme lässt sich mit der Impulserhaltung unter Annahme einer schleichenden Strömung auf die Flussraten übertragen. Aus Gleichung 5.3 ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\dot{m} = hbp\beta (-Q_P\xi_P + Q_T\xi_T + Q_C 2u_{B,x}\beta) \quad (5.6)$$

Zur Bestimmung des Massenstroms müssen die Flussraten in Abhängigkeit der Geometrie des Strömungsquerschnitts  $b/h$  und der Knudsenzahl bestimmt werden. Der Druck, der eine Funktion der  $x$ -Koordinate ist, stellt eine Unbekannte in der Gleichung dar. Die Gastemperatur ist unter der Annahme eines vollständigen Wärmeübergangs mit der Berandung an jedem Ort  $x$  bekannt.

## 5.2 Bestimmung der Flussraten

Im Folgenden werden für die oben genannten Strömungsbereiche von der Kontinuumsströmung bis hin zur freien molekularen Strömungen die aus der Literatur bekannten Verfahren vorgestellt. Diese werden dazu genutzt, die Flussraten in Abhängigkeit des Gasverdünnungsfaktors bestimmen zu können. Mithilfe dieser Flussraten ist es dann möglich, Gleichung 5.6 numerisch zu lösen.

### 5.2.1 Kontinuums- und Schlupfströmung

Im Bereich der Kontinuums- und Schlupfströmung haben die Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik Gültigkeit, sodass auf diese zurückgegriffen werden kann. Unter der in Kapitel 5 getroffenen Annahme kleiner Faktoren aus Neigungswinkel  $\alpha$  und Reynoldszahl  $Re$  ( $\alpha \cdot Re \ll 1$ ) und der Betrachtung einer stationären, inkompressiblen Strömung, ergibt sich für einen Spaltabschnitt konstanten Querschnitts aus Gleichungen 3.1 und 3.3 die Druckänderung in  $x$ -Richtung [Sha16]:

$$\frac{dp}{dx} = \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \quad (5.7)$$

Mithilfe der Schlupfrandbedingung nach Maxwell [Max79] des viskosen und thermischen Schlupfes kann die Schlupfgeschwindigkeit an den Rändern des Kanals berechnet werden. Für die Strömungsgeschwindigkeit an der durch die Spalthöhe definierten Berandungen gilt (vgl. Sharipov [Sha16]):

$$u_x(y, z) = \sigma_P \frac{\mu}{\beta p} \frac{du_x}{dz} + \sigma_T \frac{\mu}{\rho T} \frac{dT}{dx} \quad \forall z \in \{0, h\}. \quad (5.8)$$

$\sigma_P$  und  $\sigma_T$  stellen den viskosen und den thermischen Schlupfkoeffizient dar und müssen numerisch bestimmt werden. Eine Übersicht der ermittelten Koeffizienten unter Nutzung verschiedener Verfahren wird durch Sharipov [Sha16] gegeben. Im vorliegenden Fall wird der viskose Schlupfkoeffizient genutzt, der mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung, dem BGK Modell und einer vollständig diffusen Reflexion der Moleküle an der Berandung durch Albertoni et al. ermittelt wird [ACG63]:

$$\sigma_P = 1,016 \quad (5.9)$$

Der thermische Schlupfkoeffizient wird durch Sharipov [Sha03a] mit der linearisierten Boltzmann-Gleichung, dem S-Modell und einer vollständigen diffusen Reflexion der Moleküle an der Berandung zu

$$\sigma_T = 1,175 \quad (5.10)$$

berechnet. Analog hierzu kann die Schlupfgeschwindigkeit an der durch die Spaltbreite definierten Berandungen bestimmt werden:

$$u_x(y, z) = \sigma_P \frac{\mu}{\beta p} \frac{du_x}{dy} + \sigma_T \frac{\mu}{\rho T} \frac{dT}{dx} \quad \forall y \in \{0, b\}. \quad (5.11)$$

Mithilfe der Randbedingungen des viskosen Geschwindigkeitsschlupfes kann das Geschwindigkeitsprofil durch Integration von Gleichung 5.7 bestimmt werden. Dieses Geschwindigkeitsprofil wird weiterhin genutzt, um die Flussraten (vgl. Gleichung 5.5) in Abhängigkeit der Gasverdünnung zu bestimmen. Die analytische Lösung bei der Betrachtung einer Poiseuille-Strömung wird durch Sharipov [Sha99b] beschrieben:

$$Q_P = \frac{\delta}{6} \mathcal{H} + \sigma_P \mathcal{S} \quad (5.12)$$

Der erste Term beschreibt die Poiseuille-Strömung in einem rechteckigen Kanal unter Einhaltung der Haftbedingung des Gases an den Berandungen. Der Koeffizient repräsentiert die Verminderung der Flussrate durch eine endliche Breite des Spaltes und ist definiert zu [Sha99b]:

$$\mathcal{H} = 1 - 192 \frac{h}{b} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\left(\frac{nb}{2h}\right) \quad \text{mit } n = \pi(2i + 1) \quad (5.13)$$

Der zweite Term aus Gleichung 5.12 beschreibt den Anteil des Geschwindigkeitsschlupfes und eine analytische Lösung mithilfe der Schlupfrandbedingung nach Maxwell wird durch Titarev und Shakov gegeben [TS10] (vgl. auch [GH14]):

$$\mathcal{S} = \frac{4}{3} - 256 \cdot \frac{h}{b} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tanh(0,5nb/h)}{n^5} - 32 \cdot \left(1 - \frac{h}{b}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\tanh(0,5nb/h)}{n^4} \quad (5.14)$$

Die Randbedingung des thermischen Schlupfes kann in analoger Weise genutzt werden, um die Flussrate der thermischen Kriechströmung zu ermitteln. Die Integration von Gleichung 5.7 ergibt ein rechteckiges Geschwindigkeitsprofil. Die Flussrate der thermischen Kriechströmung ist somit unabhängig vom Höhen zu Breitenverhältnis des Spaltes [SS98]:

$$Q_T = \frac{\sigma_T}{\delta} \quad (5.15)$$

Für die Bestimmung der Flussrate der Couette-Strömung wird die Einschränkung getroffen, dass die Spaltbreite sehr viel größer als die Spalthöhe ist ( $b \gg h$ ). Somit kann die Änderung der Strömungsgeschwindigkeit in y-Richtung in Gleichung 5.7 ver-

nachlässigt werden. Weiterhin liegt bei einer Couette-Strömung keine Druckänderung in x-Richtung vor ( $dp/dx = 0$ ). Die Ermittlung der Flussrate der Couette-Strömung unter Berücksichtigung des viskosen Geschwindigkeitsschlupfes ergibt damit:

$$Q_C = 0,5 \quad (5.16)$$

## 5.2.2 Übergangsströmung

Im Bereich der Übergangsströmung verlieren die Erhaltungsgleichungen der Kontinuumsmechanik ihre Gültigkeit. In diesem Bereich wird auf die Boltzmann-Gleichung zurück gegriffen. Die Methode der diskreten Geschwindigkeiten liefert einen deterministischen Ansatz zur numerischen Lösung der Boltzmann-Gleichung, wobei der physikalische und der Geschwindigkeitsraum diskretisiert werden. Zusätzlich existieren verschiedene Modelle zur Vereinfachung der intermolekularen Wechselwirkung. Nachfolgend wird das Verfahren am Beispiel des BGK-Modells [BGK54] für die intermolekularen Wechselwirkungen erläutert. Die Methode wird in der Literatur umfangreich beschrieben [Sha16], [Jou10a] und [SS98]. Da in der vorliegenden Arbeit nur die Ergebnisse dieser Methode genutzt werden, folgt eine kurze Beschreibung der Methode.

Bei der Methode der diskreten Geschwindigkeiten wird für jede Zelle eines betrachteten physikalischen Raums die Verteilungsdichtefunktion durch eine Anzahl diskreter Geschwindigkeiten  $\vec{c}_j$  abgebildet, denen ein Wahrscheinlichkeitswert zugeordnet wird. Unter Ausnutzung des BGK-Modells auf Basis des Harte-Kugel-Modells und der Betrachtung von stationären Strömungen, vereinfacht sich Gleichung 3.7 zu:

$$\vec{c}_j \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (n f_j) = \nu n (f_{0,j}^{lok} - f_j). \quad (5.17)$$

Das BGK-Modell beschreibt den Vorgang, dass die Verteilungsdichtefunktion mit den jeweiligen Verteilungsdichten  $f_j$  in Abhängigkeit der Relaxationsfrequenz  $\nu$  zur lokalen Maxwell-Boltzmann-Verteilung relaxiert. Die jeweiligen Verteilungsdichten  $f_{0,j}^{lok}$  werden durch Gleichung 3.13 definiert. Um eine korrekte Abbildung der Viskosität mithilfe des BGK-Modells zu erreichen, kann die Relaxationsfrequenz zu

$$\nu = \frac{p}{\mu} \quad (5.18)$$

bestimmt werden [Jou10a]. Zu Beginn der Iteration müssen Werte für die Teilchenanzahldichte  $n$  geschätzt werden. Dies gilt ebenso für die Strömungsgeschwindigkeit  $\vec{u}$  und die Temperatur  $T$ , die für die Bestimmung der lokalen Maxwell-Boltzmann-Verteilung  $f_0^{lok}$  benötigt werden. Gleichung 5.17 bildet ein Gleichungssystem, das iterativ zur Bestimmung der Verteilungsdichten  $f_j$  herangezogen wird. Die Verteilungsdichten können in einem weiteren Schritt mithilfe einer numerischen Integration zur Bestimmung

der aktualisierten Teilchenanzahldichte, Strömungsgeschwindigkeit und Temperatur genutzt werden:

$$\begin{aligned} n_{neu} &= \sum_j n f_j W_j \\ \vec{u}_{neu} &= \sum_j \vec{c}_j f_j W_j \\ T_{neu} &= \sum_j \frac{m_{Mol}}{3k} (\vec{c}_j - \vec{u})^2 f_j W_j \end{aligned} \quad (5.19)$$

Die diskreten Geschwindigkeiten  $\vec{c}_j$  werden mit den Gewichtungen  $W_j$  bewertet. Diese müssen in Abhängigkeit der Verteilung der diskreten Geschwindigkeiten für das Problem gewählt werden [Sha16]. Die Vorgehensweise wird bis zu einem vorgegebenen Konvergenzkriterium an jedem Raumpunkt durchgeführt.

Üblicherweise wird das beschriebene Verfahren anhand der linearisierten Boltzmann-Gleichung durchgeführt [Sha16],[SS98]. Hierbei wird von einer schwachen Störung der Verteilungsdichtefunktion von der Gleichgewichtsverteilung ausgegangen [Jou10a]:

$$f = f_{0,R}^{lok} \cdot [1 + \xi h], \quad |\xi| \ll 1 \quad (5.20)$$

Die Verteilungsdichtefunktion  $f$  wird mithilfe einer lokalen Maxwell-Boltzmann-Verteilung bezogen auf einen Referenzzustand  $f_{0,R}^{lok}$  und einer Störfunktion  $h$  dargestellt. Die Störfunktion beschreibt eine schwache Störung von der Gleichgewichtsverteilung  $f_{0,R}^{lok}$  und  $\xi$  die Art der Störung. Beispiele hierzu finden sich in Kapitel 5.1 im dimensionslosen Temperatur- oder Druckgradienten. Gleichungen 5.17 und 5.19 können mithilfe dieses Ansatzes weiter umgeformt und das Verfahren der diskreten Geschwindigkeiten analog angewendet werden.

Das Verfahren wird durch Sharipov genutzt, um die Geschwindigkeitsprofile im Bereich der Übergangsströmung zu bestimmen. Diese lassen sich mithilfe von Gleichung 5.4 und 5.5 in Flussraten umrechnen [Sha16]. Für die Poiseuille-Strömung in einem Kanal werden im Verlauf der Arbeit die durch Sharipov mithilfe des BGK-Modells ermittelten Werte der Flussrate  $Q_P$  als Funktion der Gasverdünnung  $\delta$  und des Breiten zu Höhenverhältnisses  $b/h$  genutzt [Sha99b]. Die Werte der Poiseuille-Strömung zwischen zwei Platten  $b/h = \infty$  entsprechen den Werten von Cercignani und Pagani [CP66] sowie Lo und Loyalka [LL82]. Um die Flussrate der thermischen Kriechströmung  $Q_T$  zu ermitteln, nutzt Sharipov das S-Modell [Sha68] für die Modellierung der intermolekularen Wechselwirkung, um die Abbildung der korrekten Prandtl-Zahl sicher zu stellen. Die Ergebnisse der thermischen Kriechströmung werden als Funktion der Gasverdünnung  $\delta$  und des Breiten zu Höhenverhältnisses  $b/h$  angegeben [Sha99a]. Die Werte für die Flussraten der Poiseuille-Strömung  $Q_P$  und der thermischen Kriechströmung  $Q_T$  werden in Anhang A zusammengefasst.

Sone et al. [STO90] berechnen mithilfe der linearisierten Boltzmann-Gleichung die Geschwindigkeitsprofile der ebenen Couette-Strömung für verschiedene Knudsenzahlen im Bereich der Übergangsströmung. Aufgrund der Symmetrie des Geschwindigkeitsprofils kann auch für den Bereich der Übergangsströmung die Flussrate der Couette-Strömung zu

$$Q_C = 0,5 \quad (5.21)$$

abgeleitet werden.

### 5.2.3 Freie Molekularströmung

Im Bereich der freien Molekularströmung ( $Kn \rightarrow \infty$ ) kann die intermolekulare Wechselwirkung vernachlässigt werden. Stöße treten nur zwischen Molekül und der Spaltwand auf. Gleichung 3.7 kann so linearisiert und der Stoßterm vernachlässigt werden [LSP76]. Für die Flussrate der Poiseuille-Strömung ergibt sich [Sha16]:

$$Q_P = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \left[ \frac{b}{h} \cdot \ln \left( \frac{h}{b} + \sqrt{1 + \left( \frac{h}{b} \right)^2} \right) + \ln \left( \frac{b}{h} + \sqrt{1 + \left( \frac{b}{h} \right)^2} \right) - \frac{b}{3h} \left( \frac{1}{b/h + \sqrt{1 + (b/h)^2}} + \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (b/h)^2}} \right) \right] \quad (5.22)$$

Analog dazu kann die Flussrate der thermischen Kriechströmung bestimmt werden [LSP76]:

$$Q_T = \frac{1}{2} \cdot Q_P \quad (5.23)$$

Die Flussrate der Couette-Strömung kann ebenfalls für den Grenzfall der freien molekularen Strömung ermittelt werden. Für den Fall der ebenen Platten zeigt Kogan [Kog69], dass die Strömungsgeschwindigkeit bei identischer Temperatur der Platten keine Funktion der Spalthöhen-Koordinate ist und der halben Wandgeschwindigkeit entspricht. Hieraus lässt sich ableiten, dass für den Fall der molekularen Strömung ebenfalls

$$Q_C = 0,5 \quad (5.24)$$

gilt.

## 5.3 Modell und Simulationsablauf

Der in Kapitel 5.1 beschriebene Ansatz kann genutzt werden, um den Spaltmassenstrom in Abhängigkeit der Randbedingungen numerisch zu bestimmen. Hierzu wird der Spalt in Strömungsrichtung (x-Richtung) in diskrete Ortsschritte unterteilt und Gleichung 5.6 mithilfe des expliziten Euler-Verfahrens numerisch gelöst. Hierbei wird von einer konstanten Spaltbreite  $b$  ausgegangen. Die Flussrate der Couette-Strömung  $Q_C$  wird

durch den für alle Strömungsbereiche konstanten Wert ersetzt:

$$p_{i+1} = p_i + \frac{\Delta x}{Q_P(\delta_i, b/h_i)} \cdot \left( Q_T(\delta_i, b/h_i) \cdot \frac{p_i}{T_i} \cdot \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta x} + \frac{p_i}{h_i} u_{B,x,i} \beta_i - \frac{\dot{m}}{h_i^2 b \beta_i} \right) \quad (5.25)$$

Die Diskretisierung des Spaltes sowie der Ablauf der Simulation wird in **Abbildung 5.2** gezeigt. Der Ein- und Austrittsdruck stellen zusammen mit der lokalen Berandungs-

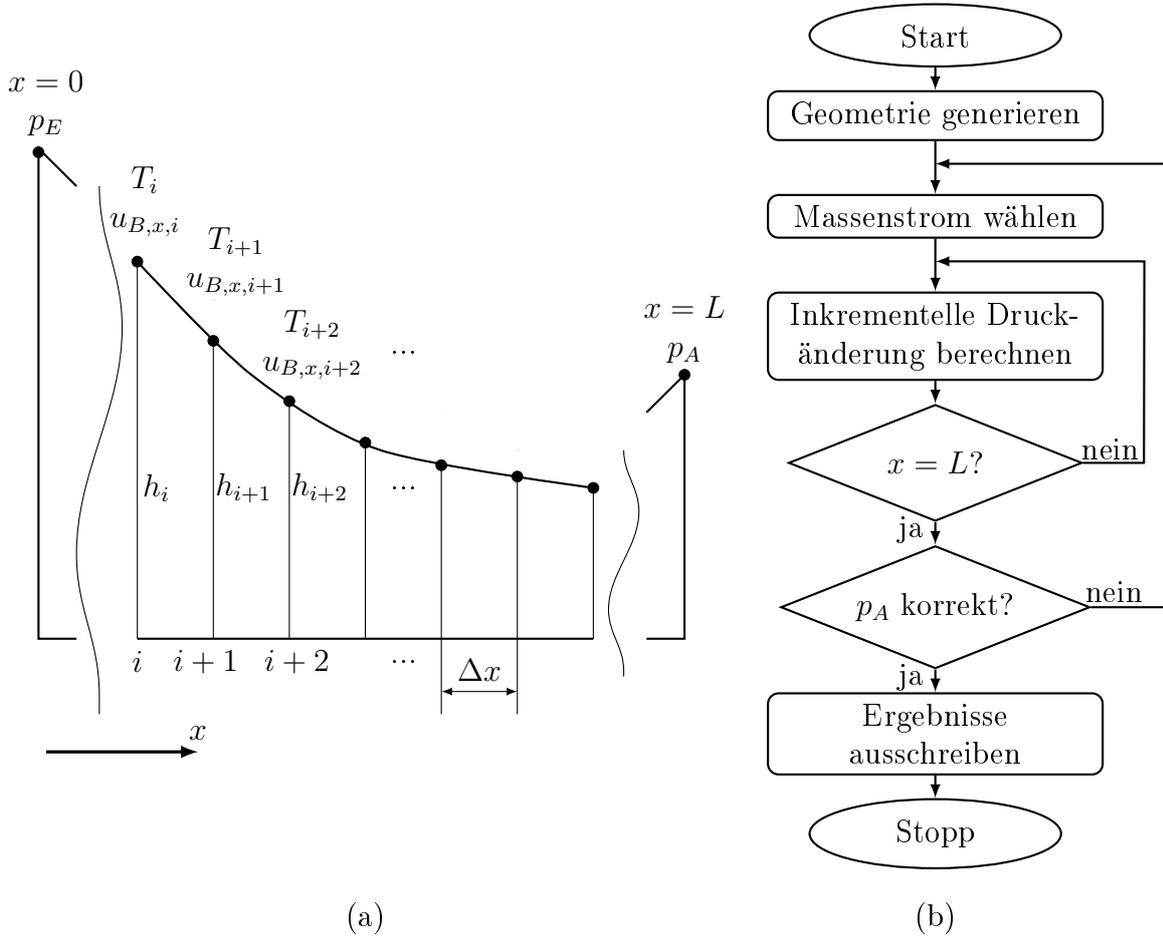


Abbildung 5.2: (a) Eindimensionale Diskretisierung eines Spaltes mit beliebigem Spalthöhenverlauf sowie den gegebenen Randbedingungen. (b) Ablauf des Algorithmus zur Lösung von Gleichung 5.25.

temperatur und Berandungsgeschwindigkeit die Randbedingungen dar. Die Geometrie wird bei konstanter Spaltbreite durch den Spalthöhenverlauf repräsentiert. Der Ortschritt  $\Delta x$  wird stets so klein gewählt, dass ein vom Ortsschritt unabhängiges Ergebnis zu beobachten ist. Zu Beginn der Simulation wird die Geometrie des Spaltes generiert und die Spalthöhe in Abhängigkeit von der x-Koordinate bestimmt. Hierzu zählt auch die Vorgabe der lokalen Berandungstemperaturen und der Berandungsgeschwindigkeiten für jeden Ortsschritt. Im weiteren Verlauf wird der Druckverlauf entlang des Spaltes bestimmt. Hierzu wird ein Massenstrom  $\dot{m}$  gewählt und der Druckverlauf für jeden Ortsschritt mithilfe von Gleichung 5.25 entlang der gesamten Spaltlänge be-

stimmt. Der so ermittelte Austrittsdruck  $p_A$  wird mit dem vorgegebenen verglichen und der Massenstrom bei einer Abweichung mithilfe eines Bisektionsverfahrens angepasst. Das Ergebnis wird ausgeschrieben, wenn der berechnete Austrittsdruck eine zulässige Abweichung zum vorgegebenen Wert unterschreitet.

Zur Lösung von Gleichung 5.25 müssen die Flussraten der Poiseuille- und der thermischen Kriechströmung in Abhängigkeit der Gasverdünnung und des Breiten zu Höhenverhältnisses bekannt sein. **Abbildung 5.3** zeigt die Flussrate der Poiseuille-Strömung für drei verschiedene Breiten zu Höhenverhältnisse. Es werden die Flussraten für die

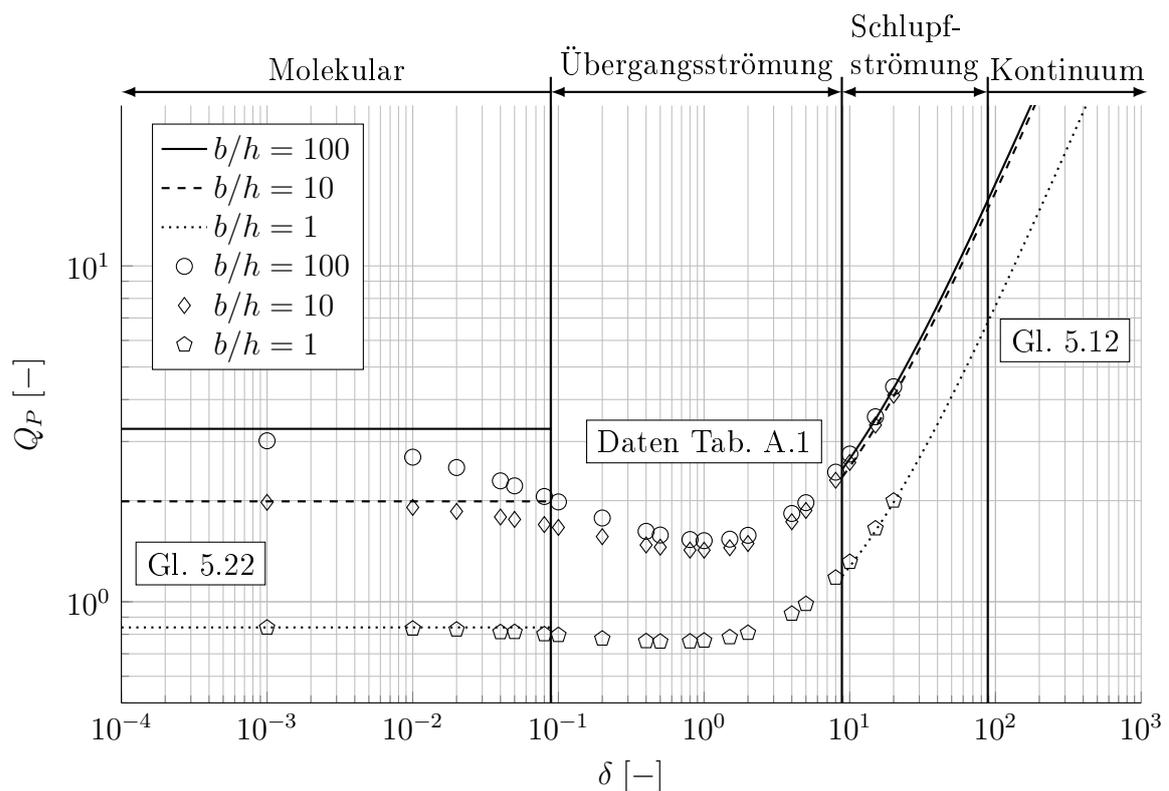
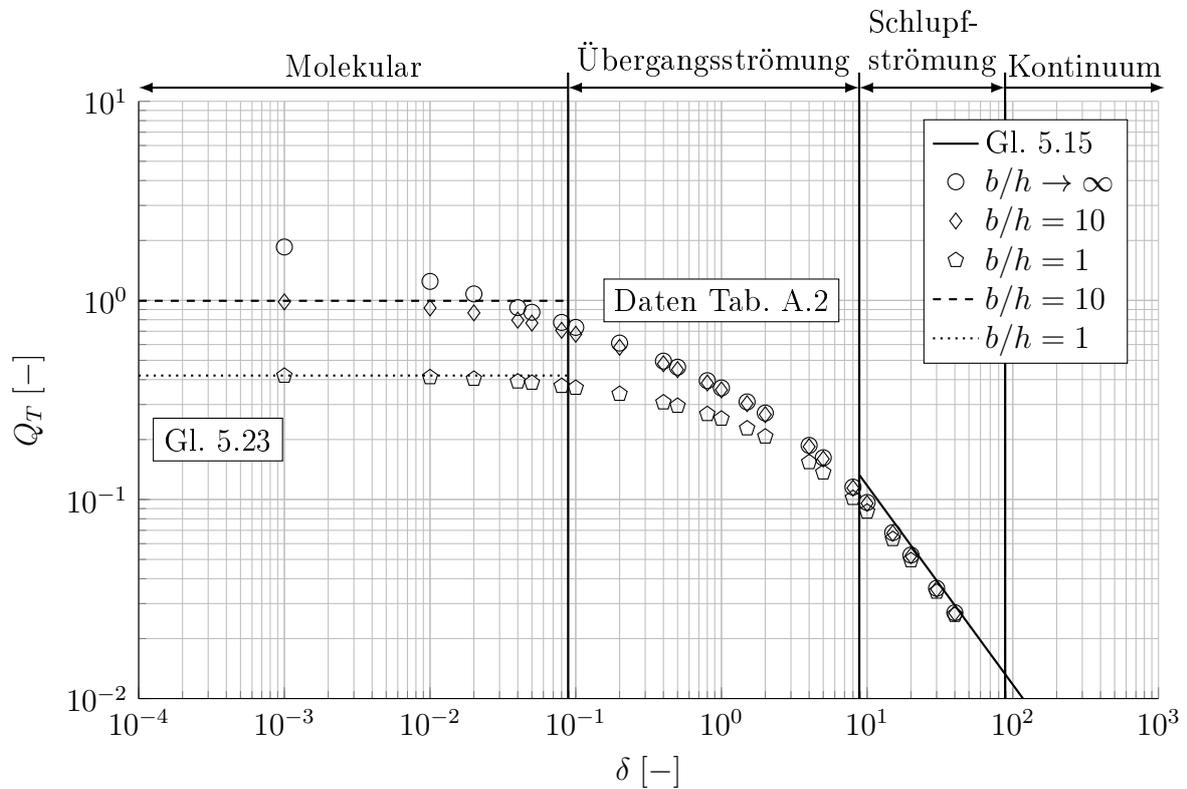


Abbildung 5.3: Flussrate der Poiseuille-Strömung für verschiedene Breiten zu Höhenverhältnisse über der Gasverdünnung  $\delta$  für die verschiedenen Strömungsbereiche.

drei Strömungsbereiche angegeben, wobei sich die deterministischen Ergebnisse für den Bereich der Übergangsströmung (Kapitel 5.2.2) auch in den Bereich der Schlupfströmung und der molekularen Strömung erstrecken. Im Bereich der Schlupfströmung zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Methode der diskreten Geschwindigkeiten (Tabelle A.1) und Gleichung 5.12. Im Bereich der molekularen Strömung besitzen die Ergebnisse der Methode der diskreten Geschwindigkeiten eine gute Übereinstimmung mit Gleichung 5.22 für kleine Breiten zu Höhenverhältnisse. Für große Breiten zu Höhenverhältnisse existieren ausgeprägte Minima im Bereich der Übergangsströmung und die Flussrate der molekularen Strömung tritt erst bei

kleineren Gasverdünnungsparametern auf. Hier zeigt sich, dass die auf Grundlage der Poiseuille-Strömung getroffene Einteilung der Strömungsbereiche für große Breiten zu Höhenverhältnisse hinterfragt werden muss. Für das beschriebene Verfahren wird im weiteren für die Flussrate der Poiseuille-Strömung im Bereich  $10^{-3} < \delta \leq 20$  des Gasverdünnungsparameters auf die Ergebnisse der Methode der diskreten Geschwindigkeiten zurück gegriffen. Hierbei wird zwischen den diskreten Werten linear interpoliert. Für Gasverdünnungsparameter  $\delta > 20$  wird die Lösung der Kontinuums- und Schlupfströmung (Gleichung 5.12) genutzt. Bei Gasverdünnungsparametern  $\delta < 10^{-3}$  wird die Lösung für die molekulare Strömung (Gleichung 5.22) als zusätzlicher Interpolationswert genutzt.

**Abbildung 5.4** zeigt die Flussrate der thermischen Kriechströmung für drei verschiedene Breiten zu Höhenverhältnisse. Es werden die Flussraten der drei Strömungsberei-



*Abbildung 5.4: Flussrate der thermischen Kriechströmung für verschiedene Breiten zu Höhenverhältnisse über der Gasverdünnung  $\delta$  für die verschiedenen Strömungsbereiche.*

che angegeben, wobei sich die Ergebnisse der in Kapitel 5.2.2 beschriebenen Methode für den Bereich der Übergangsströmung analog zur Flussrate der Poiseuille-Strömung in den Bereich der Schlupfströmung und der molekularen Strömung erstrecken. Im Bereich der Schlupfströmung zeigt sich für Gasverdünnungsparameter  $\delta > 40$  eine gute Übereinstimmung mit den durch die Methode der diskreten Geschwindigkeiten

gegebenen Ergebnisse (Tabelle A.2) und Gleichung 5.15. Im Bereich der molekularen Strömung stimmt die Flussrate der Methode der diskreten Geschwindigkeiten mit den aus Gleichung 5.23 für kleine Breiten zu Höhenverhältnisse ebenfalls sehr gut überein. Für große Breiten zu Höhenverhältnisse zeigt sich erst bei kleineren Werten des Gasverdünnungsparameters  $\delta$  eine Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der Methode der diskreten Geschwindigkeiten und der molekularen Strömung (Gleichung 5.23). Für das beschriebene Verfahren wird im weiteren für die Flussrate der thermischen Kriechströmung im Bereich  $10^{-3} < \delta \leq 40$  des Gasverdünnungsparameters auf die Ergebnisse der Methode der diskreten Geschwindigkeiten zurück gegriffen. Analog zur Poiseuille-Strömung wird zwischen den Werten linear interpoliert. Für Gasverdünnungsparameter  $\delta > 40$  wird die Lösung der Kontinuums- und Schlupfströmung (Gleichung 5.15) genutzt. Bei Gasverdünnungsparametern  $\delta < 10^{-3}$  wird die Lösung der molekularen Strömung (Gleichung 5.23) als zusätzlicher Interpolationswert genutzt.

# Kapitel 6

## Experimentelle Untersuchungen

Zur Validierung der vorgestellten Simulationswerkzeuge werden experimentelle Untersuchungen herangezogen. Das folgende Kapitel beschreibt den Versuchsaufbau sowie die Methodik der Durchführung aller Messungen. Grundsätzlich werden Spalte mit und ohne bewegte Berandung für verschiedene angelegte Druckverhältnisse betrachtet. Die gezielt durch einen Temperaturgradienten vorgegebene induzierte thermische Kriechströmung ist nicht Gegenstand der experimentellen Untersuchungen.

### 6.1 Versuchsaufbau und Methodik

Für beide Spaltmodelle - mit und ohne bewegte Berandung - wird ein weitgehend identischer Aufbau der Komponenten des Vakuumsystems und der Messtechnik verwendet. **Abbildung 6.1** zeigt schematisch den Versuchsaufbau. Ausgehend vom atmosphärischen Bereich wird Luft in die Anlage gesaugt (links in Abbildung 6.1). Zur Messung des Massenstroms stehen insgesamt sieben Massenstromsensoren (MFS) bereit, die in Abhängigkeit des gewünschten Messbereichs über die Magnetventile (MV) ausgewählt werden können. Vor dem Drosselventil wird die Gastemperatur ( $T_E$ ) mithilfe eines Thermoelements erfasst. Das Drosselventil dient zur Dosierung eines gewünschten Massenstroms. Der Regelbereich des eingesetzten Drosselventils beträgt  $6 \cdot 10^{-12} - 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg/s}$ , was für alle durchgeführten Messungen ausreichend ist. Am Eintritt des Spaltmodells befindet sich der Rezipient R1 mit einem Volumen von  $0,5 \text{ m}^3$ , der optional über das Ventil V1 hinzugeschaltet werden kann. Um den gesamten Messbereich abdecken zu können, stehen am Spalteintritt insgesamt fünf Absolutdrucksensoren zur Messung des Eintrittsdrucks  $p_E$  bereit. Dem Spaltmodell ist ein weiterer Rezipient (R2) und ein Ventil (V2) nachgeschaltet. Analog zur Eintrittsseite des Spaltmodells werden an der Austrittsseite ebenfalls fünf Absolutdrucksensoren zur Ermittlung des Austrittsdrucks  $p_A$  genutzt. Das Pumpensystem wird durch eine Kombination aus Schraubenvakuumpumpe, mit einem theoretischen Saugvermögen von  $250 \text{ m}^3/\text{h}$

und einer Wälzkolbenpumpe, mit einem theoretischen Saugvermögen von  $1000 \text{ m}^3/\text{h}$  gebildet. Beide Pumpen sind mithilfe von Frequenzumrichtern stufenlos drehzahlge-regelt, um so beliebige Austrittsdrücke einstellen zu können. Die Messwertaufnahme erfolgt mit dem A/D Wandler *SPARTAN* der Firma IMC Meßsysteme GmbH. Die durch die Sensoren ausgegebenen Spannungswerte können durch die analogen Eingänge des Moduls digitalisiert werden. Neben den analogen Eingängen besitzt das Gerät weitere Module, die digitale und analoge Ausgänge und einen Triggereingang bereit stellen. Die analogen Ausgänge werden genutzt, um die Frequenzumrichter der Va-kuumpumpen anzusteuern. Die digitalen Ausgänge steuern sowohl die Magnetventile MV1-7, als auch das Ventil V2. Der Triggereingang wird zur Messung der Drehzahl des in Kapitel 6.3 vorgestellten Modells genutzt. Die Beschreibung der eingesetzten Messtechnik erfolgt in Kapitel 6.1.1.

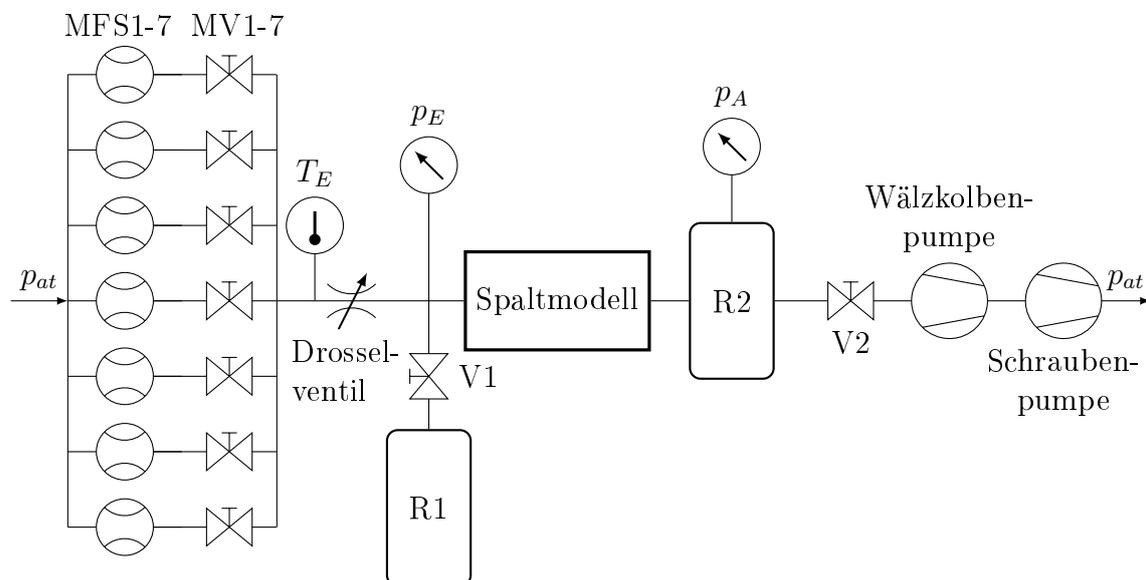


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus. Neben den Komponenten des Vakuumsystems wird die Anordnung der verwendeten Messtechnik gezeigt.

### 6.1.1 Messtechnik

Die verwendete Messtechnik wird unter Angabe von Auflösung, Genauigkeit und Messbereich in **Tabelle 6.1** angegeben. Es stehen insgesamt sieben Massenstromsensoren bereit, die einen Messbereich von  $0,001 - 200 \text{ Nl}/\text{min}$  abdecken. Der Normvolumenstrom bezieht sich auf einen Gaszustand bei  $101325 \text{ Pa}$  und  $273,15 \text{ K}$ . Das Funktionsprinzip dieser Sensoren basiert auf einem kalorimetrischen Messprinzip und die Messgenauigkeit beträgt  $\pm 1\%$  vom Endwert. Die kapazitiven Absolutdrucksensoren decken insgesamt einen Messbereich von  $0,01 - 1000 \text{ mbar}$  ab. Die Messgenauigkeit der Sensoren liegt bei  $0,12\%$  des Messwerts. Eine Ausnahme bildet der Sensor mit dem Messbereich von  $0,01 - 0,1 \text{ mbar}$ , der eine Genauigkeit von  $0,15\%$  besitzt.

Tabelle 6.1: Verwendete Messtechnik mit Auflösung, Genauigkeit und Messbereich nach Herstellerangaben (v.E.: vom Endwert, v.M.: vom Messwert).

Sensor	Auflösung	Genauigkeit	Messbereich
Massenstromsensor MFS: MKS 258C, MKS 558A [Mksc]	0,1 % v.E.	$\pm 1$ % v.E.	0,01 - 0,1; 0,1 - 1; 1 - 10; 10 - 50; 50 - 100; 100 - 200 Nl/min
Massenstromsensor MFS: MKS179B [Mksa]	0,1 % v.E.	$\pm(0,5$ % v.M. + 0,2 % v.E.)	0,001 - 0,01 Nl/min
Drucksensor: MKS Baratron 627B [Mksb]	$10^{-5}$ % v.E.	$\pm 0,12$ % v.M.	0,1 - 1; 1 - 10; 10 - 100; 100 - 1000 mbar
Drucksensor: MKS Baratron 627B [Mksb]	$10^{-5}$ % v.E.	0,15 % v.M.	0,01 - 0,1 mbar
Temperatursensor: Thermoelement Typ T [Tc1]	0,063 K	$\pm 0,5$ K	-185 - 400 °C
Abstandssensor: capaNCDDT 6110 CS01 [Cap]	0,01 % v.E.	$\pm 0,15$ % v.E.	1 mm
Fühlerlehre	—	$\pm 0,01$ mm <sup>1</sup>	—

Bei dem Spaltmodell ohne bewegte Berandung werden zur Einstellung der Spalthöhe Fühlerlehren verwendet. Da diese in Abstufungen von 0,02 mm vorhanden sind, wird die bei der Montage entstandene Unsicherheit der Spalthöhe zu 0,01 mm abgeschätzt.

Für das Spaltmodell mit bewegter Berandung wird ein Thermoelement Typ T zur Ermittlung der Gaseintrittstemperatur verwendet, das eine Genauigkeit von  $\pm 0,5$  K besitzt. Die Bestimmung der Spalthöhe wird zudem mithilfe von kapazitiven Abstandssensoren durchgeführt, um eine eventuelle Spalthöhenänderung durch mechanische Belastungen oder eine Wärmedehnung der Bauteile erfassen zu können. Diese Sensoren besitzen eine Genauigkeit von  $\pm 0,15$  % vom Endwert. Die Erfassung der Drehzahl erfolgt mit einem optischen Druckmarkensensor (E3ZM-V86) der Firma Sitron, mit einem Impuls pro Umdrehung.

<sup>1</sup>eigene Abschätzung

## 6.1.2 Methoden zur Ermittlung des Massenstroms

In der Literatur finden sich verschiedene Ansätze zur Messung sehr kleiner Massenströme, die auf einer direkten oder indirekten Messmethode basieren [Mor+11]. Sensoren zur direkten Messung des Massenstroms werden nach mechanischen und thermischen Messprinzipien eingeteilt. Die vorgestellten Massenstromsensoren auf Grundlage einer kalorimetrischen Messung gehören zu der Gruppe der thermischen Messprinzipien. Die vorhandene direkte Messtechnik kann genutzt werden, um minimale Massenströme von  $2 \cdot 10^{-8}$  kg/s zu erfassen. Um geringere Massenströme zu messen, muss auf die indirekten Methoden zurück gegriffen werden, zu der auch die Druckanstiegsmessung zählt. Einen guten Überblick über die verschiedenen Methoden geben Morini et al. [Mor+11]. Im Folgenden werden die im Rahmen dieser Arbeit genutzten Methodiken zur Messung des Massenstroms weiter erläutert. Ein Vergleich der durch direkter und indirekter Methode erfassten Massenströme folgt in Kapitel 6.2.4 und 6.3.4.

### Direkte Messung des Massenstroms

Werden die Massenstromsensoren genutzt, wird in Abhängigkeit des Messbereichs der passende Sensor mithilfe der Magnetventile zugeschaltet. Bei der Messung mithilfe der Massenstromsensoren führt jede Leckage auf der Eintrittsseite des Spaltes zu einem Messfehler. Zur Minimierung der Leckage wird bei diesen Messungen das Ventil V1 geschlossen, um den Rezipienten R1 mit einer vergleichsweise großen Leckage vom Vakuumsystem zu trennen. Ein weiterer Vorteil eines geringeren Eintrittsvolumens liegt darin, dass sich in kürzerer Zeit ein stationärer Zustand des Systems einstellt. Das Ventil V2 ist während des gesamten Messvorgangs geöffnet und der Austrittsdruck wird über die Drehzahl der Vakuumpumpen eingestellt. Der Eintrittsdruck wird mithilfe des Drosselventils und der Austrittsdruck mithilfe der Vakuumpumpen so lange konstant gehalten, bis die Massenstromsensoren ein stationäres Messergebnis aufweisen und die Messung ausgewertet werden kann.

### Indirekte Messung des Massenstroms

Bei der Druckanstiegsmessung zur Ermittlung des Massenstroms wird der Rezipient R2 auf der Austrittsseite des Spaltes genutzt. Zunächst wird ein gewünschter Eintrittsdruck eingestellt, wobei das Ventil V1 geöffnet ist, um das Eintrittsvolumen mithilfe des Rezipienten R1 zu vergrößern. Das vergrößerte Volumen auf der Eintrittsseite dient dazu einen möglichst konstanten Eintrittsdruck während der gesamten Messung einstellen zu können. Gleichzeitig wird der Rezipient R2 auf der Austrittsseite des Spaltes mithilfe der Vakuumpumpen evakuiert. Um den Massenstrom zu bestimmen, wird das Ventil V2 geschlossen, sodass die Vakuumpumpen vom System getrennt sind und der Rezipient R2 durch den Spalt geflutet wird. Bei Druckanstiegsmessungen, im Bereich sehr kleiner Drücke, muss auf eine ausreichende Evakuierung des Systems geachtet werden. Wird das System evakuiert, desorbiert Gas aufgrund der Druckabsenkung von

den Bauteiloberflächen. Der Desorptionsprozess findet über einen längeren Zeitraum statt. Wird eine Druckanstiegsmessung während dieses Prozesses gestartet, führt das desorbierende Gas zu einer virtuellen Leckage, die das Messergebnis des Massenstroms verfälscht. Aus diesem Grund wird vor Messungen mithilfe der Druckanstiegsmessung das System über einen Zeitraum einer halben Stunde evakuiert. Nach dieser ausreichenden Evakuierung des Systems kann dann die Sorption von Gas während einer Druckanstiegsmessung vernachlässigt werden. Bei der Ermittlung des Massenstroms mithilfe der Druckanstiegsmessung führt jede Leckage im Bereich des Spaltaustritts zu einem Messfehler. Sollen die direkte und indirekte Methode zur Messung des Massenstroms genutzt werden ist daher eine geringe Leckage des Gesamtsystems wichtig.

Unter Annahme eines idealen Gases kann die zeitliche Änderung der Luftmasse innerhalb des Rezipienten R2 beschrieben werden:

$$\dot{m}_M = \frac{dm_M}{dt} = \frac{p_A}{R_s T_A} \frac{dV_{R2}}{dt} + \frac{V_{R2}}{R_s T_A} \frac{dp_A}{dt} - \frac{p_A V_{R2}}{R_s T_A^2} \frac{dT_A}{dt} \quad (6.1)$$

Aufgrund der starren Konstruktion des Rezipienten R2 kann davon ausgegangen werden, dass die Änderung des Volumens  $V_{R2}$  vernachlässigbar klein ist. Weiterhin wird die Druckanstiegsmessung bei sehr geringen Drücken durchgeführt, sodass es zu keiner veränderten Verformung von Wellschlauchverbindungen auf der Austrittsseite des Spaltes kommt. Gleichung 6.1 kann unter dieser Annahme umgeformt werden [Ewa+07]:

$$\dot{m}_M = \frac{V_{R2}}{R_s T_A} \frac{dp_A}{dt} \left( 1 - \frac{dT_A/T_A}{dp_A/p_A} \right). \quad (6.2)$$

Ist die relative Temperaturänderung  $dT_A/T_A$  im Vergleich zur relativen Druckänderung  $dp_A/p_A$  klein, kann die Änderung der Temperatur vernachlässigt werden und der Massenstrom ist nur eine Funktion der Austrittsdruckrate  $dp_A/dt$ . In Bereichen niedriger Drücke kann in sehr guter Näherung von einer isothermen Zustandsänderung ausgegangen werden [Ewa+07], sodass der Massenstrom über die Änderung des Druckes bestimmt werden kann:

$$\dot{m}_M = \frac{V_{R2}}{R_s T_A} \frac{\Delta p_A}{\Delta t} \quad (6.3)$$

Das Volumen  $V_{R2}$  wird mithilfe der geometrischen Abmaße der verwendeten Bauteile bestimmt. Ist eine analytische Berechnung des Volumens einzelner Bauteile nicht ohne weiteres möglich (bspw. Wellschläuche), wird das Volumen durch Befüllung mit Wasser und das nachfolgende Ausmessen der Wassermenge bestimmt.

Um eine Aussage über die Genauigkeit der Messung der Austrittsdruckrate treffen zu können, werden die Messergebnisse verschiedener Drucksensoren miteinander verglichen. Hierzu wird eine beispielhafte Druckanstiegsmessung durchgeführt und es werden jeweils die Messergebnisse der Drucksensoren miteinander verglichen. **Abbildung 6.2** zeigt die beispielhafte Auswertung der Drucksensoren mit den kleinsten Messbereichen.

Es wird die Austrittsdruckrate im Druckbereich von 0,1 mbar für beide Sensoren mithilfe einer Regressionsgeraden ermittelt, die auf Basis der Methode der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt wird. Die Abweichung der Austrittsdruckraten liegt für die gezeigte Messung im Bereich von 2%. Die Vorgehensweise wird für alle weiteren Drucksensoren durchgeführt, wobei stets eine relative Abweichung von maximal 2% beobachtet werden kann.

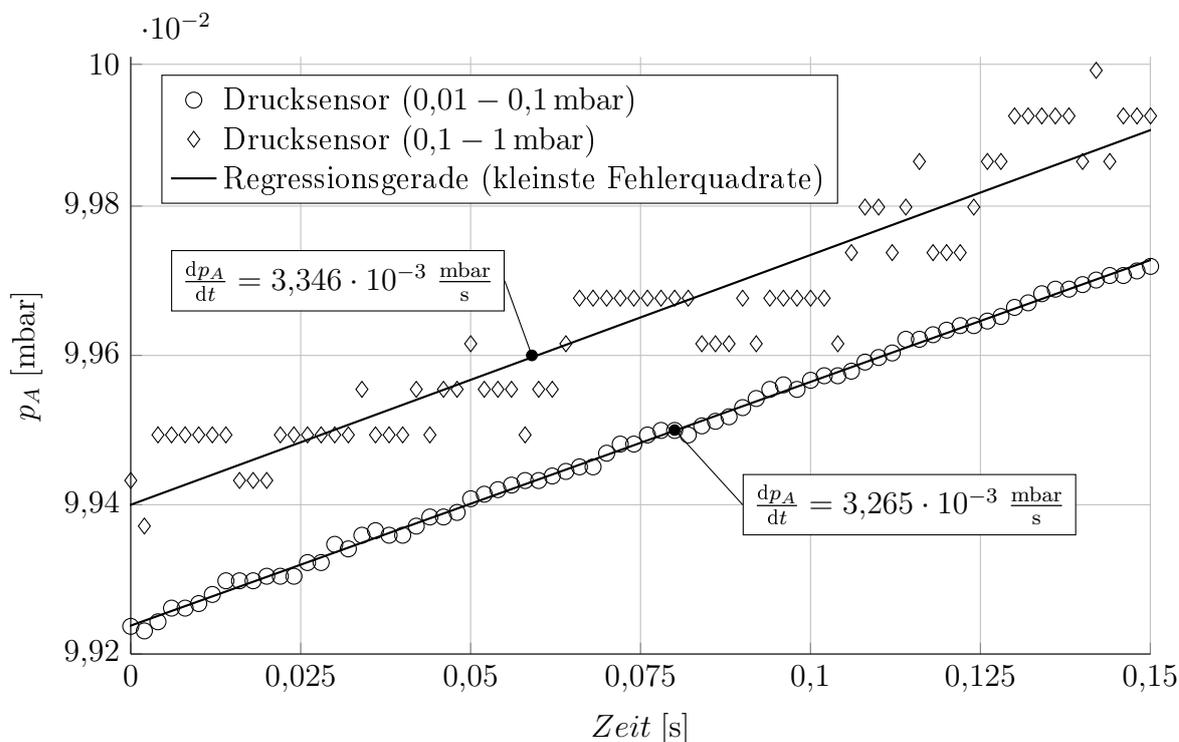


Abbildung 6.2: Beispielhafter Vergleich der Druckanstiegsmessung bei Verwendung von Drucksensoren unterschiedlichen Messbereichs.

Zur Bestimmung des Massenstroms mithilfe der Druckanstiegsmessung muss das Zeitintervall individuell in Abhängigkeit des Volumens von Rezipient R2 und des Massenstroms gewählt werden. Hierbei wird darauf geachtet, dass stets Zeitintervalle betrachtet werden, für welche in guter Näherung eine lineare Druckänderung angenommen werden kann.

## 6.2 Spaltmodell mit statischer Berandung

Abbildung 6.3 zeigt den Aufbau des Spaltmodells mit statischer Berandung. Die Konstruktion entspricht im Wesentlichen dem durch Wenderott [Wen01] entwickelten Modell, das mit dem Ziel der Untersuchung verschiedener Spaltkonturkörper entwickelt wurde. Der Messspalt (1), mit einer Breite von 100 mm, wird bei diesem Aufbau von der Spaltkontur (2) und Spaltgegenkontur (3) (Geometrie der Spaltgegenkontur siehe Abbildung B.1) gebildet, die durch den Spaltrahmen aufgenommen werden. Eine

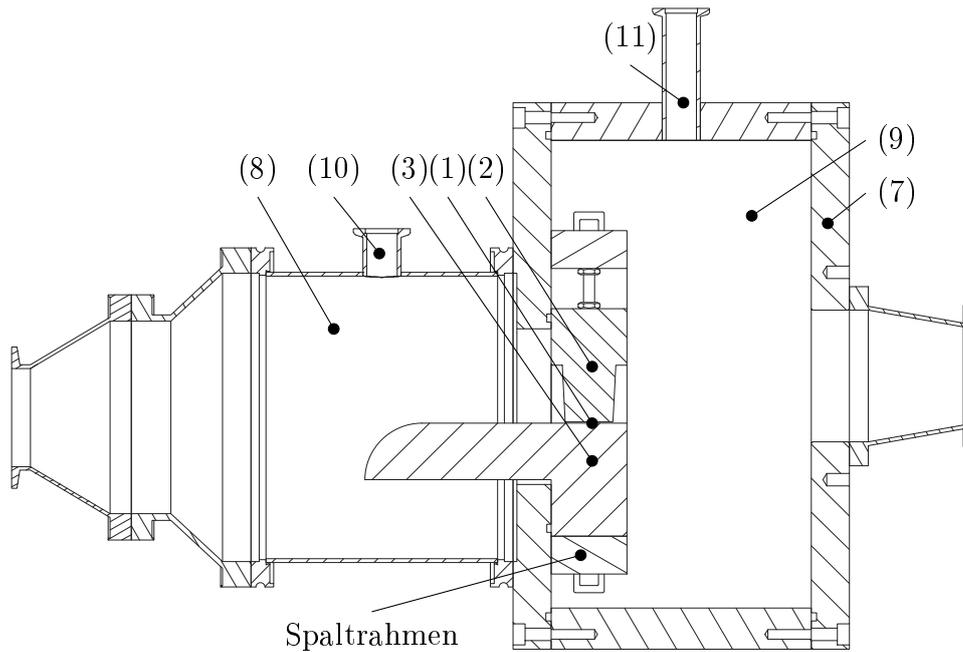


Abbildung 6.3: Aufbau des Spaltmodells mit statischer Berandung.

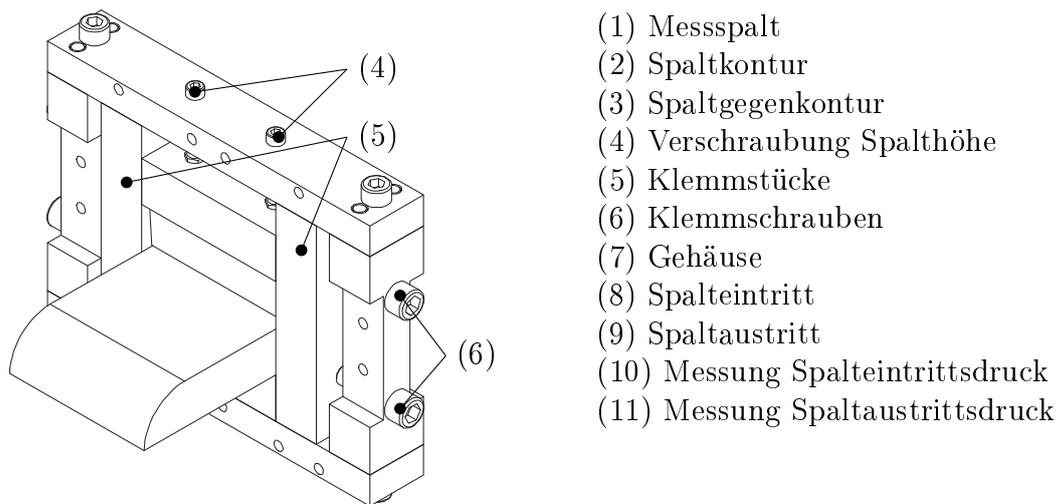


Abbildung 6.4: Aufbau des Rahmens zur Aufnahme der Spaltkonturkörper und Einstellung der Spalthöhe.

isometrische Ansicht des Spaltrahmens wird in **Abbildung 6.4** gezeigt. Zur Untersuchung verschiedener Spaltgeometrien können verschiedene Spaltkonturen (2) eingesetzt werden. Die Einstellung einer Spalthöhe wird über die Verschraubungen (4) im demontierten Zustand des Spaltrahmens durchgeführt, wobei Fühlerlehren zur Messung der Spalthöhe genutzt werden. Auf diese Weise können prinzipiell Spalthöhen im Bereich von 0,01 mm bis 1 mm eingestellt werden. Zur Fixierung der Spaltkontur dienen die verschieblichen Klemmstücke (5) sowie die Verschraubungen (6). Der Spaltrahmen mit dem eingestellten Messspalt wird am Gehäuse (7) des Spaltmodells

montiert. Der Spalteintritt (8) wird durch ein Rohrsegment der Nennweite DN 160 mit ISO-K-Flanschverbindungen gebildet. Das Gehäuse (7) bildet den Spaltaustritt (9), das gleichzeitig auch als Rezipientenvolumen R2 zur Bestimmung des Massenstroms mit der Druckanstiegsmessung genutzt wird. Der Anschluss (10) wird zur Messung des Eintrittsdrucks und Anschluss (11) zur Messung des Austrittsdrucks genutzt. Um eine ausreichende Dichtigkeit des Aufbaus zu erreichen, werden alle relevanten Verbindungselemente über O-Ring Dichtungen zur Atmosphäre abgedichtet (Dichtelemente werden in Abbildung 6.3 nicht gezeigt). Um eine Leckage von Spalteintritt zu Spaltaustritt zu vermeiden, wird zwischen Spaltrahmen und Gehäuse ebenfalls eine O-Ringdichtung eingesetzt.

### 6.2.1 Untersuchte Konturen

Zur Variation der dimensionslosen geometrischen Parameter werden insgesamt vier verschiedene Spaltkonturen untersucht. **Abbildung 6.5** zeigt die Konturen unter Angabe der relevanten geometrischen Abmaße. Drei Konturen weisen eine im Spalt parallele

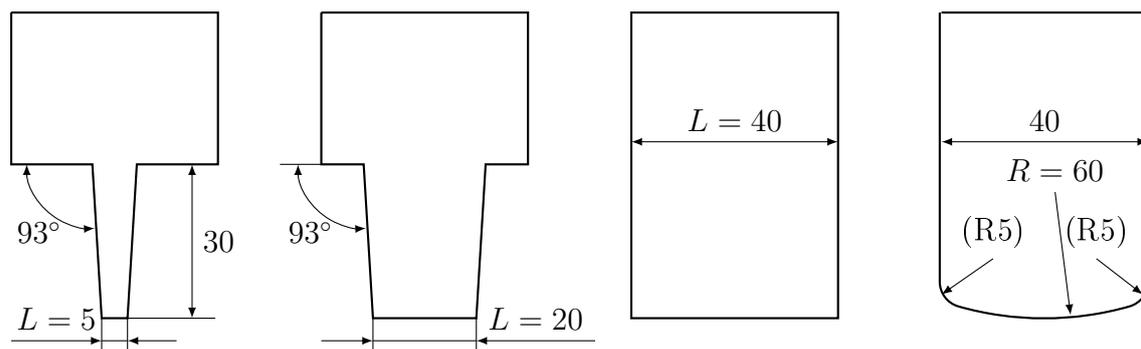


Abbildung 6.5: Untersuchte Spaltkonturen des statischen Spaltes. Angaben der geometrischen Abmaße in mm.

Ebene auf und dienen zur Untersuchung des planparallelen Spaltes unterschiedlicher Längen zu Höhenverhältnisse. Eine Kontur weist im Spalt einen Radius auf. Die planparallelen Konturen der Längen  $L = 5$  mm und  $L = 20$  mm weisen im Gegensatz zum Spalt der Länge  $L = 40$  mm mit  $93^\circ$  eine nicht rechtwinklige Kontur am Ein- und Austritt des Spaltes auf. Der Spalt mit einem Radius von 60 mm besitzt zusätzliche Radien von 5 mm am Ein- und Austritt.

### 6.2.2 Äußere Leckage

Eine Leckage, die aus einem nicht ausreichend abgedichteten Versuchsaufbau resultiert, stellt einen großen potentiellen Messfehler dar. Um eine ausreichende Dichtigkeit garantieren zu können, muss die vorhandene Leckage vor jeder Messung bestimmt werden, was mit der in Kapitel 6.1.2 beschriebenen Druckanstiegsmessung durchgeführt wird. Zu diesem Zweck wird der Versuchsaufbau (siehe Abbildung 6.1) bei geschlossenem

Drosselventil mithilfe der Vakuumpumpen über einen ausreichend großen Zeitraum (mindestens eine halbe Stunde) evakuiert, um so die Verfälschung des Messergebnisses durch Desorptionsvorgänge an den Bauteiloberflächen zu vermeiden. Im Anschluss wird das Ventil V2 geschlossen und der zeitliche Verlauf des Drucks im System aufgezeichnet. Der Leckagemassenstrom kann so unter Annahme einer isothermen Zustandsänderung mithilfe von Gleichung 6.3 bestimmt werden, wobei für  $V_{R2}$  das Volumen des Versuchsaufbaus - zwischen Drosselventil und Ventil V2 - eingesetzt wird. Da bei der Ermittlung des Massenstroms mithilfe der Massenstromsensoren lediglich eine Leckage auf der Spalteintrittsseite und bei der Druckanstiegsmessung eine Leckage an der Spaltaustrittsseite einen Messfehler verursachen, ist die beschriebene Methode zur Ermittlung der Leckage jeweils ein Maß für den maximal durch Leckagen verursachten Messfehler.

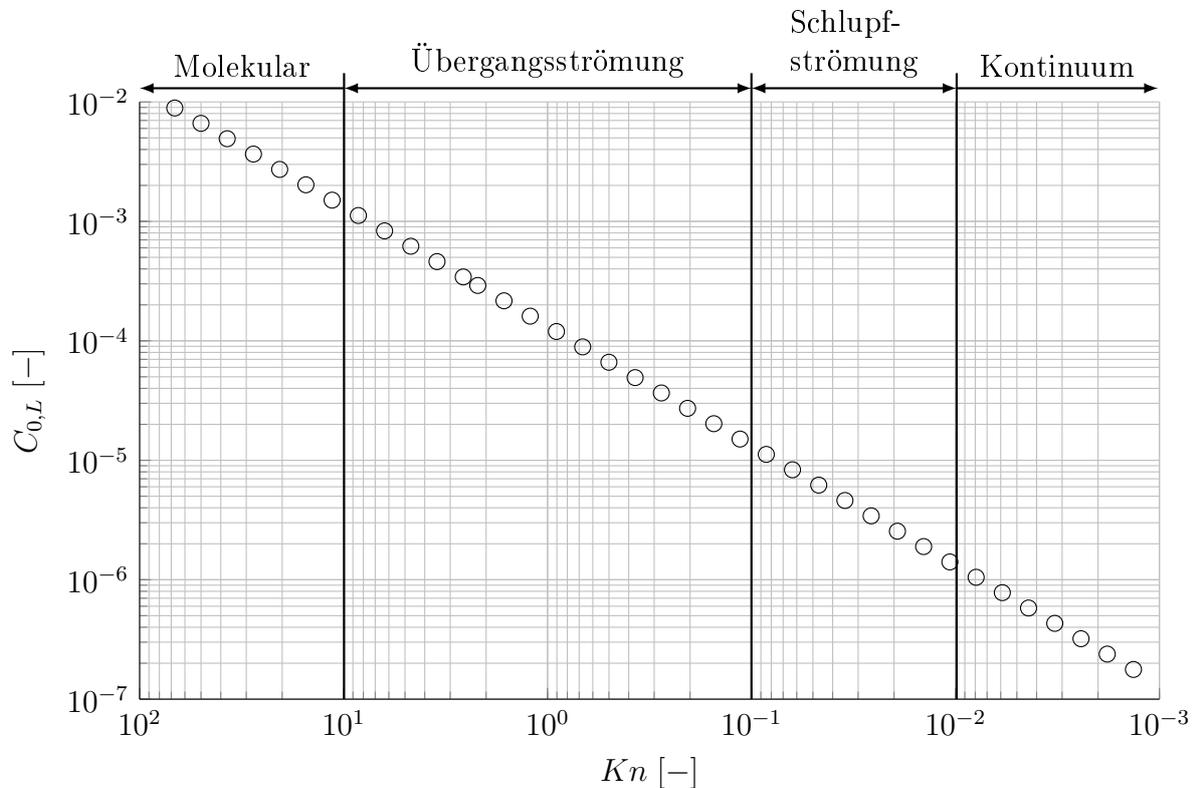


Abbildung 6.6: Normierter Leckagemassenstrom als Funktion der Knudsenzahl des Spaltmodells mit statischer Berandung.

Bei dem Spaltmodell mit statischer Berandung wird bei allen Messungen sicher gestellt, dass der Leckagemassenstrom kleiner als  $1,2 \cdot 10^{-10}$  kg/s ist. So kann beim Spaltmodell mit statischer Berandung davon ausgegangen werden, dass der gemessene Massenstrom  $\dot{m}_M$  in sehr guter Näherung nicht durch die Leckage verfälscht wird. Der Leckagemassenstrom ist weitgehend unabhängig vom Druck im Versuchsaufbau und erst bei großen Drücken - im Bereich des atmosphärischen Drucks - nimmt dieser geringere Werte an. Um einen Bezug zu den in Kapitel 7.3 vorgestellten Messergebnissen herzustellen,

wird der Leckagemassenstrom in den normierten Leckagemassenstrom  $C_{0,L}$  umgerechnet (vgl. Gleichung 3.20). Bei gleichzeitiger Auftragung über der Knudsenzahl wird eine für alle Messungen allgemeingültige Aussage der Leckage erreicht. **Abbildung 6.6** zeigt das Ergebnis des normierten Massenstroms in Abhängigkeit der Knudsenzahl. Für alle Messergebnisse wird sicher gestellt, dass der normierte Leckagemassenstrom  $C_{0,L}$  weniger als 1% des normierten Massenstroms  $C_0$  des Spaltes beträgt.

### 6.2.3 Messunsicherheit

Um die mit den Messungen verbundenen Unsicherheiten bestimmen zu können, wird eine Abschätzung des Messfehlers gemäß des Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß durchgeführt [RR15]. Demnach kann die absolute Unsicherheit  $U_Y$  einer berechneten Größe  $Y$  mithilfe der absoluten Unsicherheit aller nicht-korrelierenden Messgrößen  $X_i$  gleichen Konfidenzintervalls und unter Annahme kleiner Messfehler bestimmt werden:

$$U_Y = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial Y}{\partial X_i} U_{X_i} \right)^2} \quad (6.4)$$

Wird diese Vorgehensweise auf die Bestimmung des normierten Massenstrom (vgl. Gleichung 3.20) angewendet, ergibt sich die absolute Unsicherheit  $U_{C_0}$  zu:

$$U_{C_0} = \sqrt{\left( \frac{U_{\dot{m}}}{\dot{m}} \right)^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{U_{T_E}}{T_E} \right)^2 + \left( \frac{U_{p_E}}{p_E} \right)^2 + \left( \frac{U_h}{h} \right)^2} \cdot C_0 \quad (6.5)$$

Hierbei wird davon ausgegangen, dass die Unsicherheit der Spaltbreite  $b$  und der spezifischen Gaskonstante  $R_s$  vernachlässigbar klein ist. Da bei der Untersuchung des statischen Spaltes kein Thermoelement zur Messung der Gastemperatur genutzt wird, wird für die Spalteintrittstemperatur als Bezugswert  $T_E = 293,15$  K bei einer absoluten Unsicherheit von  $U_{T_E} = \pm 5$  K angenommen. Bei der Messung des Eintrittsdrucks  $p_E$  wird als relative Unsicherheit die Genauigkeit nach Herstellerangaben genutzt (vgl. Tabelle 6.1). Die Bestimmung der Spalthöhe  $h$  wird beim Spaltmodell mit statischer Berandung mithilfe von Fühlerlehren durchgeführt, was mit einer absoluten Unsicherheit von  $U_h = \pm 0,01$  mm abgeschätzt wird.

Da unterschiedliche Methoden zur Messung des Massenstroms  $\dot{m}_M$  genutzt werden, muss eine Unterscheidung bei der Bestimmung der Unsicherheit  $U_{\dot{m}_M}$  durchgeführt werden. Bei der Messung des Massenstroms mithilfe der Massenstromsensoren wird auch hier die Genauigkeit nach Herstellerangaben genutzt (vgl. Tabelle 6.1). Bei der Ermittlung des Massenstroms mithilfe der Druckanstiegsmessung muss eine weitere Betrachtung nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz durchgeführt werden, die sich aus

Gleichung 6.3 ergibt:

$$U_{\dot{m}_M} = \sqrt{\left(\frac{U_{\dot{p}_A}}{\dot{p}_A}\right)^2 + \left(\frac{U_{V_{R2}}}{V_{R2}}\right)^2 + \left(\frac{U_{T_A}}{T_A}\right)^2} \cdot \dot{m}_M \quad (6.6)$$

Die Bestimmung der Austrittsdruckrate  $\dot{p}_A$  wird in Kapitel 6.1.2 beschrieben, die mit einer relativen Unsicherheit von 2% abgeschätzt wird. Die Unsicherheit in der Bestimmung des Rezipientenvolumens wird vor allem durch die Verwendung von Armaturen und Wellschläuchen bestimmt. Die relative Unsicherheit wird zu 2% abgeschätzt. Die Fehlerabschätzung der Austrittstemperatur erfolgt analog zur Eintrittstemperatur mit  $U_{T_A} = \pm 5$  K.

### 6.2.4 Vergleich der Messmethoden für den Spaltmassenstrom

Anhand einer beispielhaften Messung sollen die Ergebnisse beider Messmethoden zur Bestimmung des Spaltmassenstroms miteinander verglichen werden. Hierzu wird der planparallele Spalt mit einer Länge  $L = 20$  mm bei einer Spalthöhe von  $h = 0,3$  mm gewählt. Die Messungen des Massenstroms mit beiden Methoden werden durchgeführt,

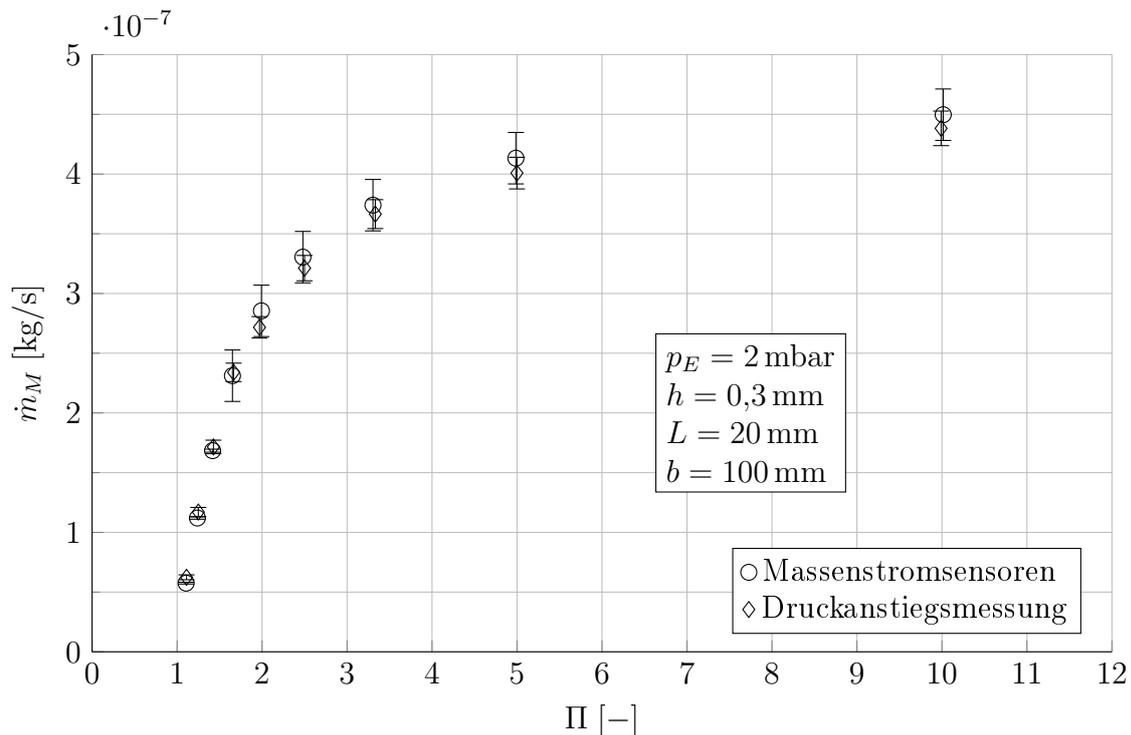


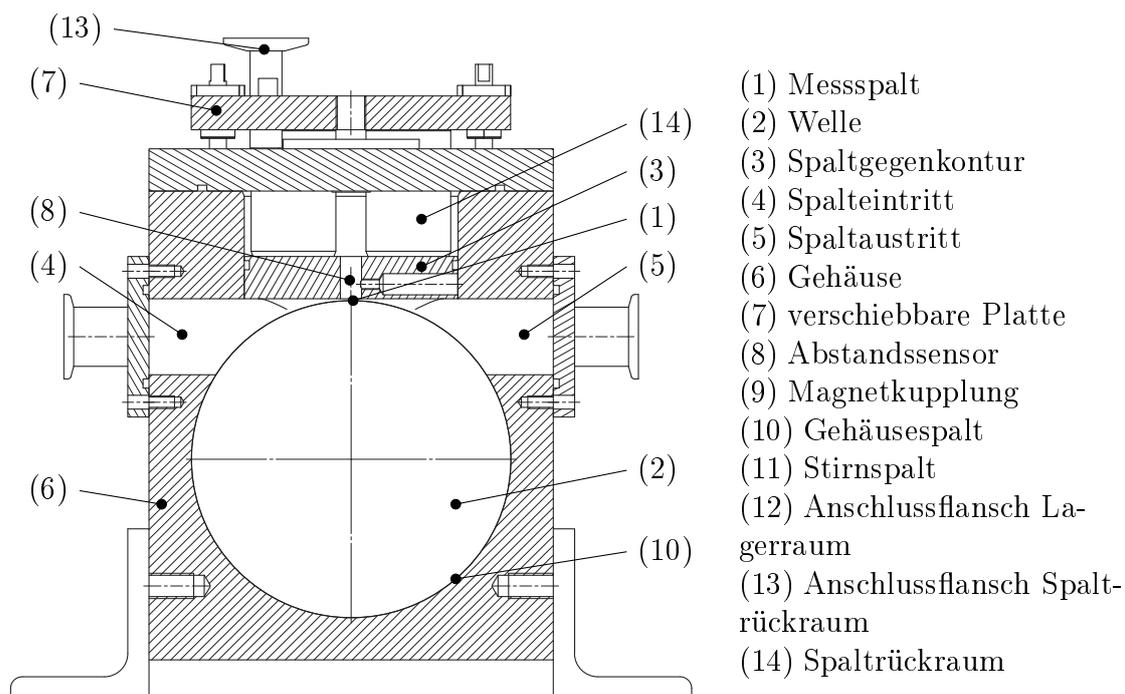
Abbildung 6.7: Vergleich der Messmethoden zur Bestimmung des Massenstroms beim Spaltmodell mit statischer Berandung für verschiedene Druckverhältnisse.

ohne dass Veränderungen am Versuchsaufbau vorgenommen werden. So kann davon ausgegangen werden, dass ein geometrisch identischer Spalt untersucht wird. Um eine Variation des Druckverhältnisses durchführen zu können, wird für den Vergleich ein

Eintrittsdruck von  $p_E = 2$  mbar gewählt. Bei diesem Eintrittsdruck liegt der Massenstrom auch bei sehr kleinen Druckverhältnissen deutlich über der Leckage (mehr als zwei Dekaden im Massenstrom). Die Ergebnisse werden in **Abbildung 6.7** mit den zu erwartenden Messfehlern beider Messmethoden dargestellt. Bei der Nutzung der Massenstromsensoren entspricht dies der in Tabelle 6.1 angegebenen Genauigkeit und bei der Druckanstiegsmessung dem nach Gleichung 6.6 bestimmten Fehler. Insgesamt zeigt sich, dass beide Methoden im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmen. Eine Ausnahme bilden sehr kleine Druckverhältnisse, bei welchen eine Abweichung von 4 – 7% zu beobachten ist.

### 6.3 Spaltmodell mit bewegter Berandung

**Abbildung 6.8** zeigt eine Schnittansicht in Strömungsrichtung des Spaltmodells mit bewegter Berandung und **Abbildung 6.9** eine Schnittansicht durch den Antriebsstrang. Im Anhang befindet sich eine zusätzliche isometrische Ansicht (Abbildung



*Abbildung 6.8: Aufbau des Spaltmodells mit bewegter Berandung. Schnittansicht in Strömungsrichtung.*

B.2) sowie eine Skizze mit allen relevanten geometrischen Abmaßen (Abbildung B.3). Der Messspalt (1), mit einer Breite von  $b = 270$  mm, wird durch eine drehbar gelagerte Welle (2) mit einem Durchmesser von 150 mm und einer geraden Gegenkontur (3) gebildet. Die Umfangsgeschwindigkeit am Außendurchmesser der Welle wird im Bereich von  $-40$  m/s bis 50 m/s variiert. Spalteintritt (4) und Spaltaustritt (5) werden durch zwei Volumina im Gehäuse (6) gebildet. Die Spalthöhe kann im Bereich von 0–1 mm mithilfe

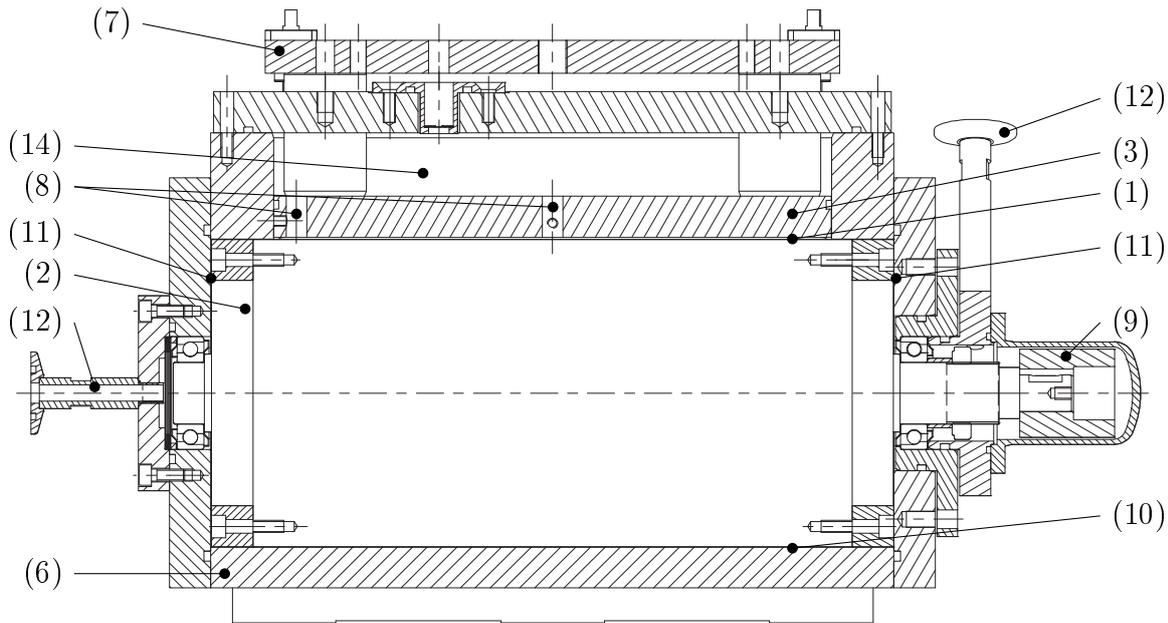


Abbildung 6.9: Aufbau des Spaltmodells mit bewegter Berandung. Schnittansicht des Antriebsstrangs. (Bezeichnungen siehe Abbildung 6.8)

fe von Feingewindeschrauben von außen über eine verschiebbare Platte (7) eingestellt werden. Die Platte ist über eine O-Ring gedichtete Durchführung mit der Spaltgegenkontur (3) verbunden. Zur Messung der Spalthöhe stehen in Spaltbreitenrichtung zwei Abstandssensoren (8) zur Verfügung. Auch bei diesem Versuchsaufbau werden an allen relevanten Dichtstellen O-Ringdichtungen genutzt, um die Leckage zu minimieren. Zur Vermeidung einer dynamischen Dichtung wird bei der mechanischen Durchführung des Antriebs eine Magnetkupplung (9) genutzt. Der in Abbildung 6.9 nicht dargestellte Außenrotor der Kupplung wird durch einen Elektromotor angetrieben, der bei variabler Drehzahl betrieben werden kann. Neben dem eigentlichen Messspalt existieren weitere Spalte zwischen drehbar gelagerter Welle und Gehäuse. Um eine Berührung beider Bauteile im Betrieb zu verhindern wird am Umfang der Welle ein Gehäusespalt (10) und an den Stirnseiten ein Stirnspalt (11) vorgesehen. Der Gehäusespalt stellt eine interne Leckage zwischen Spalteintritt und Spaltaustritt dar und muss durch eine möglichst geringe Spalthöhe minimiert werden. Für die im Rahmen dieser Arbeit vorgestellten Messungen werden insgesamt zwei Konfigurationen der Gehäusespalthöhe genutzt. Dadurch variiert die Gehäusespalthöhe im Bereich von  $h_G = 0,12 - 0,15$  mm. Die Leckage des Gehäusespaltes kann bei der Auswertung der Messergebnisse nicht vernachlässigt werden und wird nach der in Kapitel 6.3.2 beschriebenen Methode berücksichtigt. Die Stirnspalte stellen eine Verbindung zwischen Spalteintritt bzw. Spaltaustritt mit den Lagerräumen her und zählen zusammen mit der Leckage der O-Ringdichtungen zu äußeren Leckagen. Um die Leckage über die Stirnspalte minimieren zu können, werden Anschlüsse (12) vorgesehen, an die eine Drehschiebervakuumpumpe angeschlossen

wird. Über einen weiteren Anschluss (13) evakuiert die Drehschiebervakuumpumpe ebenfalls den Spaltrückraum (14). Eine Betrachtung der äußeren Leckage erfolgt in Kapitel 6.3.1.

### 6.3.1 Äußere Leckagen

Analog zu der in Kapitel 6.2.2 beschriebenen Vorgehensweise zur Bestimmung des Leckagemassenstroms des Spaltmodells mit statischer Berandung, wird für das Spaltmodell mit bewegter Berandung die äußere Leckage bestimmt. Auch bei diesem Versuchsaufbau wird das Volumen zwischen geschlossenem Drosselventil und Ventil V2 (vgl. Abbildung 6.1) mithilfe der Vakuumpumpen evakuiert. Nach dem Schließen von Ventil V2 wird der zeitliche Druckverlauf in dem geschlossenen Volumen aufgezeichnet und der Leckmassenstrom kann so mithilfe von Gleichung 6.3 bestimmt werden. Da während der Messungen des Spaltmassenstroms die Lagerräume und der Spaltrückraum (14) mithilfe einer Drehschiebervakuumpumpe über die Anschlüsse (12) und (13) (vgl. Abbildung 6.8 und 6.9) evakuiert werden, wird diese auch bei der Bestimmung der äußeren Leckage eingesetzt. Aufgrund der eingesetzten Drehschiebervakuumpumpe kann es zu einer negativen Leckage kommen, sodass die Messung zweifach durchgeführt werden muss. Bei sehr niedrigen Systemdrücken wird der Druckanstieg und bei hohen Systemdrücken der Druckabfall gemessen. Auf diese Weise kann die äußere Leckage über die Stirnspalte (11) und alle O-Ringdichtungen für ein Druckverhältnis von  $\Pi = 1$  über den Spalt und stehender Welle bestimmt werden. Im Folgenden werden zwei Annahmen zur Übertragbarkeit der Leckagemessung auf die Messung des Spaltmassenstroms getroffen. Üblicherweise wird bei der Messung des Spaltmassenstroms ein Druckverhältnis  $\Pi \neq 1$  eingestellt. Weiterhin weist die Welle bei der Messung mit einer bewegten Berandung eine Rotation auf. Für beide genannten Fälle wird im Folgenden davon ausgegangen, dass diese nur einen untergeordneten Einfluss auf die Größe der Leckage haben, sodass die gemessene Leckage bei stehender Welle und einem Druckverhältnis  $\Pi = 1$  als Kriterium zur Genauigkeit der Bestimmung des Spaltmassenstroms herangezogen werden kann.

**Abbildung 6.10** zeigt den normierten Leckagemassenstrom als Funktion der Knudsenzahl, der mithilfe der beschriebenen Messmethodik bestimmt wird. Im Bereich der molekularen Strömung kommt es zu einer positiven Leckage. In diesem Bereich strömt mehr Masse über die O-Ringdichtungen ein als über die Stirnspalte und den Spaltrückraum evakuiert werden kann. Bei sehr großen Knudsenzahlen (kleinen Systemdrücken) kann es zudem zu einer Rückströmung von Masse durch die Stirnspalte in das System kommen. Die Übergangsströmung teilt sich in zwei Bereiche. Für große Knudsenzahlen  $Kn > 0,9$  kann weiterhin eine positive Leckage festgestellt werden. Bei  $Kn = 0,9$  ( $p_E = 25$  Pa) gleichen sich die Massenströme über die Stirnspalte und die O-Ringdichtungen aus, sodass die effektive äußere Leckage nahezu verschwindet. Bei

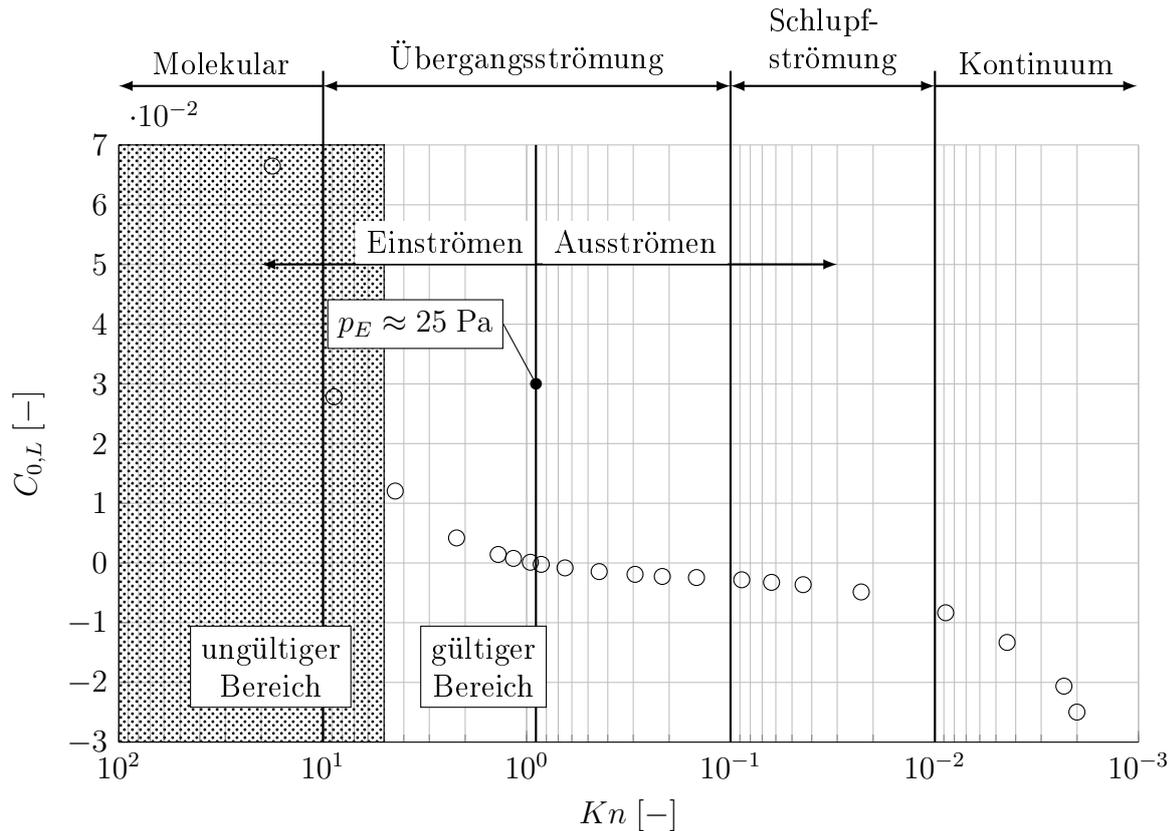


Abbildung 6.10: Normierter Leckagemassenstrom als Funktion der Knudsenzahl des Spaltmodells mit bewegter Berandung.

kleinen Knudsenzahlen  $Kn < 0,9$  kommt es aufgrund der eingesetzten Drehschieber-  
vakuumpumpe zu einer negativen Leckage. In diesem Bereich wird mehr Masse über  
die Stirnspalte und den Spaltrückraum evakuiert als durch die O-Ringdichtungen vom  
atmosphärischen Bereich hineinströmt. Der Bereich der Schlupf- und Kontinuumsströ-  
mung ist ebenfalls durch eine negative Leckage gekennzeichnet.

Mithilfe des Einsatzes der Drehschiebervakuumpumpe zur Reduzierung der äußeren  
Leckage ist es so möglich über einen weiten Bereich der Knudsenzahl eine möglichst  
geringe Leckage zu erreichen. Der Betrag des normierten Leckagemassenstroms liegt für  
Knudsenzahlen  $Kn < 5$  bei Werten unterhalb von  $1,5 \cdot 10^{-2}$ , sodass dieser Bereich als  
gültiger Messbereich festgelegt wird. Für Knudsenzahlen  $Kn > 5$  wird die Leckage zu  
groß und es können keine Messungen durchgeführt werden (ungültiger Messbereich).  
Im Bereich der Kontinuumsströmung kommt es ebenfalls zu größeren Leckagen, die  
jedoch aufgrund großer normierter Spaltmassenströme als unkritisch zu bewerten sind.

### 6.3.2 Innere Leckagen

Im Gegensatz zur äußeren Leckage, kann die Leckage über den Gehäusespalt des Spalt-  
modells mit bewegter Berandung nicht vernachlässigt werden. Da eine messtechnische

Erfassung dieses Massenstroms nicht möglich ist, wird der Massenstrom auf Grundlage theoretischer Überlegungen ermittelt. **Abbildung 6.11** zeigt eine Skizze der inneren Massenströme des Spaltmodells. Der gemessene Massenstrom  $\dot{m}_M$  setzt sich aus dem Massenstrom des Messspaltes  $\dot{m}$  und des Gehäusespaltes  $\dot{m}_G$  zusammen. Die Gehäu-

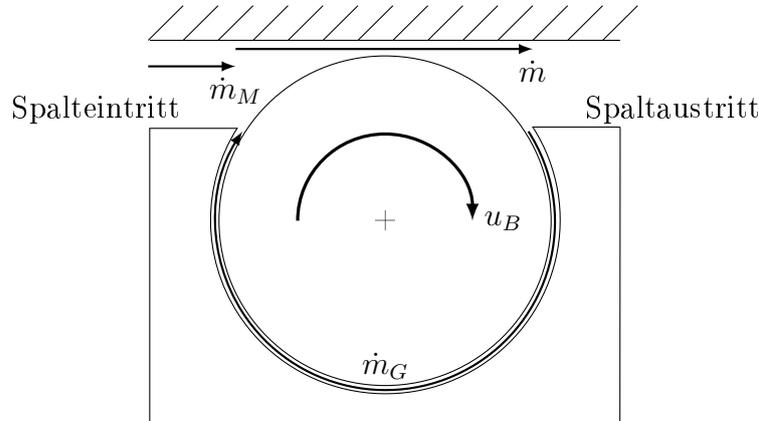


Abbildung 6.11: Skizze der Massenströme im Spaltmodell mit bewegter Berandung.

sespalthöhe  $h_G$  wird bei der Fertigung der Gehäusebohrung und der Welle festgelegt. Insgesamt werden für alle Messungen zwei Konfigurationen mit einer Gehäusespalthöhe von  $h_G = 0,12$  mm und  $h_G = 0,15$  mm benutzt. Der Gehäusespalt besitzt mit 343 mm zudem eine sehr große Spaltlänge. Bei der Strömung im Gehäusespalt handelt es sich ebenfalls um eine Kombination aus Couette- und Poiseuille-Strömung, die als Randbedingung, analog zum Messspalt, das Spaltdruckverhältnis  $\Pi$  und die Berandungsgeschwindigkeit  $u_B$  hat. Im Gegensatz zur Poiseuille-Strömung besitzt die Spaltlänge keinen Einfluss auf die Couette-Strömung. Das Verhältnis aus Spaltlänge zu -höhe liegt für den Gehäusespalt im Bereich von 2286 bis 2858 und lässt vermuten, dass der Anteil der Poiseuille-Strömung am Massenstrom  $\dot{m}_G$  vernachlässigbar klein ist. Der Spaltmassenstrom  $\dot{m}$  kann unter dieser Annahme zu

$$\dot{m} = \dot{m}_M + \dot{m}_G = \dot{m}_M + \frac{p}{R_s T_E} b h_G \frac{u_B}{2} \quad (6.7)$$

berechnet werden. Der Druck  $p$  in Gleichung 6.7 muss in Abhängigkeit einer positiven oder negativen Drehrichtung der Welle gewählt werden. Bei positiver Drehrichtung wird der Austrittsdruck  $p_A$  und bei negativer Drehrichtung der Eintrittsdruck  $p_E$  gewählt. Die Temperatur entspricht aufgrund der isothermen Annahme in jedem Fall der Eintrittstemperatur  $T_E$ .

### 6.3.3 Messunsicherheit

Auch für die Messungen des Spaltmodells mit bewegter Berandung wird eine Fehlerabschätzung mithilfe des Fehlerfortpflanzungsgesetz nach Gauß durchgeführt [RR15]. Die Unsicherheit bei der Bestimmung des normierten Massenstroms ergibt sich analog

zu Gleichung 6.5. Im Gegensatz zum Spaltmodell mit statischer Berandung werden zur Ermittlung der Eintrittstemperatur  $T_E$  ein Thermoelement und zur Ermittlung der Spalthöhe  $h$  Abstandssensoren genutzt. Die Genauigkeit dieser Sensoren findet sich in Tabelle 6.1.

Die Unsicherheit zur Bestimmung des Spaltmassenstroms  $\dot{m}$  ergibt sich mit Hilfe von Gleichung 6.4 und 6.7:

$$U_{\dot{m}} = \sqrt{(U_{\dot{m}_M})^2 + (U_{\dot{m}_G})^2} \quad (6.8)$$

Die Unsicherheit des gemessenen Massenstroms  $U_{\dot{m}_M}$  wird auch beim Spaltmodell mit bewegter Berandung in Abhängigkeit der gewählten Methode bestimmt. Bei der Ermittlung des Massenstroms mithilfe der Massenstromsensoren wird die Genauigkeit nach Herstellerangaben (Tabelle 6.1) gewählt. Wird die Druckanstiegsmessung genutzt, kann die Unsicherheit des Massenstroms wie beim Spaltmodell mit statischer Berandung gemäß Gleichung 6.6 berechnet werden. Die Annahmen für die Unsicherheit der Bestimmung des Rezipientenvolumens  $U_{V_{R2}}$  und der Austrittsdruckrate  $U_{\dot{p}_A}$  werden analog gewählt. Unter Annahme einer isothermen Strömung wird für die Austrittstemperatur  $T_A$  die mit einem Thermoelement gemessene Eintrittstemperatur eingesetzt. Die Unsicherheit der Temperaturmessung mithilfe des Thermoelements ergibt sich nach Tabelle 6.1.

Die Unsicherheit bei der Ermittlung des Gehäusespaltmassenstroms  $U_{\dot{m}_G}$  kann anhand von Gleichung 6.7 abgeleitet werden:

$$U_{\dot{m}_G} = \sqrt{\left(\frac{U_p}{p}\right)^2 + \left(\frac{U_{h_G}}{h_G}\right)^2 + \left(\frac{U_{T_E}}{T_E}\right)^2} \cdot \dot{m}_G \quad (6.9)$$

Die Unsicherheiten aus Druck- und Temperaturmessungen werden gemäß Tabelle 6.1 bestimmt. Die Gehäusespalthöhe wird mithilfe von Fühlerlehren gemessen und daher mit einer Unsicherheit von  $\pm 0,01$  mm bestimmt.

### 6.3.4 Vergleich der Messmethoden für den Spaltmassenstrom

Auch für das Spaltmodell mit bewegter Berandung wird ein Vergleich beider Messmethoden zur Bestimmung des Spaltmassenstroms durchgeführt. Es wird beispielhaft eine Spalthöhe von  $h = 0,3$  mm bei einer Berandungsgeschwindigkeit von  $u_B = -10$  m/s gewählt. Die Spaltbreite und der Radius betragen bei allen Messungen stets  $b = 270$  mm und  $R = 75$  mm. Zwischen beiden Messungen wird keine Veränderung an der Spalthöhe vorgenommen, sodass für beide Messungen von einem geometrisch identischen Spalt ausgegangen werden kann. Bei der Nutzung der Massenstromsensoren führt eine Leckage auf der Spalteintrittsseite und bei Nutzung der Druckanstiegsmessung eine Leckage auf der Austrittsseite zu einem Messfehler. Da bei der Messung der äußeren Leckage (vgl. Kapitel 6.3.1) stets ein Druckverhältnis von  $\Pi = 1$  anliegt, wird für den

Vergleich der Messmethoden ein großes Druckverhältnis von  $\Pi = 10$  gewählt. Auf diese Weise kann beurteilt werden, ob die Leckage über die Stirnspalte einen Einfluss auf das Messergebnis besitzt.

**Abbildung 6.12** zeigt den gemessenen Massenstrom  $\dot{m}_M$  als Funktion des Eintrittsdrucks. Die Messergebnisse werden zusammen mit dem zu erwartenden Messfehler

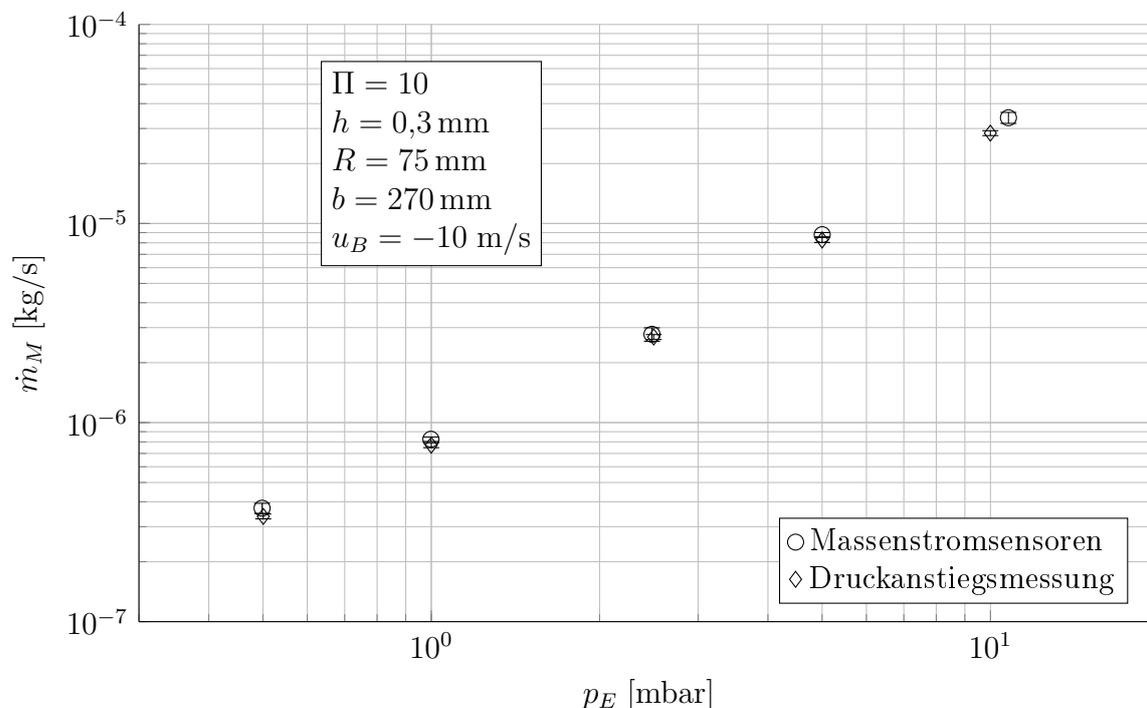


Abbildung 6.12: Vergleich der Messmethoden zur Bestimmung des Massenstroms beim Spaltmodell mit bewegter Berandung.

dargestellt. Bei der Nutzung der Massenstromsensoren entspricht dies der in Tabelle 6.1 angegebenen Genauigkeit der Sensoren. Der Fehler der Druckanstiegmessung wird nach Gleichung 6.6 berechnet. Beide Methoden liefern über einen weiten Messbereich im Rahmen der Messgenauigkeit übereinstimmende Ergebnisse. Die relative Abweichung beider Methoden liegt im Bereich von maximal 7 %.

### 6.3.5 Erweiterung des Messbereichs

Die Messung der verdünnten Strömung in Spalten zeigt, dass mit zunehmender Knudsenzahl die bewegte Berandung einen größeren Einfluss auf die Strömung besitzt. Werden negative Berandungsgeschwindigkeiten betrachtet, entsteht daraus die Problematik, dass bei geringen Druckverhältnissen negative Spaltmassenströme  $\dot{m}$  entstehen. Eine Messung kann dann nicht mehr durchgeführt werden, wenn der Messmassenstrom  $\dot{m}_M$  negativ wird (vgl. Abbildung 6.11). Um trotzdem eine Messung über den gesamten Bereich der Knudsenzahl durchführen zu können, kann die Symmetrie des Spaltmodells ausgenutzt werden. Hierzu wird die Drehrichtung der Welle umgekehrt und

gleichzeitig das Druckverhältnis invertiert. Der Druck am geometrischen Spaltaustritt entspricht so sinngemäß dem Eintrittsdruck und am geometrischen Spalteintritt dem Austrittsdruck. Auf diese Weise können auch wieder beide Methoden zur Bestimmung des Massenstroms genutzt werden. Bei der Druckanstiegsmessung kann dann weiterhin der Rezipient R2 zur Bestimmung des Massenstroms  $\dot{m}_M$  genutzt werden.

Nachfolgend soll an einer Beispielmessung gezeigt werden, dass das Spaltmodell mit bewegter Berandung einen symmetrischen Aufbau besitzt und die beschriebene Methode zur Vermessung der Spaltströmung über den gesamten Bereich der Knudsenzahl zuverlässig ist. **Abbildung 6.13** zeigt den normierten Massenstrom bei einem Druckverhältnis von  $\Pi = 1,3$  und einer dimensionslosen Wandgeschwindigkeit von  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$  (entspricht bei Luft mit einer Temperatur von  $293,15\text{ K}$  einer Umfangsgeschwindigkeit von  $u_B = -20\text{ m/s}$ ). Wird die Messung entsprechend der nega-

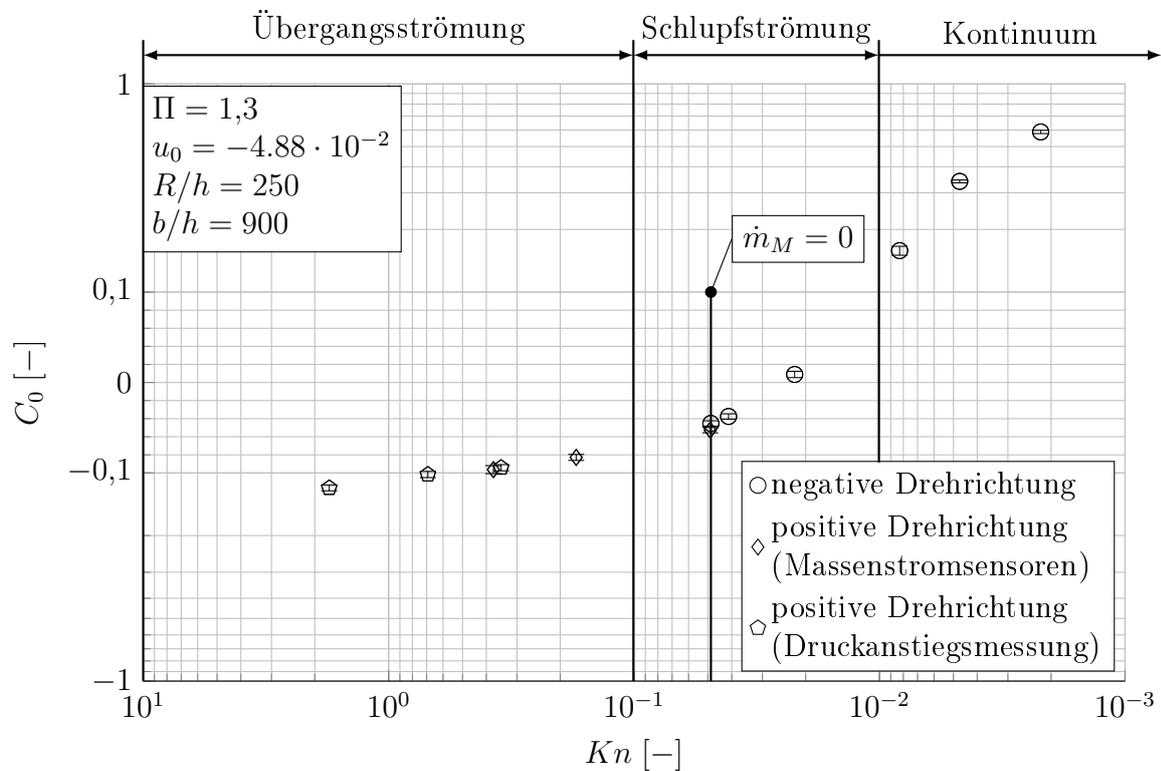


Abbildung 6.13: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl. Es werden Messungen bei positiver und negativer Drehrichtung der Welle durchgeführt, wobei die Massenstromsensoren und die Druckanstiegsmessung genutzt werden.

tiven Berandungsgeschwindigkeit mit negativer Drehrichtung durchgeführt, sind nur Messungen im Bereich sehr kleiner Knudsenzahlen möglich. Da der gemessene Massenstrom  $\dot{m}_M$  um den Gehäusespaltmassenstrom  $\dot{m}_G$  korrigiert wird, kann so auch ein negativer Spaltmassenstrom  $\dot{m}$  ermittelt werden. Im vorliegenden Fall wird der gemessene Massenstrom bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,048$  zu null. Dieser Betriebspunkt wird bei negativer Drehrichtung und bei verschlossenem Spalteintritt und Spaltaustritt

ermittelt, bei dem Spaltmassenstrom und Gehäusemassenstrom vom Betrag identisch sind. Der Spaltmassenstrom kann demnach über Gleichung 6.7 für  $\dot{m}_M = 0$  ermittelt werden. Um größere Knudsenzahlen vermessen zu können, wird die Drehrichtung umgekehrt und das Druckverhältnis invertiert. Die bei positiver und negativer Drehrichtung ermittelten normierten Massenströme bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,048$  stimmen im Rahmen der Messgenauigkeit gut überein. Hieraus lässt sich schließen, dass das Spaltmodell einen hinreichend symmetrischen Aufbau besitzt. Weiterhin kann gezeigt werden, dass die Nutzung der Druckanstiegsmessung bei positiver Drehrichtung angewendet werden kann. Bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,35$  stimmen die Messergebnisse mit Massenströmsensoren und Druckanstiegsmessung im Rahmen der Messgenauigkeit überein.

# Kapitel 7

## Validierung der Simulationswerkzeuge

In diesem Kapitel steht die Validierung der DSMC-Methode sowie der eindimensionalen Theorie im Vordergrund. In einem ersten Schritt werden die genutzten Modelle inklusive aller Randbedingungen für beide Theorien und die Eigenschaften der in dieser Arbeit betrachteten Gase beschrieben. Für beide Simulationsansätze wird eine Untersuchung hinsichtlich der notwendigen Diskretisierung durchgeführt. Im zweiten Teil des Kapitels wird eine umfangreiche Validierung beider Theorien mithilfe von Messergebnissen der in Kapitel 6 vorgestellten Versuchsmodelle durchgeführt. Dabei werden systematisch die strömungsmechanischen und geometrischen Kennzahlen variiert. Kann nicht auf Messungen zurück gegriffen werden, die mithilfe der Versuchsmodelle durchgeführt wurden, wird - soweit verfügbar - auf experimentelle Untersuchungen zurück gegriffen, die in der Literatur beschrieben werden.

### 7.1 Modell der eindimensionalen Theorie

Wie in Kapitel 2 beschrieben, wird in der vorliegenden Arbeit der planparallele Spalt und der Radiuspalt untersucht. Für die Bestimmung des Massenstroms mithilfe der eindimensionalen Theorie werden die in **Abbildung 7.1** gezeigten Geometrien genutzt. Der planparallele Spalt besitzt zwei statische Berandungen. Beim Radiuspalt kann die obere Berandung eine Umfangsgeschwindigkeit  $u_B$  aufweisen. Beide Spaltgeometrien werden in Strömungsrichtung in Inkremente der Länge  $\Delta x$  eingeteilt. Da Querschnittsprünge nicht mit der eindimensionalen Theorie berücksichtigt werden können, kann der Bereich der Zu- und Abströmung beim planparallelen Spalt nicht mit abgebildet werden. Die Länge des Simulationsgebietes beim planparallelen Spalt entspricht somit der Spaltlänge. Die Länge des Radiuspalt es richtet sich nach dem Messaufbau des Spaltmodells mit bewegter Berandung (vgl. **Abbildung 6.8** und **B.3**) und beträgt  $l_R = 127$  mm.

Die Gaseigenschaften bei der Betrachtung der Strömung mithilfe des eindimensiona-

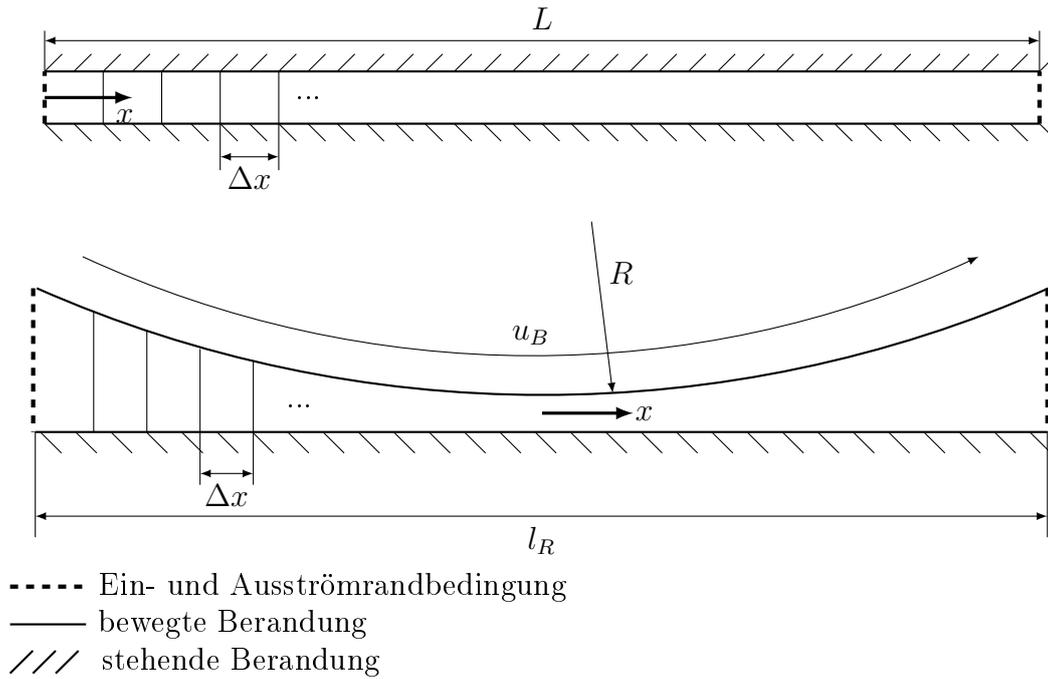


Abbildung 7.1: Aufbau der Modelle des planparallelen Spaltes (oben) und des Radiuspaltes (unten) für die eindimensionale Theorie.

len Modells werden durch die Molekülmasse repräsentiert. In der vorliegenden Arbeit werden Luft und Helium als Arbeitsgas betrachtet. Für Luft wird die Masse eines fiktiven Luftmoleküls nach Bird [Bir94] genutzt. **Tabelle 7.1** zeigt die in dieser Arbeit genutzten Werte.

Tabelle 7.1: Verwendete Molekülmassen bei der Nutzung der eindimensionalen Theorie [Bir94].

Gas	He	Luft
Molekülmasse	$6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$48,1 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Um ein von der Anzahl der Inkremente unabhängiges Ergebnis zu gewährleisten, wird im Folgenden eine Variation der Inkrementanzahl  $L/\Delta x$  und  $l_R/\Delta x$  für beide Spaltgeometrien durchgeführt. Als beispielhafter Betriebspunkt wird eine Knudsenzahl  $Kn = 0,044$  bei einem Druckverhältnis  $\Pi = 10$  und stehender Berandung  $u_0 = 0$  ohne Temperaturgradienten  $T_E/T_A = 1$  gewählt. **Abbildung 7.2** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Inkrementanzahl für beide Spalte. Für den planparallelen Spalt zeigt sich, dass für eine Inkrementanzahl  $L/\Delta x > 10^3$  keine Änderung des normierten Massenstroms zu beobachten ist. Aufgrund der größeren simulierten Länge des Radiuspaltes lässt sich dies für diesen Spalt erst bei einer Inkrementanzahl  $l_R/\Delta x > 10^4$  feststellen. Diese Diskretisierung hat sich auch für andere Betriebspunkte als ausreichend erwiesen, sodass alle weiteren Simulationen mit einer Inkrementanzahl  $L/\Delta x = 10^4$  und  $l_R/\Delta x = 10^4$  durchgeführt werden.

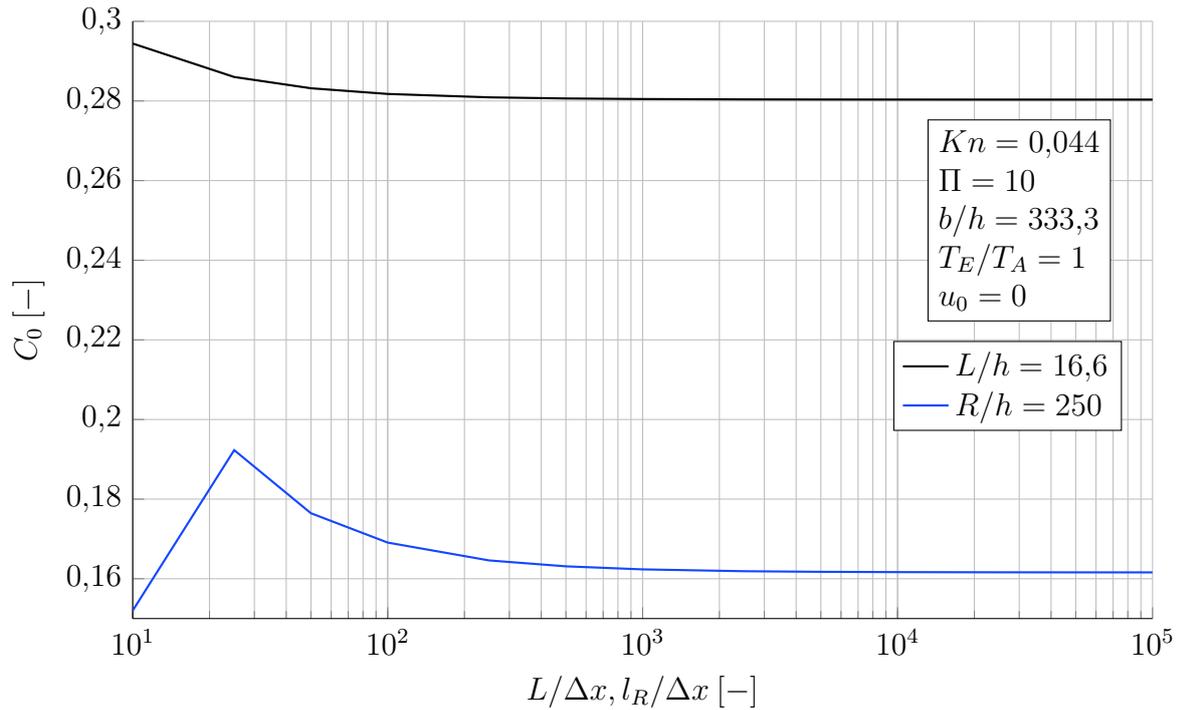


Abbildung 7.2: Normierter Massenstrom als Funktion der Inkrementanzahl für den planparallelen Spalt  $L/h = 16,6$  und den Radiuspalt  $R/h = 250$ .

## 7.2 Modell der DSMC-Methode

### 7.2.1 Aufbau der Modelle

Wie in Kapitel 4 beschrieben, benötigt die DSMC-Methode ein Netz zur Bestimmung der intermolekularen Wechselwirkung. **Abbildung 7.3** zeigt den Aufbau der Modelle des planparallelen Spaltes und des Radiuspaltes sowie eine beispielhafte Vernetzung, die aus quaderförmigen Zellen besteht. Das Netz besitzt in der Zeichenebene eine Zellreihe, die zur Simulation eines unendlich breiten Spaltes an beiden Seiten eine Symmetrierandbedingung vorsieht. Aus Gründen der Rechenzeit werden in der vorliegenden Arbeit nur Spalte unendlicher Breite mithilfe der DSMC-Methode untersucht. Für den geometrischen Parameter des Breiten zu Höhenverhältnisses gilt daher stets  $b/h \rightarrow \infty$ . Zur Abbildung aller relevanten Strömungsvorgänge muss das Simulationsgebiet ausreichend groß gewählt werden. Mit der Größe des Simulationsgebietes steigt jedoch auch der Rechenaufwand, sodass für jede Simulation in Abhängigkeit der Randbedingungen ein geeignetes Simulationsgebiet ausgewählt werden muss.

Bei der Simulation eines planparallelen Spaltes wird - analog zur Geometrie des Messaufbaus (vgl. Abbildung 6.3) - von sehr großen Volumina am Ein- und Austritt ausgegangen. Als Kriterium zur korrekten Abbildung der Strömungsvorgänge wird der Druckverlauf der Strömung entlang des Spaltes herangezogen. Es wird ein kleiner Druckgradient an den Ein- und Ausströmrandbedingungen gefordert, was durch die

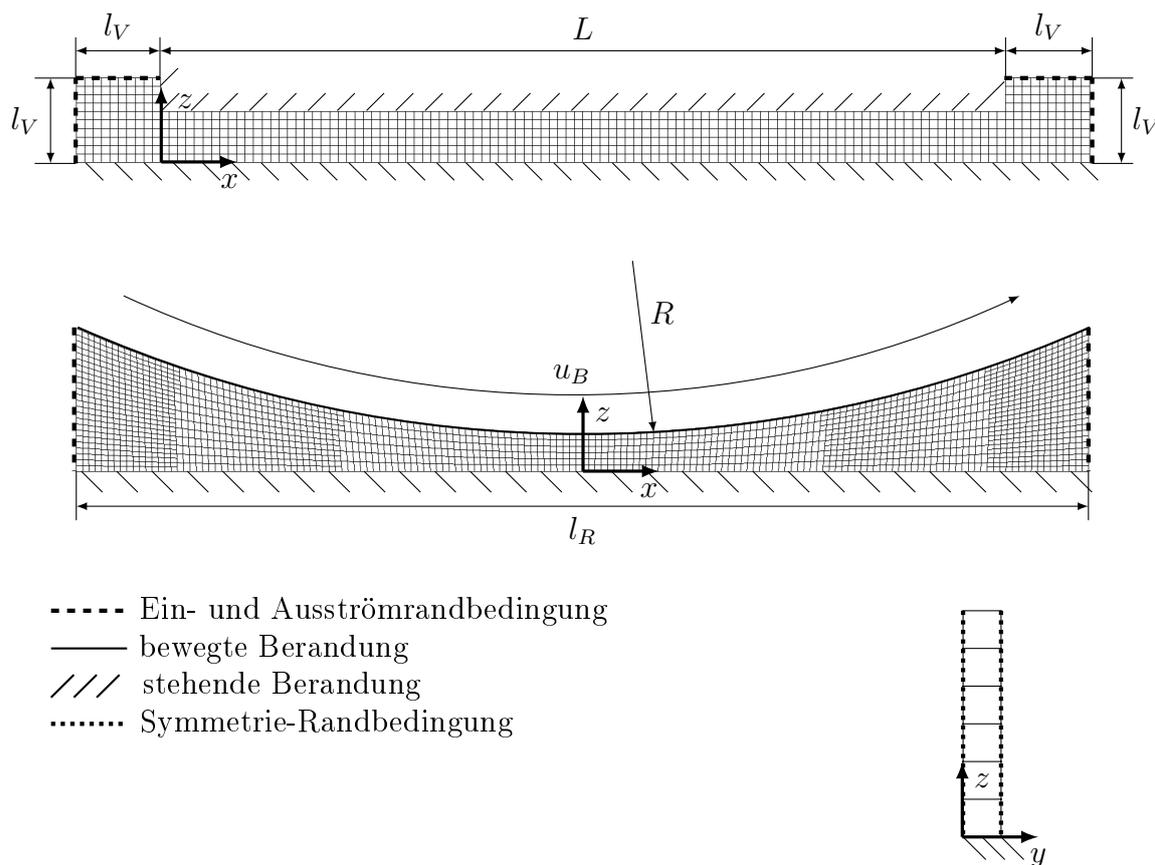


Abbildung 7.3: Aufbau der Modelle des planparallelen Spaltes (oben) und des Radiuspaltes (unten) sowie im Strömungsquerschnitt ( $y$ - $z$  Ebene).

Wahl ausreichend großer Volumina ( $l_V \times l_V$ ) erreicht werden kann. Bei der Geometrie des Radiuspaltes wird von einer kontinuierlichen Querschnittsänderung entlang des Spaltes ausgegangen. Der Radiuspalt wird beim Messaufbau (vgl. Abbildung 6.8) durch den Spalteintritt und Spaltaustritt begrenzt. Analog zur Wahl der Ein- und Austrittsvolumina des planparallelen Spaltes, muss beim Radiuspalt die simulierte Länge  $l_R$  ausreichend groß gewählt werden. Aus Gründen der Rechenzeit wird die simulierte Spaltlänge stets in Abhängigkeit des Betriebspunktes gewählt. Insbesondere bei der Berücksichtigung einer bewegten Berandung und großen Knudsenzahlen kann die Wahl sehr großer simulierter Spaltlängen notwendig sein, um alle für den Spaltmassenstrom relevanten Strömungsvorgänge abbilden zu können. Eine weitere Untersuchung der simulierten Spaltlänge  $l_R$  in Abhängigkeit des Betriebspunktes wird in Kapitel 7.2.5 durchgeführt.

Bei der Vernetzung des Radiuspaltes ergibt sich weiterhin die Schwierigkeit, dass die Spalthöhe entlang des Spaltes variiert. Um Netzzellen mit einem möglichst konstanten Volumen über das gesamte Modell zu erstellen, wird zunächst, analog zum planparallelen Spalt, ein strukturiertes Netz erstellt. In einem weiteren Schritt werden Bereiche des Spaltes definiert, die nachträglich in Spalthöhenrichtung ( $z$ -Richtung) verfeinert

werden. Als Kriterium wird dabei angesetzt, dass das Verhältnis der Seitenlängen einer Zelle den Faktor zwei nicht überschreitet. Das so entstandene unstrukturierte Netz weist weitgehend quaderförmige Zellen auf.

**Tabelle 7.2** fasst die in Abbildung 7.3 eingezeichneten Randbedingungen zusammen. An den Ein- und Ausströmrandbedingungen wird der Druck und die Temperatur

*Tabelle 7.2: Verwendetes Gasmodell sowie Randbedingungen der DSMC-Simulationen.*

<b>Ein-/Ausströmrandbedingung</b>	Vorgabe: $p, T$
<b>Wandinteraktionsmodell</b>	Diffuse Reflexion (Maxwell)
<b>Binäres Kollisionsmodell</b>	Larsen-Borgnakke-VHS
<b>Relaxations-Kollisionszahl</b>	5

des Gases - bzw. der in das Simulationsgebiet einströmenden Teilchen - vorgegeben. Die Teilchen-Wandinteraktion wird, wenn nicht anders angegeben, entsprechend einer diffusen Reflexion durchgeführt und bei einer bewegten Berandung mit der Berandungsgeschwindigkeit überlagert. Die intermolekularen Kollisionen werden gemäß des VHS-Modells berechnet. Werden mehratomige Gasmoleküle betrachtet, wird zudem das Larsen-Borgnakke Modell für die Berücksichtigung der inneren Freiheitsgrade genutzt. Die Relaxations-Kollisionszahl wird entsprechend Larsen und Borgnakke [LB74] übernommen.

**Tabelle 7.3** fasst die Eigenschaften der in der vorliegenden Arbeit betrachteten Gase für die DSMC-Simulationen zusammen. Luft wird dabei als eine Mischung aus Stickstoff und Sauerstoff modelliert. Andere in der Atmosphäre vorhandene Gase werden vernachlässigt. Bei Stickstoff und Sauerstoff werden zwei rotatorische Freiheitsgrade als innere Freiheitsgrade berücksichtigt. Weiterhin wird Helium betrachtet, für das als Edelgas keine inneren Freiheitsgrade berücksichtigt werden. Die entsprechenden Modellparameter Molekülmasse, VHS Moleküldurchmesser und Viskositätsindex werden von Bird [Bir94] übernommen.

*Tabelle 7.3: Verwendetes Gasmodell sowie Randbedingungen der DSMC-Simulationen.*

<b>Gas</b>	Luft		$He$
	$N_2$	$O_2$	
<b>Anteil Teilchenanzahldichte</b>	77,7 %	22,3 %	100 %
<b>Molekülmasse</b>	$46,5 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$53,12 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$6,65 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
<b>VHS Moleküldurchmesser bei 273 K</b>	$4,17 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$4,07 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$2,33 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
<b>Anzahl innerer Freiheitsgrade</b>	2	2	0
<b>Viskositätsindex <math>\omega</math></b>	0,74	0,77	0,66

## 7.2.2 Variation der Simulationsparameter

Wie in Kapitel 4.2 beschrieben, repräsentiert bei der DSMC-Methode der Faktor  $F_N$  die pro Teilchen berücksichtigte Molekülanzahl. Die intermolekularen Kollisionen erfolgen für Teilchen innerhalb einer Kollisionszelle, um eine räumliche Nähe der Teilchen sicher zu stellen. Neben dieser räumlichen Diskretisierung wird eine zeitliche Diskretisierung für die entkoppelte Betrachtung von Teilchenbewegung und intermolekularer Kollision benötigt. Der Faktor  $F_N$ , die Kantenlänge einer Kollisionszelle  $l_Z$  und der Zeitschritt  $\Delta t$  stellen somit prinzipiell freie Simulationsparameter dar, für die in Abhängigkeit der thermodynamischen Randbedingungen mit dem Ziel kleiner Rechenzeiten sinnvolle Werte gefunden werden müssen. Zu diesem Zweck ist eine Parameterstudie am Beispiel des planparallelen Spaltes mit einer Länge von 5 mm und einer Spalthöhe von 0,3 mm durchgeführt worden. Die Knudsenzahl beträgt  $Kn = 0,044$  mit einem idealen Vakuum am Austritt ( $\Pi \rightarrow \infty$ ). Um ein für die Parameterstudie von der Knudsenzahl unabhängiges Ergebnis zu erhalten, werden jeweils sinnvolle Normierungen eingeführt. Die Kantenlänge einer Kollisionszelle wird auf die mittlere freie Weglänge  $\lambda$  bezogen. Diese kann, wie bereits bei der Knudsenzahl (Gleichung 3.15) genutzt, mithilfe des Harte-Kugel-Modells berechnet werden:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\mu \sqrt{R_s T_E}}{p_E} \quad (7.1)$$

Auch hier wird die mittlere freie Weglänge auf den Gaszustand am Spalteintritt bezogen. Der Zeitschritt wird auf die mittlere Kollisionszeit  $t_{Koll}$  bezogen. Mithilfe der mittleren freien Weglänge, berechnet nach dem Harte-Kugel-Modell, und der mittleren Molekülgeschwindigkeit ergibt sich diese zu

$$t_{Koll} = \frac{\pi}{4} \frac{\mu}{p_E}. \quad (7.2)$$

Der Faktor  $F_N$  wird durch die Anzahl der Teilchen pro Kollisionszelle  $nV_Z/F_N$  ausgedrückt.

**Abbildung 7.4** zeigt die Variation der Parameter und den Einfluss auf den normierten Massenstrom  $C_0$ . Ausgehend vom Standardfall  $\Delta t/t_{Koll} = 0,1$ ,  $nV_Z/F_N = 6$  und  $l_Z/\lambda = 0,5$  werden die Simulationsparameter systematisch untersucht. Die Variation des Zeitschritts (Abbildung 7.4 a)) und der Kantenlänge der Kollisionszelle (Abbildung 7.4 c)) zeigt eine nahezu lineare Abhängigkeit des normierten Massenstroms  $C_0$ , sodass diese Parameter möglichst klein gewählt werden müssen. Der Zeitschritt und die Kantenlänge der Kollisionszelle werden daher für alle weiteren Rechnungen zu  $\Delta t/t_{Koll} = 0,1$  und  $l_Z/\lambda = 0,5$  gewählt. Dies entspricht ebenfalls den üblicherweise in der Literatur angegebenen Werten [Lil+06], [Bir94]. Bei der Variation der Anzahl der Teilchen pro Kollisionszelle  $nV_Z/F_N$  (Abbildung 7.4 b)) konvergiert der normierte

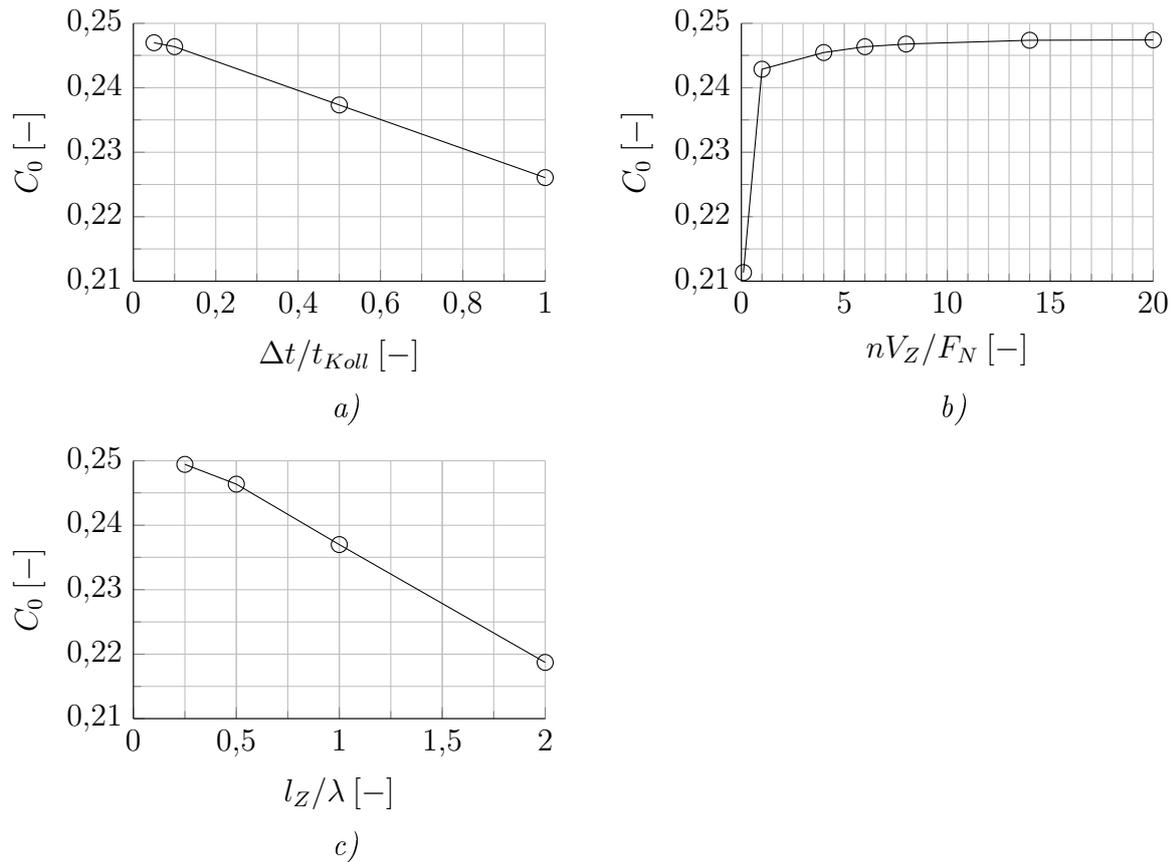


Abbildung 7.4: Variation des Zeitschritts a), der Teilchen pro Zelle b) und der Kantenlänge einer Kollisionszelle c) für den planparallelen Spalt mit einer Länge von 5 mm und einer Spalthöhe von  $h = 0,3$  mm bei einem Druckverhältnis von  $\Pi \rightarrow \infty$  und einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,044$ .

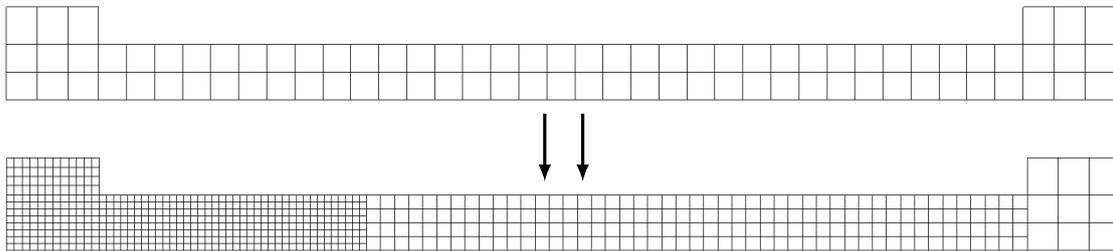
Massenstrom mit steigender Anzahl gegen einen konstanten Wert. Der in der Literatur üblicherweise genannte Wert von sechs bis acht Teilchen pro Zelle [Bir07] ist auch für den vorliegenden Solver ausreichend. Durch die Drosselwirkung der Spaltströmung nimmt die Anzahl der Teilchen pro Kollisionszelle stark in Richtung des Austritts ab. Die zu geringe Anzahl der Teilchen pro Zelle wird zum Teil durch die in Kapitel 4.2.3 genannte einstufige adaptive Netzverfeinerung abgefangen. Für alle weiteren Rechnungen wird eine Anzahl von  $nV_Z/F_N = 6$  gewählt. Der Einfluss der geringeren Teilchenanzahl in Richtung des Austritts wird im folgenden Kapitel mithilfe einer dynamischen Vernetzung untersucht.

### 7.2.3 Dynamische Vernetzung

Die in Kapitel 7.2.2 durchgeführte Parametervariation zeigt, dass eine Erhöhung der Teilchenanzahl ab  $nV_Z/F_N = 6$ , bezogen auf den Eintrittszustand, keine signifikante Änderung des normierten Massenstroms herbeiführt. Aufgrund der Drosselwirkung der Spaltströmung ist jedoch zu erwarten, dass die Teilchenanzahl pro Zelle in Richtung des

Austritts abnimmt und die mittlere freie Weglänge somit gleichzeitig ansteigt. Wie in Abbildung 4.1 gezeigt, kann das Netz am Ende des Schreibintervalls angepasst werden. Eine ähnliche Vorgehensweise wird durch White [Whi15] beschrieben, der eine Netzverfeinerung auf Grundlage der lokalen mittleren freien Weglänge für den *dsmcFoam* Solver vorgeschlägt. Im vorliegenden Fall wird für jede Zelle die mittlere Teilchenanzahl am Ende des Schreibintervalls geprüft. Überschreitet die Teilchenanzahl einen oberen Grenzwert, wird die Zelle in acht neue Zellen zerlegt. Wird ein unterer Grenzwert der Teilchenanzahl unterschritten, wird die Zelle mit den entsprechenden Nachbarzellen zusammengefügt. Die Grenzwerte können global vorgegeben werden.

**Abbildung 7.5** zeigt beispielhaft das initiale Netz und das verfeinerte Netz bei einer stationären Strömung. Bei diesem Beispiel wird von einem idealen Vakuum am



*Abbildung 7.5: Initiales Netz zu Beginn der Simulation (oben) und verfeinertes Netz bei stationärer Strömung (unten).*

Austritt ausgegangen. Alle dimensionslose Simulationsparameter werden entsprechend der in Kapitel 7.2.2 benannten Kriterien gewählt. Die initiale Größe der Zellen wird hierbei jedoch entsprechend der mittleren freien Weglänge bezogen auf  $1/20$  des Eintrittsdruckes des Gases gewählt. Gleiches gilt für die Anzahl der Teilchen pro Kollisionszelle  $nV_Z/F_N$ , welche ebenfalls entsprechend  $1/20$  des Eintrittsdruckes des Gases gewählt wird. Um einen ausreichend kleinen Zeitschritt sicher stellen zu können, wird dieser, analog zum statischen Netz, entsprechend dem Eintrittszustand des Gases gewählt. Bei einer mittleren Teilchenanzahl von über 48 Teilchen pro Kollisionszelle wird eine Verfeinerung und von unter 4 Teilchen pro Kollisionszelle eine Vergrößerung der Zelle durchgeführt. Auf diese Weise kann gewährleistet werden, dass die mittlere Teilchenanzahl pro Kollisionszelle für die im Folgenden gezeigten Simulationsergebnisse des dynamischen Netzes nicht unter 4 Teilchen pro Kollisionszelle fällt. Gleichzeitig wird die Kantenlänge einer Kollisionszelle an die lokale mittlere freie Weglänge angepasst.

**Abbildung 7.6** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für das beschriebene dynamische Netz und das statische Netz entsprechend der Kriterien in Kapitel 7.2.2. Das Spaltlängen zu Höhenverhältnis beträgt  $L/h = 16,6$  bei einem sehr großen Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow \infty$ . Insgesamt ist die Abweichung beider Simulationsergebnisse für alle Knudsenzahlen sehr gering. Da bei der dynamischen Vernetzung aufgrund der größeren Zellen des initialen Netzes das simulierte Volumen größer aus-

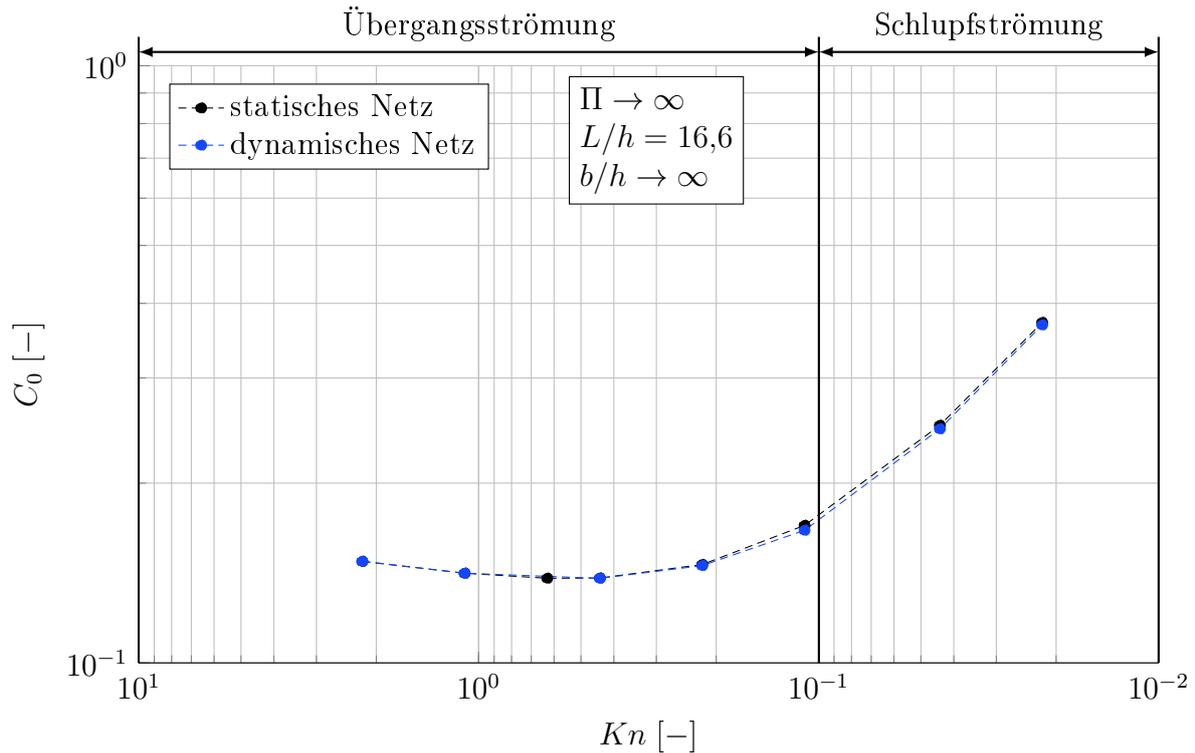


Abbildung 7.6: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl mit statischem und dynamischem Netz für den planparallelen Spalt bei einem sehr großen Druckverhältnis ( $\Pi \rightarrow \infty$ ).

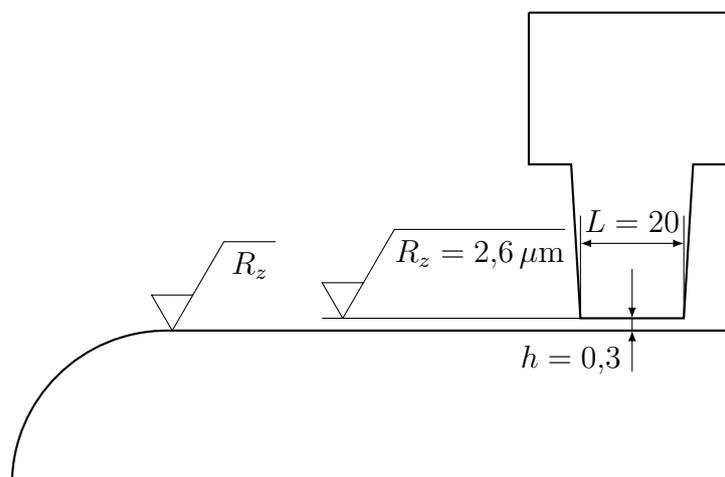
fällt, ist die Rechenzeit deutlich erhöht. Aus Gründen der geringeren Rechenzeit und nahezu identischen Simulationsergebnissen wird im Rahmen dieser Arbeit durchweg das statische Netz gemäß der in Kapitel 7.2.2 beschriebenen Kriterien verwendet.

#### 7.2.4 Variation der Teilchen-Wandinteraktion

Viele theoretische Untersuchungen gehen davon aus, dass Moleküle eine vollständig diffuse Reflexion bei der Interaktion mit einer Berandung ausführen. Das in Kapitel 4.2.2 genannte Maxwell-Modell, bei dem ein Teil der Interaktionen spiegelnd behandelt werden, muss jedoch nach Bird [Bir94] unter anderem in Betracht gezogen werden, wenn es sich um sehr glatte und sorgfältig ausgegastete Oberflächen handelt. Die für Rotoren und Gehäusebohrungen eingesetzten Fertigungsverfahren können mitunter technisch glatte Oberflächen erzeugen. In diesem Kapitel soll untersucht werden, inwieweit die Rauheit der Oberfläche einen Einfluss auf den Spaltmassenstrom besitzt. Weiterhin wird untersucht, welchen Einfluss ein geänderter Akkomodationskoeffizient auf die Ergebnisse der DSMC-Methode hat, um so bestimmen zu können, ob ein Zusammenhang zur Oberflächenrauheit der Berandungen besteht.

### Variation der Oberflächenrauheit

Zur experimentellen Untersuchung des Einflusses der Oberflächenrauheit werden drei verschiedene Gegenkonturen gefertigt. Diese werden mithilfe des funkenerosiven Senkens erzeugt, wobei die Oberflächenrauheit im Rahmen des Verfahrens frei wählbar ist. **Abbildung 7.7** zeigt eine Skizze der untersuchten Spaltgeometrie unter Angabe der Oberflächenrauheiten. Die Messungen werden mit einem planparallelen Spalt der Län-



*Abbildung 7.7: Skizze der Spaltgeometrie zur experimentellen Untersuchung des Einflusses der Oberflächenrauheit. Die Oberflächenrauheit der Gegenkontur wird in drei Schritten variiert  $R_z = 2,6$ ;  $11,4$  und  $26,8 \mu\text{m}$ .*

ge  $L = 20 \text{ mm}$  und einer Spalthöhe  $h = 0,3 \text{ mm}$  durchgeführt. Das Rauheitsmessgerät Surtronic 10RTM der Firma Tylor Hobson wird zur Ermittlung der Oberflächenrauheiten genutzt. Das Messgerät besitzt einen Messbereich von  $0,1 - 199,9 \mu\text{m}$  mit einer Genauigkeit von  $5\% \text{ v.M.} + 0,1 \mu\text{m}$ . Die Rauheit der Bauteile wird an drei Stellen in Spaltbreitenrichtung erfasst und gemittelt. Es stehen insgesamt drei verschiedene Gegenkonturen mit Rauheiten von  $R_z = 2,6$ ;  $11,4$  und  $26,8 \mu\text{m}$  zur Verfügung. Die Rauheit der Kontur wird nicht variiert und beträgt bei allen Messungen  $R_z = 2,6 \mu\text{m}$ .

**Abbildung 7.8** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für die drei Gegenkonturen unterschiedlicher Rauheiten. Bei den Messungen wird stets ein sehr großes Druckverhältnis eingestellt ( $\Pi > 20$ ), sodass von einem vernachlässigbar kleinen Austrittsdruck ausgegangen werden kann. Das Verhältnis aus Spaltbreite zu Spalthöhe beträgt  $b/h = 333,3$ . Es lässt sich feststellen, dass eine Erhöhung der Oberflächenrauheit mit einer Erhöhung des normierten Massenstroms über den gesamten Bereich der Knudsenzahl einhergeht. Eine Änderung der Rauheit von  $R_z = 2,6$  auf  $R_z = 26,8 \mu\text{m}$  resultiert in einer durchschnittlichen Erhöhung des normierten Massenstroms von ca.  $15\%$ .

Eine mögliche Erklärung für die größeren Spaltmassenströme bei größerer Oberflächenrauheit über den gesamten Bereich der Knudsenzahl liefert die Betrachtung der

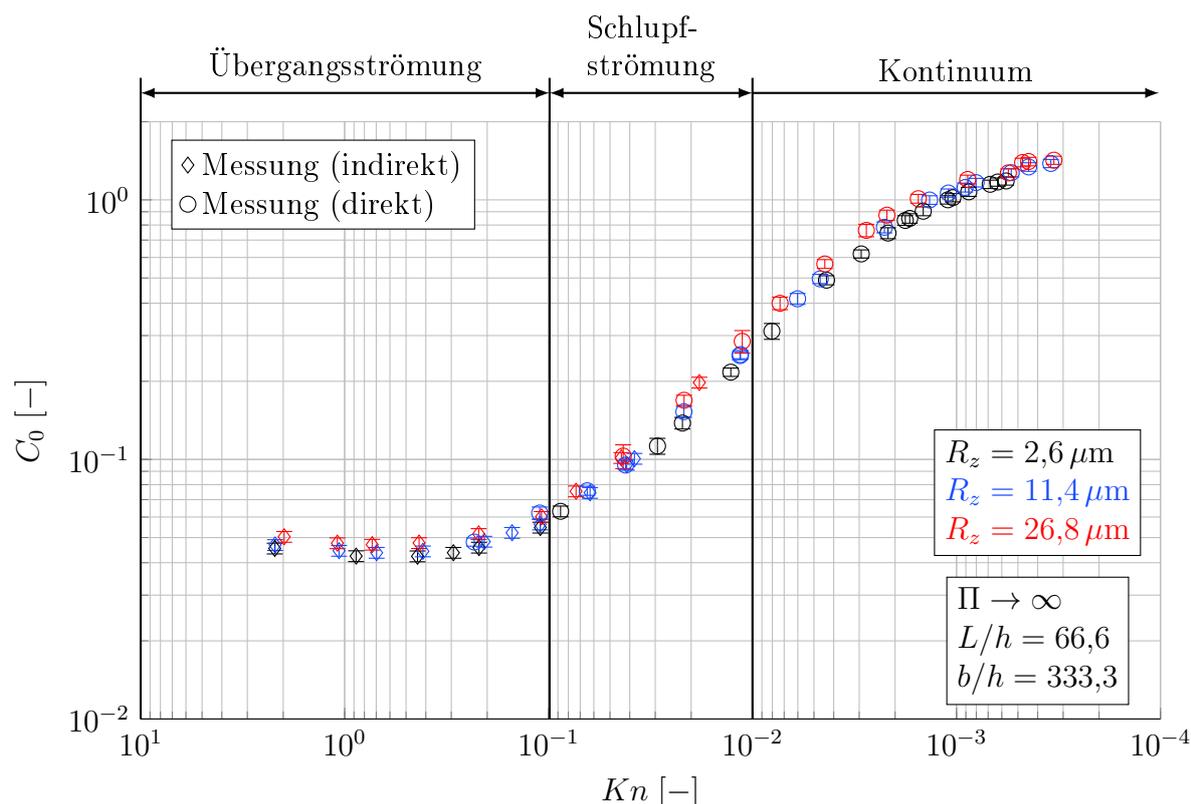


Abbildung 7.8: Gemessener normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Oberflächenrauheiten der Gegenkontur.

effektiven Spalthöhe. Die Einstellung der Spalthöhe wird beim Spalt mit statischer Berandung mittels Fühlerlehren durchgeführt. Diese Messmethode liefert die Spalthöhe als Abstand der jeweiligen Rauigkeitsspitzen der jeweiligen Berandungen. Eine Erhöhung der Oberflächenrauheit von  $R_z = 2,6$  auf  $R_z = 26,8 \mu\text{m}$  der Gegenkontur, bei einer Spalthöhe von  $h = 0,3 \text{ mm}$ , erhöht die effektiv durchströmte Spaltfläche demnach um ca. 5%. Wird die effektive Spalthöhe auch bei der Ermittlung der Knudsenzahl berücksichtigt, können so die beobachteten Abweichungen im normierten Massenstrom unterschiedlicher Oberflächenrauheiten erklärt werden.

#### Variation des Akkomodationskoeffizienten

Zur Beurteilung, ob die Rauheit der Oberfläche einen Einfluss auf den Akkomodationskoeffizienten nimmt, wird dieser im Folgenden mithilfe der DSMC-Methode variiert. Die Bestimmung des Akkomodationskoeffizienten ist Gegenstand vieler experimenteller Untersuchungen und im Wesentlichen von der Gas-Werkstoff-Paarung aber auch vom Bestimmungsverfahren abhängig. Auf die Bestimmung des Spaltmassenstroms besitzt im Wesentlichen der tangentialer Impulsakkomodationskoeffizient  $\alpha$  einen Einfluss, für den nachfolgend eine Literaturübersicht gegeben wird. Die Ergebnisse werden in **Tabelle 7.4** zusammengefasst. Bei der Recherche wurden als Werkstoff Eisen oder Stahl

Tabelle 7.4: Literaturwerte für den tangentialen Impulsakkomodationskoeffizienten verschiedener Gas-Werkstoff-Paarungen.

Quelle	$\alpha$	Werkstoff	Gas
Karniadakis et al., [KBA05]	0,87 – 0,96	Eisen	Luft
Gabis et al., [GLS96]	0,91 – 0,94	Chrom-Stahl	Stickstoff
Bentz et al., [BTL97]	0,83 – 0,89	Stahl	Stickstoff

und als Arbeitsmedium Stickstoff oder Luft in Betracht gezogen. Die gefundenen Werte des Akkomodationskoeffizienten variieren mitunter stark und befinden sich im Bereich von 0,83 – 0,96. Zur Untersuchung des Einflusses des Akkomodationskoeffizienten auf den simulierten Spaltmassenstrom wird ein mittlerer Wert von 0,9 als sinnvoll erachtet.

Abbildung 7.9 zeigt die Simulationsergebnisse des normierten Massenstroms als Funktion der Knudsenzahl für die in der DSMC-Methode verwendeten Akkomodationskoeffizienten  $\alpha = 1$  und  $\alpha = 0,9$ . Der angegebene Akkomodationskoeffizient wird für

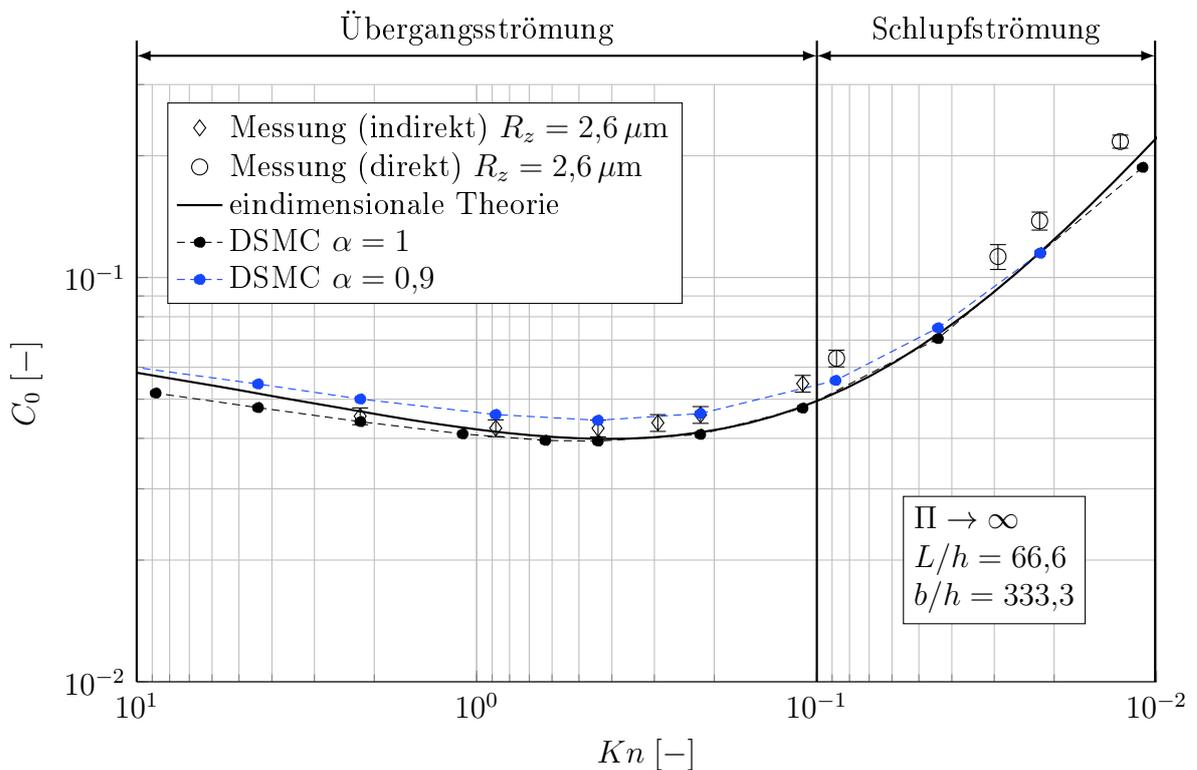


Abbildung 7.9: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für DSMC-Simulationen unterschiedlicher Akkomodationskoeffizienten  $\alpha$ .

alle Berandungen geändert (Kontur und Gegenkontur, vgl. Abbildung 7.7). Für einen Vergleich der DSMC-Simulationen werden zudem die Messergebnisse bei einer Rauheit von  $R_z = 2,6 \mu\text{m}$  und die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit angegeben.

Die DSMC-Simulationen bei einem Akkomodationskoeffizienten von  $\alpha = 0,9$  zeigen

mit zunehmender Knudsenzahl im Bereich der Übergangsströmung unterschiedliche normierte Massenströme im Vergleich zu den Simulationen mit vollständig diffuser Reflexion der Moleküle ( $\alpha = 1$ ). Unterhalb der Knudsenzahl  $Kn < 3 \cdot 10^{-2}$  nimmt der normierte Massenstrom bei unterschiedlichen Akkomodationskoeffizienten identische Werte an. Die normierten Massenströme der DSMC-Simulationen bei vollständig diffuser Reflexion der Moleküle ( $\alpha = 1$ ) liegen über den gesamten Bereich der Knudsenzahl unterhalb der Messergebnisse. Bei unvollständiger Akkomodation ( $\alpha = 0,9$ ) ergeben sich bei den DSMC-Simulationen im Bereich der Übergangsströmung für große Knudsenzahlen größere Werte des normierten Massenstroms im Vergleich zu den Messergebnissen. Die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie, die auch von einer vollständig diffusen Reflexion ausgeht, zeigen über einen großen Bereich der Knudsenzahl identische Ergebnisse zu den DSMC-Simulationen bei  $\alpha = 1$ . Erst bei großen Knudsenzahlen im Bereich der Übergangsströmung liefert die eindimensionale Theorie größere Werte für den normierten Massenstrom.

Die Variation des Akkomodationskoeffizienten zeigt, dass ein Einfluss auf den normierten Massenstrom nur bei großen Knudsenzahlen auftritt. Mit zunehmender Knudsenzahl gewinnt die unvollständige Akkomodation  $\alpha = 0,9$  an Einfluss auf die Strömung. Im Bereich der Schlupfströmung verschwindet dieser jedoch aufgrund einer sehr kleinen Knudsenzahl. Die Abweichung der normierten Massenströme aus Messung und DSMC-Methode, die sich über den gesamten Bereich der Knudsenzahl erstreckt, kann daher nicht durch eine unvollständige Akkomodation erklärt werden. Für alle weiteren DSMC-Simulationen wird daher von einer vollständigen Akkomodation ( $\alpha = 1$ ) ausgegangen.

### 7.2.5 Simulierte Spaltlänge für den Radiusspalt

Die Wahl einer ausreichenden Größe des Simulationsgebietes spielt eine wichtige Rolle, wenn alle für den Massenstrom relevanten Strömungsvorgänge erfasst werden sollen. Insbesondere bei der Berücksichtigung einer bewegten Berandung muss die zu simulierende Spaltlänge kritisch untersucht werden. Abbildung 7.3 zeigt die beispielhafte Vernetzung des Radiusspalt, wobei die simulierte Länge  $l_R$  einen freien Parameter für die Simulation darstellt. Diese stellt einen Kompromiss aus benötigter Genauigkeit der Simulation und der Rechenzeit dar. Aus diesem Grund wird in Abhängigkeit der Randbedingungen für jede Simulation eine simulierte Länge  $l_R$  ausgewählt.

Um die benötigte Spaltlänge abschätzen zu können, wird der Druckgradient an den Ein- und Ausströmrandbedingungen als Kriterium herangezogen. Damit alle relevanten Strömungsvorgänge abgebildet werden, muss dieser klein sein. Eine erste Abschätzung der benötigten Spaltlänge kann mithilfe der eindimensionalen Theorie durchgeführt werden. **Abbildung 7.10** zeigt den über den Spaltquerschnitt gemittelten dimensionslosen Druckverlauf für drei verschiedene Knudsenzahlen. Weiterhin wird eine be-

wegte Berandung  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$  bei einem Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  betrachtet. Bei den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie wird stets die maximale Spaltlänge von  $l_R = 127$  mm berücksichtigt (dies entspricht einer dimensionslosen Länge von  $l_R/R = 1,7$ ). Anhand der Druckverläufe ist zu erkennen, dass mit steigender Knudsenzahl größere Spaltlängen gewählt werden müssen, damit ein kleiner Druckgradient an den Ein- und Ausströmrandbedingungen sichergestellt werden kann. Für die Simulatio-

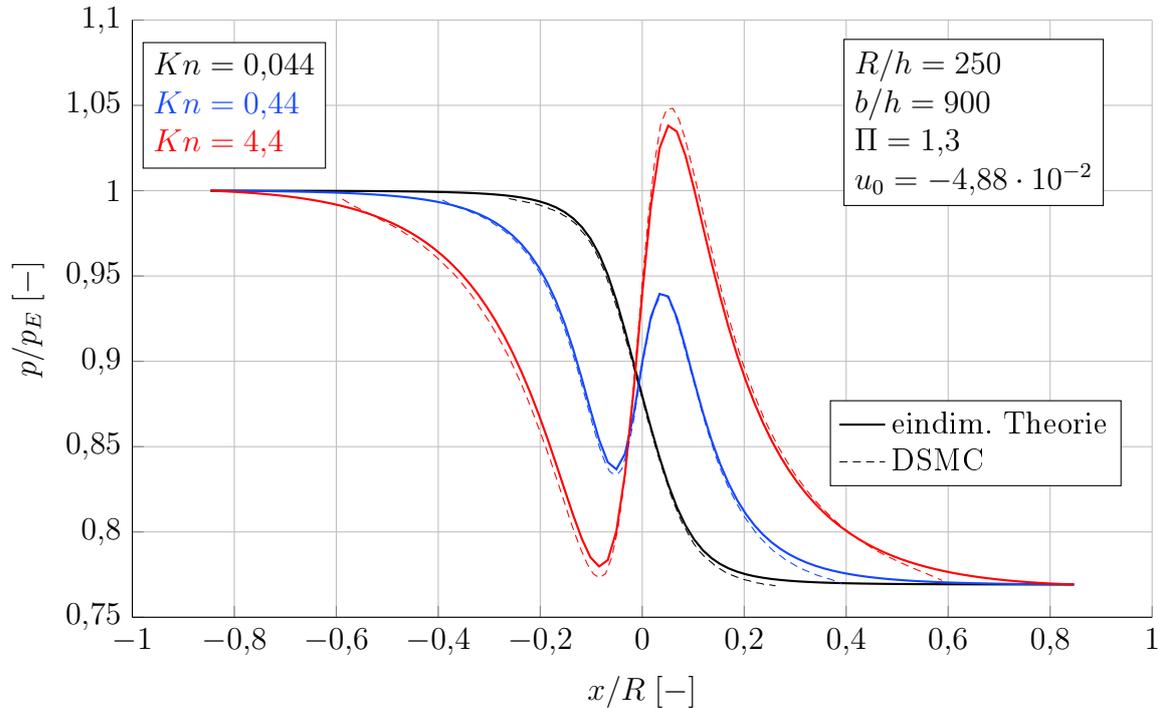


Abbildung 7.10: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druckverläufe in Spaltlängenrichtung für verschiedene Knudsenzahlen bei bewegter Berandung. Vergleich zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode.

nen mittels DSMC-Methode wird auf Grundlage der Ergebnisse der eindimensionalen Theorie die benötigte Spaltlänge abgeschätzt. Für eine Knudsenzahl von  $Kn = 0,044$  wird eine dimensionslose Spaltlänge von  $l_R/R = 0,53$  gewählt. Bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 4,4$  wird bereits eine Spaltlänge von  $l_R/R = 1,2$  benötigt. Ein Vergleich der über den Querschnitt gemittelten Druckverläufe beider Methoden zeigt eine gute Übereinstimmung. Die relative Abweichung der berechneten Massenströme beider Methoden liegt unter 2%. Für alle weiteren DSMC-Simulationen wird die simulierte Spaltlänge  $l_R$  anhand der eindimensionalen Theorie abgeschätzt. Bei sehr großen Knudsenzahlen und Umfangsgeschwindigkeiten müssen mitunter sehr große Spaltlängen simuliert werden. Anhang C gibt Empfehlungen für die simulierten dimensionslosen Spaltlängen  $l_R/R$  der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Betriebspunkte an.

## 7.3 Ergebnisse der statischen Berandung

Ziel ist die Verifikation der mit der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie berechneten normierten Massenströme mit experimentellen Untersuchungen am Spaltmodell mit statischer Berandung (vgl. Kapitel 6.2). Hierbei steht zunächst nur die Untersuchung der Poiseuille-Strömung im Vordergrund ( $u_0 = 0$  und  $T_E/T_A = 1$ ).

### 7.3.1 Variation des Längen zu Höhenverhältnisses

Mit den in Abbildung 6.5 dargestellten Konturen wird eine experimentelle Untersuchung des Längen zu Höhenverhältnisses  $L/h$  durchgeführt. Die drei planparallelen Konturen unterschiedlicher Länge ermöglichen eine Betrachtung des normierten Massenstroms bei konstantem Breiten zu Höhenverhältnis  $b/h$ . Wird die Spalthöhe variiert, können weitere  $L/h$ -Parameter betrachtet werden, der Parameter  $b/h$  kann so jedoch nicht konstant gehalten werden. Im Allgemeinen wird davon ausgegangen, dass bei großen Breiten zu Höhenverhältnissen  $b/h > 100$  der normierte Massenstrom für Knudsenzahlen  $Kn < 10$  weitgehend unabhängig von diesem Parameter ist (vgl. Abbildung 5.3 und 5.4). Neben der Ermittlung des von der Knudsenzahl abhängigen Massenstroms mithilfe der DSMC-Methode, kann diese auch für den Grenzfall einer vollständig molekularen Strömung genutzt werden. Hierbei wird der im Ablauf der Simulation vorgesehene Schritt der intermolekularen Kollisionen (vgl. Abbildung 4.1) nicht durchgeführt und repräsentiert somit den Grenzfall der Knudsenzahl  $Kn \rightarrow \infty$ .

**Abbildung 7.11** zeigt den experimentell und theoretisch ermittelten normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Parameter  $L/h$ . Das Druckverhältnis wird sowohl für alle experimentell ermittelten Werte als auch für die theoretisch berechneten Werte stets sehr groß gewählt ( $\Pi > 20$ ).

Anhand der Ergebnisse aus Simulation und Messung wird nachfolgend der prinzipielle Verlauf des normierten Massenstroms als Funktion der Knudsenzahl erläutert. Bei sehr kleinen Knudsenzahlen, im Bereich der **Kontinuumsströmung**, lässt sich anhand der experimentellen Ergebnisse ein normierter Massenstrom beobachten, der mit kleineren Knudsenzahlen zunehmend einen flacheren Verlauf einnimmt. Hier ist der Einfluss einer kompressiblen Strömung zu erwarten, die im vorliegenden Fall - aufgrund des großen Druckverhältnisses - am Ende des Spaltes bei ausreichend kleiner Knudsenzahl verblockt. Für den Grenzfall einer verblockten Blendenströmung, unter der Annahme einer isentropen Beschleunigung der Strömung bis in den engsten Querschnitt und dem Erreichen des kritischen Drucks im engsten Querschnitt, kann der Massenstrom mit der Gleichung nach Saint-Venant und Wantzel beschrieben werden. Mithilfe von Gleichung 3.20 zeigt sich, dass der normierte Massenstrom so nur eine Funktion des

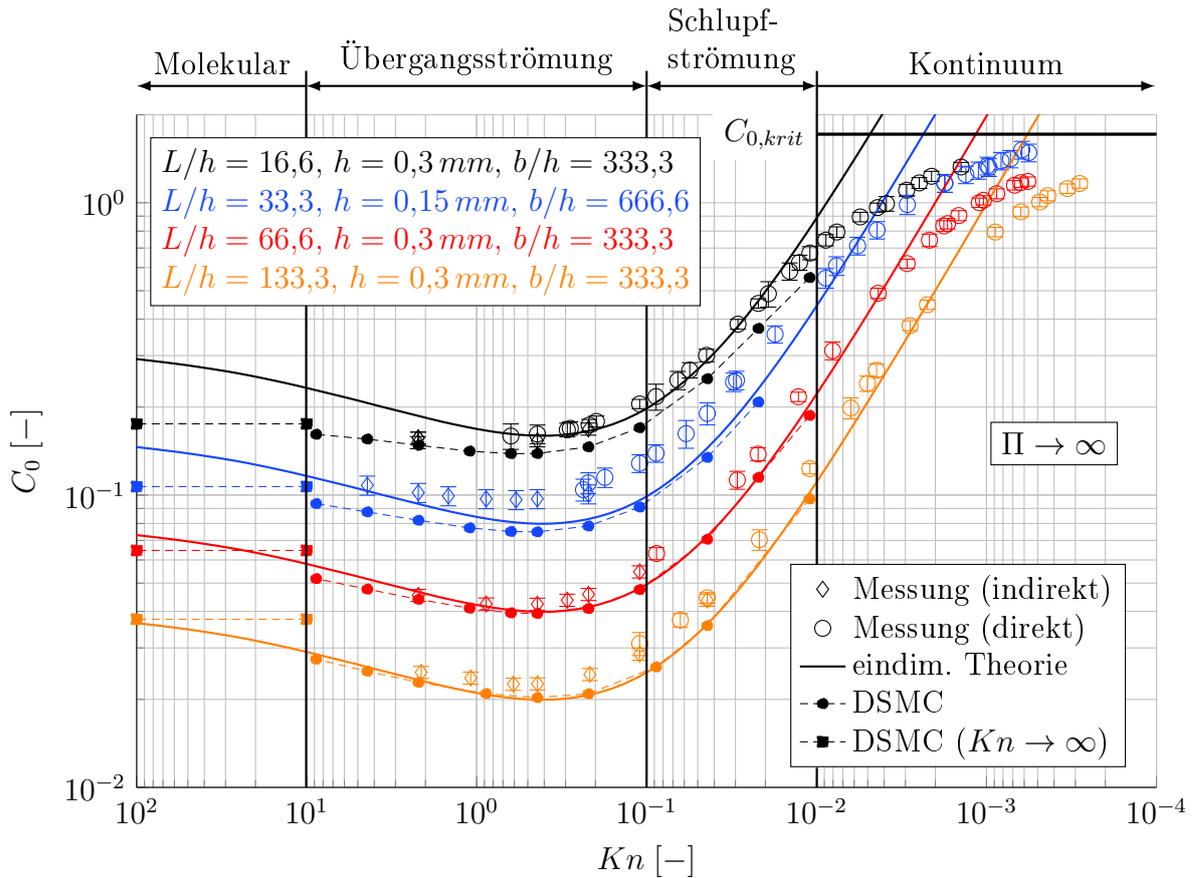


Abbildung 7.11: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Längen zu Höhenverhältnisse  $L/h$

Isentropenexponenten  $\kappa$  des Gases ist.

$$C_{0,krit} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa}{\kappa+1}} \cdot \left(\frac{2}{\kappa+1}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \quad (7.3)$$

Für Luft mit einem Isentropenexponenten von  $\kappa = 1,4$  ergibt sich ein kritischer normierter Massenstrom von  $C_{0,krit} = 1,716$ . Dieser Wert ist für den vorliegenden Fall einer planparallelen Kontur mit großem Druckverhältnis eine gute Abschätzung des oberen Grenzwertes für den normierten Massenstrom bei einer verblockten Strömung. Der kritische normierte Massenstrom  $C_{0,krit}$  wird zusätzlich in Abbildung 7.11 im Bereich der Kontinuumsströmung dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die experimentell ermittelten normierten Massenströme für kleine Knudsenzahlen gegen diesen Grenzwert streben und sich somit einer verblockten Strömung annähern. Mit größeren Knudsenzahlen im Bereich der **Schlupfströmung** lässt sich eine nahezu lineare Abnahme des normierten Massenstroms mit zunehmenden Knudsenzahlen beobachten. Der Einfluss einer kompressiblen Strömung tritt hier in den Hintergrund. Die Zunahme der Knudsenzahl ist gleichbedeutend mit der Abnahme der Reynoldszahl, sodass in diesem Bereich eine

laminare Strömung vorliegt. Durch einen größeren Einfluss der Reibung mit kleineren Reynoldszahlen kommt es zu einer Abnahme des normierten Massenstroms. Bei einer weiteren Erhöhung der Knudsenzahl kommt es erneut zu einem flacheren Verlauf des normierten Massenstroms. Im Bereich der Schlupfströmung kann nicht mehr von einer Haftbedingung der Strömung an den Berandungen ausgegangen werden. Der Schlupf verringert demnach den Einfluss der reibungsbehafteten Strömung. Im Bereich der **Übergangsströmung** kann die Strömung nicht mehr auf Basis eines Kontinuumsansatzes beschrieben werden. Mit größeren Knudsenzahlen verringert sich der Anteil der intermolekularen Wechselwirkung, was wiederum zu größeren normierten Massenströmen führt. Die Übergangsströmung ist deutlich durch das Knudsenminimum gekennzeichnet. Der Grenzfall sehr großer Knudsenzahlen, bei denen keine nennenswerten intermolekularen Wechselwirkungen mehr stattfinden, wird durch die **molekulare Strömung** gekennzeichnet. Bei dieser Strömungsform ist der normierte Massenstrom weitgehend unabhängig von der Knudsenzahl. Moleküle interagieren hier lediglich mit den festen Berandungen.

Die Ergebnisse der experimentellen Untersuchung zeigen, dass der normierte Massenstrom stark vom Längen zu Höhenverhältnis des Spalts abhängt und mit größerem  $L/h$  geringere Werte aufweist. Im Bereich der Kontinuumsströmung, bei sehr kleinen Knudsenzahlen  $Kn < 10^{-3}$ , fällt der Einfluss des Parameters  $L/h$  vergleichsweise geringer aus und nimmt mit steigenden Knudsenzahlen zu. Im Bereich des Knudsenminimums ist die relative Änderung des normierten Massenstroms am größten. Eine größere Spaltlänge führt demnach zu einem stärkeren Drosselverhalten des Spaltes. Bei sehr kleinen Knudsenzahlen, im Bereich der Kontinuumsströmung, liegen große Reynoldszahlen vor (vgl. Gleichung 3.20). Der Einfluss der Reibung und somit der Einfluss des Parameters  $L/h$  auf den normierten Massenstrom ist hier vergleichsweise gering. Im Bereich des Knudsenminimums ist die Strömung stark reibungsbehaftet und der Einfluss des Parameters  $L/h$  ist groß.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Simulationen mit der DSMC-Methode nur für Knudsenzahlen  $Kn > 10^{-2}$  durchgeführt. Die bei geringeren Knudsenzahlen kleineren mittleren freien Weglängen führen zu einer großen Zell- und Teilchenanzahl bei gleichzeitig sehr kleinen Zeitschritten. Der Rechenaufwand wird in diesem Bereich groß. Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der DSMC-Methode und des Experiments zeigt, dass die DSMC-Methode den knudsenzahlabhängigen Verlauf des normierten Massenstroms qualitativ abbilden kann. Für alle Längen zu Höhenverhältnisse zeigt sich jedoch, dass die berechneten Werte des normierten Massenstroms die experimentell ermittelten Werte auch unter Einbeziehung der Messunsicherheit über einen weiten Bereich nicht abbilden können. Eine mögliche Erklärung dieser Abweichungen liefert die Montage des Modells des planparallelen Spaltes. Bei der Montage des Versuchsmodells muss im Besonderen darauf geachtet werden eine Schiefstellung der Kontur zu vermeiden. Diese

führt dazu, dass sich in Strömungsrichtung eine Düse oder ein Diffusor ausbildet. Da zur Einstellung der Spalthöhe Fühlerlehren benutzt werden, entspricht der engste Querschnitt weiterhin der gemessenen Spalthöhe. Bei der Quantifizierung der Messunsicherheit wird die Schiefstellung nicht berücksichtigt, da diese nicht bestimmt werden kann. Die größten Abweichungen treten bei einem Längen zu Höhenverhältnis von  $L/h = 33,3$  auf. Dieses Längen zu Höhenverhältnis wird im Gegensatz zu den übrigen mithilfe einer kleineren Spalthöhe ( $h = 0,15$  mm) ermittelt. Eine mögliche Schiefstellungen besitzt bei kleinerer Spalthöhe einen größeren Einfluss, sodass dies eine mögliche Erklärung für die zu beobachtenden Abweichungen ist. Die DSMC-Methode kann genutzt werden, um den normierten Massenstrom einer vollständig molekularen Strömung zu ermitteln  $Kn \rightarrow \infty$ , indem die intermolekulare Wechselwirkung komplett vernachlässigt wird. Bei kleinen Parametern  $L/h$  kann bei einer Knudsenzahl  $Kn = 10$  von einer molekularen Strömung ausgegangen werden. Hier stimmen die normierten Massenströme der DSMC-Simulationen für die Knudsenzahlen  $Kn = 10$  und  $Kn \rightarrow \infty$  gut überein. Mit zunehmenden Werten des Verhältnisses  $L/h$  wird erst bei größeren Knudsenzahlen der normierte Massenstrom der vollständig molekularen Strömung erreicht.

Ein Vergleich zwischen den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie und den Messungen zeigt eine gute qualitative Abbildung des normierten Massenstroms im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung. Im Bereich der Kontinuumsströmung kann der qualitative Verlauf in Abhängigkeit der Knudsenzahl nicht abgebildet werden. Bei der eindimensionalen Theorie wird abschnittsweise von einer inkompressiblen Strömung für jedes Inkrement ausgegangen. Die Dichte wird unter Vorgabe der Gastemperatur - welche unter der Annahme eines vollständigen Wärmeübergangs der Berandungstemperatur entspricht - für jedes Inkrement angepasst. Eine Verblockung der Strömung kann so durch die eindimensionale Theorie nicht abgebildet werden. Auffällig ist, dass bei einem großen Parameter  $L/h = 133,3$  die eindimensionale Theorie auch noch für den Bereich einer Kontinuumsströmung bei Knudsenzahlen  $Kn < 2 \cdot 10^{-3}$  genutzt werden kann. Bei einer großen Spaltlänge tritt der Einfluss einer kompressiblen Strömung erst bei kleineren Knudsenzahlen auf. Für kleine Längen zu Höhenverhältnisse  $L/h = 16,6$  stimmt die eindimensionale Theorie gut mit dem Experiment überein, zeigt jedoch Abweichungen zu den durch die DSMC-Methode ermittelten Werten. Bei großen Längen zu Höhenverhältnissen  $L/h = 133,3$  zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode und dementsprechend Abweichungen zu den experimentell ermittelten Werten. Bei der eindimensionalen Theorie fehlt die Abbildung der Zu- und Abströmverluste (vgl. Abbildung 7.1). Dies führt bei kleinen Längen zu Höhenverhältnissen dazu, dass im Vergleich zur DSMC-Methode größere normierte Massenströme berechnet werden. Bei großen Längen zu Höhenverhältnissen können die Zu- und Abströmverluste vernachlässigt werden, sodass hier identische normierte Massenströme von eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode berechnet werden. Eine weitere Erläuterung der Abweichungen zwischen eindimensionaler Theo-

rie und DSMC-Methode in Bezug auf unterschiedliche Parameter  $L/h$  findet sich in Kapitel 8.5.

### 7.3.2 Variation des Radius zu Höhenverhältnisses

Eine ausführliche Variation des Radius zu Höhenverhältnisses wird anhand des Spaltmodells mit bewegter Berandung durchgeführt (vgl. Kapitel 7.4.3). Beim Spaltmodell mit statischer Berandung soll daher lediglich ein Radius zu Höhenverhältnis von  $R/h = 200$  betrachtet werden. Der normierte Massenstrom in Abhängigkeit der Knudsenzahl wird in **Abbildung 7.12** gezeigt, wobei Messergebnisse mit den Ergebnissen der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie verglichen werden. Analog zur

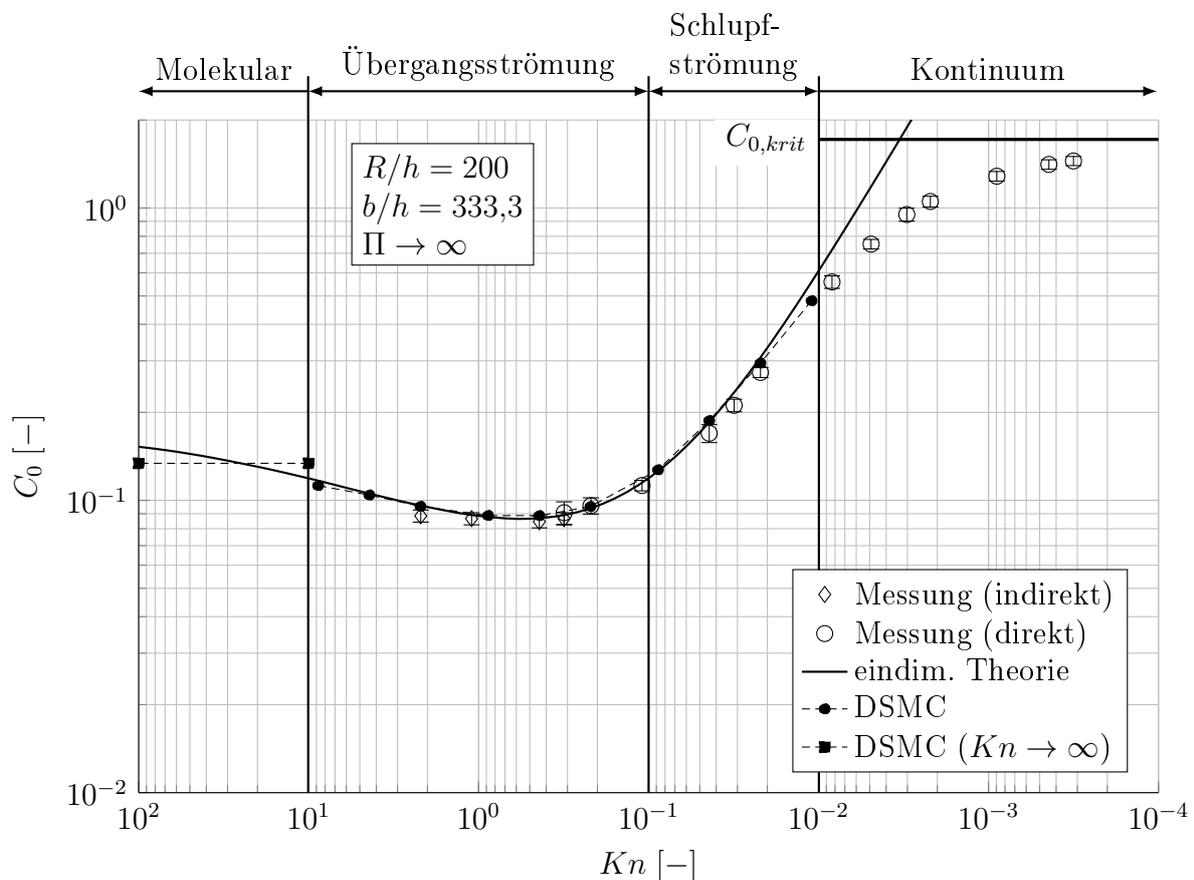


Abbildung 7.12: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für ein Radius zu Höhenverhältnis von  $R/h = 200$

Variation des Längen zu Höhenverhältnisses wird auch hier ein großes Druckverhältnis betrachtet ( $\Pi > 20$ ). Der qualitative Verlauf des normierten Massenstroms als Funktion der Knudsenzahl bei einem Spalt mit veränderlichem Querschnitt stimmt mit den Ergebnissen des planparallelen Spaltes weitgehend überein. Die in Kapitel 7.3.1 durchgeführte Beschreibung der wesentlichen Mechanismen in den verschiedenen Strömungsbereichen kann auch auf einen Spalt mit variablen Querschnitt angewendet

werden. Die Messergebnisse zeigen auch für diesen Fall, dass bei einem Spalt mit variablen Querschnitt und einem großen Druckverhältnis der normierte Massenstrom für kleine Knudsenzahlen gegen den Grenzwert der verblockten Strömung  $C_{0,krit}$  streben.

Simulationen mithilfe der DSMC-Methode ergeben einen normierten Massenstrom, der im Bereich des Knudsenminimums im Rahmen der Messgenauigkeit mit den experimentellen Ergebnissen übereinstimmt. Sowohl im Bereich großer Knudsenzahlen  $Kn > 1$  als auch kleiner Knudsenzahlen  $Kn < 0,1$  ist die relative Abweichung zwischen DSMC-Methode und Experiment kleiner als 8%.

Die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie zeigen ebenfalls eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung. Abweichungen im Bereich der Kontinuumsströmung lassen sich durch die fehlende Berücksichtigung einer kompressiblen Strömung bei der eindimensionalen Theorie erklären.

Im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung stimmen die mit der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie ermittelten normierten Massenströme bis auf 2% überein. Bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,01$  kann eine größere Abweichung festgestellt werden. In diesem Bereich ist der Einfluss einer kompressiblen Strömung ersichtlich, der durch die DSMC-Methode erfasst werden kann. Weiterhin lässt sich eine größere Abweichung bei sehr großen Knudsenzahlen beobachten. Die Simulation einer freien molekularen Strömung ( $Kn \rightarrow \infty$ ) mithilfe der DSMC-Methode weist eine relative Abweichung von 15% zum normierten Massenstrom der eindimensionalen Theorie auf. Die Approximation des Radiusspaltes über Inkremente konstanten Querschnitts bei der eindimensionalen Theorie führt bei sehr großen Knudsenzahlen zu Abweichungen im Vergleich zur DSMC-Methode. Eine weitere Untersuchung zum Einfluss des Radius zu Höhenverhältnisses auf die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie findet sich in Kapitel 8.6.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass es bei der Betrachtung eines Radiusspaltes zu einer insgesamt besseren Übereinstimmung zwischen Experiment und DSMC-Methode kommt. Es ist zu erwarten, dass eine mögliche Schiefstellung der Kontur beim Radiusspalt einen geringeren Einfluss auf den normierten Massenstrom als beim planparallelen Spalt besitzt.

### 7.3.3 Variation des Druckverhältnisses

Neben der Variation geometrischer Parameter wird im Folgenden eine Variation des am Spalt anliegenden Druckverhältnisses durchgeführt. Beim Spaltmodell mit statischer Berandung wird die indirekte Messung mithilfe der Druckanstiegmessung zur Ermittlung der vom Druckverhältnis abhängigen normierten Massenströme genutzt. Bei dieser Methode kann mit nur einem Messvorgang ein gesamtes Kennfeld des Druck-

verhältnisses erfasst werden. **Abbildung 7.13** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion des Druckverhältnisses für einen Spalt mit einem Längen zu Höhenverhältnis  $L/h = 66,6$ . Es werden die experimentellen und theoretischen normierten Massen-

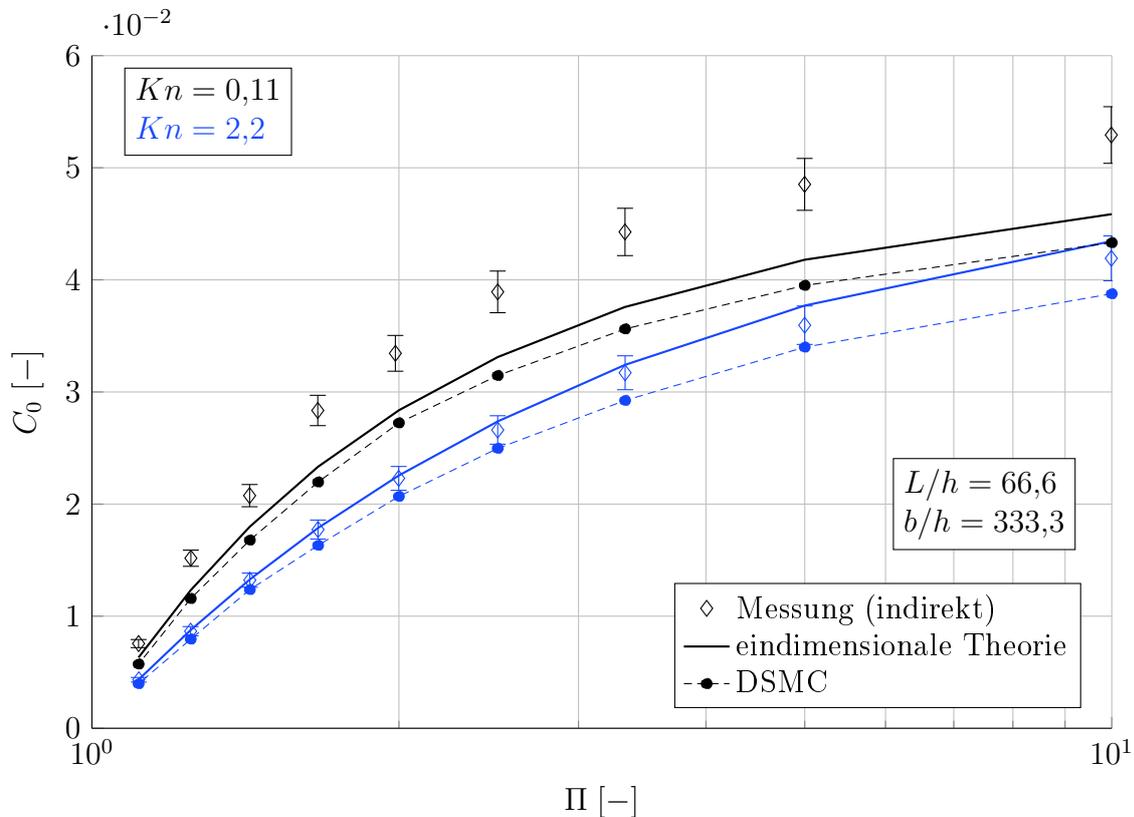


Abbildung 7.13: Normierter Massenstrom als Funktion des Druckverhältnisses für verschiedene Knudsenzahlen des planparallelen Spaltes.

ströme mittels DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie für zwei beispielhafte Knudsenzahlen  $Kn = 0,11$  und  $Kn = 2,2$  gezeigt.

Die DSMC-Methode kann die qualitativen Verläufe des normierten Massenstroms bei der Knudsenzahlen abbilden. Der normierte Massenstrom nimmt mit steigendem Druckverhältnis zu. Bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,11$  stellt sich ein insgesamt größerer normierter Massenstrom ein, als bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 2,2$ . Unabhängig von Druckverhältnis und Knudsenzahl lässt sich jedoch beobachten, dass im Vergleich zum Experiment kleinere normierte Massenströme durch die DSMC-Methode ermittelt werden. Dies bestätigt die Beobachtungen aus Abbildung 7.11. Auch bei der Variation des Druckverhältnisses können die Abweichungen zwischen den Messergebnissen und der DSMC-Methode nur durch eine mögliche Schiefstellung der Kontur erklärt werden. Hierdurch bildet sich eine Düse oder ein Diffusor in Strömungsrichtung aus, was zu insgesamt größeren Massenströmen im Experiment führt.

Die durch die eindimensionale Theorie berechneten normierten Massenströme stimmen für eine Knudsenzahl von  $Kn = 2,2$  über einen weiten Bereich des Druckverhältnisses

im Rahmen der Messgenauigkeit mit den experimentellen Ergebnissen überein. Bei einer kleineren Knudsenzahl von  $Kn = 0,11$  zeigen sich jedoch Abweichungen zwischen eindimensionaler Theorie und Experiment. Die Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode ist insgesamt gut. Die eindimensionale Theorie liefert insgesamt größere normierte Massenströme im Vergleich zur DSMC-Methode. Dies kann durch die fehlende Abbildung der Zu- und Abströmverluste bei der eindimensionalen Theorie erklärt werden. Die relative Abweichung zwischen beiden Simulationsergebnissen beträgt im Maximum jedoch nur ca. 10%.

Im Weiteren wird der normierte Massenstrom als Funktion des Druckverhältnisses beim Radiusspalt untersucht. Hierzu wird ein Radius zu Höhenverhältnis von  $R/h = 200$  bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,44$  gewählt. **Abbildung 7.14** zeigt die Ergebnisse der experimentellen Untersuchung sowie beider theoretischer Ansätze.

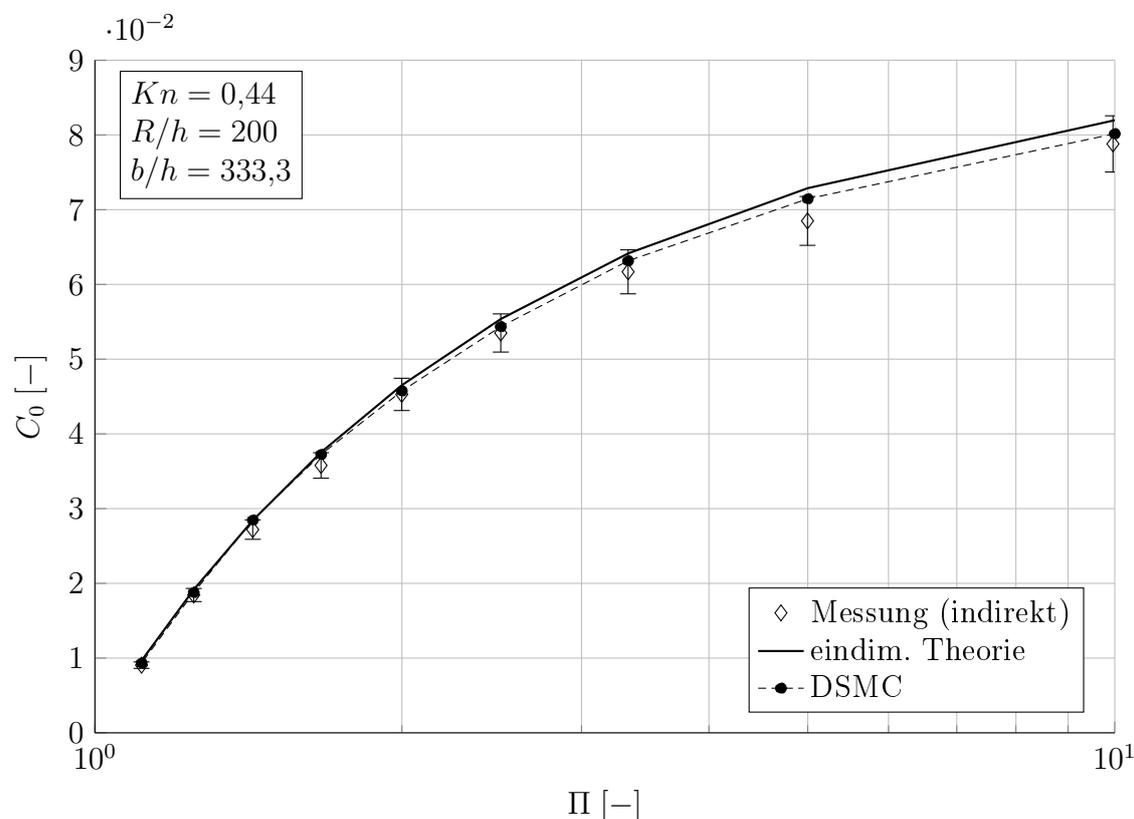


Abbildung 7.14: Normierter Massenstrom als Funktion des Druckverhältnisses des Radiusspaltes

Die mithilfe der DSMC-Methode ermittelten normierten Massenströme stimmen über den gesamten Bereich des Druckverhältnisses im Rahmen der Messgenauigkeit mit den experimentellen Werten überein. Verglichen mit der DSMC-Methode ergibt sich mithilfe der eindimensionalen Theorie ein größerer normierter Massenstrom über den gesamten Bereich des Druckverhältnisses, der jedoch auch, mit Ausnahme des Druckverhältnisses  $\Pi = 5$ , im Rahmen der Messgenauigkeit mit den experimentellen Ergebnissen

übereinstimmt. Auch bei der Variation des Druckverhältnisses beim Radiusspalt ist zu erwarten, dass eine mögliche Schiefstellung der Kontur nur einen geringen Einfluss auf die Messergebnisse besitzt.

### 7.3.4 Variation des Breiten zu Höhenverhältnisses

Beide vorgestellten Spaltmodelle zur experimentellen Ermittlung des Spaltmassenstroms sind lediglich zur Untersuchung der Strömung bei großen Breiten zu Höhenverhältnisse  $b/h$  vorgesehen. Um eine experimentelle Validierung bei kleineren Werten dieses geometrischen Parameters durchführen zu können muss auf Literaturquellen zurück gegriffen werden. Pitakarnnop et al. [Pit+10] messen den Massenstrom in Mikrokanälen mit einem Breiten zu Höhenverhältnis von  $b/h = 11,3$  und einem Längen zu Höhenverhältnis von  $L/h = 2660$ . Zur Verbesserung der Messunsicherheit werden 45 parallel geschaltete Mikrokanäle betrachtet. Die experimentellen Untersuchungen werden mit Helium und Argon durchgeführt.

**Abbildung 7.15** vergleicht die durch Pitakarnnop et al. [Pit+10] gefundenen experimentellen normierten Massenströme mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie. Zusätzlich wird das Druckverhältnis mit angegeben, das in Abhängigkeit der Knud-

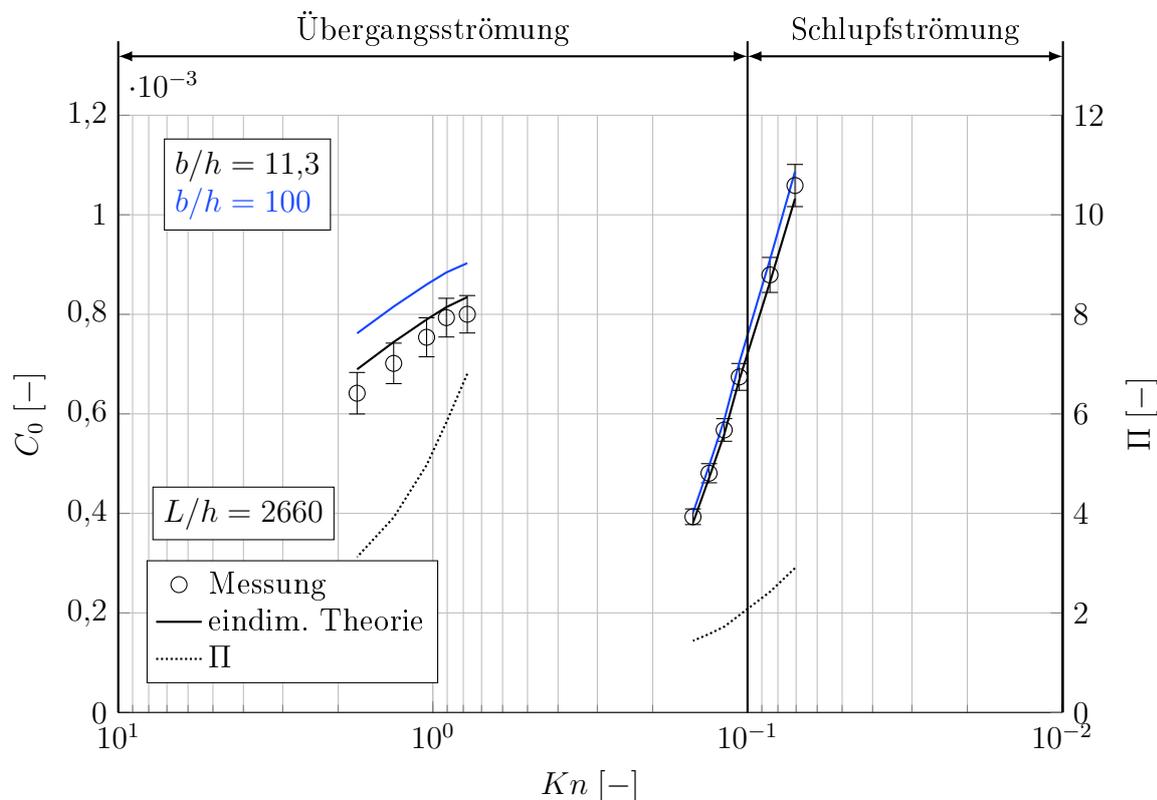


Abbildung 7.15: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl bei variablen Druckverhältnissen  $\Pi$  für Helium. Die Messwerte wurden durch Pitakarnnop et al. ermittelt [Pit+10] und mit den Simulationsergebnissen der eindimensionalen Theorie verglichen.

senzahl variiert. Um den Einfluss des endlichen Breiten zu Höhenverhältnisses zu demonstrieren, wird mithilfe der eindimensionalen Theorie der normierte Massenstrom bei einem Breiten zu Höhenverhältnis  $b/h = 100$  berechnet und mit dargestellt. Aus Gründen der Rechenzeiten werden keine Simulationen mithilfe der DSMC-Methode bei endlichen Breiten zu Höhenverhältnissen durchgeführt. Die Messungen bei kleinen Knudsenzahlen im Bereich  $0,07 < Kn < 0,15$  werden bei vergleichsweise kleinen Druckverhältnissen im Bereich  $1,4 < \Pi < 2,9$  durchgeführt. Bei größeren Knudsenzahlen werden größere Druckverhältnisse im Bereich  $3,1 < \Pi < 6,8$  vermessen, weshalb die normierten Massenströme hier vergleichsweise groß ausfallen. Die berechneten normierten Massenströme mithilfe der eindimensionalen Theorie decken sich über den gesamten Bereich der Knudsenzahl mit den experimentell ermittelten Werten. Lediglich bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 1,7$  kommt es zu einer kleinen Abweichung im Bereich von 7%.

Die Simulationsergebnisse bei einem Breiten zu Höhenverhältnis von  $b/h = 100$  geben einen Hinweis auf den Einfluss der endlichen Spaltbreite. Bei kleinen Knudsenzahlen fällt dieser vergleichsweise gering aus und liegt bei einer relativen Änderung des normierten Massenstroms von maximal 4%. Mit zunehmender Knudsenzahl nimmt der Einfluss der Spaltbreite zu und kann im vorliegenden Fall bis zu 19% betragen.

## 7.4 Ergebnisse der bewegten Berandung

Ziel dieses Kapitels ist die Verifikation der durch die DSMC-Methode und durch die eindimensionale Theorie berechneten normierten Massenströme mit experimentellen Ergebnissen, die mithilfe des Spaltmodells mit bewegter Berandung ermittelt werden (vgl. Kapitel 6.3). Mithilfe dieses Versuchsaufbaus kann die kombinierte Betrachtung einer Couette-Poiseuille-Strömung ( $u_0 \neq 0$ ) durchgeführt werden. Der Einfluss einer von außen aufgeprägten thermischen Kriechströmung wird weiterhin nicht betrachtet ( $T_E/T_A = 1$ ).

### 7.4.1 Variation der normierten Berandungsgeschwindigkeit

Eine Variation der Drehzahl des in Abbildung 6.8 gezeigten Aufbaus kann dazu genutzt werden, um den Spaltmassenstrom für verschiedene normierte Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0$  zu ermitteln.

**Abbildung 7.16** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene normierte Berandungsgeschwindigkeiten. Um die logarithmische Darstellung des normierten Massenstroms bei negativen Werten weiterhin nutzen zu können, werden im Folgenden - wenn notwendig - zweigeteilte Diagramme genutzt. Die y-Achse weist hierbei zwei Bereiche auf. Einen linearen Achsenabschnitt, im Bereich um den Wert null, und im übrigen Bereich eine logarithmische Einteilung. Beide Bereiche werden in Abbildung 7.16 gekennzeichnet. Für alle weiteren Diagramme mit

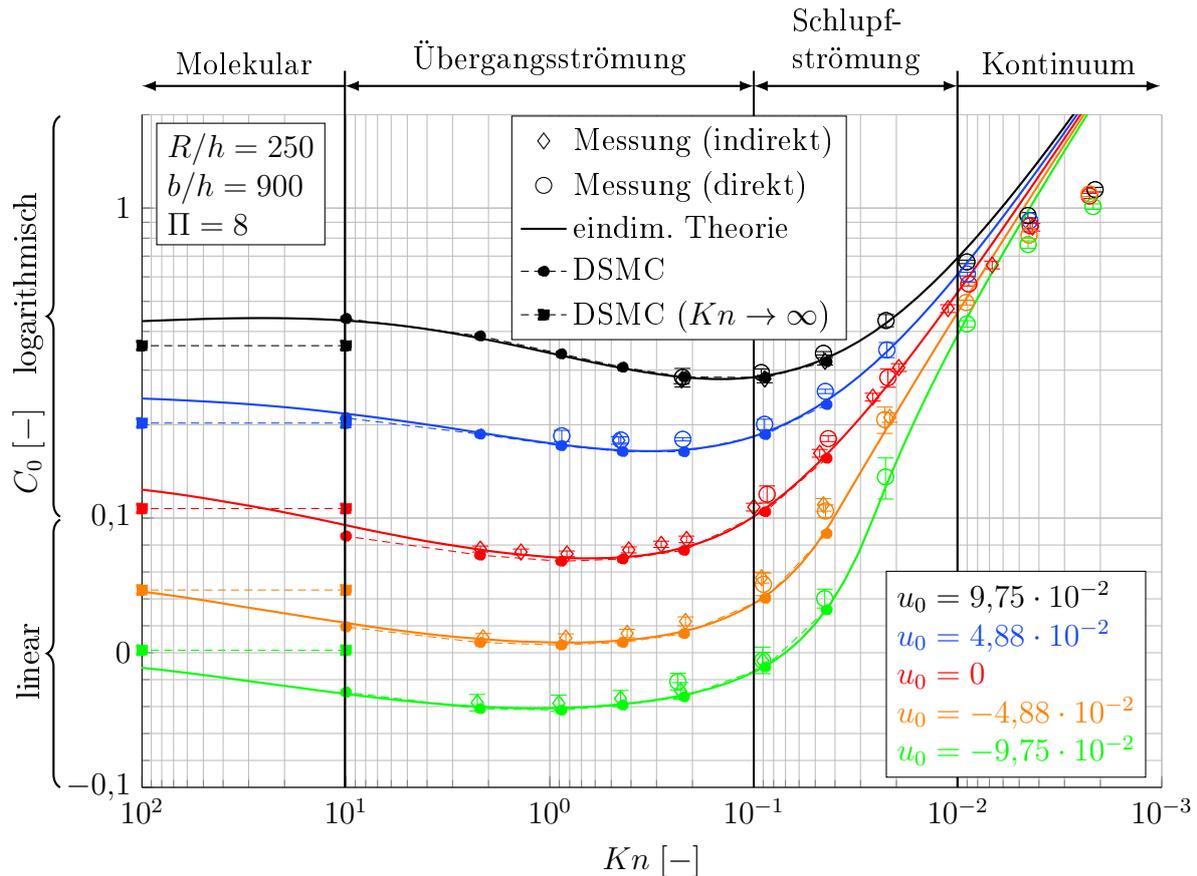


Abbildung 7.16: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene normierte Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0$ .

dieser Eigenschaft entfällt diese Kennzeichnung. Das Druckverhältnis beträgt  $\Pi = 8$ . Die geometrischen Parameter betragen  $R/h = 250$  und  $b/h = 900$ . Es wird sowohl eine positive als auch eine negative normierte Berandungsgeschwindigkeit betrachtet, die ausgehend von der stehenden Berandung  $u_0 = 0$  in zwei Schritten über  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$  ( $u_B = 20 \text{ m/s}$  bei Luft mit einer Temperatur von  $293,15 \text{ K}$ ) und  $u_0 = 9,75 \cdot 10^{-2}$  ( $u_B = 40 \text{ m/s}$  bei Luft mit einer Temperatur von  $293,15 \text{ K}$ ) in beide Drehrichtungen variiert wird. Die Messergebnisse zeigen, dass ausgehend von der stehenden Berandung eine positive Berandungsgeschwindigkeit eine Erhöhung des normierten Massenstroms und eine negative Berandungsgeschwindigkeit eine Verringerung des normierten Massenstroms zur Folge hat. Der Einfluss der bewegten Berandung steigt dabei mit dem Betrag der Umfangsgeschwindigkeit. Im Bereich der Kontinuumsströmung besitzt die bewegte Berandung aufgrund des großen Druckverhältnisses nur einen kleinen Einfluss auf den normierten Massenstrom. Mit größeren Knudsenzahlen nimmt dieser im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung zu. Die Strömung wird hier aufgrund der kleinen Reynoldszahlen durch den Einfluss der Reibung bestimmt. Couette- und Poiseuille-Anteile der Strömung liegen hier in ähnlichen Größenordnungen. Für die positiven Berandungsgeschwindigkeiten kann aufgrund der Grenzen der Vakuumpumpen

bei großen Knudsenzahlen ein Druckverhältnis von  $\Pi = 8$  nicht eingestellt werden, sodass hier keine Messungen durchgeführt werden können. Die Messungen zeigen weiterhin, dass eine negative Berandungsgeschwindigkeit, trotz des großen Druckverhältnisses, zu einem negativen Massenstrom führen kann. Dies tritt bei einer normierten Berandungsgeschwindigkeit von  $u_0 = -9,75 \cdot 10^{-2}$  für Knudsenzahlen  $Kn > 7 \cdot 10^{-2}$  auf. In diesem Bereich kommt es zu einem Massenstrom entgegen des Druckgefälles.

Der Vergleich der experimentell ermittelten normierten Massenströme mit denen der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie zeigt eine sehr gute Übereinstimmung im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung. Im Bereich der Kontinuumsströmung kann die eindimensionale Theorie aufgrund der fehlenden Berücksichtigung der Kompressibilität den Verlauf des normierten Massenstroms nicht abbilden. Geringe Abweichungen, die nicht im Rahmen der Messgenauigkeit liegen, ergeben sich für die stehende Berandung und kleine normierte Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0 = \pm 4,88 \cdot 10^{-2}$  im Bereich  $4 \cdot 10^{-2} < Kn < 1$ . Hier ist der normierte Massenstrom beider Theorien unterhalb der Ergebnisse der experimentellen Untersuchung.

Ein Vergleich von DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie zeigt eine sehr gute Übereinstimmung für alle Berandungsgeschwindigkeiten. Kleine Abweichungen lassen sich bei der stehenden Berandung und sehr großen Knudsenzahlen  $Kn > 2$  feststellen. Diese Beobachtung deckt sich mit den Ergebnissen des Radiusspaltes mit statischer Berandung (vgl. Abbildung 7.12). Auch hier zeigt sich, dass bei der eindimensionalen Theorie die Approximation des Radiusspaltes über Inkremente konstanten Querschnitts bei großen Knudsenzahlen zu einem Fehler führen. Dies betrifft im Besonderen die Poiseuille-Strömung, da die Abweichungen zwischen DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie mit steigender Berandungsgeschwindigkeit abnimmt. Ein Vergleich der Simulationsergebnisse mittels DSMC-Methode bei einer Knudsenzahl  $Kn = 10$  mit den Simulationen einer freien molekularen Strömung  $Kn \rightarrow \infty$  zeigt, dass eine freie molekulare Strömung erst bei sehr großen Knudsenzahlen erreicht wird. Bei einer stehenden Berandung und bei negativen normierten Berandungsgeschwindigkeiten liegt der normierte Massenstrom, der bei einer Knudsenzahl  $Kn = 10$  berechnet wird, unterhalb der Ergebnisse der freien molekularen Strömung. Bei positiven normierten Wandgeschwindigkeiten liegt der normierte Massenstrom bei einer Knudsenzahl  $Kn = 10$  oberhalb der Ergebnisse der freien molekularen Strömung. Hieraus entsteht ein lokales Maximum des normierten Massenstroms bei positiven Berandungsgeschwindigkeiten und Knudsenzahlen  $Kn > 10$ .

## 7.4.2 Variation des Druckverhältnisses

Nachfolgend soll der Einfluss des Druckverhältnisses auf den Spaltmassenstrom im Kontext unterschiedlicher Berandungsgeschwindigkeiten untersucht werden. Die möglichen Kombinationen aus Berandungsgeschwindigkeit und Druckverhältnis werden durch die

Möglichkeiten der Messtechnik und des Versuchsaufbaus festgelegt, sodass nicht alle Kombinationen untersucht werden können. In diesem Kapitel sind die geometrischen Parameter zu  $R/h = 250$  und  $b/h = 900$  festgelegt.

**Abbildung 7.17** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl bei einer stehenden Berandung und den Druckverhältnissen  $\Pi = 6$  und  $\Pi = 10$ . Die Mess-

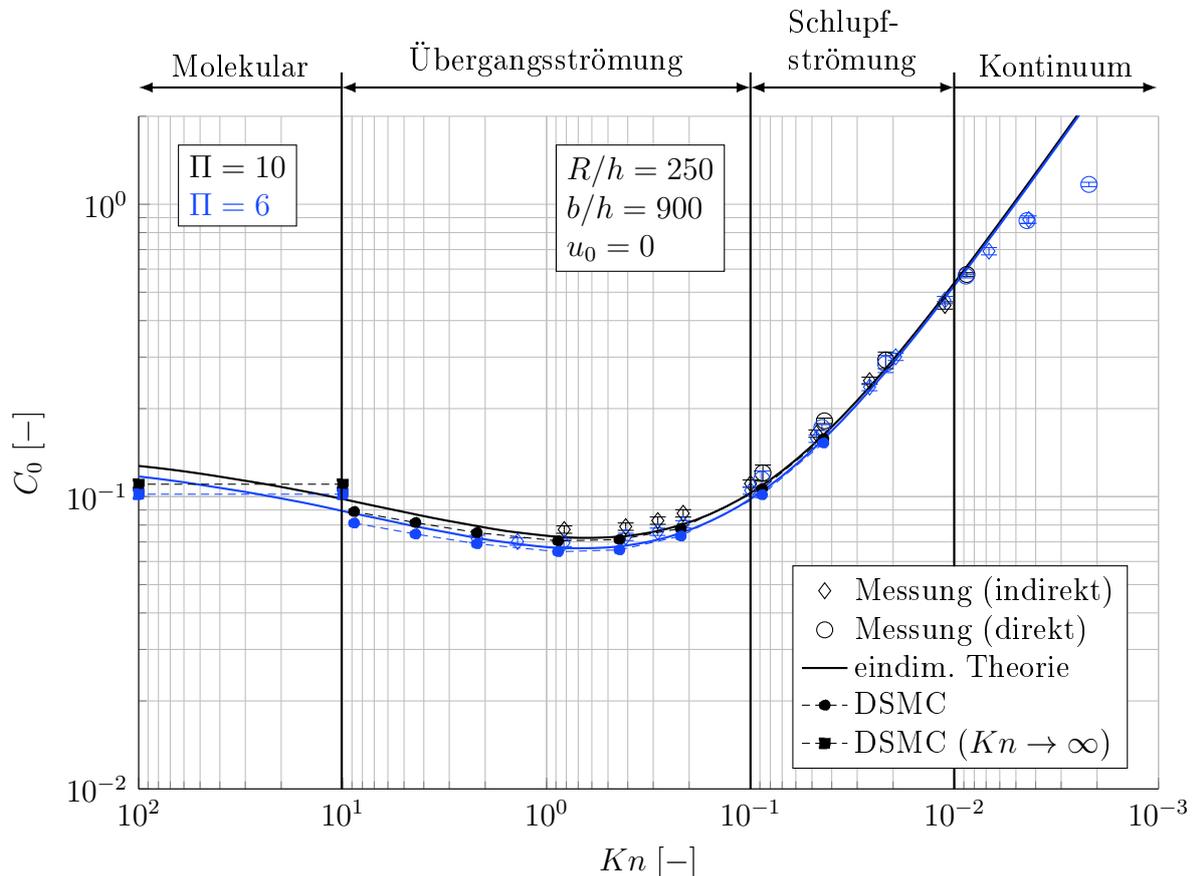


Abbildung 7.17: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  bei stehender Berandung  $u_0 = 0$ .

ergebnisse zeigen, dass eine Erhöhung des Druckverhältnisses in diesem Bereich einen geringen Einfluss auf den normierten Massenstrom in der Übergangs- und Schlupfströmung besitzt. Im Bereich der Kontinuumsströmung hat die Änderung des Druckverhältnisses keinen weiteren Einfluss auf den Massenstrom, was aufgrund einer verblockten Strömung zu erwarten ist.

Sowohl die Ergebnisse der DSMC-Methode als auch der eindimensionalen Theorie bilden den knudsenzahlabhängigen Verlauf des normierten Massenstroms gut ab. Im Vergleich zur Messung liegen auch hier die normierten Massenströme beider Theorien bei etwas geringeren Werten. Im Bereich der Schlupfströmung kann der geringe Unterschied im normierten Massenstrom in Abhängigkeit beider Druckverhältnisse gut abgebildet werden. Die Übereinstimmung zwischen DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie

ist in diesem Bereich sehr gut. Im Bereich der Übergangsströmung zeigt sich zunehmend eine Abweichung zwischen beiden Theorien, was erneut durch die Approximation des Radiusspaltens durch Inkremente konstanten Querschnitts bei der eindimensionalen Theorie erklärt werden kann. Dies ist auch für den Bereich der molekularen Strömung zu beobachten, sodass sich bei den hier gezeigten Druckverhältnissen für die normierten Massenströme der DSMC-Methode einer vollständig molekularen Strömung  $Kn \rightarrow \infty$  geringerer Werte im Vergleich zur eindimensionalen Theorie ergeben.

**Abbildung 7.18** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse bei einer normierten Berandungsgeschwindigkeit von  $u_0 = \pm 2,44 \cdot 10^{-2}$ . Analog zu den gezeigten Ergebnissen der stehenden Beran-

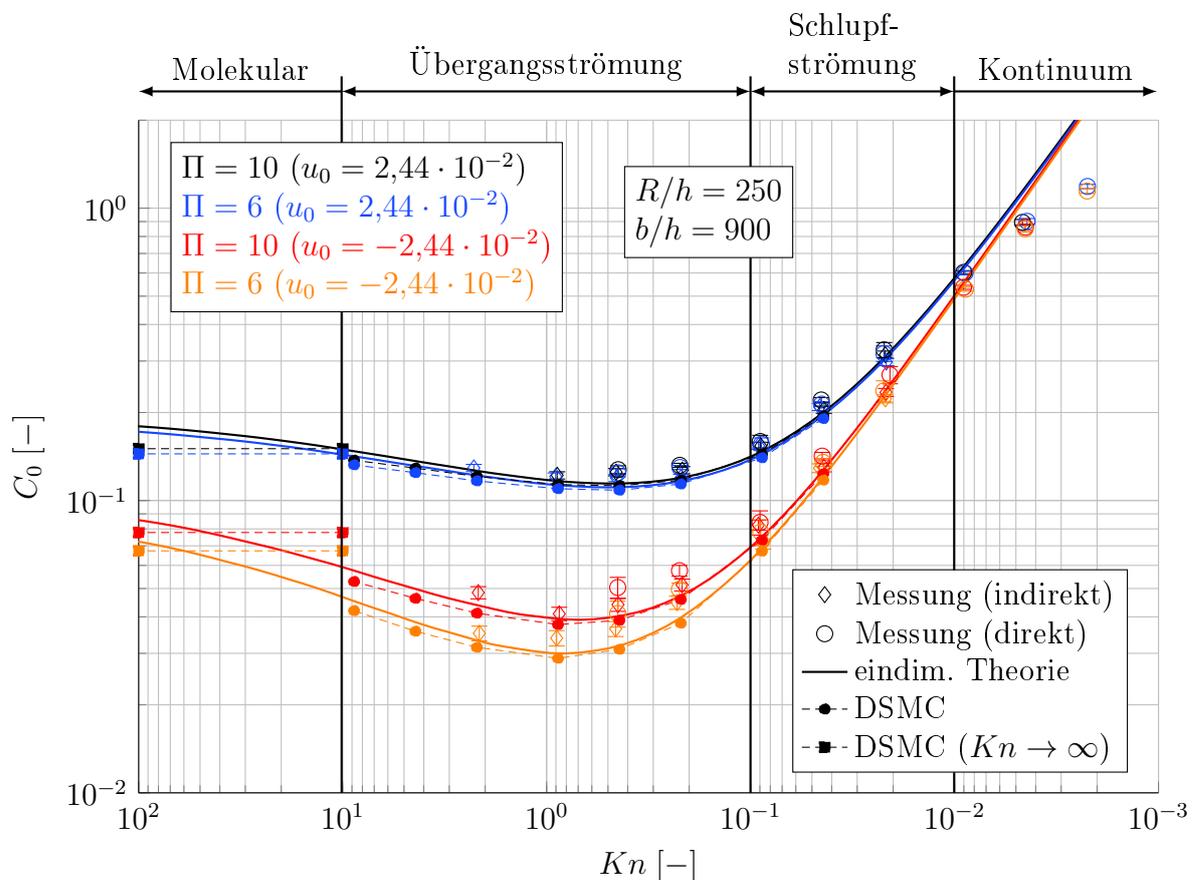


Abbildung 7.18: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  bei bewegter Berandung  $u_0 = \pm 2,44 \cdot 10^{-2}$ .

dung werden auch hier zwei Druckverhältnisse  $\Pi = 6$  und  $\Pi = 10$  betrachtet. Bei einer positiven Berandungsgeschwindigkeit zeigt sich ein im Vergleich zur stehenden Berandung größerer normierter Massenstrom für beide Druckverhältnisse, was durch den Couette-Anteil der Strömung in Strömungsrichtung der Poiseuille-Strömung zu erklären ist. Die Messergebnisse zeigen, dass bei einer verhältnismäßig geringen positiven normierten Wandgeschwindigkeit von  $u_0 = 2,44 \cdot 10^{-2}$  schon ein deutlicher Einfluss

auf den normierten Massenstrom zu beobachten ist. Eine Änderung des Druckverhältnisses von  $\Pi = 6$  auf  $\Pi = 10$  besitzt dagegen nur einen sehr geringen Einfluss auf die kombinierte Couette-Poiseuille-Strömung. Die Betrachtung einer negativen Berandungsgeschwindigkeit zeigt eine deutliche Verringerung des normierten Massenstroms im Vergleich zur stehenden Berandung, da die Couette-Strömung hier der Poiseuille-Strömung entgegengesetzt ist. Aufgrund der negativen Drehrichtung hängt der Anteil der Couette-Strömung hier vom Zustand des Gases auf der Austrittsseite des Spaltes ab. Dieser Anteil ändert sich mit der Betrachtung unterschiedlicher Druckverhältnisse, sodass hier ein deutlicherer Einfluss auf den normierten Massenstrom beobachtet werden kann.

Ein Vergleich beider Theorien mit den Messergebnissen zeigt auch hier eine insgesamt gute Übereinstimmung. Analog zu den Ergebnissen der stehenden Berandung fallen die ermittelten normierten Massenströme beider Theorien im Vergleich zu den Messungen tendenziell geringer aus. Dies gilt sowohl für eine positive als auch für eine negative Berandungsgeschwindigkeit. Der Vergleich der Ergebnisse der DSMC-Methode mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie zeigt auch bei einer bewegten Berandung, unabhängig vom Druckverhältnis, im Bereich der Schlupfströmung eine gute Übereinstimmung. Mit größeren Knudsenzahlen kann eine zunehmende Abweichung zwischen beiden Theorien beobachtet werden. Auch hier weisen die berechneten normierten Massenströme einer freien molekularen Strömung der DSMC-Methode geringere Werte auf, als die durch die eindimensionale Theorie ermittelten Werte. Die Approximation des Radiuspaltes in Inkremente konstanten Querschnitts bei der eindimensionalen Theorie können als Fehlerursache genannt werden.

Im Folgenden sollen betragsmäßig größere normierte Umfangsgeschwindigkeiten betrachtet werden. Bei einem zunehmenden Couette-Anteil der Strömung bietet sich die Betrachtung kleinerer Druckverhältnisse an. **Abbildung 7.19** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl bei einer normierten Wandgeschwindigkeit von  $u_0 = \pm 4,88 \cdot 10^{-2}$ . Hierbei wird das Druckverhältnis in drei Schritten von  $\Pi = 1$  über  $\Pi = 1,3$  bis  $\Pi = 6$  variiert.

Bei einer positiven Berandungsgeschwindigkeit kann anhand der Messergebnisse beobachtet werden, dass eine Variation des Druckverhältnisses für eine Kontinuumsströmung einen großen Einfluss auf den normierten Massenstrom besitzt. Bei kleinen Knudsenzahlen wird die Strömung durch den Poiseuille-Anteil maßgeblich dominiert. Eine Reduzierung des am Spalt angelegten Druckverhältnisses verringert entsprechend den normierten Massenstrom, wobei der Einfluss der bewegten Berandung nur untergeordnet ist. Im Bereich der Schlupfströmung verringern sich die Unterschiede des normierten Massenstroms in Abhängigkeit des Druckverhältnisses und verschwinden nahezu im Bereich der Übergangsströmung. Mit zunehmender Knudsenzahl nimmt der Einfluss des Poiseuille-Anteils der Strömung ab, was die geringen Unterschiede im normierten

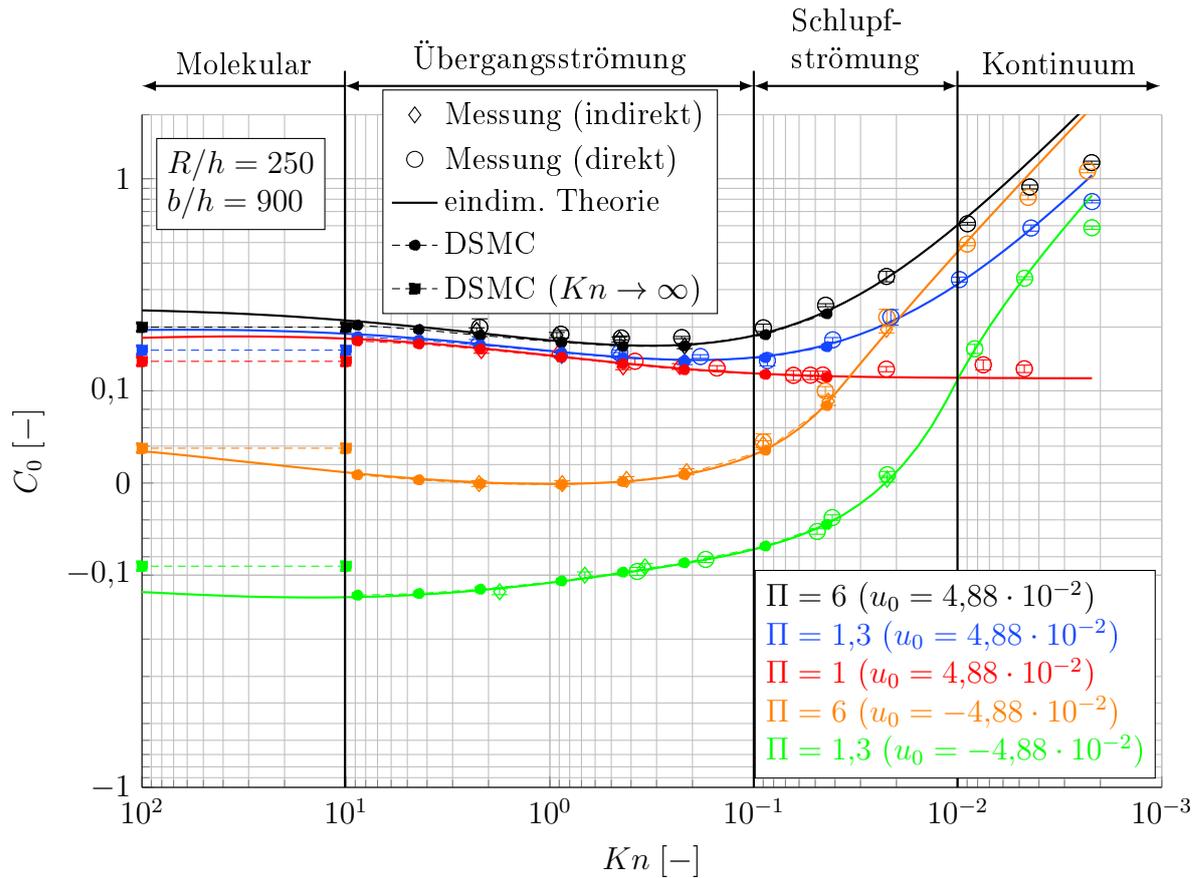


Abbildung 7.19: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  bei bewegter Berandung  $u_0 = \pm 4,88 \cdot 10^{-2}$ .

Massenstrom erklärt.

Bei einer negativen Berandungsgeschwindigkeit lässt sich anhand der Messergebnisse im Bereich der Kontinuumsströmung ein ähnlicher Einfluss des Druckverhältnisses auf den normierten Massenstrom beobachten. Eine Verringerung des Druckverhältnisses führt zu geringeren normierten Massenströmen. Aufgrund des großen Einflusses der Poiseuille-Strömung kann bei kleinen Knudsenzahlen und einem Druckverhältnis von  $\Pi = 1,3$  trotz einer negativen Berandungsgeschwindigkeit noch ein positiver normierter Massenstrom im Bereich der Kontinuumsströmung beobachtet werden. Mit steigenden Knudsenzahlen verringert sich der Einfluss der Poiseuille-Strömung und der normierte Massenstrom nimmt im Bereich der Schlupfströmung für ein Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  negative Werte an. Im Gegensatz zu positiven Berandungsgeschwindigkeiten hat das Druckverhältnis einen deutlichen Einfluss auf den normierten Massenstrom im Bereich der Übergangsströmung, wenn eine negative Berandungsgeschwindigkeit betrachtet wird. Dies lässt sich auf veränderte Randbedingungen zurück führen. Bei einer negativen Berandungsgeschwindigkeit wird der Couette-Anteil der Strömung durch den Gaszustand der Austrittsseite bestimmt, der bei einer Variation des Druckverhält-

nisses verändert wird. Eine Vergrößerung des Druckverhältnisses führt demnach zu einer Verringerung des Couette-Anteils der Strömung.

Ein Vergleich der berechneten normierten Massenströme beider Theorien mit den experimentellen Ergebnissen zeigt insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung. Bei der Betrachtung kleinerer Druckverhältnisse fällt insbesondere auf, dass die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie auch im Bereich der Kontinuumsströmung eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten aufweisen. Bei kleinen Druckverhältnissen besitzt die Kompressibilität des Gases erst bei kleineren Knudsenzahlen einen relevanten Einfluss auf die Strömung, sodass die Annahmen der eindimensionalen Theorie hier noch Gültigkeit besitzen. Der Vergleich zwischen den Ergebnissen der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie zeigt insgesamt eine hervorragende Übereinstimmung, auch für große Knudsenzahlen im Bereich der Übergangsströmung. Lediglich die Simulationen der vollständig molekularen Strömung mithilfe der DSMC-Methode ( $Kn \rightarrow \infty$ ) zeigen weiterhin Abweichungen im Vergleich zu den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie.

**Abbildung 7.20** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  und eine normierte Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = \pm 9,75 \cdot 10^{-2}$ . Es werden kleine Druckverhältnisse  $\Pi = 1$  und  $\Pi = 1,3$  betrachtet. Aufgrund von Einschränkungen der Vakuumpumpen wird bei einer positiven Berandungsgeschwindigkeit zusätzlich ein Druckverhältnis von  $\Pi = 4$  und bei einer negativen Berandungsgeschwindigkeit  $\Pi = 10$  gezeigt. Insgesamt ergeben sich vergleichbare Ergebnisse zu Abbildung 7.19. Bei einer positiven Bewegungsrichtung der Berandung und kleinen Knudsenzahlen zeigen die Messergebnisse einen großen Einfluss des Poiseuille-Anteils der Strömung (Bereich der Kontinuums- und Schlupfströmung). Hier führt eine Änderung des Druckverhältnisses zu einer nennenswerten Änderung des normierten Massenstroms. Im Bereich der Übergangsströmung kann nahezu kein Einfluss des Druckverhältnisses auf den normierten Massenstrom beobachtet werden. In diesem Bereich wird die Strömung im Wesentlichen durch den Couette-Anteil beeinflusst. Bei einer negativen Berandungsgeschwindigkeit lässt sich ein Einfluss des Druckverhältnisses über den gesamten Bereich der Gasverdünnung beobachten. Hier wird die Couette-Strömung durch den Gaszustand am Austritt bestimmt, sodass ein kleineres Druckverhältnis zu insgesamt geringeren normierten Massenströmen führt.

Der Vergleich zwischen den experimentellen Ergebnissen und beiden Theorien zeigt auch bei der vorliegenden normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = \pm 9,75 \cdot 10^{-2}$  sehr gute Übereinstimmungen. Im Bereich der Kontinuumsströmung kann festgestellt werden, dass die eindimensionale Theorie mit abnehmenden Druckverhältnis auch noch bei sehr kleinen Knudsenzahlen genutzt werden kann, da die Kompressibilität der Strömung einen kleineren Einfluss besitzt. Im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung wird der normierte Massenstrom in Abhängigkeit des Druckverhältnisses sehr gut abge-

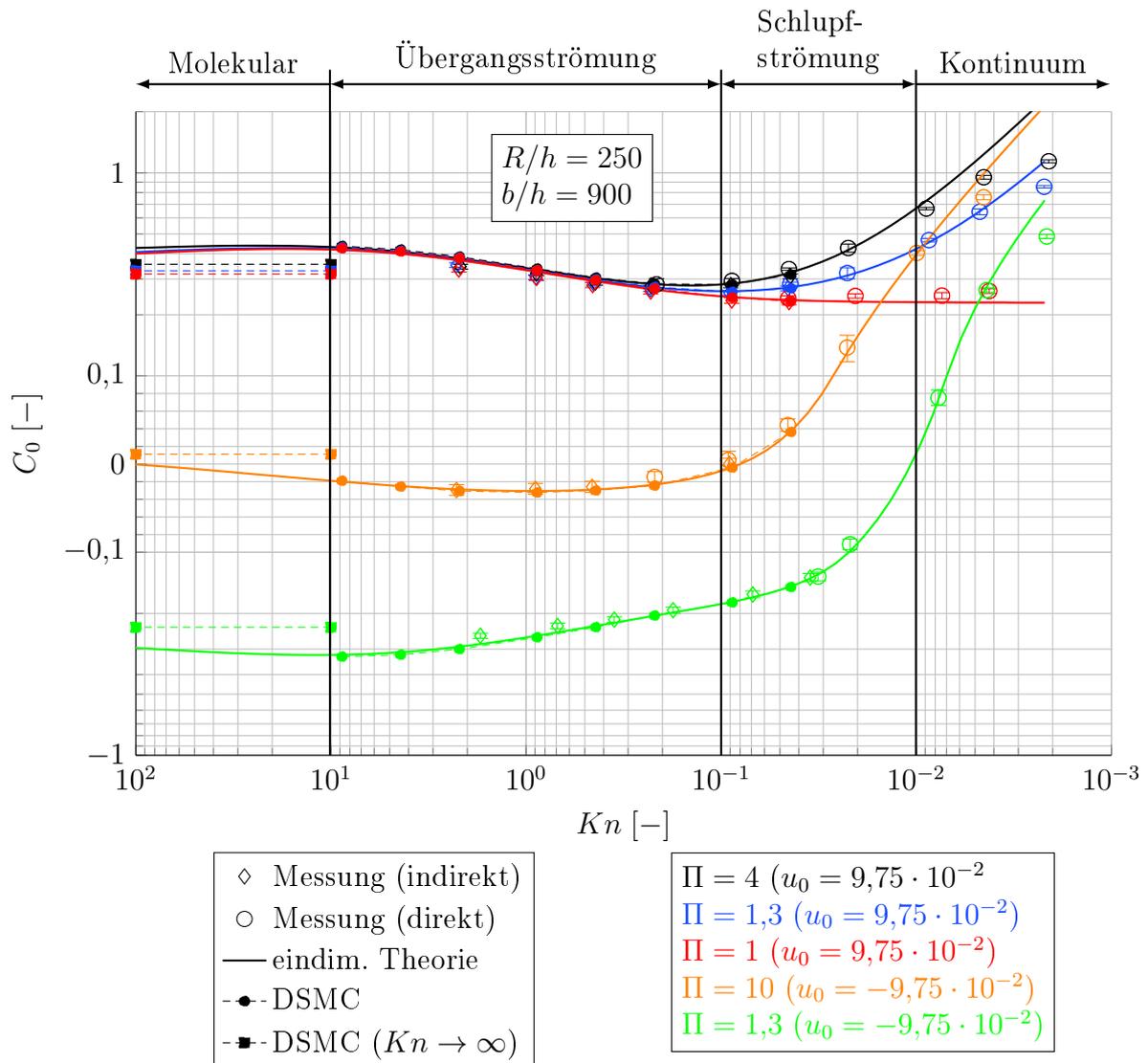


Abbildung 7.20: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  bei bewegter Berandung  $u_0 = \pm 9,75 \cdot 10^{-2}$ .

bildet. Die Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode ist ebenfalls sehr gut. Der Grenzfall einer freien molekularen Strömung  $Kn \rightarrow \infty$ , der mithilfe der DSMC-Methode simuliert wird, zeigt bei einer Knudsenzahl  $Kn = 100$  noch Abweichungen zur eindimensionalen Theorie und DSMC-Methode.

### 7.4.3 Variation des Radius zu Höhenverhältnisses

Um den Einfluss des geometrischen Parameters  $R/h$  untersuchen zu können, besitzt das Spaltmodell die Möglichkeit zur Einstellung der Spalthöhe. Auf diesem Weg wird gleichzeitig das Breiten zu Höhenverhältnis  $b/h$  variiert, das im vorliegenden Fall stets sehr große Werte annimmt. Es kann daher davon ausgegangen werden, dass der Einfluss dieses Parameters auf den normierten Massenstrom gering ist. Die Variation des

geometrischen Parameters  $R/h$  wird in diesem Kapitel für verschiedene normierte Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0$  für ein konstantes Druckverhältnis von  $\Pi = 8$  durchgeführt.

**Abbildung 7.21** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene geometrische Parameter  $R/h$  bei stehender Berandung. Die Ergeb-

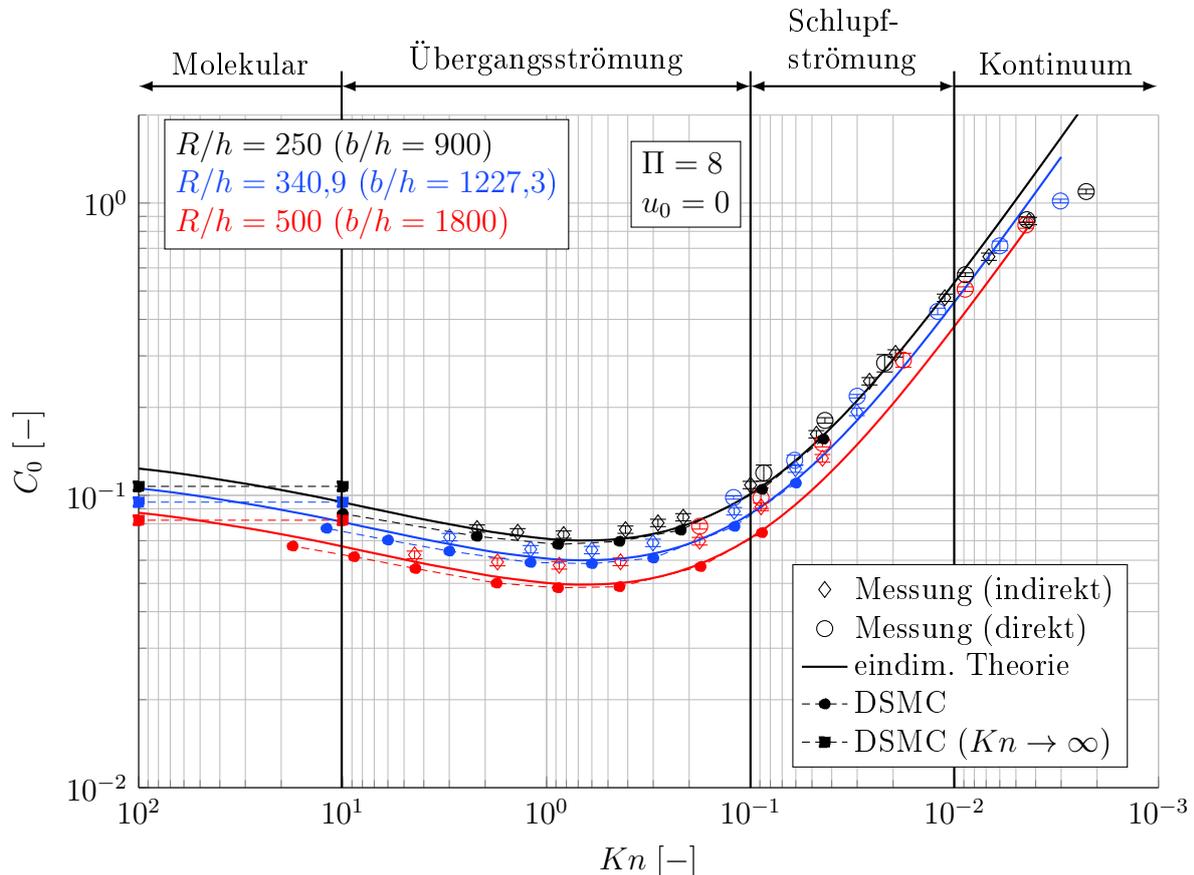


Abbildung 7.21: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h$  bei stehender Berandung  $u_0 = 0$ .

nisse der experimentellen Untersuchung zeigen, dass der normierte Massenstrom für sehr geringe Knudsenzahlen im Bereich der Kontinuumsströmung nur sehr schwach vom geometrischen Parameter  $R/h$  abhängt. Mit steigenden Knudsenzahlen nimmt der normierte Massenstrom bei größeren Werten des Radius zu Höhenverhältnisses ab. Die Erhöhung des geometrischen Parameters  $R/h$  ist gleichbedeutend mit einer Verringerung des Strömungsquerschnittes über eine definierte Spaltlänge. Somit erhöht sich die Drosselwirkung des Spaltes. Im Bereich sehr kleiner Knudsenzahlen fällt dieser Effekt aufgrund eines geringeren Einflusses der Reibung geringer aus.

Ein Vergleich zwischen Messung und Simulation zeigt zunächst die bereits bekannte gute Übereinstimmung bei einem Radius zu Höhenverhältnis  $R/h = 250$ . Bei weiterer Erhöhung dieses Parameters zeigt sich, dass beide Theorien die Abnahme im normierten

Massenstrom qualitativ entsprechend der Messergebnisse abbilden. Insgesamt kommt es jedoch zu einer deutlichen Abweichung im normierten Massenstrom, wobei beide Theorien geringere normierte Massenströme im Vergleich zur Messung aufweisen. Bei den experimentellen Untersuchungen fällt auf, dass mit größeren Parametern  $R/h$  zunehmend Abweichungen zwischen direkter und indirekter Messmethode auftreten. Die Ursachen hierzu konnten abschließend nicht geklärt werden.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode zeigt im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung eine sehr gute Übereinstimmung. Bei einer Variation des Parameters  $R/h$  fällt auf, dass der durch die DSMC-Methode berechnete normierte Massenstrom bei großen Knudsenzahlen  $Kn > 1$  stets etwas geringer im Vergleich zur eindimensionalen Theorie ausfällt. Anhand der Simulation einer freien molekularen Strömung mithilfe der DSMC-Methode lässt sich erkennen, dass die Abweichung zwischen DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie bei größeren Parametern  $R/h$  abnimmt. Mit größeren Werten des Parameters  $R/h$  nähert sich die Geometrie des Radiusspaltes der Geometrie eines planparallelen Spaltes an. Der Einfluss des veränderlichen Querschnitts nimmt ab, sodass die Approximation des Radiusspaltes über Inkremente konstanten Querschnitts bei der eindimensionalen Theorie einen geringeren Fehler verursacht.

**Abbildung 7.22** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h$  bei einer normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ . Die Messergebnisse zeigen keine, bzw. nur eine sehr schwache Abhängigkeit des normierten Massenstroms vom Parameters  $R/h$  über den gesamten Bereich der Knudsenzahl. Analog zu den Ergebnissen der stehenden Berandung kann bei großen Werten des Parameters  $R/h$  eine Abweichung zwischen den mit der direkten und indirekten Messmethode ermittelten normierten Massenströmen beobachtet werden. Die Ursache hierzu konnte nicht abschließend geklärt werden.

Im Gegensatz zu den Messergebnissen zeigen die Simulationsergebnisse beider Theorien, dass der normierte Massenstrom im Bereich der Schlupfströmung eine Abhängigkeit vom Parameter  $R/h$  aufweist, die mit zunehmender Knudsenzahl im Bereich der Übergangsströmung verschwindet. Bei großen Knudsenzahlen nimmt der Einfluss der Couette-Strömung zu, die keine Abhängigkeit vom Verlauf des Strömungsquerschnitts aufweist, sodass hier identische normierte Massenströme berechnet werden. Die berechneten normierten Massenströme zeigen über den gesamten Bereich der Knudsenzahl geringere normierte Massenströme, als durch das Experiment ermittelt werden. Die Übereinstimmung zwischen DSMC-Methode und eindimensionale Theorie ist wiederum sehr gut. Die Abweichung zwischen Theorien und Experiment konnte abschließend nicht geklärt werden. Als mögliche Ursachen kommen Leckagen und die Berücksichtigung des Gehäusespaltes (vgl. Gleichung 6.7) in Frage. Dies wird in der Bestimmung der Messunsicherheit berücksichtigt (vgl. Gleichung 6.8 und 6.9), es muss jedoch be-

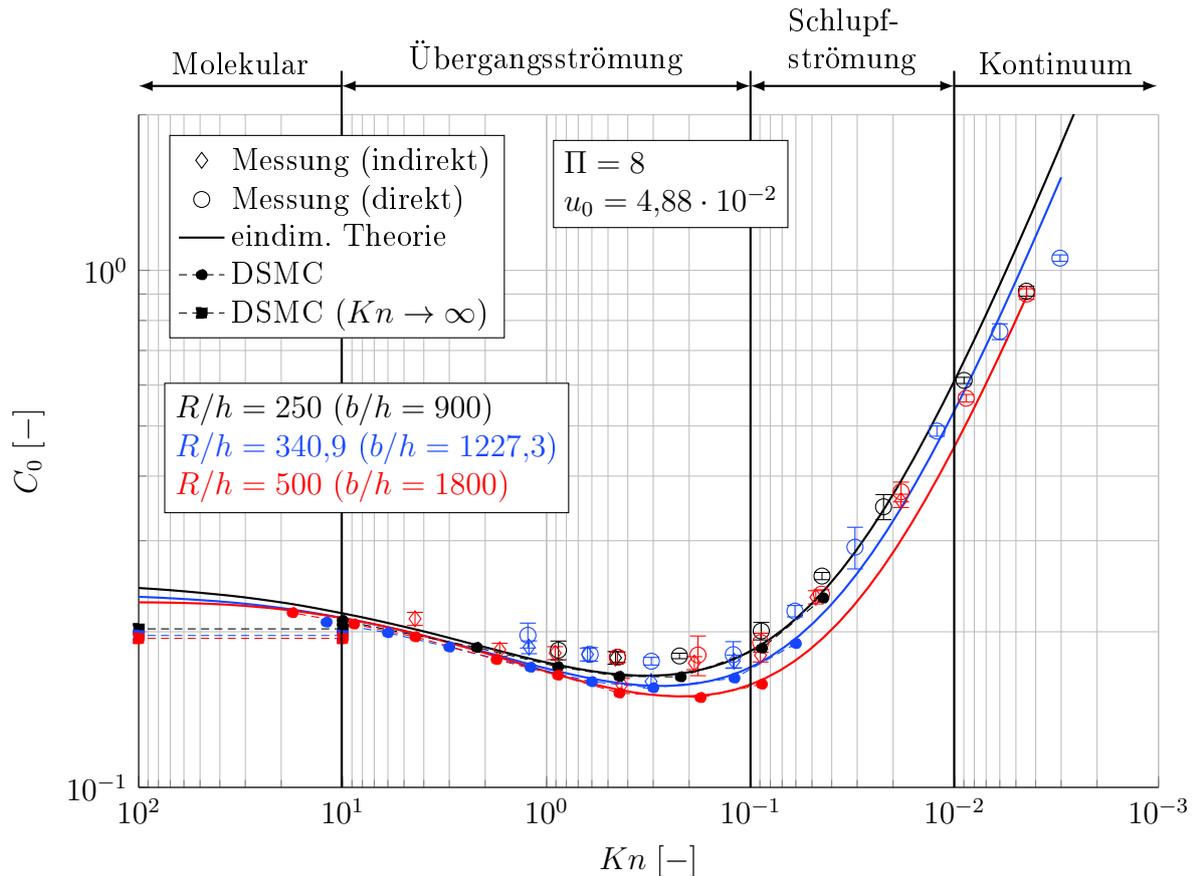


Abbildung 7.22: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h$  bei bewegter Berandung  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ .

achtet werden, dass sich die Messspalthöhe mit größeren Werten  $R/h$  verringert. Nicht berücksichtigte Messunsicherheiten können so durch die insgesamt kleineren gemessenen Massenströme problematisch werden.

**Abbildung 7.23** zeigt, analog zu Abbildung 7.22, den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h$  bei einer normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$ . Bei einer negativen Berandungsgeschwindigkeit zeigen die Messergebnisse, dass der normierte Massenstrom über den gesamten Bereich der Knudsenzahl eine Abhängigkeit vom Radius zu Höhenverhältnis aufweist. Hier hängt der durch die Couette-Strömung verursachte Anteil der Strömung im Wesentlichen vom Zustand des Gases auf der Austrittsseite ab, sodass sich aufgrund des gewählten Druckverhältnisses von  $\Pi = 8$  ein insgesamt größerer Einfluss der Poiseuille-Strömung ergibt. Im Gegensatz zur Variation des Radius zu Höhenverhältnisses bei stehender Berandung und positiver Berandungsgeschwindigkeit ergibt sich hier eine gute Übereinstimmung zwischen den Messergebnissen der direkten und indirekten Messmethode.

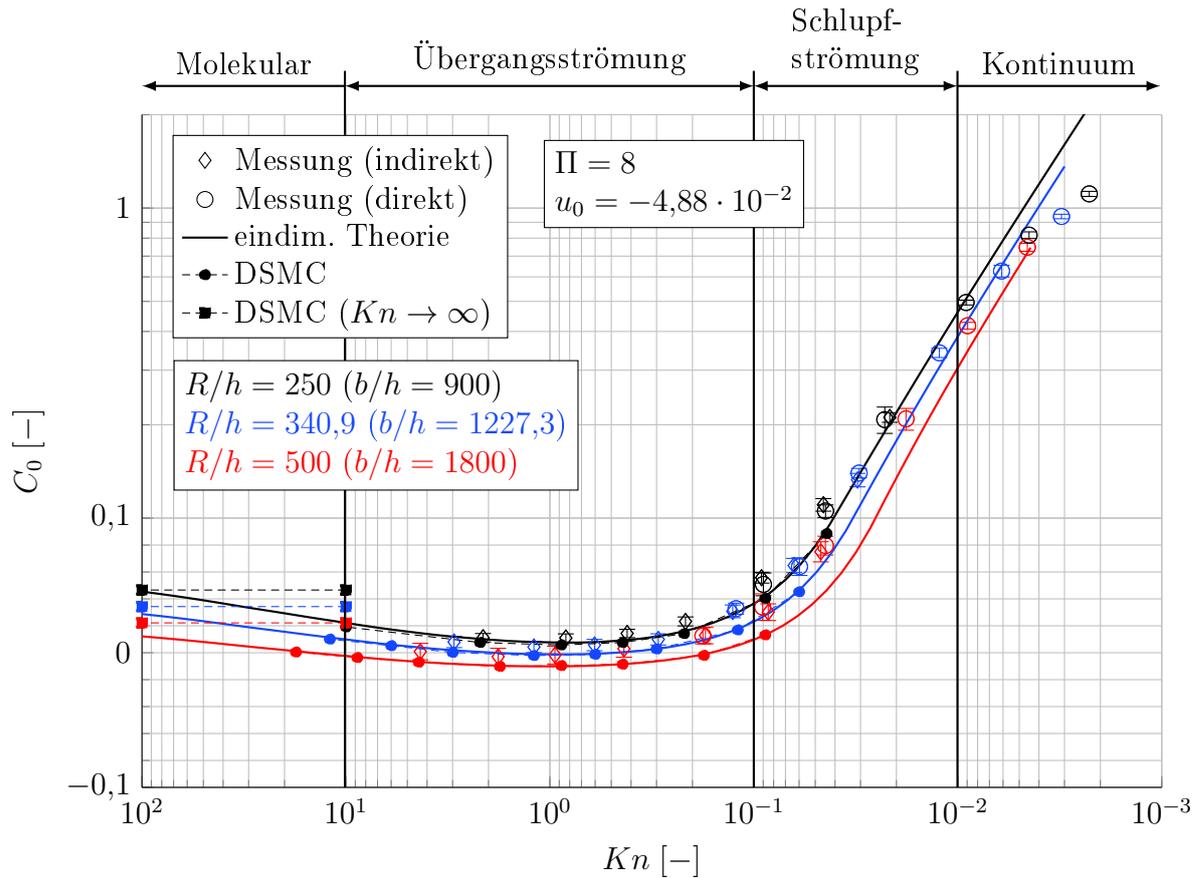


Abbildung 7.23: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h$  bei bewegter Berandung  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$ .

Der Vergleich zwischen den experimentell und theoretisch ermittelten normierten Massenströmen zeigt insgesamt eine recht gute Übereinstimmung für den Bereich großer Knudsenzahlen  $Kn > 0,2$ . Die Abnahme des normierten Massenstroms mit größeren Parametern  $R/h$  wird durch beide Theorien abgebildet. Bei kleinen Knudsenzahlen zeigen die experimentellen Ergebnisse wiederum größere Werte des normierten Massenstroms im Vergleich zu beiden Theorien. Die Abweichungen steigen mit größeren Parametern  $R/h$ . Die Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie ist insgesamt wiederum sehr gut.

## 7.5 Ergebnisse der thermischen Kriechströmung

Zur Überprüfung der thermischen Kriechströmung kann auf experimentelle Untersuchungen in der Literatur zurückgegriffen werden. Bei den in Kapitel 6 vorgestellten Versuchsmodellen ist aus diesem Grund nicht vorgesehen unterschiedliche Gastemperaturen an Spaltein- und Spaltaustritt oder einen Temperaturgradienten durch die Berandungen vorzugeben. Yamaguchi et al. [Yam+14] stellen einen Versuchsaufbau

vor, der dazu genutzt werden kann, das thermomolekulare Druckverhältnis einer Kanalströmung in Abhängigkeit der Knudsenzahl zu messen. Weiterhin kann auch der Massenstrom des Aufbaus vermessen werden, wenn Ein- und Austrittsdruck der Kanalströmung identisch sind [Yam+16]. Es wird von einer linearen Temperaturverteilung entlang der Kanalströmung ausgegangen und es werden verschiedene Edelgase betrachtet. Die Messergebnisse werden mit theoretisch ermittelten Werten verglichen, wobei der Ansatz der Theorie ähnlich zur eindimensionalen Theorie in der vorliegenden Arbeit ist. Zur Ermittlung des Massenstroms wird hier jedoch ein mittlerer Wert der Gasverdünnung, gebildet aus dem Gaszustand am Ein- und Austritt des Kanals, genutzt, um einen integralen Wert der Flussrate der thermischen Kriechströmung und der Poiseuille-Strömung zu bestimmen.

**Abbildung 7.24** zeigt den durch Yamaguchi et al. [Yam+14] experimentell ermittelten normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für Helium. Die Messungen

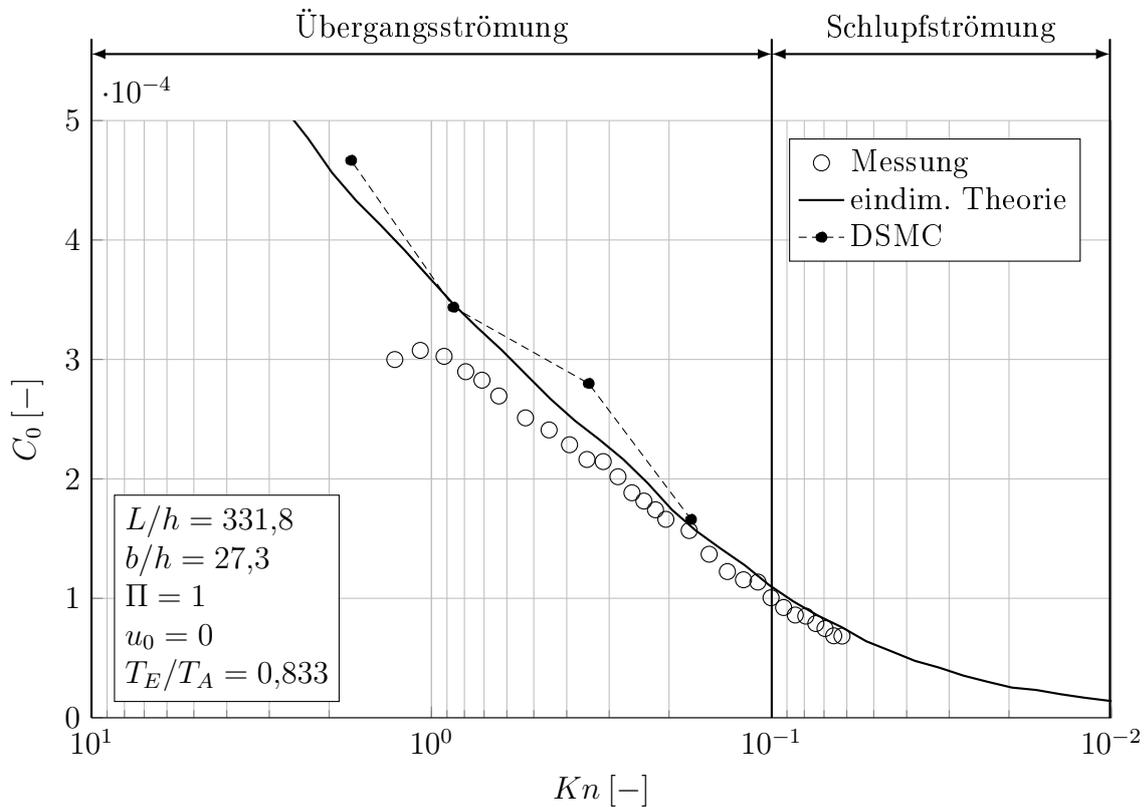


Abbildung 7.24: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für ein Temperaturverhältnis  $T_E/T_A = 0,833$ . Die Messwerte werden durch Yamaguchi et al. [Yam+16] für Helium ermittelt und mit Simulationsergebnissen der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode verglichen.

werden für eine reine thermische Kriechströmung durchgeführt ( $\Pi = 1$  und  $u_0 = 0$ ). Die experimentellen Werte werden den durch die eindimensionale Theorie und die DSMC-Methode ermittelten Werten gegenüber gestellt.

Die experimentellen Ergebnisse zeigen einen mit der Knudsenzahl zunehmenden nor-

mierten Massenstrom der thermischen Kriechströmung. Im Bereich  $Kn > 1$  kommt es zu einer Verringerung des normierten Massenstroms. Ein Vergleich mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie zeigt eine gute Übereinstimmung im Bereich kleiner Knudsenzahlen. Mit größeren Knudsenzahlen kommt es jedoch zu Abweichungen verglichen mit den experimentellen Ergebnissen. Eine Verringerung des normierten Massenstroms bei großen Knudsenzahlen kann anhand der eindimensionalen Theorie nicht beobachtet werden. Dies deckt sich mit den Ergebnissen nach Yamaguchi et al. [Yam+16], die ebenfalls Abweichungen im Bereich großer Knudsenzahlen feststellen, was nur durch experimentelle Fehler erklärt werden kann.

Die Ergebnisse der DSMC-Methode zeigen im Allgemeinen eine gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie. Einzelne Simulationspunkte zeigen jedoch abweichende Ergebnisse. Die Simulation der thermischen Kriechströmung mithilfe der DSMC-Methode ist in diesem Bereich mit einem sehr großen Rechenaufwand verbunden. Die sehr kleinen Massenströme bedingen die Simulation sehr großer zeitlicher Mittelungsintervalle, um das statistische Rauschen zu verringern. Hierdurch wird auch die Beurteilung erschwert, ab wann eine stationäre Strömung vorliegt, was einzelne Abweichungen zwischen DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie erklärt. Die Simulation der thermischen Kriechströmung für Knudsenzahlen  $Kn < 0,175$  ist aus Gründen der Rechenzeiten im vorliegenden Fall nicht möglich.

## 7.6 Fazit der Validierung

Die beschriebenen Ergebnisse dienen zur Validierung beider Simulationswerkzeuge. Messungen können aus Gründen von Leckagen und Beschränkungen der eingesetzten Vakuumpumpen nur im Bereich der Kontinuums-, Schlupf- und Übergangsströmung durchgeführt werden. Im Bereich der molekularen Strömung können nur die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit denen der DSMC-Methode verglichen werden.

Die Abbildung des von der **Knudsenzahl**  $Kn$  abhängigen Verlauf des normierten Massenstroms der DSMC-Methode ist insgesamt sehr gut. Insbesondere beim Radiuspalt (vgl. Abbildung 7.12) zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung mit den experimentell ermittelten Werten. Es kann ebenfalls gezeigt werden, dass die DSMC-Methode auch bei sehr kleinen Knudsenzahlen ( $Kn = 0,01$ ) in der Lage ist die experimentellen Werte abzubilden. Hier kann von einem beginnenden Einfluss der Kompressibilität der Strömung ausgegangen werden, der durch die DSMC-Methode erfasst wird. Die eindimensionale Theorie zeigt eine sehr gute Abbildung des von der Knudsenzahl abhängigen Verlaufs des normierten Massenstroms im Bereich der Übergangsströmung und in einem großen Bereich der Schlupfströmung (vgl. Abbildung 7.12). Hier ist zu erkennen, dass für kleine Knudsenzahlen  $Kn < 0,02$  zu große normierte Massenströme der eindimensionalen Theorie im Vergleich zu den Messergebnissen berechnet werden.

Dies liegt in erster Linie an der fehlenden Berücksichtigung der Kompressibilität der Strömung, die für kleine Knudsenzahlen relevant wird. Im Bereich großer Knudsenzahlen  $Kn > 1$  und großer Längen zu Höhenverhältnisse  $L/h = 133,3$  zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode für den planparallelen Spalt (vgl. Abbildung 7.11). Im Gegensatz hierzu zeigen sich bei den Ergebnissen des Radiuspaltess zunehmend Abweichungen. Ursache kann der veränderliche Querschnitt in Strömungsrichtung des Radiuspaltess sein, der bei der eindimensionalen Theorie durch Abschnitte konstanten Querschnitts approximiert wird.

Der Einfluss des **Druckverhältnisses**  $\Pi$  auf den normierten Massenstrom wird sowohl durch die DSMC-Methode als auch durch die eindimensionale Theorie sehr gut abgebildet. Die Variation des Druckverhältnisses beim Radiuspaltess (vgl. Abbildung 7.14) zeigt eine sehr gute Übereinstimmung beider Theorien mit den Messergebnissen. Auch bei sehr großen Druckverhältnissen (vgl. Abbildung 7.12) liefern beide Theorien sehr gute Ergebnisse im Vergleich zum Experiment. Einzig im Bereich kleiner Knudsenzahlen führen große Druckverhältnisse bei der eindimensionalen Theorie zu einem fehlerhaften normierten Massenstrom aufgrund der fehlenden Abbildung der Kompressibilität der Strömung. Es zeigt sich jedoch, dass die eindimensionale Theorie mit kleineren Druckverhältnissen zunehmend auch im Bereich der Kontinuumsströmung genutzt werden kann (vgl. Abbildung 7.19).

Die Abhängigkeit des normierten Massenstroms vom **Längen zu Höhenverhältnis**  $L/h$  beim planparallelen Spalt wird ebenfalls gut von beiden Theorien wiedergegeben (vgl. Abbildung 7.11). Die Ergebnisse des normierten Massenstroms der DSMC-Methode liegen durchweg unterhalb der Messergebnisse. Dies ist jedoch eher auf eine Schiefstellung der Kontur beim Messaufbau zurück zu führen, was zu einer Düsen- oder Diffusorform in Strömungsrichtung führt. Bei der eindimensionalen Theorie kann festgestellt werden, dass bei kleinen Werten des Parameters  $L/h$  durch eine fehlende Abbildung der Zu- und Abströmverluste zu große normierte Massenströme berechnet werden.

Beide Theorien liefern auch bei der Berechnung des normierten Massenstroms des Radiuspaltess mit unterschiedlichen **Radius zu Höhenverhältnissen**  $R/h$  gute Ergebnisse. Bei dem Messaufbau mit statischer Berandung ist die Übereinstimmung sehr gut (vgl. Abbildung 7.12). Eine weitere Variation des Radius zu Höhenverhältnisses beim Spalt mit bewegter Berandung zeigt durchaus eine korrekte qualitative Abbildung des normierten Massenstroms beider Theorien. Bei größeren Werten des Radius zu Höhenverhältnisses  $R/h > 250$  zeigen sich jedoch zunehmend Abweichungen zwischen beiden Theorien und den Messungen (vgl. Abbildung 7.21). Die Abweichungen hier sind ebenfalls eher im Messaufbau zu finden, da sich mit größeren Werten des Radius zu Höhenverhältnisses auch unterschiedliche Ergebnisse des normierten Mas-

senstroms bei der direkten und indirekten Methode zur Messung des Massenstroms ergeben. Größere Werte des Parameters  $R/h$  werden vermessen, indem die Spalthöhe verringert wird. Dadurch müssen kleinere Massenströme gemessen werden, die im weiteren Verlauf um den Massenstrom im Gehäusespalt korrigiert werden müssen (vgl. Gleichung 6.7). Unsicherheiten, die nicht im Rahmen der Fehleranalyse berücksichtigt werden, können so zu einem falschen Messergebnis führen. Die genauen Ursachen der genannten Unsicherheiten können abschließend nicht geklärt werden.

Die Berechnung des normierten Massenstroms mit der eindimensionalen Theorie von Spalten unterschiedlichen **Breiten zu Höhenverhältnisses**  $b/h$  zeigt eine gute Übereinstimmung mit Messergebnissen (vgl. Abbildung 7.15). Es ist jedoch zu erwarten, dass die eindimensionale Theorie bei Spalten mit kleinen Werten des Parameters  $b/h$  und einer bewegten Berandung fehlerhafte normierte Massenströme berechnet. Im Rahmen dieser Arbeit wird lediglich die Flussrate der Couette-Strömung für unendlich breite Spalte berücksichtigt. Simulationen mit der DSMC-Methode werden aufgrund der hohen Rechenzeiten hier nicht durchgeführt.

Bei der Variation der **normierten Berandungsgeschwindigkeit**  $u_0$  zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden Theorien und den Messergebnissen (vgl. Abbildung 7.16). Weiterhin ist die Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode bei großen normierten Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0 = \pm 9,75 \cdot 10^{-2}$  im Bereich der Schlupf-, Übergangs- und molekularen Strömung hervorragend.

Der Vergleich des normierten Massenstroms unterschiedlicher **Temperaturverhältnisse**  $T_E/T_A$  beider Theorien mit Messergebnissen aus der Literatur zeigt eine gute Übereinstimmung im Bereich kleiner Knudsenzahlen  $Kn < 0,2$  (vgl. Abbildung 7.24). Bei größeren Knudsenzahlen kommt es zu Abweichungen, was jedoch auch durch den Autor der experimentellen Untersuchungen nur durch experimentelle Fehler erklärt werden kann. Die Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode ist sehr gut, wobei bei der DSMC-Methode aufgrund der sehr geringen Massenströme mit einem großen statistischen Rauschen zu rechnen ist.

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die DSMC-Methode sehr gute Ergebnisse verglichen mit den experimentellen Untersuchungen liefert. Es kann davon ausgegangen werden, dass dies auch bei großen Knudsenzahlen im Bereich der molekularen Strömung der Fall ist, bei denen keine Messungen im Rahmen dieser Arbeit möglich sind. Bei der Modellierung der Strömung auf Ebene der Teilchen stellt dieser Bereich lediglich den Grenzfall vernachlässigbarer intermolekularer Wechselwirkung dar.

Die eindimensionale Theorie zeigt ebenfalls sehr gute Ergebnisse verglichen mit den experimentellen Untersuchungen. Ausnahme bildet die Strömung bei kleinen Knudsenzahlen, die aufgrund der fehlenden Berücksichtigung der Kompressibilität der Strömung

falsche Ergebnisse liefert. Ebenfalls können Restriktionen bezüglich der geometrischen Parameter beobachtet werden. Dies betrifft das Längen zu Höhenverhältnis, da hier bei kleinen Werten, aufgrund der fehlenden Berücksichtigung der Zu- und Abströmverluste, fehlerhafte normierte Massenströme berechnet werden. Durch den Vergleich mit DSMC-Simulationen ergibt sich ebenfalls die Beobachtung, dass die Abbildung kleiner Radius zu Höhenverhältnisse bei großen Knudsenzahlen aufgrund eines variablen Strömungsquerschnitts problematisch ist.

# Kapitel 8

## Grenzen der eindimensionalen Theorie

Die Validierung der DSMC-Methode im vorangegangenen Kapitel hat insgesamt sehr gute Ergebnisse gezeigt. Bei der eindimensionalen Theorie haben sich dagegen in gewissen Bereichen der dimensionslosen Parameter Restriktionen angedeutet, die im Folgenden weiter untersucht werden. Zu diesem Zweck werden die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der DSMC-Methode detailliert verglichen. Da die DSMC-Methode keine Einschränkung durch einen messtechnischen Aufbau besitzt, können alle dimensionslosen Kennzahlen in einem weiten Bereich variiert werden. Die Zustands- und Strömungsgrößen entlang des Spaltes können dabei Aufschluss über die Gültigkeit der eindimensionalen Theorie geben.

### 8.1 Knudsenzahl

Die Knudsenzahl beschreibt als Kennzahl die Gasverdünnung der Strömung. Die Simulation kleiner Knudsenzahlen mithilfe der eindimensionalen Theorie muss dabei kritisch betrachtet werden. Die bei kleinen Knudsenzahlen großen Gasdichten führen bei gleichzeitig großen Druckverhältnissen zu verhältnismäßig großen Reynoldszahlen. Weiterhin ist zu erwarten, dass im Bereich der Kontinuumsströmung aufgrund geringerer Reibung größere Machzahlen der Strömung auftreten.

Kapitel 7.3.1 diskutiert den Einfluss des Längen zu Höhenverhältnisses eines planparallelen Spaltes auf den normierten Massenstrom. Bei großen Längen zu Höhenverhältnissen zeigt sich insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen beiden theoretischen Ergebnissen und dem Experiment. Im Bereich kleiner Knudsenzahlen kommt es jedoch zu Abweichungen. **Abbildung 8.1** zeigt den über den Querschnitt gemittelten normierten Druck-, Temperatur- und Machzahlverlauf beim planparallelen Spalt großen Längen zu Höhenverhältnisses  $L/h = 133,3$  für zwei verschiedene Knudsenzahlen. Infolge des großen anliegenden Druckverhältnisses  $\Pi \rightarrow \infty$  nimmt die lokale Knudsenzahl - welche in jedem Abschnitt mit dem lokalen Gaszustand und

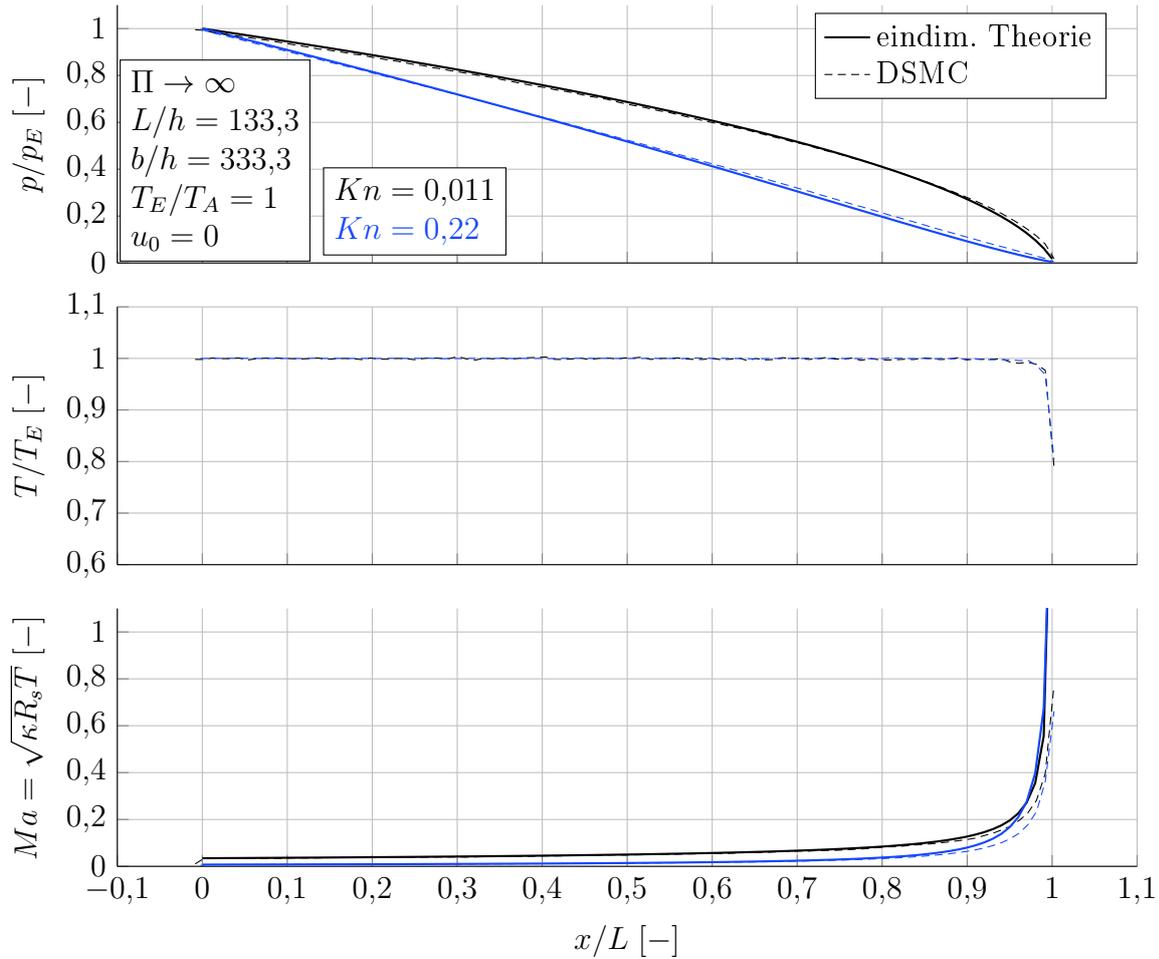


Abbildung 8.1: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druck-, Temperatur- und Machzahlverläufe bei einem planparallelen Spalt  $L/h = 133,3$  für verschiedene Knudsenzahlen.

der lokalen Spalthöhe gebildet wird - in Strömungsrichtung zu. Bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,22$  lässt sich ein weitgehend linearer Druckabfall beobachten, was ein Ergebnis des konstanten Querschnitts und einem in diesem Bereich weitgehend konstanten Reibungseinflusses ist (vgl. Abbildung 5.3). Die Übereinstimmung des durch die DSMC-Methode berechneten Druckverlaufs mit der eindimensionalen Theorie ist sehr gut. Bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  ergibt sich ein deutlich unterschiedlicher Druckverlauf, bei dem der Druckabfall in Strömungsrichtung stetig zunimmt. Bei dieser Knudsenzahl kommt es infolge der zunehmenden Gasverdünnung in Strömungsrichtung zu einer Zunahme des Reibungseinflusses. Auch bei dieser Knudsenzahl stimmen die Druckverläufe der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie gut überein, was die Zunahme des Druckverlustes durch eine Zunahme des Reibungseinflusses bestätigt.

Weiterhin wird der normierte Temperaturverlauf in Strömungsrichtung angegeben. Da bei der eindimensionalen Theorie von einem abschnittsweise vollständigem Wärmeübergang ausgegangen wird, werden nur die Ergebnisse der DSMC-Methode angegeben. Es zeigt sich für beide Knudsenzahlen eine weitgehend isotherme Strömung. Einzig

im Bereich des Spaltaustritts kommt es zu einer Absenkung der Temperatur. Die Erklärung wird durch den Verlauf der Machzahl gegeben. Infolge des Druckverlustes und der damit einhergehenden Verringerung der Dichte kommt es zu einer Zunahme der Machzahl. Dieser Effekt kann für beide Knudsenzahlen beobachtet werden, wobei der Gradient der Machzahl in Richtung des Spaltaustritts zunimmt. Die starke Beschleunigung der Strömung am Austritt des Spaltes führt gleichzeitig zu einer abnehmenden Gastemperatur, die auch nicht durch den Wärmeübergang zwischen Wand und Gas ausgeglichen werden kann.

Das Niveau der Machzahl bei einer kleinen Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  liegt deutlich oberhalb des Verlaufs der Machzahl bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,22$ , sodass auch am Austritt größere Machzahlen erreicht werden. Unterschiede der mithilfe der eindimensionalen Theorie berechneten Machzahlen im Vergleich zur DSMC-Methode ergeben sich insbesondere im Bereich großer Machzahlen. So werden bei der eindimensionalen Theorie für beide Knudsenzahlen am Austritt Machzahlen  $Ma > 1$  berechnet. Dies zeigt die fehlende Kompressibilität des Modellansatzes, da bei einem Spalt konstanten Querschnitts und großem Druckverhältnis maximal eine verblockte Strömung  $Ma = 1$  am Austritt des Spaltes zu erwarten ist. Die DSMC-Methode zeigt, dass aufgrund der Kompressibilität des Gases und einem großen Einfluss der Reibung durch eine große Spaltlänge  $L/h = 133,3$  Machzahlen  $Ma < 1$  am Austritt zu erwarten sind.

Insgesamt stimmt der Machzahlverlauf für den planparallelen Spalt großer Länge über einen großen Bereich der Spaltlänge gut überein. Ebenfalls können nur sehr kleine Differenzen im Druckverlauf der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode beobachtet werden. Auch bei einer relativ kleinen Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  liegt die Abweichung im Massenstrom zwischen beiden Theorien bei unter 2%.

Der Einfluss der Knudsenzahl auf den Druck-, Temperatur- und Machzahlverlauf des Radiusspaltes  $R/h = 200$  wird in **Abbildung 8.2** dargestellt. Analog zur Betrachtung des planparallelen Spaltes wird ein sehr großes Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow \infty$  bei zwei verschiedenen Knudsenzahlen  $Kn = 0,011$  und  $Kn = 0,22$  betrachtet. Der in **Abbildung 8.1** gezeigte Druckverlauf des planparallelen Spaltes unterscheidet sich deutlich vom Druckverlauf bei einer veränderlichen Spalthöhe. Für beide Knudsenzahlen nimmt der Gradient in Richtung der minimalen Spalthöhe ( $x/R = 0$ ) zu. In diesem Bereich kommt es aufgrund des kleinen Strömungsquerschnitts zum größten Druckverlust. Während bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,22$  die Druckverläufe der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode sehr gut übereinstimmen, zeigen sich kleine Abweichungen bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,011$ .

Der Verlauf der normierten Temperatur als Funktion der dimensionslosen Laufkoordinate zeigt vom Eintritt des Spaltes bis zum engsten Querschnitt eine weitgehend konstante Temperatur. Bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  kommt es ab dem engsten Querschnitt zu einer Absenkung der Temperatur, was bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,22$

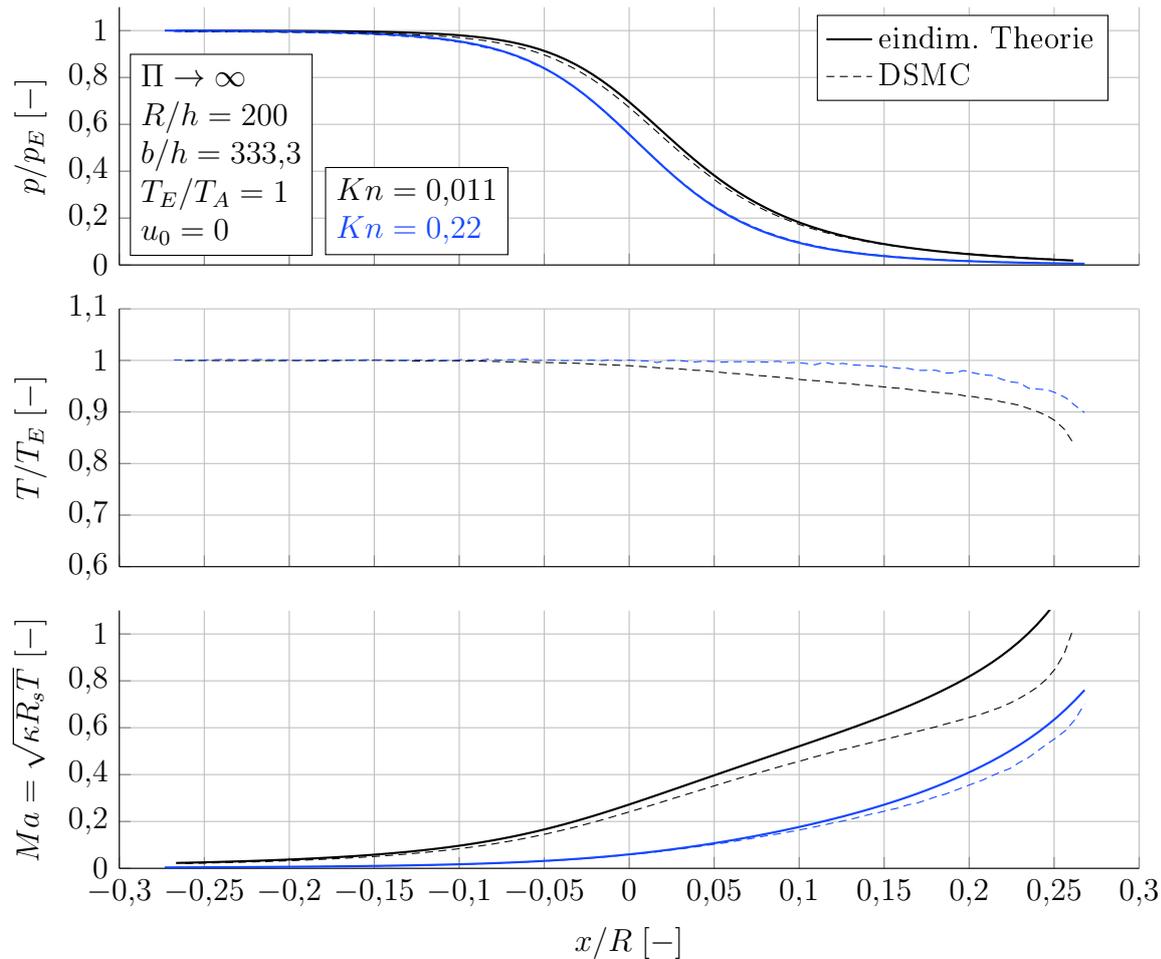


Abbildung 8.2: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druck-, Temperatur- und Machzahlverläufe bei einem Radiusspalt  $R/h = 200$  für verschiedene Knudsenzahlen.

erst ab einer dimensionslosen Laufkoordinate  $x/R = 0,15$  zu beobachten ist. Die Änderung der Temperatur kann auch bei dem Radiusspalt durch die Betrachtung des Machzahlverlaufs erklärt werden. Überschreitet die Machzahl einen Wert von ca.  $Ma = 0,3$ , kommt es zu einer merklichen Änderung der Gastemperatur, die nicht mehr vollständig durch einen Wärmeübergang zwischen Wand und Gas ausgeglichen werden kann. Der Verlauf der mit der DSMC-Methode berechneten Machzahl für beide Knudsenzahlen zeigt, dass die Strömung weitgehend durch die Reibung bestimmt wird. Im engsten Querschnitt werden deutlich unterkritische Machzahlen  $Ma < 1$  erreicht, wobei die Machzahl im Weiteren Richtung Austritt des Spaltes trotz einer Vergrößerung des Querschnitts ansteigt. Direkt am Austritt des Spaltes wird bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,011$  auch mit der DSMC-Methode eine Machzahl  $Ma > 1$  berechnet. Dies entsteht durch das große am Spalt anliegende Druckverhältnis  $\Pi$ , das bei dieser Knudsenzahl zu einer starken Beschleunigung am Austritt führt. Bei großen Machzahlen kommt es zunehmend zu einer Abweichung zwischen DSMC-Methode und eindimensionaler Theorie, wobei wiederum die eindimensionale Theorie Effekte der Kompressi-

bilität der Strömung nicht abbilden kann. Bei Nutzung der eindimensionalen Theorie kommt es bei einer kleinen Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  auf diese Weise zu sehr großen Machzahlen ( $Ma > 1$ ) am Austritt des Spaltes. Die DSMC-Methode zeigt, dass dies unter Berücksichtigung der Kompressibilität des Gases nicht zu erwarten ist.

Während die Abweichung des berechneten Massenstroms der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode bei einer Knudsenzahl  $Kn = 0,22$  bei unter 2% liegt, ist bei einer kleineren Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  die Abweichung deutlich höher. Diese liegt aufgrund der fehlenden Abbildung der Kompressibilität bei der eindimensionalen Theorie bei 15%.

## 8.2 Normierte Berandungsgeschwindigkeit

Kapitel 7.2.5 beschreibt die Wahl eines ausreichend großen Simulationsgebietes für den Radiuspalt, wenn eine bewegte Berandung berücksichtigt wird. Hierbei wurde bereits festgestellt, dass mit größeren Knudsenzahlen ein größeres Simulationsgebiet für die Abbildung aller Strömungsvorgänge betrachtet werden muss. Weiterhin geht die eindimensionale Theorie grundsätzlich von kleinen Störungen der Verteilungsdichtefunktion von der Gleichgewichtsverteilung aus, wobei davon auszugehen ist, dass diese Annahme bei kleinen Machzahlen gerechtfertigt ist. Die Berandungsgeschwindigkeit nimmt sowohl Einfluss auf die Größe des zu wählenden Simulationsgebietes als auch auf den Machzahlverlauf im Spalt. Im Folgenden soll geprüft werden bis zu welchen normierten Berandungsgeschwindigkeiten die eindimensionale Theorie zur Simulation der Strömung im Radiuspalt genutzt werden kann.

**Abbildung 8.3** zeigt den über den Spaltquerschnitt gemittelten dimensionslosen Druckverlauf, der mit der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie ermittelt wurde. Bei großen Knudsenzahlen ist der größte Einfluss auf das zu wählende Simulationsgebiet zu erwarten, sodass im vorliegenden Fall exemplarisch die Knudsenzahl  $Kn = 2,2$  betrachtet wird. Ausgehend von einer stehenden Berandung wird die Berandungsgeschwindigkeit in positive und negative Richtung in zwei Schritten variiert.

Bei einer positiven Berandungsgeschwindigkeit ist der Bereich vor der minimalen Spalthöhe  $x/R < 0$  durch einen Druckanstieg mit einem nachfolgenden Druckabfall gekennzeichnet. Im Gegensatz dazu ist der Bereich hinter der minimalen Spalthöhe zunächst durch einen Druckabfall mit einem anschließenden sehr schwach ausgeprägten Druckanstieg gekennzeichnet. Der Druckanstieg fällt hier, aufgrund des großen am Spalt anliegenden Druckverhältnisses sehr gering aus. Anhand von Gleichung 5.25 kann unter Vernachlässigung des Anteils der thermischen Kriechströmung und unter Berücksichtigung der idealen Gasgleichung Gl. 3.5 sowie der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit Gl. 3.10 folgende Bedingung für den Druckgradienten und den Spaltmassenstrom auf-

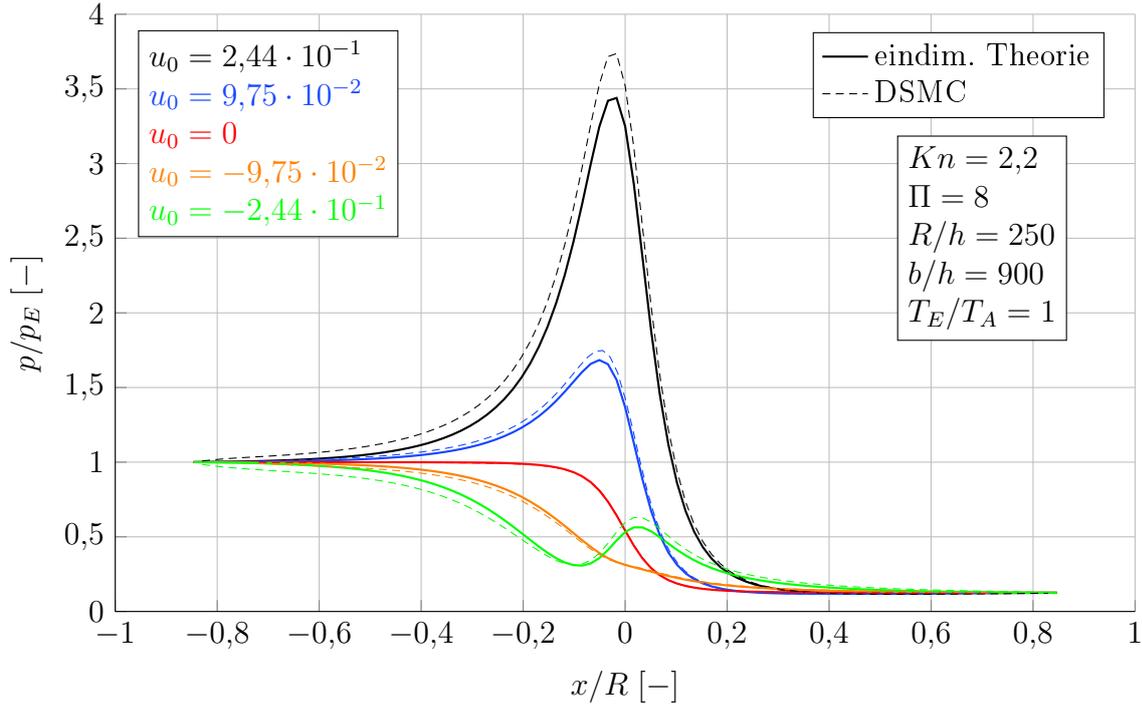


Abbildung 8.3: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druckverläufe beim Radiuspalt  $R/h = 250$  für verschiedene dimensionslose Berandungsgeschwindigkeiten.

gestellt werden.

$$\rho_i b h_i \frac{u_{B,x,i}}{2} \geq \dot{m} \rightarrow \Delta p \geq 0 \quad (8.1)$$

Ist der lokale Anteil des Couette-Massenstroms größer als der Spaltmassenstrom  $\dot{m}$  kommt es zu einem positiven Druckgradienten. Im umgekehrten Fall eines kleineren lokalen Couette-Massenstroms kommt es zu einem negativen Druckgradienten. Ein großer lokaler Anteil des Couette-Massenstroms ist insbesondere bei einem großen Strömungsquerschnitt und einer vergleichsweise großen lokalen Dichte erfüllt. Aus diesem Grund kommt es am Eintritt des Spaltes zunächst zu einem Druckanstieg, der aufgrund eines großen Querschnitts und einer vergleichsweise großen Dichte auf ein Maximum ansteigt. Nach diesem Maximum fällt der lokale Couette-Anteil unter den Gesamtanteil des Spaltmassenstroms, was durch eine Abnahme des Querschnitts begründet werden kann. Da der lokale Couette-Anteil am Austritt des Spaltes durch eine stark verringerte Dichte deutlich geringer ausfällt, kann hier nur ein sehr kleiner Druckanstieg beobachtet werden.

Bei den in Abbildung 8.3 gezeigten Druckverläufen der Spaltströmung bei negativen normierten Berandungsgeschwindigkeiten  $u_0 = -9,75 \cdot 10^{-2}$  und  $u_0 = -2,44 \cdot 10^{-1}$  kommt es zu negativen Massenströmen  $\dot{m}$ , sodass der Spalt von der Austritts- zur Eintrittsseite durchströmt wird. Prinzipiell ist auch für den Fall einer negativen Berandungsgeschwindigkeit ein positiver Druckgradient entlang des Spaltes möglich. Für den

hier vorliegenden Fall einer normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = -9,75 \cdot 10^{-2}$  ist der lokale Couette-Massenstrom stets kleiner als der Spaltmassenstrom, sodass es zu einem kontinuierlichen Druckabfall entlang des Spaltes kommt. Bei einer großen negativen normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = -2,44 \cdot 10^{-1}$  kommt es im Bereich vor dem engsten Querschnitt des Spaltes zu einem positiven Druckgradienten.

Die mit der DSMC-Methode ermittelten Druckverläufe zeigen für kleine normierte Berandungsgeschwindigkeiten eine gute Übereinstimmung mit der eindimensionalen Theorie. Hier stimmen im Allgemeinen auch die berechneten Massenströme beider Methoden gut überein. Bei einer großen normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0 = \pm 2,44 \cdot 10^{-1}$  kann jedoch bereits eine recht deutliche Abweichung der Druckverläufe beider Methoden beobachtet werden. Hier weichen die berechneten Massenströme um bis zu 8% voneinander ab. Des Weiteren kann für diese Berandungsgeschwindigkeit anhand der DSMC-Methode beobachtet werden, dass noch ein deutlicher Druckgradient am Ein- und Austritt des Spaltes auftritt. Die Wahl eines noch größeren Simulationsgebietes könnte hier zu ähnlicheren Ergebnissen beider Methoden führen. Abweichungen können bei einer großen Berandungsgeschwindigkeit auch mit dem zunehmenden Einfluss zweidimensionaler Strömungseffekte erklärbar sein, die nur mit der DSMC-Methode abgebildet werden können. Hierzu zählt beispielsweise eine Strömungskomponente in Spalthöhenrichtung.

Insgesamt zeigt sich, dass die eindimensionale Methode auch für sehr große Umfangsgeschwindigkeiten brauchbare Ergebnisse für den normierten Massenstrom liefert. Es muss jedoch bei großen Berandungsgeschwindigkeiten im Zusammenhang mit einer Vakuumpumpe kritisch hinterfragt werden, inwieweit die Abstraktion in Arbeitskammern mit einem homogenen Fluidzustand und Spalte zulässig ist. Die mit der DSMC-Methode ermittelten Druckverläufe bei großen Berandungsgeschwindigkeiten deuten an, dass über eine große Spaltlänge mit einem Einfluss der bewegten Berandung gerechnet werden muss. Diese liegt im vorliegenden Beispiel  $u_0 = \pm 2,44 \cdot 10^{-1}$  im Bereich des zweifachen Radius  $R$ , was einen geometrischen Grenzfall darstellt. Die lokalen Spalthöhen am Ein- und Austritt liegen dann im Bereich des Radius. Eine klare geometrische Abgrenzung zwischen Arbeitskammer und Spalt ist so nicht eindeutig zu treffen.

### 8.3 Druckverhältnis

Der Vergleich der Messergebnisse mit der eindimensionalen Theorie unter Variation des Druckverhältnisses  $\Pi$  in Kapitel 7.4.2 deutet an, dass die eindimensionale Theorie für kleine Druckverhältnisse bis in den Bereich der Kontinuumsströmung genutzt werden kann. Die Kompressibilität der Strömung spielt hier erst bei kleineren Knudsenzahlen eine Rolle. Um den Einfluss des Druckverhältnisses auf die Strömungsgrößen im Spalt zu untersuchen, wird in **Abbildung 8.4** der dimensionslose Druck-, Temperatur-

und Machzahlverlauf für den Radiuspalt  $R/h = 200$  bei stehender Berandung  $u_0 = 0$  betrachtet. Es werden beispielhaft ein sehr großes Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow \infty$  und ein ver-

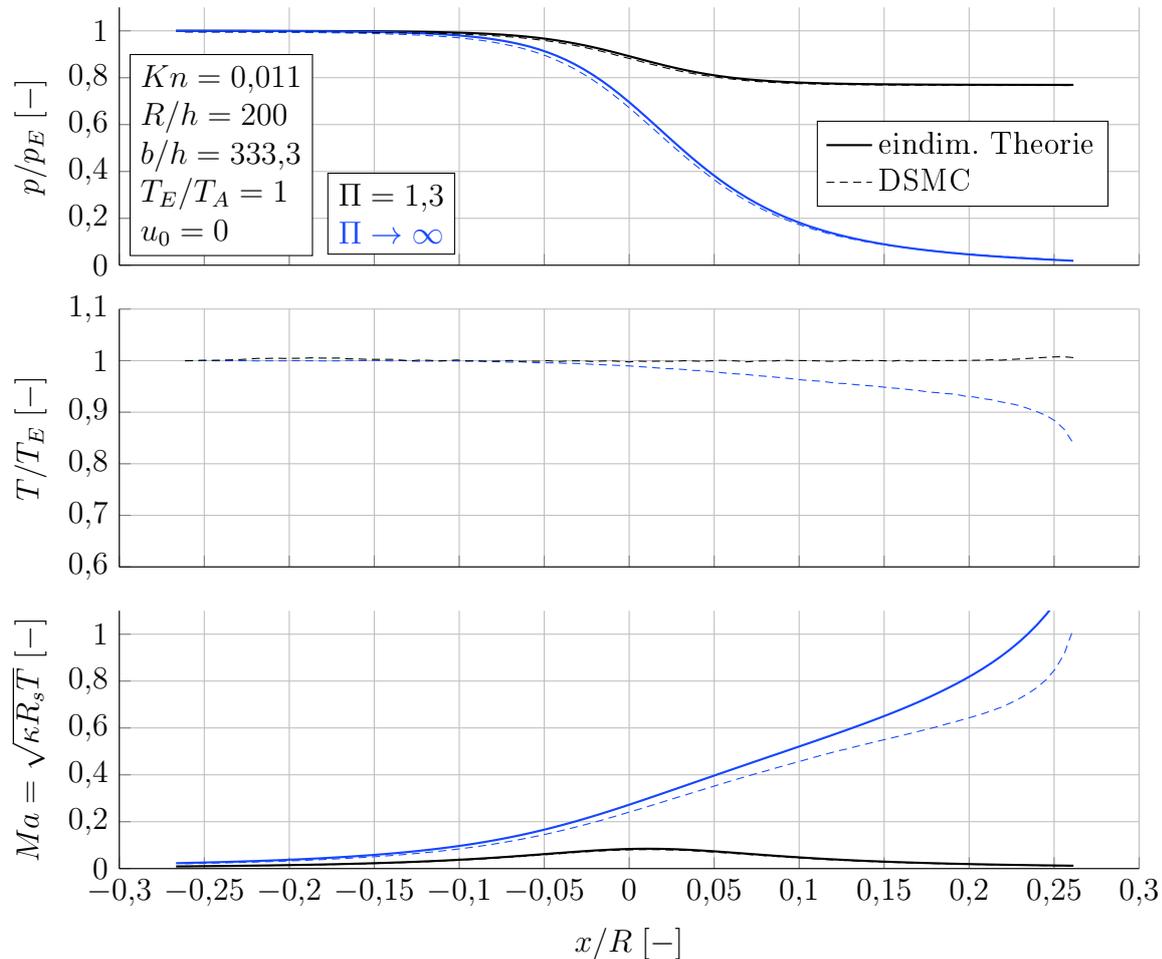


Abbildung 8.4: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druck-, Temperatur- und Machzahlverläufe bei einem Radiuspalt  $R/h = 200$  für verschiedene Druckverhältnisse.

hältnismäßig kleines Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  bei einer Knudsenzahl im Grenzbereich zur Kontinuumsströmung  $Kn = 0,011$  untersucht.

Der mit der DSMC-Methode berechnete Machzahlverlauf bei einem sehr großen Druckverhältnis zeigt, dass bei einer kleinen Knudsenzahl  $Kn = 0,011$  die Machzahl entlang des Spaltes stetig zunimmt und am Austritt des Spaltes knapp oberhalb einer Machzahl von  $Ma = 1$  liegt. Aufgrund der stark reibungsbehafteten Strömung treten im engsten Querschnitt nur sehr kleine Machzahlen  $Ma < 0,3$  auf. Die eindimensionale Theorie zeigt im Bereich des Austritts, aufgrund der fehlenden Abbildung der Kompressibilität, deutlich größere Machzahlen. Bei einem vergleichsweise kleinen Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  beschleunigt die Strömung bis knapp hinter den engsten Querschnitt. Aufgrund einer unterkritischen Strömung und der nachfolgenden Aufweitung des Querschnitts wird die Strömung im weiteren Verlauf verzögert. Die eindimensionale Theorie

kann den Machzahlverlauf bei einem kleinen Druckverhältnis sehr gut abbilden, da insgesamt nur sehr kleine Machzahlen auftreten.

Die durch die DSMC-Methode berechneten Verläufe der Temperatur können Aufschluss über die Zulässigkeit der Annahme einer Strömung mit vollständigem Wärmeübergang bei der eindimensionalen Theorie geben. Im Bereich des Eintritts bis zum engsten Strömungsquerschnitt des Spaltes kann keine nennenswerte Abweichung der Gastemperatur von der Wandtemperatur beobachtet werden. Kleine Machzahlen bewirken nur eine sehr kleine Änderung der Temperatur. Bei einem großen Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow \infty$  kommt es im divergierenden Teil des Spaltes aufgrund der großen Machzahlen zu einer Absenkung der Temperatur, die nicht durch einen Wärmeübergang zwischen Gas und Wand ausgeglichen werden kann. Die Annahme einer Strömung mit vollständigem Wärmeübergang für die eindimensionale Theorie ist in diesem Bereich nicht mehr gerechtfertigt. Bei einem kleinen Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  kann über den gesamten Bereich des Spaltes von einer isothermen Strömung ausgegangen werden.

Die durch die DSMC-Methode und die eindimensionalen Theorie berechneten Druckverläufe weisen bei einem kleinen Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  dementsprechend eine sehr gute Übereinstimmung auf. Der berechnete Massenstrom beider Theorien deckt sich im Bereich von 5 %. Bei einem großen Druckverhältnis  $\Pi \rightarrow \infty$  kann ein unterschiedlicher Druckverlauf zwischen beiden Theorien beobachtet werden. Dementsprechend kommt es im Spaltmassenstrom zu einer Abweichung von 15 %.

## 8.4 Temperaturverhältnis

Durch einen Temperaturgradienten wird der Effekt der thermischen Kriechströmung hervorgerufen. In Kapitel 7.5 wurden Ergebnisse einer reinen thermischen Kriechströmung vorgestellt. Im Weiteren wird untersucht, ob die eindimensionale Theorie auch eine kombinierte Strömung aus thermischer Kriechströmung und Poiseuille-Strömung abbilden kann. Hierbei wird eine Strömung untersucht, die typischerweise in Schraubenspindelvakuumumpumpen zu erwarten ist, in denen die thermische Kriechströmung und Poiseuille-Strömung entgegengesetzt wirken ( $\Pi > 1 \wedge T_E/T_A > 1$ ). Für die folgenden Untersuchungen wird eine lineare Temperaturänderung der umgebenen Spaltberandung vom Ein- zu Austritt vorgegeben. Die Wandtemperatur am Ein- und Austritt des Spaltes entspricht dabei der Gastemperatur am Ein- und Austritt.

**Abbildung 8.5** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für ein Temperaturverhältnis  $T_E/T_A = 1$  und  $T_E/T_A = 1,12$  für den planparallelen Spalt  $L/h = 66,6$ . Das Druckverhältnis beträgt für beide Fälle  $\Pi = 1,1$ . Die eindimensionale Theorie zeigt deutlich, dass ein Einfluss der thermischen Kriechströmung im Bereich großer Knudsenzahlen zu erwarten ist. Die in diesem Fall der Poiseuille-Strömung entgegengesetzte thermische Kriechströmung  $T_E/T_A = 1,12$  führt im Bereich der Übergangs-

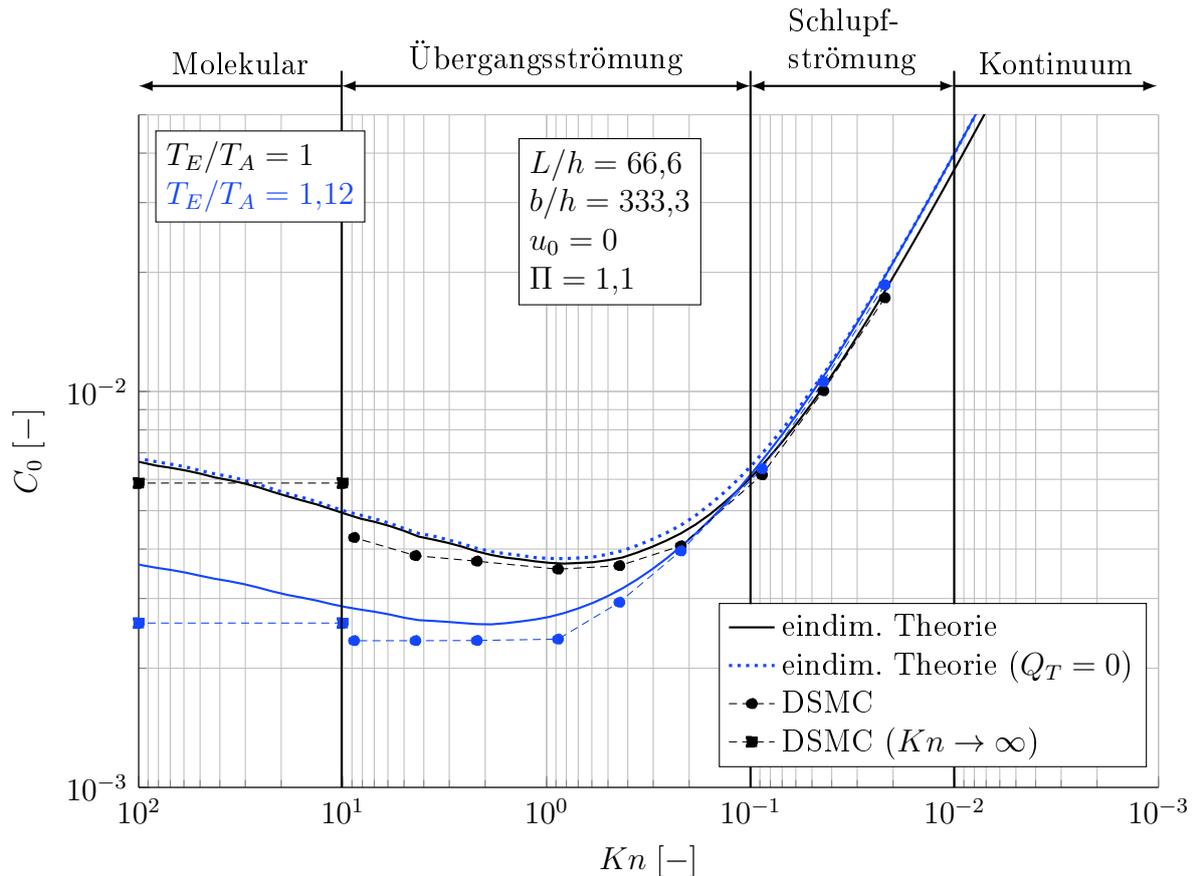


Abbildung 8.5: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Temperaturverhältnisse  $T_E/T_A$  bei einem Druckverhältnis  $\Pi = 1,1$ . Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie ohne Berücksichtigung einer thermischen Kriechströmung ( $Q_T = 0$ ) dargestellt.

strömung und der molekularen Strömung zu einer Verringerung des normierten Massenstroms im Vergleich zur Strömung bei konstanter Temperatur  $T_E/T_A = 1$ . Im Bereich der Schlupf- und Kontinuumsströmung kommt es hingegen zu einem leicht erhöhten normierten Massenstrom für den Fall einer Strömung bei einem Temperaturverhältnis  $T_E/T_A = 1,12$ . Um den Einfluss der Temperaturänderung auf die reine Poiseuille-Strömung zu untersuchen, wird der mithilfe der eindimensionalen Theorie berechnete normierte Massenstrom ohne Berücksichtigung der thermischen Kriechströmung dargestellt. Um dies zu erreichen, wird die in Gleichung 5.25 berücksichtigte Flussrate der thermischen Kriechströmung stets zu null gewählt ( $Q_T = 0$ ). Die Ergebnisse dieser so modifizierten Gleichung zeigen, dass der normierte Massenstrom im Bereich großer Knudsenzahlen der Übergangs- und molekularen Strömung weitgehend dem normierten Massenstrom bei einer Strömung ohne Temperaturgradienten  $T_E/T_A = 1$  entspricht. Daraus kann geschlossen werden, dass in diesem Bereich eine Änderung der Temperatur nur einen sehr kleinen Einfluss auf die Poiseuille-Strömung besitzt. Im Bereich der

Schlupfströmung entspricht der normierte Massenstrom der modifizierten Gleichung ( $Q_T = 0$ ) den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie bei  $T_E/T_A = 1,12$ . In diesem Bereich kann also kein Einfluss der thermischen Kriechströmung beobachtet werden. Der bei einem Temperaturverhältnis von  $T_E/T_A = 1,12$  größere normierte Massenstrom im Vergleich zu einem Temperaturverhältnis von  $T_E/T_A = 1$  wird hier durch eine Kühlung der Strömung und somit eine Verringerung der Reibung verursacht.

Mithilfe der DSMC-Methode wird ein identischer qualitativer Verlauf des normierten Massenstroms in Abhängigkeit des Temperaturverhältnisses abgebildet. Die Ergebnisse der DSMC-Methode zeigen ebenfalls eine deutliche Verringerung des normierten Massenstroms im Bereich der Übergangs- und molekularen Strömung, wenn eine thermische Kriechströmung  $T_E/T_A = 1,12$  entgegen des Druckverhältnisses berücksichtigt wird. Der mit der DSMC-Methode berechnete normierte Massenstrom fällt im Vergleich zur eindimensionalen Theorie insgesamt kleiner aus. Die größte Differenz kann im Bereich der molekularen Strömung beobachtet werden. Die Simulation einer freien molekularen Strömung ( $Kn \rightarrow \infty$ ) mithilfe der DSMC-Methode zeigt einen deutlich kleineren normierten Massenstrom im Vergleich zur eindimensionalen Theorie. Dies kann unabhängig vom Auftreten einer thermischen Kriechströmung beobachtet werden und liegt an der fehlenden Abbildung der Zu- und Abströmverluste des planparallelen Spalt bei der eindimensionalen Theorie.

Die Ergebnisse der gezeigten Variation des Temperaturverhältnisses deuten an, dass die eindimensionale Theorie zur Simulation der thermischen Kriechströmung in Spalten von Vakuumpumpen uneingeschränkt genutzt werden kann. Um die Relevanz der thermischen Kriechströmung in Spalten von Vakuumpumpen herauszustellen, wird im Folgenden eine Variation des Druckverhältnisses bei einem konstanten Temperaturverhältnis  $T_E/T_A = 1,12$  durchgeführt. **Abbildung 8.6** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für drei verschiedene Druckverhältnisse. Der durch die eindimensionale Theorie berechnete normierte Massenstrom zeigt eine deutliche Zunahme mit steigendem Druckverhältnis über den gesamten Bereich der Knudsenzahl. Um den Anteil der thermischen Kriechströmung herausstellen zu können, wird auch in diesem Fall der mit der eindimensionalen Theorie berechnete normierte Massenstrom angegeben, wenn die thermische Kriechströmung vernachlässigt wird ( $Q_T = 0$ ). Bei einem kleinen Druckverhältnis  $\Pi = 1,1$  kann durch einen Vergleich der Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der modifizierten Gleichung ( $Q_T = 0$ ) noch deutlich der Einfluss der thermischen Kriechströmung im Bereich der Übergangs- und molekularen Strömung beobachtet werden. Da die thermische Kriechströmung der Poiseuille-Strömung entgegengesetzt ist, verringert sich der normierte Massenstrom bei Berücksichtigung einer thermischen Kriechströmung. Bei einer Erhöhung auf ein Druckverhältnis  $\Pi = 1,3$  wird der Einfluss der Poiseuille-Strömung insgesamt vergrößert. Die thermische Kriechströmung übt bei einem Vergleich mit der modifizierten Gleichung

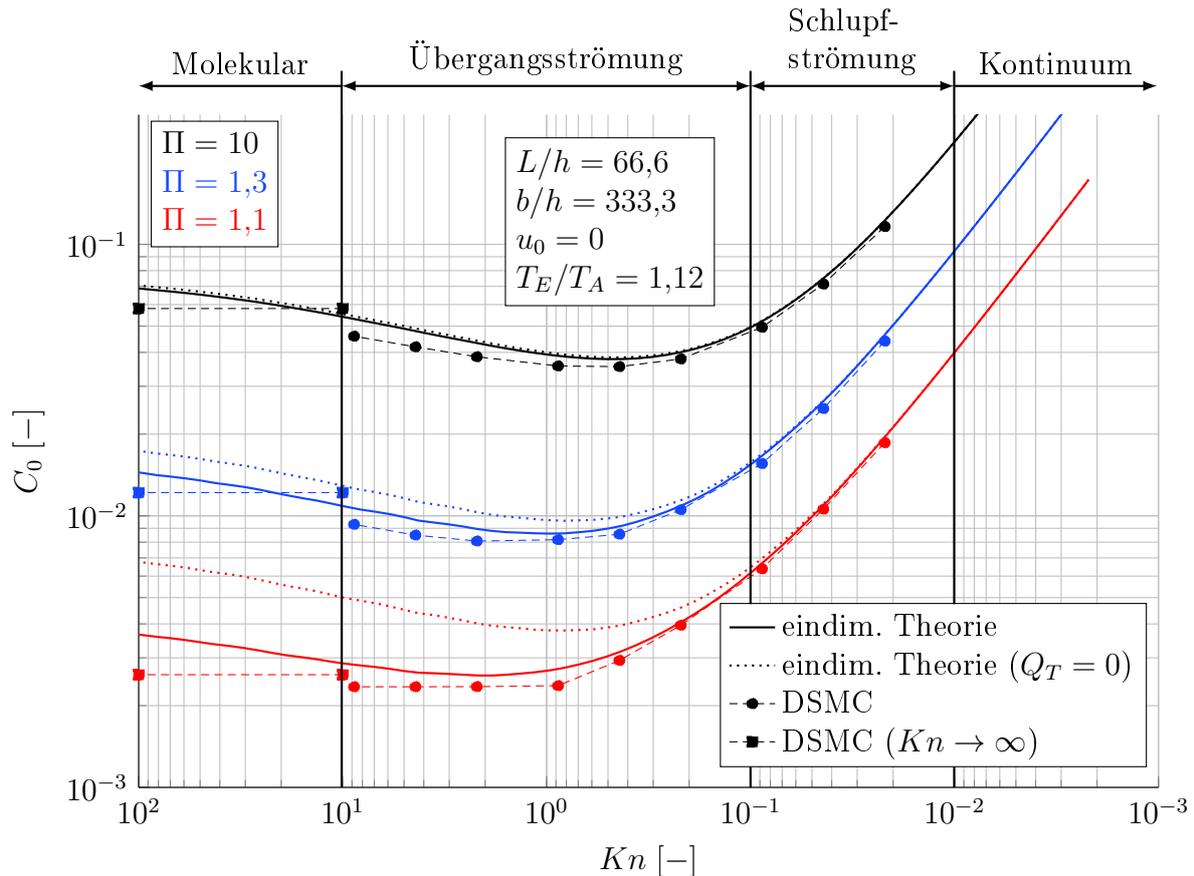


Abbildung 8.6: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Druckverhältnisse  $\Pi$  bei einem Temperaturverhältnis  $T_E/T_A = 1,12$ . Zum Vergleich sind auch die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie ohne Berücksichtigung einer thermischen Kriechströmung ( $Q_T = 0$ ) dargestellt.

( $Q_T = 0$ ) nur noch einen geringen Einfluss auf den normierten Massenstrom aus. Bei einer weiteren Erhöhung des Druckverhältnisses ( $\Pi = 10$ ) stimmen die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der modifizierten Gleichung über den gesamten Bereich der Knudsenzahl überein. Ein signifikanter Einfluss der thermischen Kriechströmung auf den Massenstrom kann hier nicht mehr beobachtet werden.

Die Simulation der Strömung mithilfe der DSMC-Methode zeigt bei der Variation des Druckverhältnisses insgesamt eine gute Übereinstimmung mit der eindimensionalen Theorie. Analog zu Abbildung 8.5 ergeben sich geringere normierte Massenströme im Bereich großer Knudsenzahlen im Vergleich zur eindimensionalen Theorie. Die größte Differenz ergibt sich unabhängig vom Druckverhältnis im Bereich der molekularen Strömung, was erneut durch die fehlende Abbildung der Zu- und Abströmverluste erklärt werden kann.

## 8.5 Längen zu Höhenverhältnis

Ein Vergleich der Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der DSMC-Methode zeigt eine gute Übereinstimmung für große Längen zu Höhenverhältnisse und Abweichungen für kleine Längen zu Höhenverhältnisse (vgl. Abbildung 7.11). Bei der eindimensionalen Theorie fehlen Ansätze für zwei wesentliche Verlustmechanismen. Dies betrifft die Einlaufverluste, die am Eintritt des Spaltes durch eine nicht eingelaufene Strömung verursacht werden. Hierzu zählen beispielsweise ein nicht eingelaufenes Strömungsprofil oder eine lokale Strömungsablösung. Weiterhin kann es aufgrund einer kompressiblen Strömung und der damit einhergehenden Änderung der Dichte auch im weiteren Verlauf der Spaltströmung zu einem nicht eingelaufenem Strömungsprofil und somit einer veränderten Situation des Reibungsverlustes kommen [Mü13]. Zusätzlich werden Zu- und Abströmverluste nicht berücksichtigt, die vor dem Eintritt und hinter dem Austritt des Spaltes z.B. durch eine Umlenkung der Strömung oder einer Scherströmung verursacht werden.

Müller [Mü13] arbeitet den Einfluss der Einlaufverluste mittels Strömungssimulationen heraus und stellt eine Abhängigkeit der Verluste von der Reynoldszahl auf. Hierbei zeigt sich, dass die Einlauflänge mit fallender Reynoldszahl abnimmt. Im Allgemeinen kann davon ausgegangen werden, dass der Einlaufverlust bei Knudsenzahlen  $Kn > 10^{-2}$  nur einen kleinen Einfluss hat. Auch werden die zusätzlichen Reibungsverluste in Abhängigkeit des Machzahlgradienten durch Müller [Mü13] herausgearbeitet, die aufgrund einer kompressiblen Strömung entstehen.

Um den Einfluss der Zu- und Abströmverluste beurteilen zu können, zeigt **Abbildung 8.7** die normierten Druckverläufe als Funktion der normierten x-Koordinate für die Längen zu Höhenverhältnisse  $L/h = 16,6$  und  $L/h = 133,3$ . In diesem Fall wird die Strömung beispielhaft bei einer Knudsenzahl von  $Kn = 0,44$  und einem Druckverhältnis  $\Pi = 10$  betrachtet. Der für beide Längen zu Höhenverhältnisse mit dem eindimensionalen Modell berechnete dimensionslose Druckverlauf ist identisch, da nur lineare Terme berücksichtigt werden. Bei dieser Knudsenzahl variiert die Flussrate in Spaltrichtung nur unwesentlich, sodass der Druckverlauf linear ist.

Bei einem kleinen Längen zu Höhenverhältnis ( $L/h = 16,6$ ) zeigt sich in den Simulationsergebnissen der DSMC-Methode eine deutliche Zunahme des Druckgradienten vor dem Eintritt und hinter dem Austritt des Spaltes, der durch die Zu- und Abströmung bedingt ist. Dies kann durch die eindimensionale Theorie nicht abgebildet werden, was zu unterschiedlichen Druckgradienten im Spalt und somit unterschiedlichen Massenströmen führt. Bei einem großen Längen zu Höhenverhältnis  $L/h = 133,3$  fallen die Druckverluste vor dem Spalteintritt und hinter dem Spaltaustritt vergleichsweise geringer aus. In diesem Fall stimmen die durch die DSMC-Methode und die eindimensionale Theorie ermittelten Druckgradienten und somit auch der ermittelte Massenstrom gut überein.

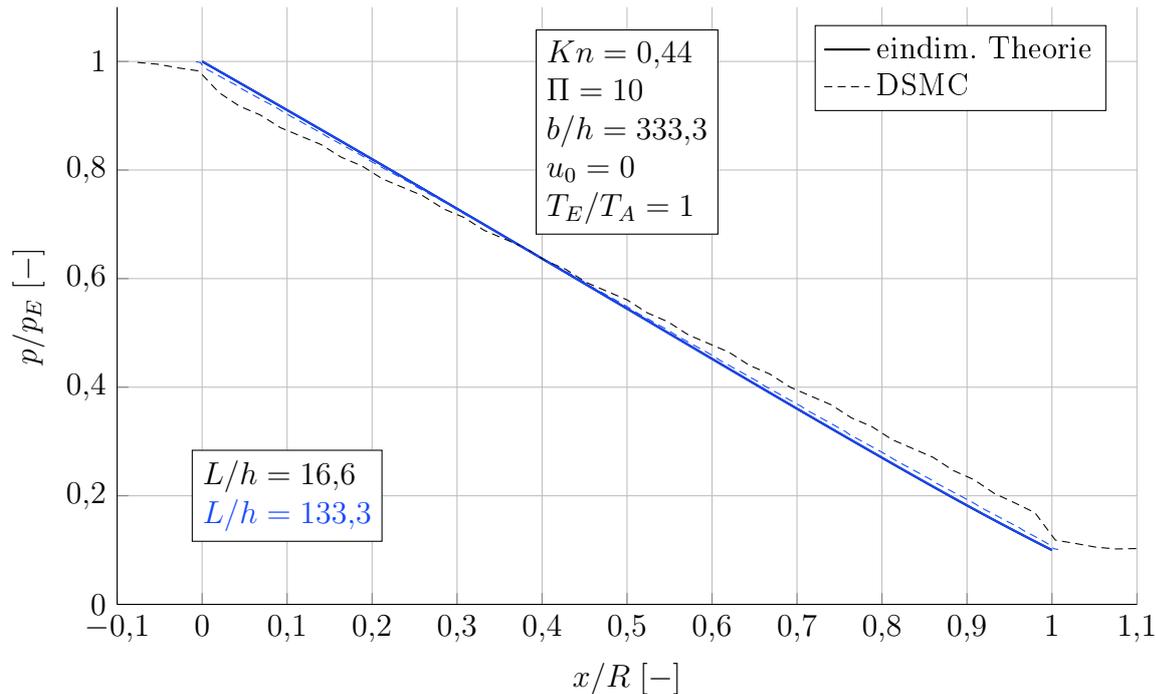


Abbildung 8.7: Über den Spaltquerschnitt gemittelte Druckverläufe des planparallelen Spaltes für verschiedene Längen zu Höhenverhältnisse.

## 8.6 Radius zu Höhenverhältnis

Eine Untersuchung des Radius zu Höhenverhältnisses wird in Kapitel 7.4.3 durchgeführt. Die Übereinstimmung der DSMC-Methode und des eindimensionalen Modells ist im Rahmen des dort variierten Radius zu Höhenverhältnisses sehr gut, auch bei der Berücksichtigung einer bewegten Berandung. Es ist davon auszugehen, dass mit kleineren Radius zu Höhenverhältnissen eine Abweichung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode zu beobachten ist. Gründe hierzu finden sich zum einen darin, dass der Spalt durch Abschnitte konstanten Querschnitts approximiert wird. Auf diese Weise können die Effekte einer zweidimensionalen Strömung nicht erfasst werden. Auch ist davon auszugehen, dass bei kleinen Radius zu Höhenverhältnissen, durch eine verringerte Reibung, höhere Reynolds- und Machzahlen auftreten.

Eine Variation des Radius zu Höhenverhältnisses wird in **Abbildung 8.8** gezeigt, wobei der Fokus auf kleine Werte für diesen Parameter gelegt wird. Ausgehend von dem bereits in **Abbildung 7.21** gezeigten Radius zu Höhenverhältnis  $R/h = 250$  wird dieser Parameter in zwei Schritten  $R/h = 111$  und  $R/h = 16,6$  variiert. Das Druckverhältnis beträgt stets  $\Pi = 10$ . Die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie zeigen, dass der normierte Massenstrom über den gesamten Bereich der Knudsenzahl für kleinere Werte des Radius zu Höhenverhältnisses größere Werte annimmt. Der Spalt besitzt hier einen insgesamt größeren Strömungsquerschnitt über eine definierte Länge, was zu einer kleineren Drosselwirkung führt.

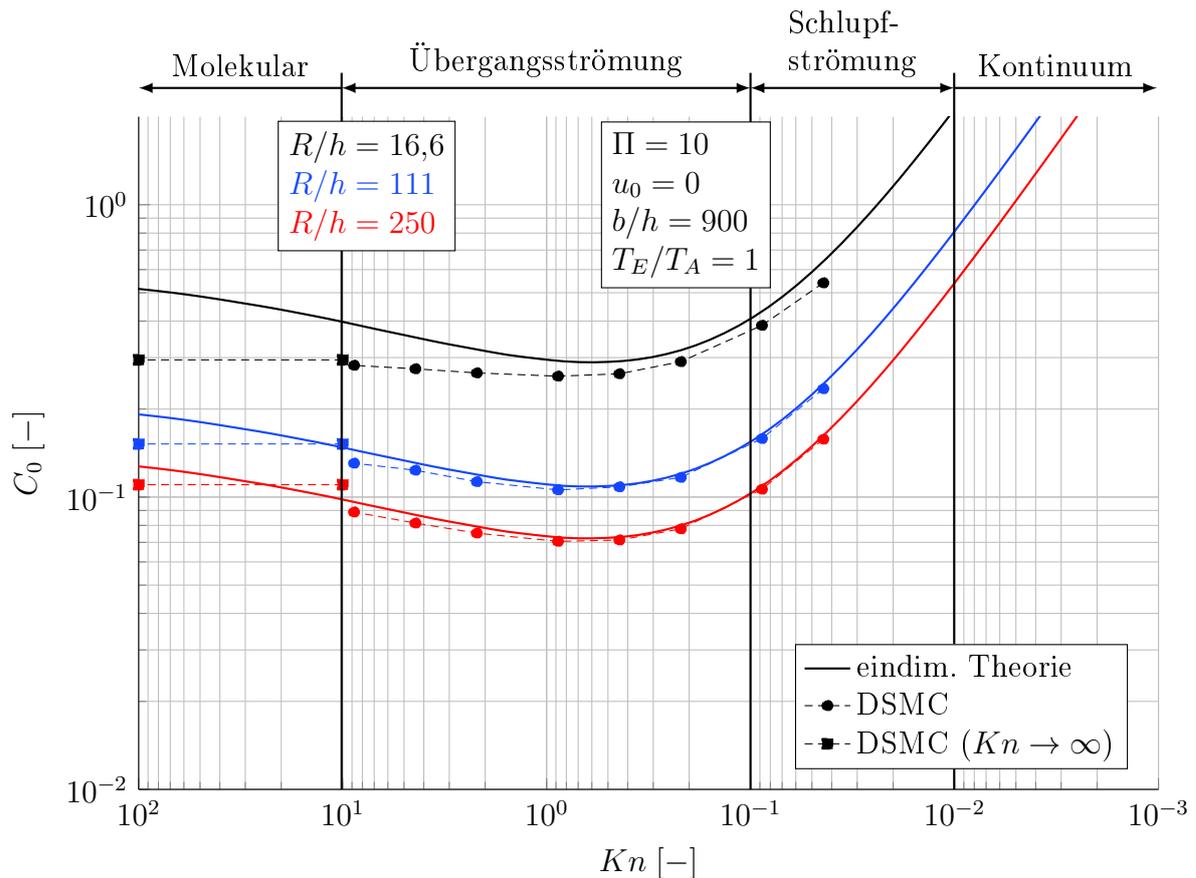


Abbildung 8.8: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für verschiedene Radius zu Höhenverhältnisse.

Der Vergleich zwischen den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie und der DSMC-Methode zeigt für große Radius zu Höhenverhältnisse  $R/h = 250$  und  $R/h = 111$  eine gute Übereinstimmung. Im Bereich sehr großer Knudsenzahlen kommt es zu kleineren Abweichungen zwischen beiden Methoden. Bei einem Radius zu Höhenverhältnis  $R/h = 16,6$  kann eine Abweichung über den gesamten Bereich der Knudsenzahl beobachtet werden. Auch bei diesem Radius zu Höhenverhältnis können die größten Abweichungen bei sehr großen Knudsenzahlen beobachtet werden. Das Knudsenminimum ist bei den mit der DSMC-Methode berechneten Ergebnissen nur sehr schwach ausgeprägt.

Insgesamt zeigt sich, dass die eindimensionale Theorie bei kleinen Radius zu Höhenverhältnissen vor allem im Bereich großer Knudsenzahlen Abweichungen zur DSMC-Methode aufweist. Der Fehler durch die Approximation des Spaltes über Abschnitte konstanten Querschnitts und somit der Vernachlässigung einer schrägen Wand ist hier am größten. Insgesamt müssen die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie bei kleinen Radius zu Höhenverhältnissen kritisch hinterfragt werden.

## 8.7 Variation der Gastemperatur

Bei allen bisher gezeigten Variationen wird davon ausgegangen, dass die Gastemperaturen am Spalteintritt bzw. Spaltaustritt und die Wandtemperaturen am Ein- und Austritt identisch sind. Bei der Dimensionsanalyse in Kapitel 3.2.1 wird von einer Strömung mit vollständigem Wärmeübergang zwischen Gas und Wand in jedem Querschnitt ausgegangen, weshalb hier keine Kennzahl existiert, die ein Verhältnis aus Berandungstemperatur und Ein- und Austrittstemperatur des Gases beschreibt. Bei einer Vakuumpumpe ist jedoch davon auszugehen, dass die Gastemperaturen in den Arbeitskammern von den Temperaturen der Spaltberandung abweichen. Um den Einfluss des Wärmeübergangs auf den Spaltmassenstrom abschätzen zu können, werden DSMC-Simulationen durchgeführt, bei denen eine von der Eintrittstemperatur des Gases  $T_E$  abweichende Berandungstemperatur  $T_B$  vorgegeben wird (vgl. Abbildung 3.2).

**Abbildung 8.9** zeigt den normierten Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für den Radiuspalt  $R/h = 250$  bei stehender Berandung  $u_0 = 0$ . Das Druckverhältnis wird

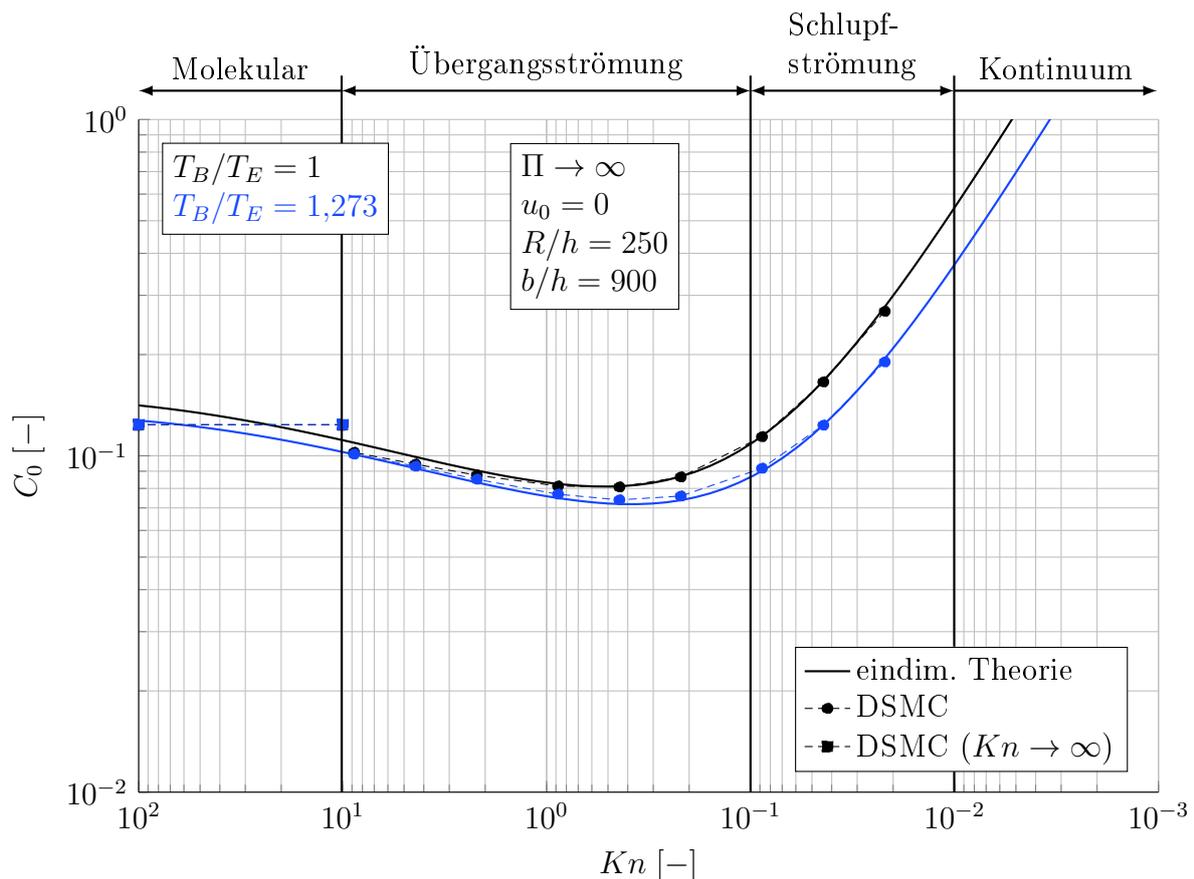


Abbildung 8.9: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für unterschiedliche Berandungstemperaturen beim Radiuspalt.

für alle Simulationen sehr groß gewählt ( $\Pi \rightarrow \infty$ ), sodass von einem vernachlässigbar kleinen Austrittsdruck ausgegangen werden kann.

Bei der DSMC-Methode werden zwei Simulationsergebnisse miteinander verglichen. Das Verhältnis  $T_B/T_E = 1$  entspricht dem Standardfall, bei dem die Gastemperatur und Berandungstemperatur am Eintritt identisch sind. Im Vergleich hierzu wird der normierte Massenstrom angegeben, wenn ein Temperaturverhältnis  $T_B/T_E = 1,273$  vorgegeben wird. Hierbei wird eine Wandtemperatur für alle Berandungen entsprechend dem angegebenen Verhältnis vorgegeben. Die Ergebnisse der DSMC-Methode zeigen einen Einfluss der geänderten Berandungstemperatur im Bereich der Schlupfströmung. Die erhöhte Berandungstemperatur führt zu einem Wärmeeintrag in die Strömung und somit zu einer insgesamt vergrößerten Gastemperatur im Spalt. Die geringere Gasdichte führt so zu einem kleineren Massenstrom. Mit zunehmender Knudenzahl verringert sich der Unterschied der normierten Massenströme zwischen den Fällen der wärmeren Berandung  $T_B/T_E = 1,273$  und identischer Temperaturen  $T_B/T_E = 1$ . Der Grenzfall einer freien molekularen Strömung ( $Kn \rightarrow \infty$ ) zeigt, dass der normierte Massenstrom unabhängig von der Berandungstemperatur ist. Ohne Beteiligung einer intermolekularen Wechselwirkung ist der Massenstrom lediglich eine Funktion der Ein- und Austrittszustände des Gases.

Bei Nutzung der eindimensionalen Theorie ergibt sich die Schwierigkeit, dass grundsätzlich von einem vollständigem Wärmeübergang in jedem Querschnitt ausgegangen wird. Aus diesem Grund kann hier keine von der Berandungstemperatur abweichende Gastemperatur im Spalt vorgegeben werden. Um die Strömung bei einem Temperaturverhältnis  $T_B/T_E = 1,273$  berechnen zu können, wird der Massenstrom mit einer Gastemperatur berechnet, die der Berandungstemperatur entspricht. Die Normierung der Ergebnisse findet unverändert weiterhin mit der Eintrittstemperatur des Gases nach Gleichung 3.15 und 3.20 statt. Dies entspricht dem Grenzfall eines idealen Wärmeübergangs am Eintritt der Strömung. Zum Vergleich werden auch die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie bei identischen Temperaturen  $T_B/T_E = 1$  angegeben. Im Bereich der Schlupfströmung stimmen die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit den Ergebnissen der DSMC-Methode bei einem Temperaturverhältnis  $T_B/T_E = 1,273$  sehr gut überein. Analog ergibt sich eine gute Übereinstimmung für den Fall identischer Temperaturen  $T_B/T_E = 1$ . Hieraus kann geschlossen werden, dass die Annahme eines idealen Wärmeübergangs in diesem Bereich der Knudsenzahlen sehr gut zutrifft. Bei großen Knudsenzahlen zeigt sich bei der eindimensionalen Theorie im Gegensatz zu den Ergebnissen der DSMC-Methode ein Unterschied im normierten Massenstrom für beide gewählten Temperaturverhältnisse. Mit den gewählten Randbedingungen und der beschriebenen Normierung bei den Simulationsergebnissen der eindimensionalen Theorie kann also nicht abgebildet werden, dass der normierte Massenstrom im Bereich der molekularen Strömung unabhängig von der Berandungstemperatur ist. In diesem Bereich stimmen die Ergebnisse der DSMC-Methode für beide Fälle  $T_B/T_E = 1$  und  $T_B/T_E = 1,273$  gut mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie bei  $T_B/T_E = 1,273$  überein. Wie alle bisherigen Simulationen des Radiusspalt es zeigt

haben, ist diese Übereinstimmung vielmehr zufällig. Bei großen Knudsenzahlen ergeben sich durch die eindimensionale Theorie tendenziell zu große normierte Massenströme aufgrund des in Strömungsrichtung veränderlichen Querschnitts.

Für den planparallelen Spalt wird eine identische Untersuchung durchgeführt. **Abbildung 8.10** zeigt die Ergebnisse mit identischen Randbedingungen für den planparallelen Spalt mit einem Längen zu Höhenverhältnis  $L/h = 66,6$ . Die Ergebnisse

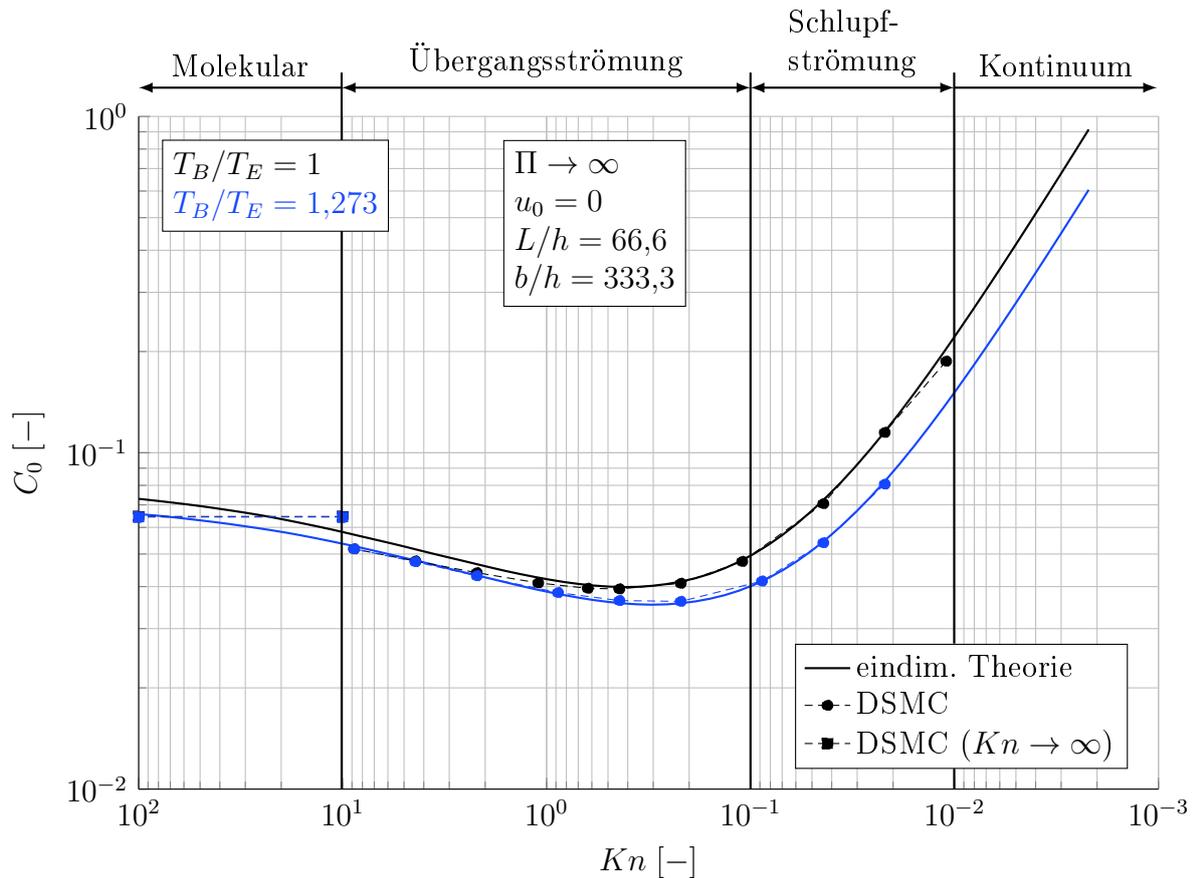


Abbildung 8.10: Normierter Massenstrom als Funktion der Knudsenzahl für unterschiedliche Berandungstemperaturen beim planparallelen Spalt.

der DSMC-Methode zeigen auch bei einem planparallelen Spalt einen Unterschied im normierten Massenstrom im Bereich der Schlupfströmung, wenn unterschiedliche Berandungstemperaturen berücksichtigt werden. Mit zunehmender Knudsenzahl kommt es zu einem normierten Massenstrom, der unabhängig von der Berandungstemperatur ist. Der Grenzfall der freien molekularen Strömung  $Kn \rightarrow \infty$  zeigt auch beim planparallelen Spalt ein von der Berandungstemperatur unabhängiges Ergebnis. Die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie zeigen im Bereich der Schlupfströmung eine sehr gute Übereinstimmung mit der DSMC-Methode für beide Temperaturverhältnisse  $T_B/T_E = 1,273$  und  $T_B/T_E = 1$ . Im Bereich der Übergangsströmung und der molekularen Strömung zeigt sich im Gegensatz zur DSMC-Methode eine Abhängigkeit

des normierten Massenstroms von der Berandungstemperatur. Auch hier können die gewählten Randbedingungen mit der beschriebenen Normierung der Ergebnisse bei der eindimensionalen Theorie nicht den von der Berandungstemperatur unabhängigen normierten Massenstrom bei großen Knudsenzahlen abbilden. Die Ergebnisse der DSMC-Methode stimmen bei großen Knudsenzahlen mit den Ergebnissen der eindimensionalen Theorie für ein Temperaturverhältnis  $T_B/T_E = 1,273$  überein. Dies ist auch bei der Betrachtung des planparallelen Spaltes vielmehr zufällig. Alle bisherigen Simulationen haben gezeigt, dass der berechnete normierte Massenstrom der eindimensionalen Theorie aufgrund der fehlenden Abbildung von Zu- und Abströmverluste bei großen Knudsenzahlen zu große Werte annimmt.

Zusammengefasst kann festgestellt werden, dass eine von der Eintrittstemperatur des Gases vergrößerte Berandungstemperatur am geometrischen Eintritt des Spaltes im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung zu einem reduzierten normierten Massenstrom führt. Anhand der DSMC-Simulationen kann geschlossen werden, dass bei kleinen Knudsenzahlen im Bereich der Schlupfströmung in guter Näherung von einem idealen Wärmeübergang ausgegangen werden kann. Der Bereich der molekularen Strömung zeichnet sich dadurch aus, dass der normierte Massenstrom unabhängig von der Berandungstemperatur ist. Im Bereich der Übergangsströmung findet ein stetiger Übergang zwischen beiden Grenzfällen statt.

## 8.8 Fazit zur Ermittlung der Grenzen

Die in Kapitel 8 mithilfe der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie durchgeführte Variation der dimensionslosen Kennzahlen soll dazu dienen die Grenzen der eindimensionalen Theorie in Abhängigkeit dieser Kennzahlen zu bestimmen. Da die dimensionslosen Kennzahlen immer einen wechselseitigen Einfluss auf den normierten Massenstrom haben, sind allgemeingültige Aussagen bezüglich der Grenzen nur schwer zu treffen. Weiterhin ist die Nennung einer Grenze auch abhängig von der gewünschten Genauigkeit der Simulation. Im Folgenden sollen Empfehlungen für alle dimensionslosen Kennzahlen gegeben werden, in welchem Bereich die eindimensionale Theorie genutzt werden kann. Sofern bekannt, sollen wechselseitige Abhängigkeiten der dimensionslosen Kennzahlen gegeben werden.

Den von der **Knudsenzahl** abhängigen Verlauf des normierten Massenstroms kann die eindimensionale Theorie in einem großen Bereich gut abbilden. Der untere Grenzwert der Knudsenzahl wird im Wesentlichen durch den Einfluss der Kompressibilität auf die Strömung gegeben. Bei großen Druckverhältnissen ( $\Pi > 4$ ) ergeben sich gute Ergebnisse der eindimensionalen Theorie für Knudsenzahlen bis  $Kn = 2 \cdot 10^{-2}$ . Bei kleinen Druckverhältnissen ( $\Pi < 1,3$ ) tritt der Einfluss der Kompressibilität erst bei kleineren Knudsenzahlen auf. Hier ergibt sich als untere Grenze der Knudsenzahl  $Kn = 5 \cdot 10^{-3}$ .

Die obere Grenze der Knudsenzahl ist hauptsächlich von der Geometrie des Spaltes abhängig. Die Analyse des planparallelen Spaltes hat ergeben, dass die fehlende Abbildung der Zu- und Abströmverluste bei der eindimensionalen Theorie zu einem Fehler bei großen Knudsenzahlen führt. Aus diesem Grund ist die obere Grenze der Knudsenzahl beim planparallelen Spalt auch abhängig vom Längen zu Höhenverhältnis  $L/h$ . Bei einem kleinen Längen zu Höhenverhältnis von  $L/h = 33,3$  liegt die obere Grenze der Knudsenzahl bereits bei  $Kn = 1$ . Bei einem sehr großen Längen zu Höhenverhältnis von  $L/h = 133,3$  ist kein oberer Grenzwert erkennbar, sodass die eindimensionale Theorie auch für sehr große Knudsenzahlen  $Kn \rightarrow \infty$  benutzt werden kann. Die Analyse des Radiusspaltes hat ergeben, dass es bei großen Knudsenzahlen aufgrund des in Strömungsrichtung veränderlichen Querschnitts zu einer fehlerhaften Berechnung des Massenstroms kommt. Die obere Grenze der Knudsenzahl beträgt hier  $Kn = 10$  für eine stehende Berandung  $u_0 = 0$ . Wird eine bewegte Berandung betrachtet verschiebt sich die obere Grenze hin zu größeren Knudsenzahlen.

Den Einfluss der **normierten Berandungsgeschwindigkeit** auf den normierten Massenstrom beim Radiusspalt kann die eindimensionale Methode in einem großen Bereich gut abbilden. Die obere Grenze der normierten Berandungsgeschwindigkeit wird weniger durch den Einfluss anderer dimensionsloser Kennzahlen gegeben, als durch die Geometrie des Spaltes. So hat sich gezeigt, dass auch bei großen normierten Berandungsgeschwindigkeiten von  $|u_0| = 2,44 \cdot 10^{-1}$  ( $|u_B| = 100 \text{ m/s}$  bei Luft mit einer Temperatur von  $293,15 \text{ K}$ ) gute Ergebnisse mithilfe der eindimensionalen Theorie erzielt werden können. Hierbei muss jedoch ein sehr großes Simulationsgebiet des Radiusspaltes gewählt werden, um alle relevanten Strömungsvorgänge zu erfassen. Im Hinblick auf die Simulation einer Vakuumpumpe mithilfe eines Kammermodellverfahrens muss hier hinterfragt werden, inwieweit die Abstraktion in Spalte und Arbeitskammern mit einem homogenen Fluidzustand zulässig ist.

Die Variation des **Druckverhältnisses** zeigt, dass die eindimensionale Theorie bei dieser Kennzahl zunächst ohne Einschränkungen verwendet werden darf. Begrenzt wird dies lediglich durch den bereits genannten Einfluss der Kompressibilität der Strömung bei kleinen Knudsenzahlen, der durch die eindimensionale Theorie nicht erfasst wird (siehe Erläuterung Knudsenzahl).

Eine thermische Kriechströmung aufgrund eines **Temperaturverhältnisses**  $T_E/T_A$  wird bei den in dieser Arbeit gezeigten Simulationen ebenfalls sehr gut abgebildet. Dies gilt auch für eine kombinierte Strömung aus thermischer Kriechströmung und Poiseuille-Strömung. Hierbei hat sich gezeigt, dass sich bis zu einem Temperaturverhältnis von  $T_E/T_A = 1,12$  gute Ergebnisse durch die eindimensionale Theorie ermitteln lassen.

Wie bereits beschrieben, werden die Zu- und Abströmverluste beim planparallelen Spalt nicht berücksichtigt, was bei kleinen Werten des **Längen zu Höhenverhältnisses** zu

Abweichungen zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode führt. Für ein Längen zu Höhenverhältnis  $L/h < 66,6$  lassen sich über den gesamten Bereich der Knudsenzahl Abweichungen zwischen beiden Theorien beobachten. Bei größeren Werten des Längen zu Höhenverhältnisses treten Abweichungen zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode nur im Bereich von Knudsenzahlen  $Kn > 1$  auf. Ab einem Längen zu Höhenverhältnis von  $L/h = 133,3$  stimmen die Ergebnisse zwischen beiden Simulationen auch für sehr große Knudsenzahlen ( $Kn \rightarrow \infty$ ) gut überein.

Bei der Berechnung des Massenstroms für den Radiusspalt muss ein veränderlicher Querschnitt betrachtet werden, der bei der eindimensionalen Theorie über Abschnitte konstanten Querschnitts approximiert wird. Aus diesem Grund ergibt sich für kleine Werte des **Radius zu Höhenverhältnisses** eine fehlerhafte Berechnung des Massenstroms. Bei einer stehenden Berandung ( $u_0 = 0$ ) finden sich im Bereich der Schlupf- und Übergangsströmung für Werte des Radius zu Höhenverhältnisses von  $R/h > 111$  zufriedenstellende Ergebnisse. Im Bereich der molekularen Strömung werden erst für sehr große Werte dieses Parameters ( $R/h > 500$ ) zufriedenstellende Ergebnisse erzielt. Wird eine kombinierte Couette-Poiseuille-Strömung ( $u_0 \neq 0$ ) berechnet, ergibt sich auch für kleinere Werte des Radius zu Höhenverhältnisses eine gute Übereinstimmung zwischen eindimensionaler Theorie und DSMC-Methode.

Bei der eindimensionalen Theorie wird davon ausgegangen, dass in jedem Querschnitt des Spaltes ein vollständiger Wärmeaustausch zwischen Gas und Wand stattfindet. Soll ein Spaltmassenstrom simuliert werden, bei dem die Gastemperatur am Ein- oder Austritt von der Wandtemperatur abweicht, kann dieses von der eindimensionalen Theorie nicht abgebildet werden. In Kapitel 8.7 werden Simulationsergebnisse diskutiert, bei denen **die Gastemperatur am Eintritt von der Wandtemperatur abweicht** (Vorgabe  $T_B/T_E$ ). Hier hat sich gezeigt, dass im Bereich der Schlupfströmung sehr gut von einem vollständigem Wärmeübergang zwischen Gas und Wand direkt am Eintritt des Spaltes ausgegangen werden kann, um einen korrekten normierten Massenstrom ermitteln zu können. In diesem Bereich ist also die Temperatur der Wand maßgeblich entscheidend für den normierten Massenstrom. Im Gegensatz hierzu zeigen die DSMC-Simulationen, dass der normierte Massenstrom im molekularen Strömungsbereich unabhängig von einem Temperaturunterschied zwischen Gas und Wand ist. Hier ist also der Gaszustand am Eintritt maßgeblich entscheidend für den normierten Massenstrom. Im Bereich der Übergangsströmung findet ein stetiger Übergang zwischen beiden Grenzfällen statt.

# Kapitel 9

## Zusammenfassung und Ausblick

Zur Simulation des Betriebsverhaltens einer Vakuumpumpe ist die Kenntnis der schädlichen Rückströmung durch die betriebsbedingten Spalte von großer Wichtigkeit. Hierbei wird die Strömung in den Spalten im Wesentlichen durch drei Wirkmechanismen hervorgerufen. Ein über den Spalt anliegendes Druckverhältnis, verursacht durch unterschiedliche Drücke in den angrenzenden Arbeitskammern, erzeugt eine druckgetriebene Poiseuille-Strömung. Durch die Bewegung der Rotoren kommt es zu einer bewegten Berandung, die ihrerseits eine Scherströmung - Couette-Strömung - verursacht. Die ungleichmäßige Erwärmung der Bauteile und der Gase in den Arbeitskammern bedingt zusätzlich eine thermische Kriechströmung.

Die vorliegende Arbeit beschreibt die Validierung eines Strömungsmodells auf Basis einer eindimensionalen Theorie, die in der Lage ist, die drei beschriebenen Wirkmechanismen im Bereich der Schlupf-, Übergangs- und freien molekularen Strömung abzubilden. Unter der Annahme, dass die Spaltströmung in jedem Querschnitt in Strömungsrichtung einem vollständigen Wärmeübergang unterliegt, wird eine Dimensionsanalyse zur Identifizierung der dimensionslosen Kennzahlen durchgeführt. Die so erhaltenen Kennzahlen werden im Rahmen der Arbeit umfangreich variiert und die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit experimentellen Ergebnissen aus geeigneten Versuchsaufbauten gegenübergestellt. Weiterhin wird ein Vergleich mit Simulationsergebnissen der DSMC-Methode durchgeführt, die die Strömung auf Basis einer teilchenorientierten Modellierung abbildet. Diese Methode zeichnet sich dadurch aus, dass sie über den gesamten Bereich der Knudsenzahl Gültigkeit besitzt. Weiterhin kann hiermit eine vollständig zweidimensionale Strömung abgebildet werden.

Die Validierung erfolgt anhand von experimentellen Untersuchungen an zwei Spaltmodellbauten. Ein Spaltmodell mit statischen Berandungen dient primär zur Untersuchung der Poiseuille-Strömung. Ein weiteres Spaltmodell ist mit einer drehbar gelagerten Welle ausgestattet, sodass eine kombinierte Couette-Poiseuille Strömung untersucht werden kann. Prinzipiell werden zwei verschiedene Spaltgeometrien betrachtet. Der

planparallele Spalt unterschiedlicher Länge und der Radiusspalt, der zusätzlich durch einen veränderlichen Querschnitt in Strömungsrichtung gekennzeichnet ist. Eine ausführliche Variation im Rahmen der Möglichkeiten der Messaufbauten zeigt insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung der DSMC-Methode und der eindimensionalen Theorie mit den experimentellen Ergebnissen. Der Einfluss der Knudsenzahl, des Druckverhältnisses und der Berandungsgeschwindigkeit auf den normierten Massenstrom wird durch beide theoretische Ansätze sehr gut abgebildet. Eine Ausnahme bilden die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie im Bereich der Kontinuumsströmung. Die fehlende Abbildung der Kompressibilität der Strömung führt hier zu großen Abweichungen zu den experimentellen Ergebnissen. Die Variation der geometrischen Parameter Längen- und Radius zu Höhenverhältnis zeigt teilweise Abweichungen, wobei hier experimentelle Unsicherheiten nicht ausgeschlossen werden können. Die in dieser Arbeit genutzten Versuchsmodelle können nicht für die Variation des Breiten zu Höhenverhältnisses und des Temperaturverhältnisses genutzt werden. Hier wird auf experimentelle Untersuchungen aus der Literatur zurück gegriffen. Auch hier ergibt sich insgesamt eine gute Übereinstimmung beider theoretischer Ansätze mit den Experimenten.

Die Variation des Wertebereichs der Kennzahlen wird durch Einschränkungen der experimentellen Aufbauten bestimmt. Um die Grenzen der Modellierung mithilfe der eindimensionalen Theorie bestimmen zu können, wird zudem eine über die Experimente hinausgehende Variation der Kennzahlen durchgeführt, wobei die Ergebnisse der eindimensionalen Theorie mit der DSMC-Methode verglichen werden. Die DSMC-Methode kann zudem genutzt werden, um die an der Strömung beteiligten physikalischen Wirkmechanismen heraus zu arbeiten. So zeigt sich, dass die fehlende Abbildung der Kompressibilität des Gases bei der eindimensionalen Theorie bei großen Druckverhältnissen im Bereich der Kontinuumsströmung einen Fehler verursacht. Eine Abbildung einer kompressiblen Strömung in diesem Bereich ist von großer Wichtigkeit. Bei großen normierten Berandungsgeschwindigkeiten und großen Knudsenzahlen zeigt sich, dass die Strömung über einen sehr großen Bereich des Spaltes abgebildet werden muss, um alle für den Massenstrom relevanten Strömungsvorgänge zu erfassen.

Um die Abbildung der Spaltströmung auch bis in den Bereich der Kontinuumsströmung möglich zu machen, muss in nachfolgenden Arbeiten ein Ansatz zur Abbildung der Kompressibilität der Strömung gefunden werden. Hierzu muss in der Erhaltungsgleichung des Impulses eine Änderung der Dichte berücksichtigt werden. Dies steht für die Anwendung auf eine kombinierte Couette-Poiseuille-Strömung mit Einfluss einer thermischen Kriechströmung noch aus. Auf Grundlage der vorliegenden Arbeit ergibt sich eine weitere interessante Fragestellung. So hat sich gezeigt, dass bei einer Strömung großer Knudsenzahl und einer bewegten Berandung große Bereiche des Spaltes simuliert werden müssen, um alle für den Massenstrom relevanten Strömungsvorgänge abzubilden. Wird diese Erkenntnis auf die Anwendung der Kammermodellmethode zur

Simulation einer Vakuumpumpe übertragen, ist eine klare Trennung zwischen Arbeitskammer mit einem homogenen Fluidzustand und den Spalten nicht möglich. Weitergehend ist zu erwarten, dass eine bewegte Berandung nicht nur einen Einfluss auf die Spaltströmung besitzt, sondern eine Druckverteilung in der Arbeitskammer bei großen Knudsenzahlen bewirkt.

# Literatur

- [ACG63] S. Albertoni, C. Cercignani und L. Gotusso. “Numerical evaluation of the slip coefficient”. In: *The physics of fluids* 6(7) (1963), S. 993–996.
- [AGA94] F.J. Alexander, A.L. Garcia und B.J. Alder. “Direct simulation Monte Carlo for thin-film bearings”. In: *Physics of Fluids* 6(12) (1994), S. 3854–3860.
- [AGN12] E. Arlemark, M. Gennady und S. Nedea. “Rebuilding of Rothe’s nozzle measurements with OpenFOAM software”. In: *Journal of Physics Conference Series* 362 (2012).
- [Ark97] E.B. Arkilic. “Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accomodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels”. Dissertation. Massachusetts Institute of Technology, 1997.
- [ASB97] E.B. Arkilic, M.A. Schmidt und K.S. Breuer. “Gaseous Slip Flow in Long Microchannels”. In: *Journal of Microelectromechanical Systems* 6 (1997), S. 167–178.
- [BB03] P. Bahukudumbi und A. Beskok. “A phenomenological lubrication model for the entire Knudsen regime”. In: *Journal of Micromechanics and Micro-engineering* 13 (2003), S. 873–884.
- [Bes01] A. Beskok. “Validation of a new velocity-slip model for separated gas microflows”. In: *Numerical heat transfer, Part B: Fundamentals* 40(6) (2001), S. 451–471.
- [BGK54] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross und M. Krook. “A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems”. In: *Physical Review* 94(3) (1954), S. 511–525.
- [Bir07] G.A. Bird. “Sophisticated DSMC”. In: *Notes for a short course at the DSMC07 meeting* (2007).
- [Bir63] G.A. Bird. “Approach to Translational Equilibrium in a Rigid Sphere Gas”. In: *Physics of Fluids* 6.10 (1963), S. 1518–1519.
- [Bir80] G.A. Bird. “Monte-Carlo simulation in an engineering Context”. In: *International Symposium on Rarefied Gas Dynamics* 12 (1980), S. 239–255.

- [Bir89] G.A. Bird. “Perception of numerical methods in rarefied gasdynamics”. In: *Progress in Astronautics and Aeronautics* 117 (1989), S. 211–226.
- [Bir94] G.A. Bird. *Molecular Gas Dynamics and the Direct Simulation of Gas Flows*. Clarendon Press, Oxford, 1994.
- [BLS06] F.B. Bao, J.Z. Lin und X. Shi. “Simulation of Flow and Heat Transfer in Micro Couette Flow”. In: *2006 1st IEEE International Conference on Nano/Micro Engineered and Molecular Systems*. IEEE Proceedings, 2006, S. 110–115.
- [BMT99] O. Boulon, R. Mathes und J.P. Thibault. “Direct Simulation Monte Carlo method for molecular and transitional flow regimes in vacuum components with static and moving surfaces”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A* 17(4) (1999), S. 2080–2085.
- [BTL97] J.A. Bentz, R.V. Tompson und S.K. Loyalka. “The spinning rotor gauge: measurements of viscosity, velocity slip coefficients, and tangential momentum accommodation coefficients for N<sub>2</sub> and CH<sub>4</sub>”. In: *Vacuum* 48(10) (1997), S. 817–824.
- [Buc14] E. Buckingham. “On physically similar systems; Illustrations of the use of dimensional equations”. In: *Physical Review* 4(4) (1914), S. 345–376.
- [Bur58] A. Burgdorfer. *The influence of the molecular mean free path on the performance of hydrodynamic gas lubricated bearings*. 1958. DOI: 10.2172/4329043.
- [Cap] *capaNCDDT 6110/6120, CS01*. Benutzerhandbuch: Micro-Epsilon. 2016.
- [CD63] C. Cercignani und A. Daneri. “Flow of a Rarefied Gas between Two Parallel Plates”. In: *Journal of Applied Physics* 34(12) (1963), S. 3509–3513.
- [Cho06] X. Chong. “Subsonic choked flow in the microchannel”. In: *Physics of fluids* 18 (2006).
- [CL71] C. Cercignani und M. Lampis. “Kinetic models for gas-surface interactions”. In: *Transport Theory and Statistical Physics* 1(2) (1971), S. 101–114.
- [CLL04] C. Cercignani, M. Lampis und S. Lorenzani. “Variational approach to gas flows in microchannels”. In: *Physics of fluids* 16(9) (2004), S. 3426–3437.
- [CLL05] C. Cercignani, M. Lampis und S. Lorenzani. “Flow of a Rarefied Gas between Parallel and Almost Parallel Plates”. In: *AIP Conference Proceedings*. Bd. 762. 1. 2005, S. 719–724.
- [CLL06] C. Cercignani, M. Lampis und S. Lorenzani. “Plane Poiseuille-Couette problem in micro-electro-mechanical systems applications with gas-rarefaction effects”. In: *Physics of Fluids* 18 (2006).

- [CP66] C. Cercignani und C.D. Pagani. “Variational Approach to Boundary-Value Problems in Kinetic Theory”. In: *The Physics of Fluids* 9(6) (1966), S. 1167–1173.
- [Dina] *DIN 28400*. Vakuumpumpen, Teil 2: Benennungen und Definitionen - Vakuumpumpen. 1980.
- [Dinb] *DIN 28400*. Vakuumpumpen, Teil 1: Benennung und Definitionen - Allgemeine Benennungen. 1990.
- [DM16] G. Dechrste und L. Mieussens. “A Cartesian cut cell method for rarefied flow simulations around moving obstacles”. In: *Journal of Computational Physics* 314 (2016), S. 465–488.
- [Ewa+07] T. Ewart u. a. “Mass flow rate measurements in a microchannel, from hydrodynamic to near free molecular regimes”. In: *Journal of fluid mechanics* 584 (2007), S. 337–356.
- [FK87] S. Fukui und R. Kaneko. “Analysis of Ultra-thin Gas Film Lubrication Based on the Linearized Boltzmann Equation”. In: *JSME International Journal* 30(268) (1987), S. 1660–1666.
- [FK88] S. Fukui und R. Kaneko. “Analysis of Ultra-Thin Gas Film Lubrication Based on Linearized Boltzmann Equation: First Report—Derivation of a Generalized Lubrication Equation Including Thermal Creep Flow”. In: *Journal of Tribology* 110 (1988), S. 253–261.
- [FK90] S. Fukui und R. Kaneko. “A Database for Interpolation of Poiseuille Flow Rates for high Knudsen number lubrication problems”. In: *Journal of Tribology* 112 (1990), S. 78–83.
- [FS01] J. Fan und C. Shen. “Statistical simulation of Low-Speed Rarefied Gas Flows”. In: *Journal of Computational Physics* 167 (2001), S. 393–412.
- [Geo09] H.O. Georgii. *Stochastik - Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Walter de Gruyter GmbH+Co. KG, Berlin, 2009.
- [GH14] I. Graur und M.T. Ho. “Rarefied gas flow through a long rectangular channel of variable cross section”. In: *Vacuum* 101 (2014), S. 328–332.
- [GLS96] D.H. Gabis, S.K. Loyalka und T.S. Storvick. “Measurement of the tangential momentum accommodation coefficient in the transition flow regime with a spinning rotor gauge”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A* 14(4) (1996), S. 2592–2598.
- [Hä04] D. Hänel. *Molekulare Gasdynamik - Einführung in die kinetische Theorie der Gase und Lattice-Boltzmann-Methoden*. Springer-Verlag, 2004.
- [Har+95] J.C. Harley u. a. “Gas flow in micro-channels”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 284 (1995), S. 257–274.

- [Hem+16] V. Hemadri u. a. “Investigation of rarefied gas flow in microchannels of non-uniform cross section”. In: *Physics of Fluids* 28 (2016).
- [Hua+99] C.M. Huang u. a. “Measurements of thermal creep in binary gas mixtures”. In: *Physics of Fluids* 11(6) (1999), S. 1662–1672.
- [IK90] M. Ikegawa und J. Kobayashi. “Development of a Rarefied Gas Flow Simulator Using the Direct-Simulation Monte Carlo Method”. In: *JSME International Journal* 33(3) (1990), S. 463–467.
- [Iof+95] I.V. Ioffe u. a. “Modeling of a multistage claw rotor vacuum pump”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A* 13 (1995), S. 536–539.
- [Jan07] M. Janicki. “Modellierung und Simulation von Rotationsverdrängermaschinen”. Dissertation. Universität Dortmund, 2007.
- [Jou10a] K. Jousten. *Analytische und numerische Berechnungen*, In: *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*. Bd. 10. Vieweg+Teubner, 2010.
- [Jou10b] K. Jousten. *Anwendung und Aufgaben der Vakuumtechnik*, In: *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*. Bd. 10. Vieweg+Teubner, 2010.
- [Jou10c] K. Jousten. *Die Geschichte der Vakuumphysik und Vakuumtechnik*, In: *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*. Bd. 10. Vieweg+Teubner, 2010.
- [Jou10d] K. Jousten. *Verdrängerpumpen*, In: *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*. Bd. 10. Vieweg+Teubner, 2010.
- [KBA05] G. Karniadakis, A. Beskok und N. Aluru. *Microflows and Nanoflows - Fundamentals and Simulation*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [KI73] T. Kanki und S. Iuchi. “Poiseuille flow and thermal creep of a rarefied gas between parallel plates”. In: *The Physics of Fluids* 16(5) (1973), S. 594–599.
- [Knu09] M. Knudsen. “Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhren”. In: *Annalen der Physik* 333 (1909), S. 75–130.
- [Kog69] M.N. Kogan. *Rarefied Gas Dynamics*. Plenum Press, 1969.
- [Kos10] B. Kossek. *Drehschieberpumpen*, In: *Wutz - Handbuch der Vakuumtechnik*. Bd. 10. Vieweg+Teubner, 2010.
- [KT08] S. Kosuge und S. Takata. “Database for flows of binary gas mixtures through a plane microchannel”. In: *European Journal of Mechanics B/Fluids* 27 (2008), S. 444–465.
- [Kuh49] A.R. Kuhltau. “Air Friction on Rapidly Moving Surfaces”. In: *Journal of Applied Physics* 20 (1949), S. 217–223.

- [LB74] P.S. Larsen und C. Borgnakke. “Statistical collision model for simulating polyatomic gas with restricted energy exchange”. In: *International Symposium on Rarefied Gas Dynamics* 9 (1974), A.7–1–A.7–9.
- [LH90] S.K. Loyalka und S.A. Hamoodi. “Poiseuille flow of a rarefied gas in a cylindrical tube: Solution of linearized Boltzmann equation”. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 2(11) (1990), S. 2061–2065.
- [Li02] W.L. Li. “A Database for Couette Flow Rate Considering the Effects of non-Symmetric Molecular Interactions”. In: *Journal of Tribology* 124 (2002), S. 869–873.
- [Lil+06] T.C. Lilly u. a. “Measurements and computations of mass flow and momentum flux through short tubes in rarefied gases”. In: *Physics of Fluids* 18 (2006).
- [LL82] S.S. Lo und S.K. Loyalka. “An efficient computation of near-continuum rarefied gas flows”. In: *Journal of Applied Mathematics and Physics* 33 (1982), S. 419–424.
- [Lor91] R.G. Lord. “Some extensions to the Cercignani-Lampis gas-surface scattering kernel”. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 3 (1991), S. 706–710.
- [LPS79] S.K. Loyalka, N. Petrellis und T.S. Storvick. “Some exact numerical results for the BGK model: Couette, Poiseuille and thermal creep flow between parallel plates”. In: 30 (1979), S. 514–521.
- [LSP76] S.K. Loyalka, T.S. Storvick und H.S. Park. “Poiseuille flow and thermal creep flow in long, rectangular channels in the molecular and transition flow regimes”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology* 13 (1976), S. 1188–1192.
- [Mü13] R. Müller. “Spaltströmung mit Wärmeübertragung in Vakuumpumpen”. Dissertation. Universität Kaiserslautern, 2013.
- [Max79] J.C. Maxwell. “On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature”. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 170 (1879), S. 231–256.
- [Mksa] *Digitaler Gasflussregler Typ 1179B, 1479B, 2179B und digitaler Gasflussmonitor 179B*. Benutzerhandbuch: MKS Instruments Deutschland GmbH. 2003.
- [Mksb] *MKS Baratron Typ 627B Absolutdruckaufnehmer*. Benutzerhandbuch: MKS Instruments Deutschland GmbH. 1999.
- [Mksc] *MKS Type 1500 Series Mass-Flow Controller*. Benutzerhandbuch: MKS Instruments Inc. 1996.

- [Mor+11] G.L. Morini u. a. “A critical review of the measurement techniques for the analysis of gas microflows through microchannels”. In: *Experimental Thermal and Fluid Science* 35 (2011), S. 849–865.
- [Nad17] K. Nadler. “Modellierung und Analyse von Schraubenvakuumpumpen im Blower-Betrieb”. Dissertation. Universität Dortmund, 2017.
- [Oer94] H. Oertel. *Aerothermodynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1994.
- [Ohb+99] T. Ohbayashi u. a. “Study on the performance prediction of screw vacuum pump”. In: *Applied Surface Science* 169-170 (1999), S. 768–771.
- [Ope16] OpenCFD Ltd. *OpenFOAM*. URL: <https://openfoam.com/> (besucht am 11.10.2016).
- [Pal14] R.C. Palharini. “Atmospheric Reentry Modelling Using an Open-Source DSMC Code”. Dissertation. University of Strathclyde, 2014.
- [PB95] E.S. Piekos und K.S. Breuer. “DSMC Modeling of Micromechanical Devices”. In: *30th AIAA Thermophysics Conference* (1995).
- [Pfa12] D. Pfaller. “Einfluss der Verdrängergeometrie auf die Auslegung von Schraubenspindel-Vakuumpumpen”. Dissertation. Universität Dortmund, 2012.
- [Pit+10] J. Pitakarnnop u. a. “A novel experimental setup for gas microflows”. In: *Microfluid Nanofluid* 8 (2010), S. 57–72.
- [Roh05] A. Rohe. “Wärmehaushalt von Schraubenspindel-Vakuumpumpen”. Dissertation. Universität Dortmund, 2005.
- [RR15] C. Ratcliffe und B. Ratcliffe. *Doubt-Free Uncertainty in Measurement*. Springer International Publishing, Switzerland, 2015.
- [SA10] J.H. Spurk und N. Aksel. *Strömungslehre - Einführung in die Theorie der Strömungen*. Springer Heidelberg Dordrecht London New York, 2010.
- [Sca+10] T.J. Scanlon u. a. “An open source, parallel DSMC code for rarefied gas flows in arbitrary geometries”. In: *Computers and Fluids* 39 (2010), S. 2078–2089.
- [SCK04] F. Sharipov, L.M. Gramani Cumin und D. Kalempa. “Plane Couette Flow of binary gaseous mixture in the whole range of the Knudsen number”. In: *European Journal of Mechanics B/ Fluids* 23 (2004), S. 899–906.
- [SFZ05] F. Sharipov, P. Fahrenbach und A. Zipp. “Numerical modeling of the Holweck pump”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces and Films* 23(5) (2005), S. 1331–1339.
- [SG06] H. Schlichting und K. Gersten. *Grenzschicht-Theorie*. 10. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

- [Sha02] F. Sharipov. “Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. I. Plane flow between two parallel plates”. In: *European Journal of Mechanics B/ Fluids* 21 (2002), S. 113–123.
- [Sha03a] F. Sharipov. “Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. II. Slip and jump coefficients”. In: *European Journal of Mechanics B/ Fluids* 22 (2003), S. 133–143.
- [Sha03b] F. Sharipov. “Application of the Cercignani-Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. III. Poiseuille flow and thermal creep through a long tube”. In: *European Journal of Mechanics B/ Fluids* 22 (2003), S. 145–154.
- [Sha16] F. Sharipov. *Rarefied Gas Dynamics - Fundamentals for Research and Practice*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2016.
- [Sha68] E.M. Shakhov. “Generalization of the Krook kinetic relaxation equation”. In: *Fluid Dynamics* 3(5) (1968), S. 95–96.
- [Sha96] F. Sharipov. “Rarefied gas flow through a long tube at any temperature ratio”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces and Films* 14(4) (1996), S. 2627–2635.
- [Sha99a] F. Sharipov. “Non-isothermal gas flow through rectangular microchannels”. In: *Journal of Micromechanics and Microengineering* 9 (1999), S. 394–401.
- [Sha99b] F. Sharipov. “Rarefied gas flow through a long rectangular channel”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A: Vacuum, Surfaces and Films* 17 (1999), S. 3062–3066.
- [She05] C. Shen. *Rarefied Gas Dynamics - Fundamentals, Simulations and Micro Flows*. Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [SR82] H. Schlichting und F.W. Riegels. *Grenzschicht-Theorie*. 8. Aufl. Braun, Karlsruhe, 1982.
- [SS98] F. Sharipov und V. Seleznev. “Data on Internal Rarefied Gas Flows”. In: *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 27(3) (1998), S. 657–706.
- [STO90] Y. Sone, S. Takata und T. Ohwada. “Numerical analysis of the plane Couette flow of a rarefied gas on the basis of the linearized Boltzmann equation for hard-sphere molecules”. In: *European Journal of Mechanics, B/ Fluids* 9(3) (1990), S. 273–288.
- [Str10] D. Stratmann. “Kennfeldverhalten zweiwelliger Rotationsverdrängervakuumpumpen”. Dissertation. Technische Universität Dortmund, 2010.
- [Su+96] Y. Su u. a. “Theoretical study on the pumping mechanism of a dry scroll vacuum pump”. In: *Vacuum* 47 (1996), S. 815–818.

- [Sut93] W. Sutherland. “LII. The viscosity of gases and molecular force”. In: *Philosophical Magazine Series* 5 (1893), S. 507–531.
- [Tc1] *Ausrüstung und Zubehör zur Temperaturmessung und -Regelung*. TC Direct. 2016.
- [Tru89] E. Truckenbrodt. *Fluidmechanik - Band 1: Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. 3. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo Hongkong, 1989.
- [TS10] V.A. Titarev und E.M. Shakhov. “Kinetic Analysis of the Isothermal Flow in a Long Rectangular Microchannel”. In: *Computational Mathematics and Mathematical Physics* 50(7) (2010), S. 1221–1237.
- [Tur+04] S.E. Turner u. a. “Experimental Investigation of Gas Flow in Microchannels”. In: *Journal of Heat Transfer* 126 (2004), S. 753–763.
- [Var+09] S. Varoutis u. a. “Computational and experimental study of gas flows through long channels of various cross sections in the whole range of the Knudsen number”. In: *Journal of Vacuum Science and Technology A* 27(1) (2009), S. 89–100.
- [Vel13] T. Veltzke. “On gaseous Microflows under isothermal Conditions”. Dissertation. Universität Bremen, 2013.
- [Wen01] D. Wenderott. “Spaltströmungen im Vakuum”. Dissertation. Universität Dortmund, 2001.
- [Whi13] C. White. “Benchmarking, Development and Applications of an Open Source DSMC Solver”. Dissertation. University of Strathclyde, 2013.
- [Whi15] C. White. “Adaptive Mesh Refinement for an Open Source DSMC Solver”. In: *20th AIAA International Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conference* 3 (2015), S. 1676–1687.
- [Whi91] F.M. White. *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill Inc., 1991.
- [WL04] M. Wang und Z. Li. “Simulations for gas flows in microgeometries using the direct simulation Monte Carlo method”. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 25 (2004), S. 975–985.
- [WT01] J.S. Wu und K.C. Tseng. “Analysis of micro-scale gas flows with pressure boundaries using direct simulation Monte Carlo method”. In: *Computers and Fluids* 30 (2001), S. 711–735.
- [XFS00] H. Xue, Q. Fan und C. Shu. “Prediction of micro-channel flows using direct simulation Monte Carlo”. In: *Probabilistic Engineering Mechanics* 15 (2000), S. 213–219.
- [Yam+14] H. Yamaguchi u. a. “Thermal transpiration flow through a single rectangular channel”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 744 (2014), S. 169–182.

- 
- [Yam+16] H. Yamaguchi u. a. “Mass flow rate measurement of thermal creep flow from transitional to slip flow regime”. In: *Journal of Fluid Mechanics* 795 (2016), S. 690–707.
- [ZYZ07] W.A. Zahid, Y. Yin und K.Q. Zhu. “Couette-Poiseuille flow of a gas in long microchannels”. In: *Microfluidics and Nanofluidics* 3 (2007), S. 55–64.

# Anhang A

## Flussraten

*Tabelle A.1: Flussrate der Poiseuille-Strömung  $Q_P$  in Abhängigkeit der Gasverdünnung  $\delta$  und des Breiten zu Höhenverhältnisses  $b/h$  [Sha99b], [CP66] und [LL82].*

$\delta$	$b/h$							
	1	2	5	10	20	50	100	$\infty$
0	0,8387	1,152	1,618	1,991	2,373	2,884	3,273	$\infty$
0,001	0,8373	1,15	1,612	1,978	2,344	2,798	3,015	-
0,01	0,8315	1,137	1,577	1,91	2,217	2,551	2,695	3,05
0,02	0,8261	1,125	1,549	1,858	2,13	2,4	2,51	2,711
0,04	0,8115	1,108	1,509	1,788	2,015	2,215	2,291	2,396
0,05	0,8124	1,099	1,492	1,759	1,971	2,149	2,214	2,302
0,08	0,8001	1,083	1,457	1,698	1,875	2,01	2,058	2,114
0,1	0,7958	1,073	1,437	1,665	1,826	1,943	1,983	2,033
0,2	0,7766	1,046	1,379	1,563	1,678	1,752	1,776	1,808
0,4	0,763	1,028	1,33	1,476	1,556	1,605	1,621	1,641
0,5	0,7607	1,026	1,319	1,454	1,526	1,569	1,58	1,602
0,8	0,7614	1,031	1,309	1,425	1,485	1,521	1,532	1,548
1	0,766	1,041	1,315	1,424	1,48	1,513	1,52	1,539
1,5	0,7841	1,074	1,346	1,448	1,499	1,529	1,536	1,553
2	0,8076	1,115	1,391	1,491	1,541	1,571	1,577	1,595
4	0,9209	1,307	1,623	1,731	1,786	1,821	1,832	1,844
5	0,9846	1,413	1,753	1,87	1,929	1,962	1,973	1,991
8	1,179	1,734	2,157	2,301	2,372	2,416	2,432	2,447
10	1,314	1,955	2,437	2,599	2,683	2,729	2,753	2,769
15	1,653	2,511	3,144	3,357	3,465	3,533	3,555	3,578
20	2	3,077	3,864	4,121	4,267	4,341	4,368	4,397

*Tabelle A.2: Flussrate der thermischen Kriechströmung  $Q_T$  in Abhängigkeit der Gasverdünnung  $\delta$  und des Breiten zu Höhenverhältnisses  $b/h$  [Sha99a].*

$\delta$	$b/h$			
	1	10	20	$\infty$
0	0,4193	0,9955	1,186	$\infty$
0,001	0,4181	0,9839	1,162	1,855
0,01	0,411	0,9165	1,044	1,246
0,02	0,4037	0,8658	0,9662	1,078
0,04	0,3912	0,796	0,8656	0,92
0,05	0,3857	0,7695	0,8291	0,8719
0,08	0,3716	0,7078	0,7483	0,7754
0,1	0,3637	0,6763	0,7089	0,732
0,2	0,339	0,5814	0,5968	0,6105
0,4	0,3071	0,4806	0,4881	0,4955
0,5	0,2953	0,449	0,4453	0,462
0,8	0,2684	0,3848	0,3894	0,3953
1	0,2545	0,3553	0,3593	0,3633
1,5	0,2275	0,3029	0,306	0,3092
2	0,207	0,2667	0,2693	0,2719
4	0,1539	0,1842	0,1856	0,187
5	0,1366	0,1598	0,1609	0,1621
8	0,1017	0,1141	0,1148	0,1154
10	0,0868	0,0956	0,0961	0,0966
15	0,0632	0,0677	0,068	0,0682
20	0,0495	0,0522	0,0524	0,0526
30	0,0344	0,0354	0,0357	0,0358
40	0,0263	0,0269	0,027	0,027

# Anhang B

## Messaufbauten

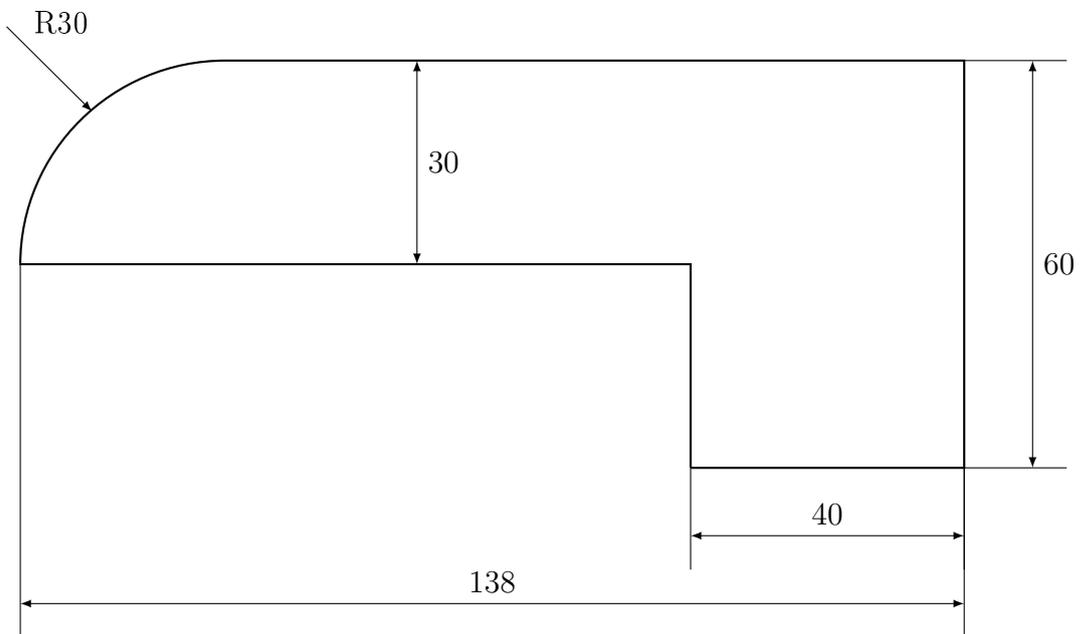


Abbildung B.1: Geometrische Abmaße der Gegenkontur des Spaltes mit statischer Be-  
randung.

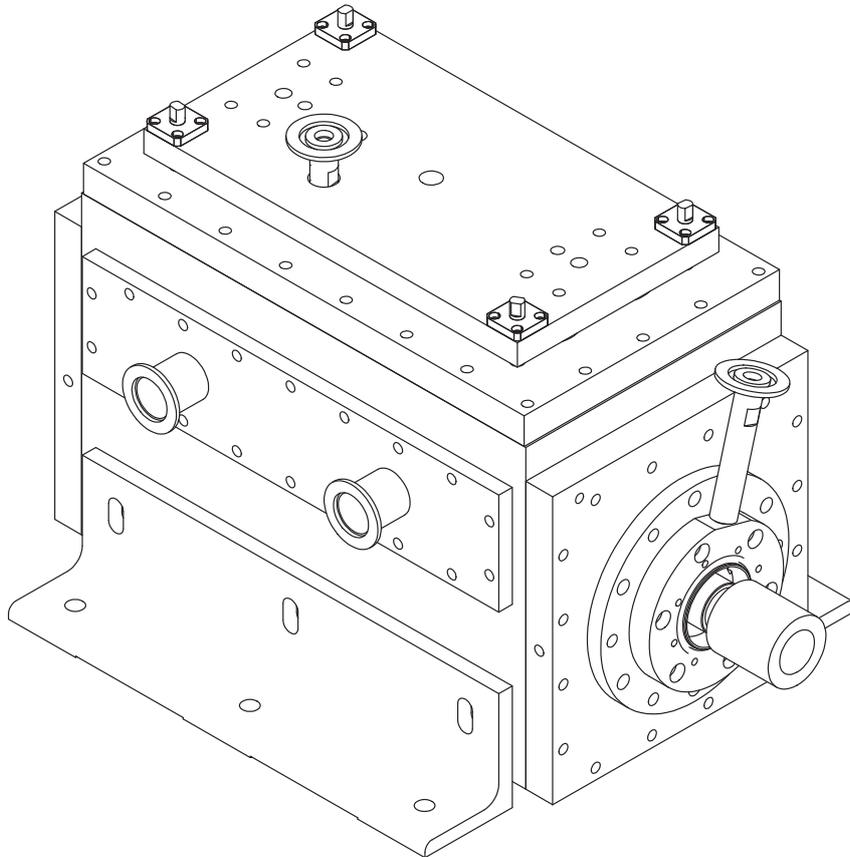


Abbildung B.2: Isometrische Ansicht des Spaltes mit bewegter Berandung.

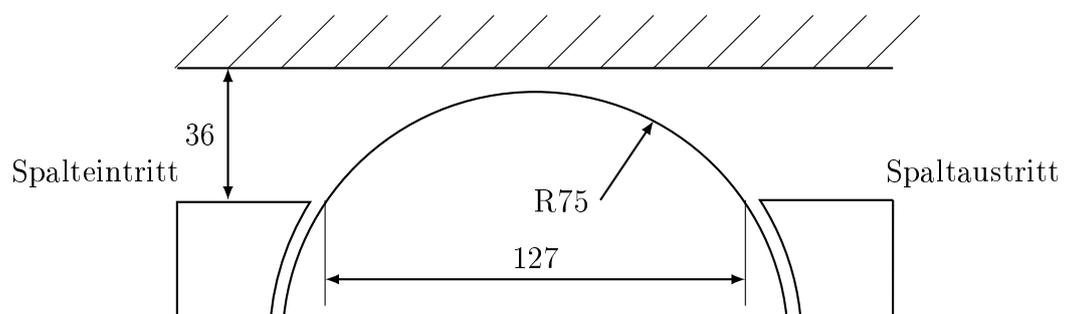


Abbildung B.3: Geometrische Abmaße des Spaltes mit bewegter Berandung.

# Anhang C

## Simulierte Spaltlänge beim Radiusspalt

*Tabelle C.1: Empfehlungen zur simulierten normierten Spaltlänge  $l_R/R$  für den Radiusspalt in Abhängigkeit der Knudsenzahl  $Kn$  und der normierten Berandungsgeschwindigkeit  $u_0$  für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Betriebspunkte.*

$Kn$	$ u_0 $				
	0	$2,44 \cdot 10^{-2}$	$4,88 \cdot 10^{-2}$	$9,75 \cdot 10^{-2}$	$2,44 \cdot 10^{-1}$
0,044	0,53	0,53	0,53	0,6	-
0,088	0,6	0,6	0,6	0,8	-
0,22	0,66	0,66	0,66	1,06	-
0,44	0,66	0,73	0,8	1,2	-
0,88	0,66	0,8	0,93	1,33	-
2,2	0,66	0,86	1,06	1,6	1,7
4,4	0,8	1	1,2	1,6	-
8,8	0,8	1,06	1,33	1,6	-
$\infty$	0,8	1,2	1,6	1,6	-

# Anhang D

## Messergebnisse

### D.1 Statische Berandung

Table D.1: Variation der Oberflächenrauheit der statischen Berandung.  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $L/h = 66,6$ ,  $b/h = 333,3$ , (vgl. Abbildung 7.8)

$Kn$	$R_z = 2,6 \mu\text{m}$		$Kn$	$R_z = 11,4 \mu\text{m}$	
	$C_0$	$U_{C_0}$		$C_0$	$U_{C_0}$
2,201E+00	4,539E-02	2,166E-03	2,192E+00	4,682E-02	2,234E-03
8,784E-01	4,242E-02	2,024E-03	1,065E+00	4,449E-02	2,123E-03
4,393E-01	4,235E-02	2,021E-03	6,971E-01	4,370E-02	2,085E-03
2,930E-01	4,370E-02	2,085E-03	4,132E-01	4,426E-02	2,112E-03
2,194E-01	4,575E-02	2,183E-03	2,314E-01	4,804E-02	1,743E-03
1,098E-01	5,464E-02	2,607E-03	2,066E-01	4,823E-02	2,301E-03
8,735E-02	6,310E-02	3,004E-03	1,510E-01	5,217E-02	2,489E-03
2,926E-02	1,126E-01	7,956E-03	1,106E-01	6,216E-02	3,388E-03
2,207E-02	1,381E-01	7,075E-03	1,100E-01	5,621E-02	2,682E-03
1,278E-02	2,169E-01	8,060E-03	6,465E-02	7,574E-02	3,026E-03
8,042E-03	3,120E-01	2,191E-02	6,262E-02	7,437E-02	3,548E-03
4,340E-03	4,904E-01	1,978E-02	4,192E-02	9,510E-02	3,422E-03
2,932E-03	6,191E-01	2,242E-02	4,140E-02	9,545E-02	4,554E-03
2,166E-03	7,448E-01	3,632E-02	3,795E-02	1,007E-01	4,802E-03
1,783E-03	8,333E-01	3,565E-02	2,170E-02	1,527E-01	7,362E-03
1,696E-03	8,484E-01	3,548E-02	1,152E-02	2,511E-01	9,069E-03
1,456E-03	9,041E-01	3,561E-02	1,146E-02	2,535E-01	9,141E-03
1,103E-03	1,000E+00	3,685E-02	6,017E-03	4,158E-01	2,022E-02
1,042E-03	1,020E+00	3,722E-02	4,657E-03	4,961E-01	2,035E-02
8,711E-04	1,074E+00	4,236E-02	2,258E-03	7,843E-01	3,805E-02
6,839E-04	1,148E+00	4,273E-02	1,355E-03	9,988E-01	3,797E-02
6,282E-04	1,172E+00	4,301E-02	1,096E-03	1,063E+00	3,883E-02
5,709E-04	1,183E+00	4,291E-02	9,074E-04	1,116E+00	4,405E-02
			8,021E-04	1,165E+00	4,442E-02
			5,390E-04	1,272E+00	4,564E-02
			4,430E-04	1,339E+00	5,068E-02

			3,449E-04	1,381E+00	5,029E-02
--	--	--	-----------	-----------	-----------

Tabelle D.2: Variation der Oberflächenrauheit der statischen Berandung.  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $L/h = 66,6$ ,  $b/h = 333,3$ , (vgl. Abbildung 7.8)

$R_z = 26,8 \mu\text{m}$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
1,979E+00	5,035E-02	2,402E-03
1,086E+00	4,757E-02	2,270E-03
7,329E-01	4,696E-02	2,240E-03
4,314E-01	4,763E-02	2,272E-03
2,201E-01	5,164E-02	2,464E-03
1,083E-01	6,009E-02	2,867E-03
7,339E-02	7,537E-02	3,596E-03
4,398E-02	1,014E-01	4,836E-03
4,308E-02	1,030E-01	1,083E-02
2,166E-02	1,690E-01	7,765E-03
1,823E-02	1,978E-01	9,439E-03
1,123E-02	2,852E-01	2,843E-02
7,335E-03	3,997E-01	2,220E-02
4,423E-03	5,665E-01	2,215E-02
2,768E-03	7,630E-01	4,207E-02
2,194E-03	8,733E-01	3,978E-02
1,540E-03	1,011E+00	3,930E-02
8,816E-04	1,199E+00	4,627E-02
5,570E-04	1,270E+00	4,569E-02
4,742E-04	1,393E+00	5,298E-02
4,429E-04	1,405E+00	5,275E-02
3,332E-04	1,422E+00	5,145E-02

Tabelle D.3: Variation von  $L/h$  der statischen Berandung.  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ , (vgl. Abbildung 7.11)

$L/h = 16,6$ ( $b/h = 333,3$ )			$L/h = 33,3$ ( $b/h = 666,6$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,216E+00	1,513E-01	7,218E-03	4,393E+00	1,080E-01	8,089E-03
2,207E+00	1,567E-01	7,476E-03	2,204E+00	1,019E-01	7,634E-03
2,203E+00	1,568E-01	7,481E-03	1,466E+00	9,931E-02	7,438E-03
2,199E+00	1,504E-01	5,246E-02	8,789E-01	9,703E-02	7,268E-03
6,289E-01	1,592E-01	1,591E-02	5,861E-01	9,635E-02	7,216E-03
4,392E-01	1,535E-01	7,322E-03	4,397E-01	9,705E-02	7,269E-03
4,387E-01	1,618E-01	1,181E-02	2,350E-01	1,043E-01	8,961E-03
2,928E-01	1,672E-01	9,025E-03	2,201E-01	1,101E-01	9,061E-03
2,810E-01	1,692E-01	8,858E-03	2,199E-01	1,008E-01	7,550E-03
2,199E-01	1,683E-01	8,031E-03	1,760E-01	1,149E-01	8,782E-03
2,177E-01	1,735E-01	7,900E-03	1,099E-01	1,284E-01	9,017E-03
1,974E-01	1,787E-01	7,733E-03	8,789E-02	1,390E-01	9,574E-03
1,098E-01	2,049E-01	7,522E-03	5,854E-02	1,622E-01	1,767E-02

8,791E-02	2,173E-01	2,217E-02	4,393E-02	1,903E-01	1,650E-02
6,544E-02	2,471E-01	1,771E-02	3,077E-02	2,438E-01	1,795E-02
5,572E-02	2,675E-01	1,612E-02	2,959E-02	2,471E-01	1,804E-02
4,434E-02	3,005E-01	1,476E-02	1,754E-02	3,550E-01	2,423E-02
2,900E-02	3,842E-01	1,491E-02	8,817E-03	5,525E-01	4,264E-02
2,199E-02	4,525E-01	1,643E-02	7,625E-03	6,087E-01	4,475E-02
1,922E-02	4,883E-01	4,863E-02	5,735E-03	7,121E-01	4,977E-02
1,440E-02	5,829E-01	3,965E-02	4,404E-03	8,066E-01	5,522E-02
1,259E-02	6,243E-01	3,683E-02	2,924E-03	9,858E-01	7,481E-02
1,094E-02	6,730E-01	3,481E-02	1,764E-03	1,167E+00	8,119E-02
8,805E-03	7,450E-01	3,309E-02	1,757E-03	1,166E+00	8,113E-02
7,597E-03	7,943E-01	3,276E-02	1,322E-03	1,248E+00	8,533E-02
5,528E-03	8,941E-01	3,346E-02	1,116E-03	1,290E+00	8,775E-02
4,380E-03	9,625E-01	3,473E-02	9,853E-04	1,338E+00	9,294E-02
3,883E-03	9,931E-01	5,740E-02	9,673E-04	1,322E+00	9,176E-02
2,952E-03	1,104E+00	5,169E-02	8,210E-04	1,391E+00	9,550E-02
2,487E-03	1,169E+00	4,992E-02	7,229E-04	1,413E+00	9,652E-02
2,106E-03	1,232E+00	4,923E-02	6,195E-04	1,517E+00	1,061E-01
1,411E-03	1,325E+00	4,861E-02	5,643E-04	1,483E+00	1,033E-01

Tabelle D.4: Variation von  $L/h$  der statischen Berandung.  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ , (vgl. Abbildung 7.11)

$L/h = 66,6$ ( $b/h = 333,3$ )			$L/h = 133,3$ ( $b/h = 333,3$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,201E+00	4,539E-02	2,166E-03	2,118E+00	2,476E-02	1,181E-03
8,784E-01	4,242E-02	2,024E-03	1,083E+00	2,367E-02	1,129E-03
4,393E-01	4,235E-02	2,021E-03	6,080E-01	2,254E-02	1,075E-03
2,930E-01	4,370E-02	2,085E-03	4,384E-01	2,262E-02	1,079E-03
2,194E-01	4,575E-02	2,183E-03	2,158E-01	2,435E-02	1,162E-03
1,098E-01	5,464E-02	2,607E-03	1,098E-01	2,859E-02	1,364E-03
8,735E-02	6,310E-02	3,004E-03	1,097E-01	3,106E-02	2,816E-03
2,926E-02	1,126E-01	7,956E-03	6,329E-02	3,735E-02	1,978E-03
2,207E-02	1,381E-01	7,075E-03	4,398E-02	4,373E-02	2,086E-03
1,278E-02	2,169E-01	8,060E-03	4,395E-02	4,453E-02	1,855E-03
8,042E-03	3,120E-01	2,191E-02	2,168E-02	7,038E-02	5,690E-03
4,340E-03	4,904E-01	1,978E-02	1,094E-02	1,231E-01	4,972E-03
2,932E-03	6,191E-01	2,242E-02	6,284E-03	1,986E-01	1,641E-02
2,166E-03	7,448E-01	3,632E-02	5,016E-03	2,408E-01	1,451E-02
1,783E-03	8,333E-01	3,565E-02	4,433E-03	2,671E-01	1,398E-02
1,696E-03	8,484E-01	3,548E-02	2,817E-03	3,801E-01	1,470E-02
1,456E-03	9,041E-01	3,561E-02	2,226E-03	4,479E-01	1,630E-02
1,103E-03	1,000E+00	3,685E-02	8,880E-04	7,941E-01	2,930E-02
1,042E-03	1,020E+00	3,722E-02	6,276E-04	9,312E-01	3,535E-02
8,711E-04	1,074E+00	4,236E-02	4,860E-04	1,006E+00	3,650E-02
6,839E-04	1,148E+00	4,273E-02	4,357E-04	1,057E+00	4,187E-02
6,282E-04	1,172E+00	4,301E-02	3,342E-04	1,118E+00	4,164E-02
5,709E-04	1,183E+00	4,291E-02	2,832E-04	1,163E+00	4,225E-02

Tabelle D.5:  $R/h$  der statischen Berandung.  $\Pi \rightarrow \infty$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  $b/h = 333,3$ ,  
(vgl. Abbildung 7.12)

$R/h = 200$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,190E+00	8,846E-02	4,220E-03
1,099E+00	8,656E-02	4,130E-03
4,394E-01	8,452E-02	4,032E-03
3,142E-01	8,651E-02	4,127E-03
3,139E-01	9,072E-02	8,082E-03
2,183E-01	9,586E-02	6,146E-03
1,093E-01	1,124E-01	4,659E-03
4,397E-02	1,696E-01	1,196E-02
3,139E-02	2,114E-01	1,042E-02
2,196E-02	2,738E-01	1,077E-02
8,331E-03	5,585E-01	2,759E-02
4,904E-03	7,525E-01	2,841E-02
3,027E-03	9,502E-01	4,859E-02
2,199E-03	1,053E+00	4,466E-02
8,937E-04	1,284E+00	4,905E-02
4,412E-04	1,409E+00	5,285E-02
3,164E-04	1,449E+00	5,208E-02

Tabelle D.6: Variation von  $\Pi$  der statischen Berandung.  $L/h = 66,6$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  
 $u_0 = 0$ ,  $b/h = 333,3$ , (vgl. Abbildung 7.13)

$Kn = 0,11$			$Kn = 2,2$		
$\Pi$	$C_0$	$U_{C_0}$	$\Pi$	$C_0$	$U_{C_0}$
1,111E+00	7,556E-03	3,605E-04	1,112E+00	4,326E-03	2,064E-04
1,250E+00	1,517E-02	7,239E-04	1,250E+00	8,659E-03	4,131E-04
1,428E+00	2,075E-02	9,902E-04	1,428E+00	1,322E-02	6,305E-04
1,665E+00	2,835E-02	1,353E-03	1,666E+00	1,773E-02	8,458E-04
1,984E+00	3,345E-02	1,596E-03	1,999E+00	2,229E-02	1,064E-03
2,500E+00	3,893E-02	1,857E-03	2,500E+00	2,661E-02	1,270E-03
3,332E+00	4,428E-02	2,112E-03	3,333E+00	3,171E-02	1,513E-03
4,999E+00	4,852E-02	2,315E-03	4,999E+00	3,595E-02	1,715E-03
9,990E+00	5,292E-02	2,525E-03	9,990E+00	4,192E-02	2,000E-03

Tabelle D.7: Variation von  $\Pi$  der statischen Berandung.  $R/h = 200$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $u_0 = 0$ ,  
 $b/h = 333,3$ , (vgl. Abbildung 7.14)

$Kn = 0,44$		
$\Pi$	$C_0$	$U_{C_0}$
1,111E+00	9,055E-03	4,320E-04
1,250E+00	1,844E-02	8,798E-04
1,428E+00	2,719E-02	1,297E-03
1,666E+00	3,578E-02	1,707E-03
2,000E+00	4,529E-02	2,161E-03

2,500E+00	5,350E-02	2,553E-03
3,333E+00	6,168E-02	2,943E-03
4,997E+00	6,850E-02	3,268E-03
9,960E+00	7,880E-02	3,760E-03

## D.2 Bewegte Berandung

Table D.8: Variation von  $u_0$ .  $\Pi = 8$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ , (vgl. Abbildung 7.16)

$u_0 = -9,75 \cdot 10^{-2}$			$u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,270E+00	-3,713E-02	6,136E-03	2,126E+00	1,113E-02	3,140E-03
9,049E-01	-3,753E-02	6,052E-03	8,352E-01	1,093E-02	3,066E-03
4,504E-01	-3,409E-02	6,054E-03	4,179E-01	1,432E-02	3,115E-03
2,287E-01	-2,833E-02	6,192E-03	2,163E-01	2,325E-02	3,337E-03
9,046E-02	-6,014E-03	6,345E-03	9,170E-02	5,573E-02	4,008E-03
2,358E-01	-2,146E-02	6,201E-03	4,561E-02	1,104E-01	5,163E-03
9,065E-02	-5,673E-03	9,836E-03	2,156E-02	2,113E-01	7,597E-03
4,492E-02	4,021E-02	7,021E-03	8,977E-02	5,077E-02	8,424E-03
2,260E-02	1,358E-01	2,060E-02	4,452E-02	1,054E-01	4,914E-03
9,008E-03	4,229E-01	1,003E-02	2,281E-02	2,079E-01	2,028E-02
4,521E-03	7,628E-01	2,096E-02	9,109E-03	4,959E-01	8,922E-03
2,173E-03	1,011E+00	2,052E-02	4,474E-03	8,180E-01	2,032E-02
			2,268E-03	1,111E+00	2,096E-02

Table D.9: Variation von  $u_0$ .  $\Pi = 8$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ , (vgl. Abbildung 7.16)

$u_0 = 0$			$u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,192E+00	7,699E-02	2,217E-03	4,591E-01	1,781E-01	5,026E-03
1,385E+00	7,480E-02	2,154E-03	8,752E-01	1,842E-01	7,690E-03
8,251E-01	7,342E-02	2,114E-03	4,490E-01	1,786E-01	4,037E-03
4,103E-01	7,636E-02	2,199E-03	2,231E-01	1,796E-01	2,189E-03
2,843E-01	8,051E-02	2,318E-03	8,862E-02	2,007E-01	7,804E-03
2,138E-01	8,417E-02	2,424E-03	4,464E-02	2,563E-01	4,133E-03
1,000E-01	1,085E-01	3,125E-03	2,228E-02	3,490E-01	1,952E-02
4,755E-02	1,619E-01	4,661E-03	8,975E-03	6,127E-01	8,454E-03
2,612E-02	2,457E-01	7,075E-03	4,439E-03	9,115E-01	1,991E-02
1,947E-02	3,060E-01	8,811E-03			
1,117E-02	4,742E-01	1,365E-02			
6,785E-03	6,554E-01	1,887E-02			
4,309E-03	8,681E-01	2,500E-02			
8,616E-02	1,194E-01	7,604E-03			
4,317E-02	1,805E-01	3,911E-03			
2,201E-02	2,837E-01	1,941E-02			

8,841E-03	5,689E-01	8,314E-03		
4,418E-03	8,771E-01	1,994E-02		
2,261E-03	1,094E+00	2,066E-02		

Tabelle D.10: Variation von  $u_0$ .  $\Pi = 8$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ , (vgl. Abbildung 7.16)

$u_0 = 9,75 \cdot 10^{-2}$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,260E-01	2,790E-01	7,763E-03
8,845E-02	2,810E-01	7,820E-03
4,476E-02	3,205E-01	8,953E-03
2,238E-01	2,844E-01	1,957E-02
9,197E-02	2,948E-01	8,193E-03
4,558E-02	3,401E-01	4,416E-03
2,249E-02	4,338E-01	1,973E-02
9,029E-03	6,706E-01	8,648E-03
4,533E-03	9,468E-01	2,036E-02
2,123E-03	1,147E+00	1,945E-02

Tabelle D.11: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 0$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ , (vgl. Abbildung 7.17)

$Kn$	$\Pi = 6$		$Kn$	$\Pi = 10$	
	$C_0$	$U_{C_0}$		$C_0$	$U_{C_0}$
2,184E+00	7,171E-02	2,065E-03	8,198E-01	7,715E-02	2,221E-03
1,388E+00	7,019E-02	2,021E-03	4,094E-01	7,895E-02	2,273E-03
8,224E-01	6,943E-02	1,999E-03	2,849E-01	8,278E-02	2,384E-03
4,095E-01	7,285E-02	2,098E-03	2,140E-01	8,767E-02	2,525E-03
2,855E-01	7,583E-02	2,183E-03	1,001E-01	1,108E-01	3,190E-03
2,138E-01	8,043E-02	2,316E-03	4,754E-02	1,643E-01	4,732E-03
1,000E-01	1,049E-01	3,021E-03	2,609E-02	2,491E-01	7,174E-03
4,749E-02	1,578E-01	4,543E-03	1,115E-02	4,507E-01	1,298E-02
2,609E-02	2,370E-01	6,825E-03	8,701E-02	1,205E-01	7,680E-03
1,943E-02	3,008E-01	8,662E-03	4,343E-02	1,816E-01	3,935E-03
1,114E-02	4,704E-01	1,355E-02	2,173E-02	2,931E-01	1,917E-02
6,778E-03	6,912E-01	1,990E-02	8,712E-03	5,751E-01	8,220E-03
4,326E-03	8,866E-01	2,553E-02			
8,813E-02	1,146E-01	7,775E-03			
4,467E-02	1,723E-01	4,030E-03			
2,175E-02	2,847E-01	1,918E-02			
8,789E-03	5,681E-01	8,271E-03			
4,410E-03	8,791E-01	1,991E-02			
2,192E-03	1,169E+00	2,019E-02			

Tabelle D.12: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 2,44 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ , (vgl. Abbildung 7.18)

$\Pi = 6$			$\Pi = 10$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,274E+00	1,292E-01	3,653E-03	8,872E-01	1,219E-01	3,468E-03
9,025E-01	1,208E-01	3,410E-03	4,562E-01	1,250E-01	3,559E-03
4,542E-01	1,195E-01	3,372E-03	2,160E-01	1,270E-01	3,614E-03
2,194E-01	1,196E-01	3,374E-03	8,912E-02	1,537E-01	4,382E-03
9,133E-02	1,540E-01	4,365E-03	4,371E-02	2,046E-01	5,846E-03
4,579E-02	2,091E-01	5,952E-03	2,185E-02	3,155E-01	9,040E-03
2,161E-02	2,977E-01	8,497E-03	4,456E-01	1,275E-01	3,951E-03
4,473E-01	1,243E-01	3,966E-03	2,224E-01	1,320E-01	2,068E-03
2,219E-01	1,297E-01	2,068E-03	8,971E-02	1,592E-01	7,892E-03
8,846E-02	1,559E-01	7,781E-03	4,502E-02	2,208E-01	4,109E-03
4,484E-02	2,137E-01	4,086E-03	2,212E-02	3,277E-01	1,943E-02
2,220E-02	3,184E-01	1,949E-02	9,017E-03	6,029E-01	8,505E-03
8,885E-03	5,995E-01	8,389E-03	4,642E-03	8,942E-01	2,084E-02
4,411E-03	9,020E-01	1,986E-02			
2,229E-03	1,186E+00	2,048E-02			

Tabelle D.13: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = -2,44 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.18)

$\Pi = 6$			$\Pi = 10$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,138E+00	3,514E-02	2,033E-03	2,163E+00	4,840E-02	2,333E-03
8,926E-01	3,384E-02	2,048E-03	8,669E-01	4,097E-02	2,160E-03
4,585E-01	3,639E-02	2,139E-03	4,466E-01	4,402E-02	2,264E-03
2,293E-01	4,473E-02	2,317E-03	2,167E-01	5,144E-02	2,397E-03
8,669E-02	7,107E-02	2,875E-03	9,157E-02	8,233E-02	3,225E-03
4,591E-02	1,290E-01	4,467E-03	4,368E-02	1,297E-01	4,434E-03
2,183E-02	2,227E-01	7,027E-03	2,168E-02	2,343E-01	7,347E-03
4,484E-01	4,107E-02	4,182E-03	4,481E-01	5,039E-02	4,185E-03
2,234E-01	4,970E-02	2,437E-03	2,231E-01	5,753E-02	2,441E-03
8,919E-02	7,804E-02	7,949E-03	8,985E-02	8,414E-02	8,007E-03
4,410E-02	1,351E-01	4,178E-03	4,453E-02	1,419E-01	4,220E-03
2,221E-02	2,371E-01	1,954E-02	2,072E-02	2,690E-01	1,825E-02
8,837E-03	5,284E-01	8,340E-03	9,036E-03	5,361E-01	8,528E-03
4,505E-03	8,494E-01	2,027E-02	4,495E-03	8,607E-01	2,025E-02
2,237E-03	1,144E+00	2,053E-02			

Tabelle D.14: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.19)

$\Pi = 1$			$\Pi = 1,3$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,168E+00	1,549E-01	4,511E-03	2,280E+00	1,698E-01	4,722E-03
9,133E-01	1,496E-01	4,459E-03	8,752E-01	1,469E-01	4,129E-03
4,372E-01	1,298E-01	3,976E-03	4,593E-01	1,474E-01	4,169E-03
2,309E-01	1,303E-01	4,069E-03	2,188E-01	1,368E-01	3,879E-03

3,828E-01	1,379E-01	4,497E-03	4,549E-01	1,509E-01	4,632E-03
1,517E-01	1,281E-01	3,276E-03	1,828E-01	1,451E-01	2,857E-03
6,394E-02	1,183E-01	6,331E-03	8,586E-02	1,389E-01	7,853E-03
5,282E-02	1,185E-01	5,502E-03	4,103E-02	1,740E-01	4,326E-03
4,592E-02	1,187E-01	4,996E-03	2,131E-02	2,226E-01	1,877E-02
2,240E-02	1,266E-01	3,555E-03	9,818E-03	3,345E-01	9,032E-03
7,504E-03	1,328E-01	7,202E-03	4,374E-03	5,852E-01	1,946E-02
4,720E-03	1,271E-01	5,085E-03	2,197E-03	7,797E-01	1,066E-02

Tabelle D.15: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.19)

$\Pi = 6$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,286E+00	1,926E-01	5,411E-03
9,249E-01	1,833E-01	5,145E-03
4,552E-01	1,745E-01	4,891E-03
2,185E-01	1,626E-01	4,549E-03
2,209E+00	1,993E-01	1,927E-02
8,844E-01	1,849E-01	7,777E-03
4,468E-01	1,775E-01	4,030E-03
2,258E-01	1,783E-01	2,231E-03
8,986E-02	1,982E-01	7,915E-03
4,446E-02	2,532E-01	4,124E-03
2,239E-02	3,460E-01	1,961E-02
8,966E-03	6,128E-01	8,454E-03
4,431E-03	9,135E-01	1,989E-02
2,207E-03	1,189E+00	2,020E-02

Tabelle D.16: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.19)

$\Pi = 1,3$			$\Pi = 6$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
1,764E+00	-1,197E-01	3,849E-03	2,225E+00	-6,389E-04	3,127E-03
6,742E-01	-9,992E-02	3,423E-03	8,705E-01	-6,656E-04	3,098E-03
3,417E-01	-9,088E-02	3,321E-03	4,207E-01	3,911E-03	3,019E-03
3,728E-01	-9,602E-02	4,396E-03	2,136E-01	1,227E-02	3,158E-03
1,723E-01	-8,291E-02	3,319E-03	9,009E-02	4,208E-02	3,710E-03
4,893E-02	-5,261E-02	2,966E-03	4,319E-02	8,880E-02	4,527E-03
2,222E-02	4,165E-03	3,141E-03	2,240E-02	1,947E-01	7,243E-03
4,126E-02	-3,751E-02	2,947E-03	8,992E-02	4,476E-02	8,441E-03
2,218E-02	8,986E-03	3,499E-03	4,461E-02	9,984E-02	4,922E-03
8,261E-03	1,578E-01	7,812E-03	2,229E-02	2,224E-01	1,983E-02
4,704E-03	3,394E-01	5,337E-03	8,992E-03	4,917E-01	8,812E-03
2,201E-03	5,869E-01	1,049E-02	4,520E-03	8,161E-01	2,051E-02
			2,312E-03	1,087E+00	2,129E-02

Tabelle D.17: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 9,75 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.20)

$\Pi = 1$			$\Pi = 1,3$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,211E+00	3,341E-01	9,226E-03	2,269E+00	3,514E-01	9,357E-03
8,840E-01	3,038E-01	8,555E-03	8,922E-01	3,063E-01	8,235E-03
4,558E-01	2,804E-01	8,098E-03	4,494E-01	2,856E-01	7,753E-03
2,298E-01	2,607E-01	7,746E-03	2,303E-01	2,681E-01	7,361E-03
8,831E-02	2,352E-01	7,183E-03	9,061E-02	2,564E-01	7,094E-03
4,486E-02	2,311E-01	7,146E-03	4,538E-02	2,700E-01	7,391E-03
4,532E-02	2,408E-01	7,156E-03	4,423E-02	2,837E-01	6,110E-03
2,052E-02	2,475E-01	6,236E-03	2,257E-02	3,209E-01	2,023E-02
7,387E-03	2,485E-01	8,786E-03	8,615E-03	4,664E-01	9,088E-03
4,230E-03	2,619E-01	7,042E-03	4,731E-03	6,431E-01	2,135E-02
			2,212E-03	8,539E-01	1,153E-02

Tabelle D.18: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = 9,75 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.20)

$\Pi = 4$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,171E+00	3,451E-01	9,433E-03
8,861E-01	3,197E-01	8,710E-03
4,420E-01	2,880E-01	7,811E-03
2,292E-01	2,780E-01	7,528E-03
8,927E-02	2,793E-01	7,566E-03
4,427E-02	3,091E-01	8,411E-03
2,146E-01	2,825E-01	1,881E-02
8,807E-02	2,938E-01	7,959E-03
4,499E-02	3,358E-01	4,538E-03
2,233E-02	4,264E-01	1,963E-02
8,884E-03	6,669E-01	8,617E-03
4,510E-03	9,512E-01	2,031E-02
2,095E-03	1,140E+00	1,924E-02

Tabelle D.19: Variation von  $\Pi$ .  $u_0 = -9,75 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $R/h = 250$ ,  $b/h = 900$ ,  
(vgl. Abbildung 7.20)

$\Pi = 1,3$			$\Pi = 10$		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
1,715E+00	-2,581E-01	7,672E-03	2,273E+00	-2,946E-02	6,151E-03
6,893E-01	-2,308E-01	7,146E-03	8,961E-01	-2,809E-02	6,101E-03
3,531E-01	-2,148E-01	6,977E-03	4,582E-01	-2,587E-02	6,212E-03
1,764E-01	-1,929E-01	6,670E-03	9,084E-02	7,893E-05	6,434E-03
6,885E-02	-1,614E-01	6,202E-03	2,191E-01	-1,458E-02	6,154E-03
3,499E-02	-1,334E-01	6,034E-03	9,207E-02	4,530E-03	9,932E-03
3,186E-02	-1,317E-01	6,498E-03	4,552E-02	4,412E-02	7,074E-03

2,184E-02	-9,100E-02	5,895E-03	2,260E-02	1,379E-01	2,058E-02
7,700E-03	7,519E-02	8,907E-03	9,950E-03	4,031E-01	1,068E-02
4,357E-03	2,647E-01	7,102E-03	4,516E-03	7,585E-01	2,093E-02
2,145E-03	4,860E-01	1,129E-02			

Tabelle D.20: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = 0$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.21)

$R/h = 250$ ( $b/h = 900$ )			$R/h = 340,9$ ( $b/h = 1227,3$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,192E+00	7,699E-02	2,217E-03	2,987E+00	7,198E-02	2,100E-03
1,385E+00	7,480E-02	2,154E-03	1,197E+00	6,543E-02	1,909E-03
8,251E-01	7,342E-02	2,114E-03	6,003E-01	6,502E-02	1,897E-03
4,103E-01	7,636E-02	2,199E-03	3,008E-01	6,880E-02	2,008E-03
2,843E-01	8,051E-02	2,318E-03	1,203E-01	8,827E-02	2,576E-03
2,138E-01	8,417E-02	2,424E-03	6,022E-02	1,235E-01	3,603E-03
1,000E-01	1,085E-01	3,125E-03	3,012E-02	1,930E-01	5,632E-03
4,755E-02	1,619E-01	4,661E-03	1,211E-01	9,831E-02	1,259E-03
2,612E-02	2,457E-01	7,075E-03	6,080E-02	1,318E-01	5,383E-03
1,947E-02	3,060E-01	8,811E-03	3,000E-02	2,184E-01	3,027E-03
1,117E-02	4,742E-01	1,365E-02	1,210E-02	4,260E-01	1,096E-02
6,785E-03	6,554E-01	1,887E-02	5,997E-03	7,140E-01	2,662E-02
4,309E-03	8,681E-01	2,500E-02	3,025E-03	1,016E+00	1,497E-02
8,616E-02	1,194E-01	7,604E-03			
4,317E-02	1,805E-01	3,911E-03			
2,201E-02	2,837E-01	1,941E-02			
8,841E-03	5,689E-01	8,314E-03			
4,418E-03	8,771E-01	1,994E-02			
2,261E-03	1,094E+00	2,066E-02			

Tabelle D.21: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = 0$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.21)

$R/h = 500$ ( $b/h = 1800$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
4,439E+00	6,260E-02	1,884E-03
1,741E+00	5,918E-02	1,781E-03
8,674E-01	5,767E-02	1,736E-03
4,341E-01	5,927E-02	1,784E-03
1,777E-01	6,970E-02	2,097E-03
8,884E-02	9,137E-02	2,749E-03
4,441E-02	1,339E-01	4,028E-03
1,776E-01	7,841E-02	1,744E-03
8,899E-02	9,799E-02	7,846E-03
4,439E-02	1,507E-01	4,171E-03
1,782E-02	2,903E-01	1,586E-02
8,867E-03	5,073E-01	9,294E-03
4,466E-03	8,411E-01	2,128E-02

Tabelle D.22: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.22)

$R/h = 250$ ( $b/h = 900$ )			$R/h = 340,9$ ( $b/h = 1227,3$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
4,591E-01	1,781E-01	5,026E-03	1,220E+00	1,867E-01	5,311E-03
8,752E-01	1,842E-01	7,690E-03	6,300E-01	1,808E-01	5,146E-03
4,490E-01	1,786E-01	4,037E-03	3,074E-01	1,603E-01	4,544E-03
2,231E-01	1,796E-01	2,189E-03	1,204E-01	1,753E-01	4,978E-03
8,862E-02	2,007E-01	7,804E-03	1,235E+00	1,969E-01	1,092E-02
4,464E-02	2,563E-01	4,133E-03	6,116E-01	1,808E-01	5,524E-03
2,228E-02	3,490E-01	1,952E-02	3,066E-01	1,754E-01	2,997E-03
8,975E-03	6,127E-01	8,454E-03	1,216E-01	1,807E-01	1,073E-02
4,439E-03	9,115E-01	1,991E-02	6,058E-02	2,193E-01	5,547E-03
			3,076E-02	2,916E-01	2,700E-02
			1,220E-02	4,889E-01	1,122E-02
			5,995E-03	7,615E-01	2,676E-02
			3,040E-03	1,056E+00	1,520E-02

Tabelle D.23: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = 4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.22)

$R/h = 500$ ( $b/h = 1800$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
4,417E+00	2,119E-01	6,181E-03
1,698E+00	1,846E-01	5,350E-03
9,083E-01	1,819E-01	5,298E-03
4,273E-01	1,579E-01	4,558E-03
1,886E-01	1,740E-01	5,081E-03
8,943E-02	1,800E-01	5,236E-03
4,786E-02	2,333E-01	6,872E-03
1,831E-02	3,584E-01	1,060E-02
4,496E-01	1,785E-01	4,384E-03
1,811E-01	1,804E-01	1,592E-02
8,921E-02	1,907E-01	8,060E-03
4,488E-02	2,365E-01	4,656E-03
1,828E-02	3,731E-01	1,641E-02
8,770E-03	5,659E-01	9,564E-03
4,426E-03	8,999E-01	2,134E-02

Tabelle D.24: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.23)

$R/h = 250$ ( $b/h = 900$ )			$R/h = 340,9$ ( $b/h = 1227,3$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$	$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
2,126E+00	1,113E-02	3,140E-03	2,949E+00	7,950E-03	4,182E-03
8,352E-01	1,093E-02	3,066E-03	1,198E+00	4,254E-03	4,194E-03
4,179E-01	1,432E-02	3,115E-03	6,042E-01	5,720E-03	4,231E-03

2,163E-01	2,325E-02	3,337E-03	2,940E-01	9,888E-03	4,159E-03
9,170E-02	5,573E-02	4,008E-03	1,269E-01	3,071E-02	4,736E-03
4,561E-02	1,104E-01	5,163E-03	6,352E-02	6,480E-02	5,286E-03
2,156E-02	2,113E-01	7,597E-03	3,103E-02	1,328E-01	6,614E-03
8,977E-02	5,077E-02	8,424E-03	1,223E-01	3,270E-02	4,129E-03
4,452E-02	1,054E-01	4,914E-03	5,970E-02	6,396E-02	6,577E-03
2,281E-02	2,079E-01	2,028E-02	3,049E-02	1,397E-01	4,896E-03
9,109E-03	4,959E-01	8,922E-03	1,232E-02	3,413E-01	1,176E-02
4,474E-03	8,180E-01	2,032E-02	6,104E-03	6,265E-01	2,737E-02
2,268E-03	1,111E+00	2,096E-02	3,102E-03	9,395E-01	1,568E-02

Tabelle D.25: Variation von  $R/h$ .  $u_0 = -4,88 \cdot 10^{-2}$ ,  $T_E/T_A = 1$ ,  $\Pi = 8$ , (vgl. Abbildung 7.23)

$R/h = 500$ ( $b/h = 1800$ )		
$Kn$	$C_0$	$U_{C_0}$
4,319E+00	8,270E-04	6,127E-03
1,794E+00	-2,960E-03	6,275E-03
9,444E-01	-1,742E-03	6,635E-03
4,335E-01	2,929E-03	6,284E-03
1,728E-01	1,285E-02	6,187E-03
8,501E-02	3,011E-02	6,181E-03
4,694E-02	7,496E-02	7,475E-03
1,777E-01	1,256E-02	5,975E-03
9,059E-02	3,392E-02	9,823E-03
4,458E-02	7,956E-02	6,999E-03
1,795E-02	2,090E-01	1,686E-02
8,952E-03	4,174E-01	1,064E-02
4,563E-03	7,477E-01	2,219E-02

# Lebenslauf

## Persönliche Daten

Name	Christopher Huck
Geburtsdatum	21.02.1986
Geburtsort	Dortmund

---

## Schulbildung

1992 - 1996	Grundschule Baarsen
1996 - 2005	Städtisches Gymnasium Selm Abschluss: Allgemeine Hochschulreife

---

## Studium

2005 - 2011	Maschinenbau, Fachrichtung Maschinentechnik, TU Dortmund Abschluss: Diplom-Ingenieur
-------------	---

---

## Berufstätigkeit

01/2012 - 10/2019	Wissenschaftlicher Mitarbeiter Fachgebiet Fluidtechnik, TU Dortmund
01/2017 - 10/2019	Oberingenieur Fachgebiet Fluidtechnik, TU Dortmund
seit 11/2019	Konstruktionsingenieur Düchtling Pumpen Maschinenfabrik GmbH & Co. KG, Witten